Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού

2ος τόμος

Κεφάλαια 19 - 35

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ	**Όλγα Κασώτη,** ***Εκπαιδευτικός*** **Πέτρος Κλιάπης,** ***Εκπαιδευτικός*** **Θωμάς Οικονόμου,** ***Εκπαιδευτικός***
ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ	**Δέσποινα Πόταρη,** ***Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Πατρών*** **Δέσποινα Αγγελοπούλου,** ***Σχολική Σύμβουλος*** **Κωνσταντίνος Βρυώνης,** ***Εκπαιδευτικός***
ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ	**Ανδρέας Κατσαούνης,** ***Σκιτσογράφος-Εικονογράφος***
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ	**Ευφροσύνη Ξιξή,** ***Φιλόλογος***
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ	**Γεώργιος Τύπας,** ***Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου***
ΕΞΩΦΥΛΛΟ	**Νικόλαος Ναυρίδης,** ***Εικαστικός καλλιτέχνης***
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ	**ACCESS ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ Α.Ε.**

Στη συγγραφή του δεύτερου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και ο Κώστας Ζιώγας, Εκπαιδευτικός

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Πέτρος Κλιάπης   Όλγα Κασώτη Θωμάς Οικονόμου

Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού

2ος τόμος

Κεφάλαια 19-35

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Μιχάλης Αγ. Παπαδόπουλος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ *Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου*

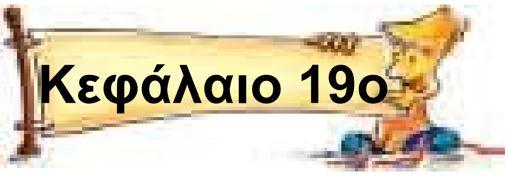
Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Δημοτικό και το Νηπιαγωγείο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Γεώργιος Τύπας
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδ. Ινστιτ.

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Οικονόμου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ
Ομάδα Εργασίας Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ



Κεφάλαιο 19ο

Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα

Τι πλάσμα είναι αυτό το … κλάσμα;

- *Μελετώ την έννοια του κλάσματος ως μέρος του όλου.*
- *Συγκρίνω το κλάσμα με την ακέραιη μονάδα.*
- *Διαπιστώνω ότι υπάρχουν κάποια κλάσματα που μετατρέπονται σε μεικτούς αριθμούς και μαθαίνω πώς να μετατρέπω έναν αριθμό από τη μια μορφή στην άλλη.*

Μια μεγάλη επινόηση του ανθρώπου στην αριθμητική ήταν ένας νέος αριθμός, το κλάσμα. Το χρησιμοποιούμε συχνά στην καθημερινή μας ζωή για να δηλώσουμε το μέρος ενός πράγματος.

Εκφράστε με κλάσμα:

α) 2 ημέρες ενός έτους ……,

β) 1 λεπτό της ώρας ……,

γ) 1 λεπτό του ΕΥΡΩ ……,

δ) 6 ώρες της ημέρας ……,

ε) 15 γραμμάρια του κιλού ……

Δραστηριότητα 1η

Οι φίλοι μου κι εγώ λατρεύουμε την πίτσα. Αυτό είναι πολύ καλό, γιατί ξέρουμε πάντα τι φαγητό να παραγγείλουμε. Υπάρχει όμως ένα μικρό πρόβλημα. Θέλουμε

να είμαστε δίκαιοι και να μοιραζόμαστε τις πίτσες εξίσου, ωστόσο δεν ξέρουμε πάντα πώς να το κάνουμε! Μπορείτε να μας βοηθήσετε με τα κλάσματα;

- **Αν είχαμε μια πίτσα για 2 άτομα, πόσο μέρος πίτσας θα έτρωγε ο καθένας; ……**

- **Αν ήμασταν 3 άτομα, πόσο μέρος πίτσας θα έτρωγε ο καθένας; ……**

- **Αν εμείς οι 3 φίλοι είμαστε πολύ πεινασμένοι και παραγγείλουμε δύο πίτσες, πόσο μέρος πίτσας θα φάει ο καθένας συνολικά; ……**

Δραστηριότητα 2η

Χρειάζεται $\frac{1}{4}$ της ώρας για να ψηθεί μία πίτσα στο φούρνο μας.

- **Αν ψήνουμε τη μια πίτσα μετά την άλλη και ψήσουμε 4 πίτσες, πόσα τέταρτα της ώρας θα χρειαστούμε;**

- **Γράψε την απάντησή σου με κλάσμα: ……**

- **Τι παρατηρείς για τους όρους του κλάσματος; ……………………… ………………………………………………**

- **Γράψε τώρα το χρόνο ψησίματος σε ώρες: …………………..**

- Αν έχουμε να ψήσουμε 5 πίτσες, πόσα τέταρτα της ώρας θα χρειαστούμε; ……….

- Γράψε την απάντησή σου με κλάσμα: ………

- Τι παρατηρείς για τους όρους αυτού του κλάσματος;
……………………………………………………………………

- Γράψε τώρα το χρόνο ψησίματος σε ώρες: …………….

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Κλάσμα

Ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός «όλου» ονομάζεται κλάσμα. Το κλάσμα σχηματίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς, τον αριθμητή και τον παρονομαστή, που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή: $\frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$.

Το κλάσμα με αριθμητή το 1 λέγεται κλασματική μονάδα.

Παράδειγμα

Το $\frac{3}{5}$ είναι το κλάσμα που δηλώνει το σκιασμένο μέρος του παρακάτω ορθογωνίου.

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1.

Παράδειγμα

$\frac{3}{4} < 1$ **και** $\frac{10}{12} < 1$

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με το 1

Παράδειγμα

$\frac{4}{4} = 1$ **και** $\frac{12}{12} = 1$

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.
Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χωρίσουμε τις ακέραιες μονάδες και να μετατρέψουμε το κλάσμα σε μεικτό αριθμό.

Παράδειγμα

$\frac{5}{4} > 1$ **και** $\frac{17}{12} > 1$

$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ **και** $\frac{17}{12} = 1\frac{1}{4}$

Εφαρμογή 1η

Σε ένα πάρτι υπάρχει γλυκό μηλόπιτα σε ταψιά. Κάθε μερίδα γλυκού είναι το $\frac{1}{12}$ του ταψιού.
Η μηλόπιτα προσφέρθηκε σε 31 άτομα. Πόσα ταψιά μηλόπιτας καταναλώθηκαν;

Λύση

Ξέρουμε ότι οι μερίδες που έφαγαν όλοι είναι 31 *(αν ο καθένας έφαγε μόνο μία μερίδα).* Αφού η μία μερίδα είναι το $\frac{1}{12}$ του ταψιού,
τότε οι μερίδες που καταναλώθηκαν είναι τα $\frac{31}{12}$. Αφού το ένα ταψί είναι $\frac{12}{12}$, τα $\frac{31}{12}$ είναι

$\frac{12}{12}+\frac{12}{12}+\frac{7}{12}$, δηλαδή $2\frac{7}{12}$.

Απάντηση: Καταναλώθηκαν $2\frac{7}{12}$ ταψιά μηλόπιτας.

Εφαρμογή 2η

Να μετατρέψετε το μεικτό αριθμό $5\frac{5}{6}$ σε κλάσμα.

Λύση
Το κλάσμα που υπάρχει στο μεικτό αριθμό δηλώνει ότι κάθε ακέραιη μονάδα έχει χωριστεί σε έκτα, είναι δηλαδή ίση με $\frac{6}{6}$. Άρα ο αριθμός $5\frac{5}{6}$ μπορεί να γραφεί $\frac{6}{6}+\frac{6}{6}+\frac{6}{6}+\frac{6}{6}+\frac{6}{6}+\frac{5}{6}=\frac{35}{6}$

ή αλλιώς $\frac{\qquad}{} + \frac{5}{6} = \frac{35}{6}$.

Απάντηση: Ο μεικτός αριθμός $5\frac{5}{6}$ μετατρέπεται στο κλάσμα $\frac{35}{6}$.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους κλάσμα, αριθμητής, παρονομαστής, κλασματική μονάδα, κλάσμα μικρότερο, ίσο ή μεγαλύτερο από το 1 και μεικτός αριθμός. Εξήγησε καθέναν από τους όρους αυτούς με ένα παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ *Το κλάσμα εκφράζει το μέρος ενός όλου που έχει χωριστεί σε ίσα μέρη.*	☐	☐
→ *Ο αριθμητής δεν μπορεί ποτέ να είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή.*	☐	☐
→ *Ο μεικτός αριθμός μετατρέπεται σε κλάσμα μικρότερο απ' το 1.*	☐	☐

Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης

Ποιος θα με βοηθήσει στο μοίρασμα;

- ***Διαπιστώνω ότι το κλάσμα είναι το πηλίκο μιας διαίρεσης.***
- ***Μαθαίνω να μετατρέπω ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και αντίστροφα.***
- ***Σημειώνω τη θέση του κλάσματος στην αριθμο-γραμμή από τη δεκαδική του αξία.***

Δραστηριότητα 1η

Ένας πατέρας αγόρασε ένα κουτί με σοκολάτες για να τις μοιράσει στα τρία παιδιά του. Μπορείτε να τους βοηθήσετε με τη μοιρασιά;

- **Αν το κουτί είχε 12 σοκολάτες, πόσο θα έπαιρνε κάθε παιδί;**

……………………………………………………………………

- **Γράψε την πράξη που έκανες:**

……………………………………………………………………

- **Το κουτί έχει 10 σοκολάτες. Πώς μπορείς να υπολογίσεις πόσο θα πάρει κάθε παιδί; …………………**

……………………………………………………………………

- **Κάνοντας την πράξη, μπορείς να υπολογίσεις ακριβώς; …………………………………………………..**

• Αν τα 3 παιδιά είχαν να μοιραστούν μόνο μία σοκολάτα, πόσο μέρος της θα έπαιρνε το καθένα;
……………………………………………………… 

• Αν λοιπόν χωρίσουν και τις 10 σοκολάτες κατά τον ίδιο τρόπο, πόσα ίδια μέρη θα πάρει κάθε παιδί;
……………………………………………………………………………

• Τι κατάφερες να υπολογίσεις με τον τρόπο αυτό;
……………………………………………………………………………

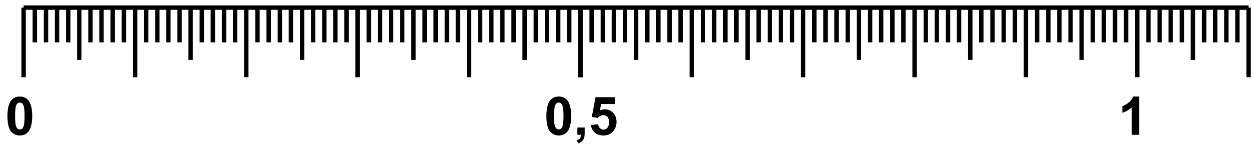
Δραστηριότητα 2η

Στην προηγούμενη δραστηριότητα το πηλίκο της διαίρεσης 10 : 3 το εκφράσαμε με το κλάσμα $\frac{10}{3}$.
Αν αποφασίσουμε να κάνουμε τη διαίρεση, θα είναι 10 : 3 = 3,333…

• **Πώς μπορούμε να βρούμε σε ποιο σημείο στην αριθμογραμμή αντιστοιχεί ο αριθμός που εκφράζεται με ένα κλάσμα;** ………………………………………………………..

• **Τοποθετήστε πάνω από την αριθμογραμμή τα παρακάτω κλάσματα, αφού κάνετε την πράξη που χρειάζεται για να βρείτε ποιον αριθμό εκφράζει το καθένα:**
(Μπορούμε να τα τοποθετήσουμε χωρίς να κάνουμε την πράξη;)……………………………………………………………

Α. $\frac{45}{90}$ Β. $\frac{2}{5}$ Γ. $\frac{9}{12}$ Δ. $\frac{7}{10}$ Ε. $\frac{4}{16}$ Ζ. $\frac{33}{30}$



• Τι πρέπει να κάνουμε για να τοποθετήσουμε στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{1}{3}$ (ή το κλάσμα $\frac{10}{3}$);

....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι χάρη στα κλάσματα μπορούμε να εκφράσουμε το πηλίκο κάθε διαίρεσης φυσικών αριθμών με ακρίβεια:

Κλάσμα

Το κλάσμα εκφράζει το ακριβές πηλίκο μιας διαίρεσης: της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του.

Παράδειγμα

Το $\frac{3}{7}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης 3 : 7

Αν κάνουμε τη διαίρεση αυτή, μπορούμε να μετατρέψουμε το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό (ή σε φυσικό, αν η διαίρεση είναι τέλεια).
Αν η διαίρεση δεν μας δίνει ακριβές πηλίκο, σταματάμε εκεί που θέλουμε και έχουμε πηλίκο με προσέγγιση στα δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά, …

Παράδειγμα

3 : 7 = 0,4285714...

Το πηλίκο της διαίρεσης 3 : 7 είναι 0,42 με προσέγγιση στα εκατοστά ή 0,428 με προσέγγιση στα χιλιοστά.

Οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται και ως κλάσματα.

Παράδειγμα

Το 0,1 γράφεται ως $\frac{1}{10}$

Εφαρμογή 1η

Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό

Να μετατρέψετε τα κλάσματα $\frac{7}{28}$ **και** $\frac{7}{140}$ **σε δεκαδικούς αριθμούς και να τους προσθέσετε.**

Λύση - Απάντηση:

Για να μετατρέψουμε τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς θα κάνουμε τις διαιρέσεις:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 28 \\ \cline{2-2} 140 & 0,25 \\ 00 & \end{array} \qquad \text{και} \qquad \begin{array}{r|l} 700 & 140 \\ \cline{2-2} 0 & 0,05 \end{array}$$

Τώρα θα προσθέσουμε 0,25 + 0,05 = ……………..

Εφαρμογή 2η
Μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα

• **Να κάνετε τη διαίρεση ανάμεσα στους όρους των κλασμάτων**

$\frac{6}{10}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{8}{1000}$ **και** $\frac{19}{10}$.

• **Να διατυπώσετε τώρα τον κανόνα μετατροπής των δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα.**
• **Μετά, γράψτε ως κλάσματα τους δεκαδικούς αριθμούς: 0,6   0,09   0,005   3,042**

Λύση - Απάντηση

• **Όπως γνωρίζουμε, κάθε δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα. Κάνοντας τη διαίρεση ανάμεσα στους όρους των κλασμάτων διαπιστώνουμε ότι:**

$\frac{6}{10} = 0,6$ $\frac{75}{100} = 0,75$

$\frac{8}{1000} = 0,008$ $\frac{19}{10} = 1,9$

• **Άρα: οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται ως κλάσματα με παρονομαστή το 10, το 100, το 1000, … ανάλογα με τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που έχουν.**

• **0,6 = ——**   **0,09 = ——**

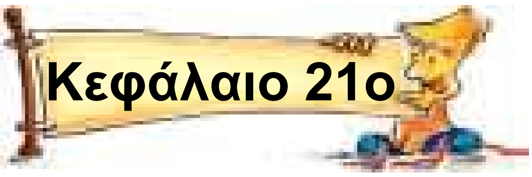
0,005 = ——   **3,042 = ——**

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το κλάσμα ως πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του και τη μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό και αντίστροφα. Πες ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Στο κλάσμα ο αριθμητής είναι ο διαιρετέος και ο παρονομαστής ο διαιρέτης.***	☐	☐
→ ***Η διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή είναι πάντα τέλεια.***	☐	☐
→ ***Η ισότητα*** $1 : 3 = \frac{3}{1}$ ***είναι σωστή.***	☐	☐



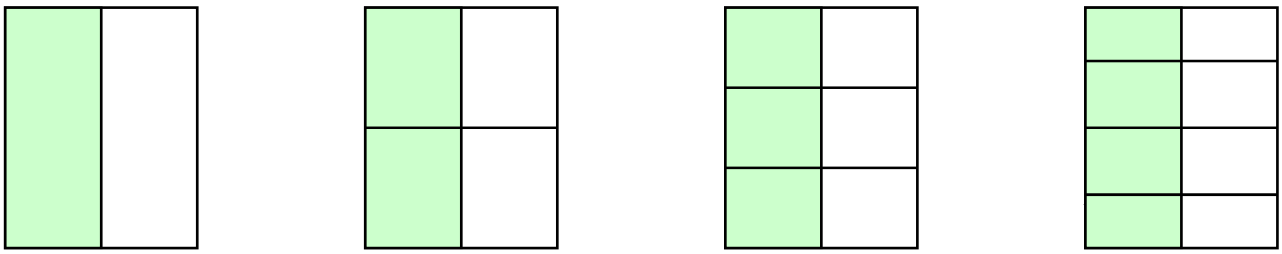
Ισοδύναμα κλάσματα

Μπορώ να λέω το ίδιο και με άλλα λόγια!

- ➔ ***Αναγνωρίζω δύο ισοδύναμα κλάσματα.***
- ➔ ***Δημιουργώ ισοδύναμα κλάσματα.***
- ➔ ***Απλοποιώ κλάσματα, ώστε να γίνουν ανάγωγα.***

Δραστηριότητα 1η

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε το σχέδιο ενός πάρκου που χωρίστηκε, για να καλυφθεί ένα μέρος του με χόρτο, ενώ στο υπόλοιπο θα τοποθετηθούν τα παιχνίδια.



Α ...... ***Β ......*** ***Γ ......*** ***Δ ......***

- **Γράψε, κάτω από κάθε τετράγωνο, το κλάσμα που περιγράφει το πράσινο μέρος του.**
- **Πόσο μέρος του πάρκου θα καλυφθεί με χόρτο σε κάθε περίπτωση; ....**
- **Σύγκρινε τα κλάσματα μεταξύ τους με τη βοήθεια των σχημάτων. Τι παρατηρείς; ....**

• Σύγκρινε το πρώτο κλάσμα με καθένα από τα υπόλοιπα. Τι παρατηρείς για τη σχέση ανάμεσα στους όρους τους; ……………………………………………………

…………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Ο Χρήστος και ο Φοίβος είχαν από 12 €. Όταν συναντήθηκαν, ο Χρήστος είπε ότι ξόδεψε τα $\frac{9}{12}$ των χρημάτων του και ο Φοίβος είπε ότι ξόδεψε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων του.

• Ποιος ξόδεψε περισσότερα; ………………………………

• Τι παρατηρείς για τους όρους των δύο κλασμάτων;

…………………………………………………………………

• Μπορείς να σχηματίσεις ένα νέο κλάσμα, που να εκφράζει το ίδιο μέρος του όλου;……………………………

• Με ποιο κλάσμα θα διάλεγες να εκφραστείς εσύ; Γιατί;

…………………………………………………………………

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι είναι δυνατό δύο κλάσματα να έχουν διαφορετικούς όρους, αλλά να εκφράζουν την ίδια ποσότητα.

Ισοδύναμα κλάσματα

Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος του όλου.
Αν πολλαπλασιάσουμε «χιαστί» τους όρους δύο ισοδύναμων κλασμάτων, τα δύο γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα μεταξύ τους. (Με τον τρόπο αυτό ελέγχουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα.)

Παράδειγμα

Τα κλάσματα $\frac{9}{12}$ και $\frac{3}{4}$ είναι ισοδύναμα, δηλαδή

$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ επειδή $9 \cdot 4 = 3 \cdot 12$

Αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, προκύπτει ισοδύναμο με το αρχικό κλάσμα.

Παράδειγμα

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

Αν διαιρέσουμε τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα. Αυτή η τεχνική λέγεται απλοποίηση του κλάσματος.

Παράδειγμα

$$\frac{7}{28} = \frac{7 : 7}{28 : 7} = \frac{1}{4}$$

Αν ένα κλάσμα δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει αριθμός, εκτός από το 1, που να είναι κοινός διαιρέτης του αριθμητή και του παρονομαστή), το κλάσμα λέγεται ανάγωγο.

Παράδειγμα

Το κλάσμα $\frac{1}{4}$ είναι ανάγωγο. (Ο Μ.Κ.Δ. του 4 και του 9 είναι το 1)

Εφαρμογή *Δημιουργώ ισοδύναμα κλάσματα*

Να εκφράσετε με ισοδύναμα κλάσματα τι μέρος του μήνα είναι οι 6 μέρες. Ποιο κλάσμα από όσα δημιουργήσατε είναι ανάγωγο;

Λύση:

Το ένα κλάσμα είναι το $\frac{6}{30}$, που δηλώνει ακριβώς το μέρος του όλου.

Μπορώ να απλοποιήσω με το 3 για να γίνει το κλάσμα δεκαδικό: $\frac{6 : 3}{30 : 3} =$ ——

και να πολλαπλασιάσω κατόπιν με το δέκα :

$\frac{2 \cdot 10}{10 \cdot 10} =$ ——

ή να απλοποιήσω το αρχικό κλάσμα με το έξι:

$\frac{6 : 6}{30 : 6} =$ —— **για να γίνει ανάγωγο.**

Απάντηση:

Οι 6 μέρες είναι τα —— , ή —— , ή τα —— , ή αλλιώς το —— του μήνα.

Ανάγωγο κλάσμα είναι το —— .

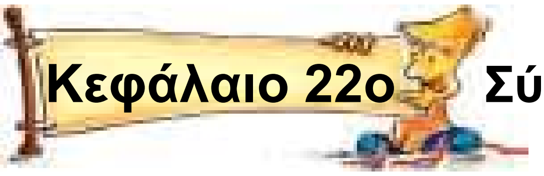
Αυτά είναι όλα τα ισοδύναμα κλάσματα που μπορούμε να δημιουργήσουμε; Συζητήστε το.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

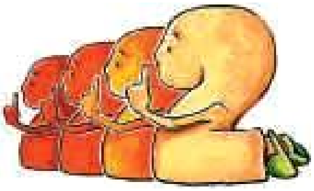
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους ισοδύναμα κλάσματα και ανάγωγα κλάσματα. Εξήγησε τη σημασία τους με ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Στη μέθοδο «χιαστί» πολλαπλασιάζω τους αριθμητές των κλασμάτων μεταξύ τους.***	☐	☐
→ ***Ένα κλάσμα έχει άπειρα ισοδύναμα με αυτό κλάσματα.***	☐	☐
→ ***Η διαίρεση των όρων του κλάσματος με το Μ.Κ.Δ. τους, οδηγεί σε ανάγωγο κλάσμα.***	☐	☐



Κεφάλαιο 22ο Σύγκριση – Διάταξη κλασμάτων



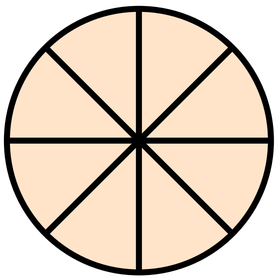
Πώς θα μπούμε στη σειρά;

- *Συγκρίνω ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα.*
- *Διατάσσω τα κλάσματα κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.*
- *Τοποθετώ τα κλάσματα στην αριθμογραμμή.*
- *Μετατρέπω ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα.*

Δραστηριότητα 1η

Πέντε φίλοι παρήγγειλαν τις δύο ίδιες πίτσες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Η μία πίτσα (α) ήταν χωρισμένη σε 8 κομμάτια και η άλλη (β) σε 6 κομμάτια.

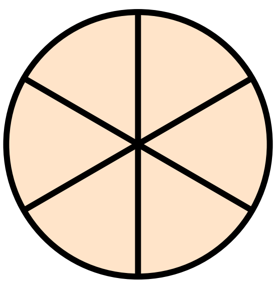
- **Από την πρώτη πίτσα έφαγαν: ο Βασίλης, ο Γιώργος και η Μαργαρίτα τα $\frac{4}{8}$, τα $\frac{3}{8}$ και το $\frac{1}{8}$ αντίστοιχα. Να συγκρίνεις τα μερίδιά τους και να τα γράψεις κατά αύξουσα σειρά χρησιμοποιώντας το σύμβολο < ανάμεσα τους.**



(α)

....

- **Ο Γιώργος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ από την πρώτη πίτσα και ο Σωτήρης τα $\frac{3}{6}$ από τη δεύτερη. Ποιος έφαγε περισσότερο;**

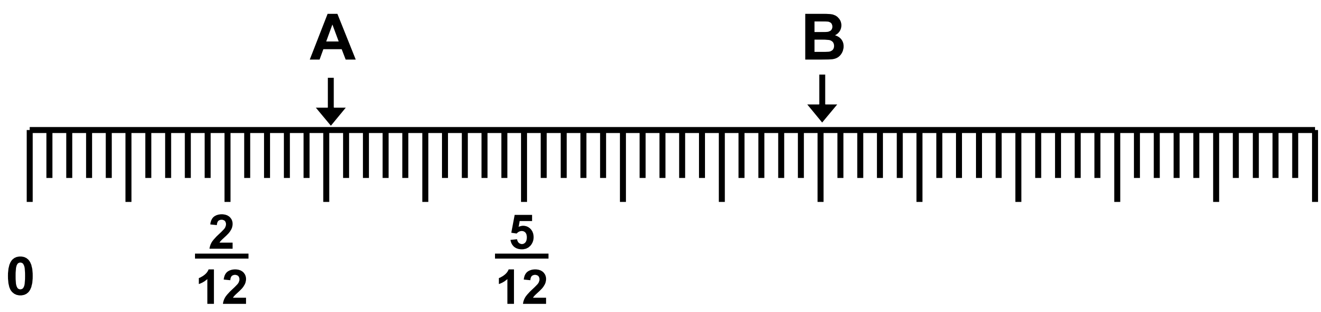


(β)

• Αν συγκρίνουμε τα μερίδια του Γιώργου, ο οποίος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ από την πρώτη πίτσα και του Λευτέρη ο οποίος έφαγε τα $\frac{3}{6}$ από τη δεύτερη, μπορούμε εύκολα να βρούμε ποιο είναι το μεγαλύτερο;
Τι μπορούμε να κάνουμε για να τα συγκρίνουμε;……….
…………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

• Αφού πρώτα διατάξεις τα κλάσματα $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{1}{12}$ και $\frac{11}{12}$ κατά αύξουσα σειρά, τοποθέτησε αυτά που αντιστοιχούν στα σημεία Α και Β στην παρακάτω αριθμογραμμή: ……………………………………………...
…………………………………………………………………



• Ποια διαδικασία μας επιτρέπει να βρούμε ποιο κλάσμα παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο άλλα;

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε τα κλάσματα και να τα διατάξουμε κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.

Σύγκριση κλασμάτων

Ανάμεσα σε δύο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.

Παράδειγμα

$$\frac{9}{24} > \frac{6}{24}$$

Για να συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.

Παράδειγμα

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \qquad \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \qquad \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \qquad \frac{8}{12} < \frac{9}{12}$$

Ειδικά για τα ετερώνυμα κλάσματα που έχουν τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή.

Παράδειγμα

$$\frac{2}{15} > \frac{2}{18}$$

Τα ετερώνυμα κλάσματα μπορούν να μετατραπούν σε ισοδύναμά τους ομώνυμα, αν πολλαπλασιαστούν οι όροι τους με τον κατάλληλο αριθμό.

Παράδειγμα

$$\frac{3}{5}, \frac{1}{2} \quad \text{Ε.Κ.Π. } (5, 2) = 10 \quad \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}, \qquad \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$$

Εφαρμογή 1η *Συγκρίνω κλάσματα με το νου*

Για μερικές κατηγορίες κλασμάτων μπορούμε να κάνουμε προσεγγιστικούς υπολογισμούς με το νου. Ας συγκρίνουμε με το νου τα κλάσματα $\frac{25}{27}$, $\frac{1}{18}$ και $\frac{17}{36}$.

Λύση

Το κλάσμα $\frac{25}{27}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι κοντά στο 1, γιατί ο αριθμητής του είναι περίπου ίσος με τον παρονομαστή του. Το κλάσμα $\frac{1}{18}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι κοντά στο 0, γιατί ο αριθμητής του είναι πολύ μικρότερος από τον παρονομαστή του. Το κλάσμα $\frac{17}{36}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι κοντά στο $\frac{1}{2}$, γιατί ο αριθμητής του είναι περίπου ίσος με το μισό του παρονομαστή του. Άρα $\frac{1}{18} < \frac{17}{36} < \frac{25}{27}$

Εφαρμογή 2η
Μετατρέπω ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα

Να διατάξετε κατά φθίνουσα σειρά τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$ και $\frac{6}{15}$ αφού τα κάνετε ομώνυμα.

Λύση

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών με ταυτόχρονες διαδοχικές διαιρέσεις:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 9 & 15 & 2 \\ 1 & 9 & 15 & 3 \\ & 3 & 5 & 3 \\ & 1 & 5 & 5 \\ & & 1 & \end{array}$$

Ε.Κ.Π. (2, 9, 15) = 2 • 3 • 3 • 5 = 90. Κατόπιν διαιρούμε το Ε.Κ.Π. με κάθε παρονομαστή, για να βρούμε με ποιον αριθμό θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε κλάσμα:
90 : 2 = 45, 90 : 9 = 10, 90 : 15 = 6

Πολλαπλασιάζουμε κάθε κλάσμα με τον κατάλληλο αριθμό:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 45}{2 \cdot 45} = \frac{45}{90}$, $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 10}{9 \cdot 10} = \frac{50}{90}$

$\frac{6}{15} = \frac{6 \cdot 6}{15 \cdot 6} = \frac{36}{90}$

Απάντηση: Τα αρχικά κλάσματα μετατράπηκαν στα ισοδύναμα τους ομώνυμα και είναι:

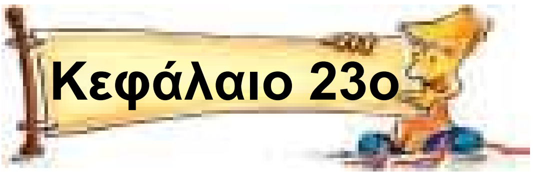
$\frac{50}{90} > \frac{45}{90} > \frac{36}{90}$ ή τα αρχικά κλάσματα —— > —— > ——.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σύγκριση και διάταξη ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων. Δώσε ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

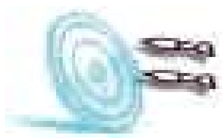
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ $\frac{1}{10} < \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$	☐	☐
→ *Για να μετατρέψω τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα πολλαπλασιάζω τους όρους τους με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους.*	☐	☐



Προβλήματα με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Η σωστή ενέργεια!



- ***Προσθέτω και αφαιρώ κλάσματα.***
- ***Λύνω απλά προβλήματα με δεκαδικούς, μεικτούς και κλάσματα ακολουθώντας μια σειρά από βήματα.***

Μερικές φορές η παρουσία των κλασμάτων σε ένα πρόβλημα προκαλεί ανησυχία για το πώς θα το λύσουμε. Αν συμβεί αυτό, θυμηθείτε ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός και στη θέση του θα μπορούσε να είναι ένας φυσικός ή δεκαδικός αριθμός.

Δραστηριότητα 1η

Διαβάζοντας στην ιστοσελίδα της Δ.Ε.Η. (www.dei.gr) στοιχεία σχετικά με την παραγωγή ενέργειας για το 2003 διαπιστώσαμε ότι η ενέργεια που παράχθηκε στη χώρα μας από ανανεώσιμες πηγές ήταν πολύ μικρή. Παρακάτω παρουσιάζονται τα στοιχεία για την ενέργεια που παράχθηκε το 2003 σε θερμοηλεκτρικούς σταθμούς:

- **Το 0,15 της ενέργειας παράχθηκε με τη χρήση πετρελαίου.**

- Τα $\frac{9}{20}$ παράχθηκαν με τη χρήση λιγνίτη.
- Το $\frac{1}{4}$ παράχθηκε με τη χρήση φυσικού αερίου.
- Η υπόλοιπη ενέργεια παράχθηκε σε υδροηλεκτρικούς σταθμούς.
- Είναι εύκολο να υπολογίσουμε αμέσως αυτό το μέρος της ενέργειας; ……………………………………………..
- Τι πρέπει να κάνουμε πριν προχωρήσουμε στις πράξεις για την επίλυση του προβλήματος;

………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Τα παιδιά θέλησαν να φυτέψουν στον κήπο του σχολείου φράουλες (ωριμάζουν στις αρχές Ιουνίου) και ρώτησαν αν υπάρχει καθόλου ελεύθερος χώρος. Ο δάσκαλος τους είπε: «Σωστή ενέργεια! Λοιπόν, το 0,1 του παρτεριού έχει γαρίφαλα, το $\frac{1}{4}$ έχει μαργαρίτες και τα $\frac{2}{5}$ έχουν γκαζόν. Αν υπάρχει ελεύθερος χώρος, είναι δικός σας!».

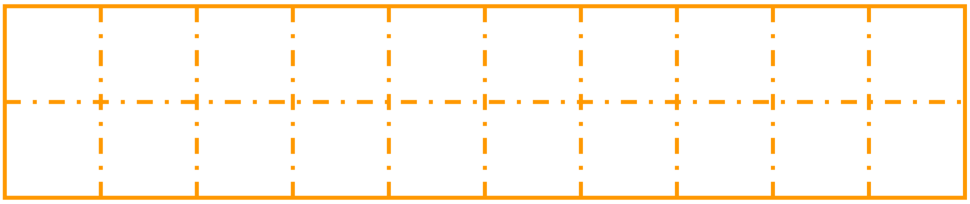
- Πώς θα βρούμε αν υπάρχει χώρος;

………………………………………………………………………

- Γράψτε με τη σειρά τις ενέργειες που πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να βρουν τη λύση στο πρόβλημά τους: ……………………………………………………………..

………………………………………………………………………

• **Κάντε τις πράξεις. Μετά χωρίστε το σχεδιάγραμμα του παρτεριού σε όσα μέρη πρέπει και βάψτε με κίτρινο το μέρος με τις μαργαρίτες, με μοβ το μέρος με τα γαρίφαλα, με πράσινο το μέρος με το γκαζόν και με κόκκινο το μέρος με τις φράουλες.**



Οι δραστηριότητες αυτές μας βοηθούν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα

Παράδειγμα

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20}$$

Προσθέτουμε ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.

Παράδειγμα

$$\frac{11}{18} + \frac{2}{18} = \frac{11+2}{18} = \frac{13}{18}$$

Αφαιρούμε ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.

Παράδειγμα

$$\frac{11}{18} - \frac{2}{18} = \frac{11-2}{18} = \frac{9}{18}$$

Όταν πρέπει να λύσω ένα πρόβλημα που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς:

✓ Ελέγχω αν οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
✓ Αν δεν είναι στην ίδια μορφή, τους μετατρέπω σε αριθμούς μιας μορφής.
✓ Αποφασίζω ποιες πράξεις πρέπει να κάνω.
✓ Εκτελώ τις πράξεις και ελέγχω το αποτέλεσμα.

Εφαρμογή 1η

Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{3}{5}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$.

Κούρεψαν όλο το γκαζόν; Αν όχι, πόσο έμεινε;

Λύση

✓ Οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
✓ Αρκεί λοιπόν να τους προσθέσουμε για να δούμε αν το κλάσμα που θα προκύψει θα έχει αριθμητή και παρονομαστή ίσους. Αν ναι, τότε θα είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή θα έχουν κουρέψει όλο το γκαζόν. Αν όχι, θα αφαιρέσουμε αυτό που θα βρούμε από το

κλάσμα «μονάδα» για να βρούμε τη διαφορά τους:

✓ $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$ Ε.Κ.Π. (5, 4) = 20.

Άρα: $\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$

Άρα: —— – —— = —— .

Απάντηση: Κούρεψαν τα $\frac{17}{20}$ του γκαζόν και μένουν —— ακόμη για κούρεμα.

Εφαρμογή 2η

Ένα δοχείο χωράει 3 λίτρα. Κάποια στιγμή έχει $1\frac{3}{4}$ λίτρα νερό. Ποσό νερό χρειάζεται ακόμα για να γεμίσει;

Λύση

✓ Οι αριθμοί του προβλήματος δεν είναι στην ίδια μορφή. Θα τους μετατρέψουμε σε κλάσματα ομώνυμα, με παρονομαστή το 4.

Έτσι: $3 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$ και

$1\frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

✓ Τώρα θα αφαιρέσουμε το νερό που υπάρχει από τη συνολική χωρητικότητα του δοχείου για να βρούμε τη διαφορά τους:

$\frac{12}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$. Δηλαδή $\frac{4}{4} + \frac{1}{4}$ ή $1\frac{1}{4}$

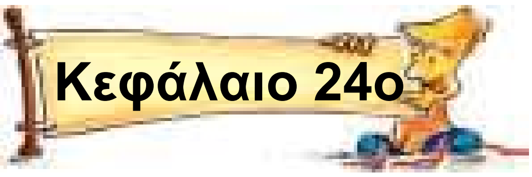
Απάντηση: Χρειάζεται ακόμη $1\frac{1}{4}$ λίτρα νερού για να γεμίσει.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

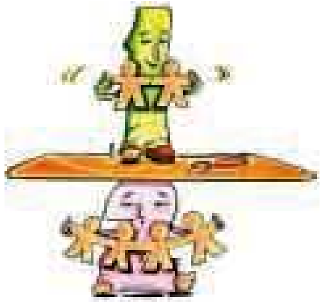
Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την πρόσθεση και την αφαίρεση κλασμάτων καθώς και τη λύση απλών προβλημάτων με κλάσματα. Σχεδίασε ένα σύντομο πρόβλημα που να λύνεται έτσι.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Η ισότητα:*** $\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{9}{10}$ ***είναι σωστή.***	☐	☐
→ ***Για να λύσω ένα πρόβλημα που οι αριθμοί του είναι φυσικοί, δεκαδικοί ή κλάσματα πρέπει πρώτα να τους μετατρέψω όλους στην ίδια μορφή.***	☐	☐



Κεφάλαιο 24ο



Προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων

Ό,τι κι αν κάνεις, εγώ θα πολλαπλασιάζομαι!

- ***Πολλαπλασιάζω και διαιρώ κλάσματα.***
- ***Λύνω προβλήματα υπολογισμού του κλασματικού μέρους ενός ποσού.***
- ***Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις που περιέχουν κλάσματα.***

Η φράση «το κλάσμα ενός αριθμού» μπορεί να εννοηθεί ως ο πολλαπλασιασμός του κλάσματος με τον αριθμό αυτό. Για παράδειγμα, τα $\frac{3}{4}$ του 12 είναι $\frac{3}{4} \cdot 12$.

Δραστηριότητα 1η

Η μαμά σου έχει φτιάξει ένα μικρό ορθογώνιο κέικ, από το οποίο κόβεις το $\frac{1}{2}$. Από αυτό το κομμάτι τρως τα $\frac{3}{4}$
Αν προσπαθήσεις να υπολογίσεις με κλάσμα το μέρος που έφαγες, το κλάσμα αυτό θα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα κλάσματα $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$; ………………..

- **Να σχεδιάσεις στο διπλανό σκίτσο το μέρος του ολόκληρου κέικ που έφαγες.**

- **Πόσο μέρος του κέικ έφαγες; ………………………………**

• Ποια πράξη θα κάνουμε για να βρούμε πόσο είναι τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{1}{2}$; ....

• Είναι το κλάσμα αυτό μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$; ....

Δραστηριότητα 2η

Πήγα σε ένα γαλακτοκομικό αγρόκτημα και αγόρασα γάλα σε ένα δοχείο 10 λίτρων. Το δοχείο δεν χωράει στο ψυγείο μου. Έτσι θέλω να το μεταγγίσω σε δοχεία των 2 λίτρων.

• Πόσα δοχεία χρειάζομαι; ....

• Γράψε την πράξη που έκανες: ....

....

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αγόρασα το $\frac{1}{2}$ λίτρο γάλα και θέλω να το μεταγγίσω σε μικρές ατομικές κανάτες του $\frac{1}{8}$ λίτρου για να τις σερβίρω με τον καφέ.

• Πόσες ατομικές κανάτες χρειάζομαι; ....

....

• Γράψε την πράξη που πρέπει να κάνεις: ....

....

• Γνωρίζεις ότι η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι αντίστροφες πράξεις. Άρα, αντί να διαιρέσεις δύο αριθμούς, μπορείς να πολλαπλασιάσεις τον πρώτο με τον αντίστροφο του δεύτερου.

• Δοκίμασε τώρα να κάνεις την προηγούμενη πράξη αντιστρέφοντας το δεύτερο κλάσμα

....

• Είναι λογικό το αποτέλεσμα; ....

Οι δραστηριότητες αυτές μας οδηγούν στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων

Για να πολλαπλασιάσουμε κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

Παράδειγμα

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Παράδειγμα

$$\frac{5}{12} : \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 1} = \frac{15}{12} \text{ ή } 1\frac{1}{4}$$

Υπολογίζω μια αριθμητική παράσταση που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς

✓ Εκτελώ τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά, με τη γνωστή σειρά (πρώτα δυνάμεις, πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις και μετά προσθέσεις, αφαιρέσεις).
Αν υπάρχουν παρενθέσεις, κάνω τις πράξεις πρώτα μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.
✓ Μετατρέπω τους αριθμούς, σε όποια μορφή χρειάζεται για να κάνω πράξεις.

Εφαρμογή 1η Κλασματικό μέρος ενός ποσού

Το κόστος ενός αυτοκινήτου για τον αντιπρόσωπο είναι τα $\frac{4}{5}$ της τιμής πώλησης. Το αυτοκίνητο πουλιέται 12.500 €. Να βρείτε πόσο κοστίζει στον αντιπρόσωπο.

Λύση

Μπορώ να υπολογίσω το κλασματικό μέρος ενός ποσού (τα $\frac{4}{5}$ του 12.500) με δυο τρόπους:

Α. Αναγωγή στην κλασματική μονάδα: Βρίσκω πρώτα το $\frac{1}{5}$ του 12.500 (12.500 : 5 = 2.500) και μετά βρίσκω τα $\frac{4}{5}$ (4 · 2500 = ……….).

Β. Αρκεί να πολλαπλασιάσω το κλάσμα με το ποσό ($\frac{4}{5}$ · 12500 ……). Πολλαπλασιάζω κλάσμα με φυσικό αριθμό, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του με τον αριθμό αυτό (σαν να ήταν ο αριθμός κλάσμα με παρονομαστή το 1): $\frac{4}{5} \cdot 12500 = \frac{4 \cdot 12500}{5} = \frac{50000}{5}$ = …………

Απάντηση: Το αυτοκίνητο κοστίζει στον αντιπρόσωπο ………. €.

Εφαρμογή 2η *Μεικτές αριθμητικές παραστάσεις*

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}2 + \frac{4}{5}\right) : \left(3 - 1\frac{1}{3}\right)$$

Λύση – Απάντηση

✓ **Κάνω πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, με τη σειρά που πρέπει:**

$$\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}2 + \frac{4}{5}\right) : \left(3 - 1\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(\text{——} + 0{,}2 + \frac{4}{5}\right) : \left(\text{......} \ \text{——}\right)$$

✓ **Μετατρέπω το δεκαδικό και το μεικτό αριθμό σε κλάσματα, για να συνεχίσω τις πράξεις:**

(—— + —— + ——) : —— = ...

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων και τον υπολογισμό μεικτών αριθμητικών παραστάσεων. Σχεδίασε ένα σύντομο πρόβλημα που να λύνεται έτσι.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Η ισότητα:*** $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{18}{8}$ ***είναι σωστή.***	☐	☐
→ ***Για να βρούμε το μισό του*** $\frac{4}{5}$ ***αρκεί να το πολλαπλασιάσουμε με το*** $\frac{1}{2}$ ***.***	☐	☐

Ανακεφαλαίωση

Αριθμοί και πράξεις

Δίνω … λογαριασμό

Αριθμοί	
• **Φυσικοί αριθμοί**	• **0 1 2 3 4 …**
• **Δεκαδικοί αριθμοί**	• **0,1 1,05 80,5 100,2 0,03 …**

Αξία θέσης
Η διαφορετική αξία που αποκτά ένα ψηφίο ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται στον αριθμό.

Πράξεις		
• **Πρόσθεση**	• $5 + 3 = 3 + 5$ • $(5 + 3) + 7 = 5 + (3 + 7)$	*ιδιότητες της πρόσθεσης*
• **Αφαίρεση**	• $7 - 3 = 4$ $4 + 3 = 7$ $7 - 4 = 3$	*αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης*
• **Πολλαπλα-σιασμός**	• $8 \cdot 6 = 6 \cdot 8$ • $(8 \cdot 6) \cdot 5 = 8 \cdot (6 \cdot 5)$ • $8 \cdot (6 + 5) = 8 \cdot 6 + 8 \cdot 5$ • $8 \cdot (6 - 5) = 8 \cdot 6 - 8 \cdot 5$	*ιδιότητες του πολλαπλα-σιασμού*
• **Διαίρεση**	• τέλεια $\Delta : \delta = \pi$ $\Delta : \pi = \delta$ $\pi \cdot \delta = \Delta$	*αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού*
	• ατελής $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$	

Σειρά των πράξεων
• παρενθέσεις – πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις – προσθέσεις και αφαιρέσεις

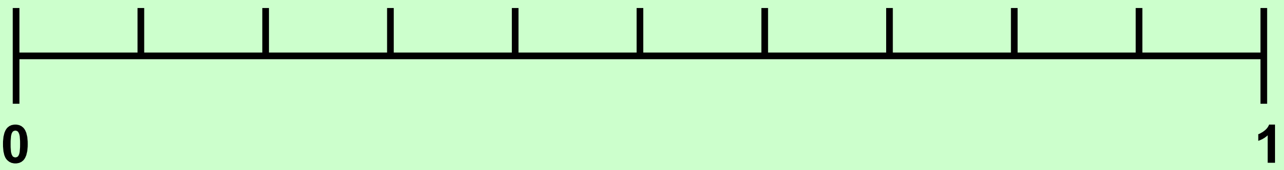
Ειδικά θέματα	
• Διαιρέτες	• Οι αριθμοί που διαιρούν έναν αριθμό
• Μ.Κ.Δ.	• Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες
• Πρώτοι αριθμοί	• Αριθμοί με μόνους διαιρέτες το 1 και τον εαυτό τους
• Παραγοντοποίη-ση αριθμού	• Ανάλυση του αριθμού σε γινόμενο πρώτων αριθμών
• Πολλαπλάσια	• 0, α, 2α, 3α, 4α, 5α, ...
• Ε.Κ.Π.	• Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια
• Δυνάμεις	• $5^{\alpha} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{\alpha \text{ φορές}}$
• Έκφραση αριθμού με τη βοήθεια δύναμης του 10	• $6.000.000.000 = 6 \cdot 10^{9}$

Κλάσματα	
• Κλασματικοί αριθμοί	• Οι αριθμοί που γράφονται $\frac{\alpha}{\beta}$ (ο αριθμός $\beta \neq 0$)
ως μέρος του όλου	τα 3 από τα 5 είναι τα $\frac{3}{5}$
ως πηλίκο διαίρεσης	$3 : 5 = \frac{3}{5}$
• Ισοδύναμα κλάσματα	• $\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$

1η *Άσκηση*

Δείξε πάνω στην αριθμογραμμή με μια γραμμή τη σωστή θέση για κάθε καρτελάκι.

0,25	0,1	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{10}$	0,7	$\frac{50}{100}$



2η *Άσκηση*

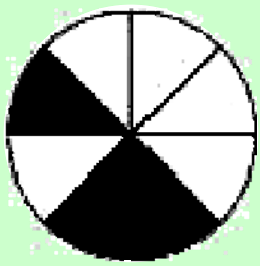
Η πρώτη πράξη στη διπλανή κάρτα δηλώνει ότι 17 · 6 = 102. Με αυτή τη βοήθεια πώς μπορείς να υπολογίσεις με το νου το αποτέλεσμα της δεύτερης πράξης; Να εξηγήσεις τη σκέψη σου.

17 · 6 = 102
19 · 6 =

…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………

3η *Άσκηση*

Να γράψεις με κλάσμα και με δεκαδικό αριθμό το σκιασμένο μέρος του κύκλου.



Πρόβλημα

Να γράψετε με την ομάδα σου ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{5}$ και να το λύσετε.

..
..
..
..
..
..
..

Λύση

Απάντηση: ....

2η θεματική ενότητα

Εξισώσεις

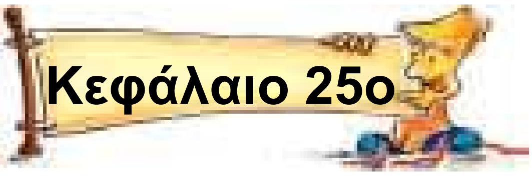
Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις. Με άλλα λόγια, με τη χρήση γραμμάτων ή συμβόλων στη θέση ενός αριθμού που δεν γνωρίζουμε.

Από την 8η χιλιετία π.Χ. οι κάτοικοι της Μεσοποταμίας, πολύ πριν από τους Σουμέριους, χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα αριθμητικής καταγραφής βασισμένο σε μικρές πήλινες «μάρκες». Από εκεί πληροφορούμαστε ότι χρησιμοποιούσαν αριθμητικές μεθόδους πολύ πιο εξελιγμένες από την απλή καταμέτρηση γεωργικών προϊόντων και τους απλούς εμπορικούς και οικονομικούς σκοπούς της εποχής τους.

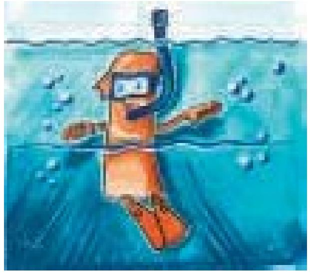
Βρέθηκαν στις «μάρκες» προβλήματα της εποχής εκείνης που απαιτούν τη χρήση εξισώσεων για την επίλυσή τους. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω πρόβλημα.

> ***Βρήκα μια πέτρα. Δεν (τη) ζύγισα. Αφαίρεσα το ένα έβδομο. Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο. Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο. (Τη) ζύγισα. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας;***

Φαίνεται πως τα Μαθηματικά ήταν για τους κατοίκους της Μεσοποταμίας ένα απαραίτητο εργαλείο με το όποιο μπορούσαν να αποκρυπτογραφήσουν τις κινήσεις του Ουρανού και μια γλώσσα με την οποία μπορούσαν να επικοινωνήσουν και να καταλάβουν τους θεούς τους.



Η έννοια της μεταβλητής



Η εξερεύνηση του αγνώστου

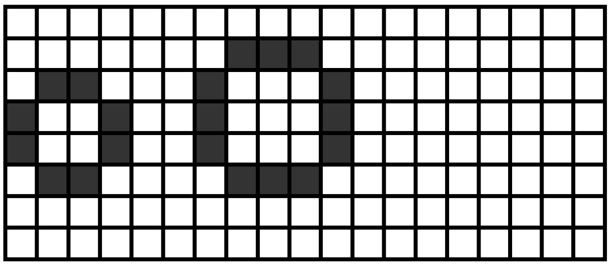
➝ ***Κατανοώ την έννοια «μεταβλητή».***

➝ ***Χρησιμοποιώ μεταβλητές για να εκφράσω τις σχέσεις στις εκφράσεις, τις ισότητες, τις ανισότητες και τις γεωμετρικές σχέσεις.***

➝ ***Επιλέγω μεταβλητές και σχηματίζω αριθμητικές παραστάσεις.***

Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό σχήμα σχεδιάσαμε σε μιλιμετρέ χαρτί το γράμμα «Ο» σε δύο μεγέθη. Ανάλογα με τον αριθμό των τετραγώνων της πλευράς του καθενός τα ονομάσαμε μέγεθος 2 και μέγεθος 3.



- **Συνέχισε βάφοντας όσα τετράγωνα χρειάζεται για να σχηματιστεί το επόμενο μέγεθος (μέγεθος 4).**

- **Πόσα τετράγωνα πρέπει να βάψεις για κάθε πλευρά;**

..

- **Συμπλήρωσε στον παρακάτω πίνακα το συνολικό αριθμό από σκιασμένα τετράγωνα που χρειάζεται για να σχηματιστεί κάθε μέγεθος.**

Μέγεθος του γράμματος	*2*	*3*	*4*	*9*	*12*
Τετράγωνα που χρειάζονται					

• Παρατήρησε τον πίνακα και εξήγησε με ποιον τρόπο μεταβάλλεται ο συνολικός αριθμός των τετραγώνων όταν μεταβάλλεται ο αριθμός των τετραγώνων της πλευράς ……………………………………………………...
…………………………………………………………………..

• Η σχέση του συνολικού αριθμού τετραγώνων με το μέγεθος είναι «…επί το μέγεθος» ή ο συνολικός αριθμός τετραγώνων ισούται με το γινόμενο «…… • μ» (όπου μ το μέγεθος).

• Υπολόγισε με το σύντομο τρόπο (4 • μ) τα συνολικά τετράγωνα για το μέγεθος 17.

…………………………………………………………………..

• Τι μεγέθους είναι το όμικρον που έχει 132 τετράγωνα;

…………………………………………………………………..

Δραστηριότητα 2η

Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε τις ηλικίες του Κώστα και της Σμαρώς για κάθε χρονιά. Μετά απάντησε στις ερωτήσεις.

Χρονιά	Ηλικία Σμαρώς	Ηλικία Κώστα
2006	12	16
2007		
2008		
2009		
2010		

• Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 12, η ηλικία του Κώστα θα είναι: 12 + ……

• Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 25, η ηλικία του Κώστα θα είναι: 25 + ……

• **Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι x, η ηλικία του Κώστα θα είναι: …………**

Έχουμε μάθει ότι μια αριθμητική παράσταση περιέχει αριθμούς και πράξεις. Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορεί να περιέχει και γράμματα.

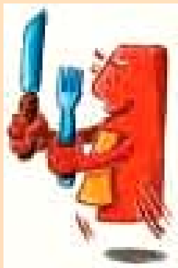
Άγνωστος / Μεταβλητή

Το γράμμα ή το σύμβολο το οποίο χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε τιμή που μπορεί να πάρει ένα ποσό λέγεται μεταβλητή.

Παράδειγμα

Εμβαδό τετραγώνου: $α^2$,
όπου α = το μήκος της πλευράς του.

Εφαρμογή 1η Επιλέγω μεταβλητή



Στη γιορτή είχαμε γλυκά που έφερε η Φρόσω, 10 που έφερα εγώ και αυτά που έφερε η Σοφία. Τα έφαγαν όλα!» Να εκφράσετε με μια αριθμητική παράσταση τον αριθμό των γλυκών που έφαγαν στη γιορτή.

Λύση

Οποιοδήποτε γράμμα (ή σύμβολο) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή και μια μεταβλητή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση οποιουδήποτε αριθμού. Για να εκφράσουμε μια φράση με αριθμητική παράσταση ακολουθούμε τρία βήματα:

1. Προσδιορίζουμε την άγνωστη ποσότητα.
2. Επιλέγουμε μια μεταβλητή για την άγνωστη ποσότητα.
3. Προσδιορίζουμε τις πράξεις ανάμεσα στους αριθμούς και τη μεταβλητή.

Στη συγκεκριμένη φράση:
1. Έχουμε έναν άγνωστο: τα γλυκά που έφερε η Σοφία.
2. Επιλέγουμε σ =τα γλυκά της Σοφίας.
3. Έφαγαν τα γλυκά της Σοφίας, συν 4, συν 10. Άρα έφαγαν σ + 4 + 10, δηλαδή σ + 14.

Θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης όταν μάθουμε τον αριθμό που αντιπροσωπεύει η μεταβλητή της.

Απάντηση: Έφαγαν σ + 14, όπου σ τα γλυκά της Σοφίας.

Εφαρμογή 2η Υπολογίζω τις τιμές

Ατλαντικός: είμαι ο δεύτερος σε έκταση ωκεανός στον κόσμο.

Ειρηνικός: Εγώ είμαι διπλάσιος από τον Ατλαντικό.

Ινδικός: Είμαι 30.000.000 τετραγωνικά χιλιόμετρα μικρότερος από τον Ατλαντικό.

Με βάση το σχήμα να εκφράσεις τις σχέσεις ανάμεσα στα μεγέθη των ωκεανών χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή. Αν ο Ατλαντικός έχει έκταση 100.000.000 τετρ. χλμ. υπολόγισε την έκταση των άλλων ωκεανών.

Λύση - Απάντηση

<u>1ο βήμα</u>: Συμβολίζω την έκταση του Ατλαντικού με ένα γράμμα. Π.χ. το *α* και γράφω:

Η έκταση του Ατλαντικού: *α*

Η έκταση του Ειρηνικού ………………………..… τετρ. χμ.

Η έκταση του Ινδικού: ………………………..… τετρ. χμ.

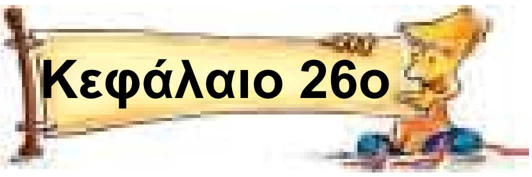
<u>2ο βήμα</u>: Αντικαθιστώ τη μεταβλητή *α* με την τιμή της (100.000.000) και κάνω τις πράξεις.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

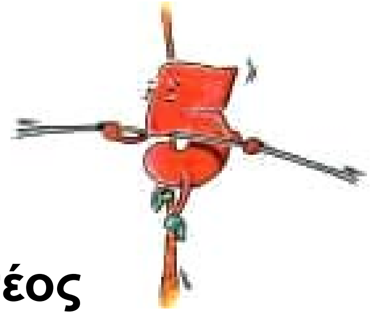
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο: μεταβλητή. Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή σε ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Στην αριθμητική παράσταση 2 • (♣ – 1) δεν υπάρχει μεταβλητή.***	☐	☐
→ ***Το γινόμενο $α^2$ είναι το εμβαδό τετραγώνου με πλευρά 2.***	☐	☐
→ ***Η ισότητα 2X = 2 • X είναι σωστή.***	☐	☐



Κεφάλαιο 26ο



Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι ο προσθετέος

Μαθαίνω να ισορροπώ!

- ➔ ***Σχηματίζω την εξίσωση ενός προβλήματος.***
- ➔ ***Λύνω μια εξίσωση με δοκιμές και έλεγχο.***
- ➔ ***Λύνω μια εξίσωση χρησιμοποιώντας την αφαίρεση ως αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης***

Δραστηριότητα 1η

Η Δέσποινα πήγε στο σχολείο με μερικά ψιλά στην τσέπη της. Στο δρόμο βρήκε 23 λεπτά. Όταν έφτασε στο σχολείο και μέτρησε τα λεφτά της είδε ότι είχε 1,13 €. Πόσα χρήματα είχε άραγε όταν έφυγε από το σπίτι;

• Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή για να συμβολίσεις το ποσό που μας ζητάει να βρούμε.

……………………………………………………………………..

• Μπορείς με τη βοήθεια της μεταβλητής που επέλεξες και τα ποσά που ήδη γνωρίζεις να εκφράσεις με μια ισότητα την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα;

……………………………………………………………………..

• Γράψε την ισότητα: ……………………………………………

• Οι φίλοι της Δέσποινας διαφωνούν για τα λεπτά που είχε στην τσέπη της. Ο Ανδρέας λέει ότι ήταν 80, η Ειρήνη 85, ο Χρήστος 90 και η Πόπη 95 λεπτά. Ποιος έχει δίκιο και γιατί;

……………………………………………………………………..

Δραστηριότητα 2η

Η Μαρία αγόρασε στις διακοπές της ένα καλοκαιρινό μπλουζάκι που κόστιζε 12,50 € και ζήτησε από το κατάστημα να προσθέσουν επάνω μια σιδερότυπη στάμπα με το όνομα της. Στο τέλος πλήρωσε 18,40 €. Πόσο στοιχίζει η στάμπα;

- **Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή για να συμβολίσεις το ποσό που μας ζητάει να βρούμε, και σχημάτισε την ισότητα με τα στοιχεία του προβλήματος:**

………………………………………………………………………

- **Αν η Μαρία μετανιώσει για τη στάμπα που πρόσθεσε στο μπλουζάκι της μπορεί να αναιρέσει αυτή τη διαδικασία; ………………………**

- **Οι ενέργειες που αναιρούν η μία την άλλη λέγονται …………………………………………………..**

Γράψε τις αντίστροφες στις πιο κάτω ενέργειες:
Ανεβαίνω ……………………………
Προσθέτω …………………………..

- **Στα μαθηματικά αναιρείται η πρόσθεση; ………………....**

- **Αν ναι με ποιον τρόπο; ……………………………………….**

- **Με βάση τις αντίστροφες πράξεις γράψε τις αφαιρέσεις που προκύπτουν από μια πρόσθεση, για παράδειγμα: 5 + 3 = 8**

…. – …. = …. και …. – …. = ….

- **Εφαρμόζοντας τις αντίστροφες πράξεις, τι θα κάνεις για να βρεις τον άγνωστο προσθετέο στην ισότητα που έγραψες για το πρόβλημα;**

……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

Από τα προηγούμενα διαπιστώνουμε ότι ένα πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί συμβολικά με μια ισότητα βάζοντας στη θέση του άγνωστου ποσού μια μεταβλητή.

Εξίσωση

Μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό, που συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα x ή ψ ή z, …… κ.τ.λ., λέγεται εξίσωση με έναν άγνωστο.

Παράδειγμα

x + 5 = 12

Η τιμή που επαληθεύει την εξίσωση ονομάζεται λύση της εξίσωσης.

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης x + 5 = 12 είναι ο αριθμός 7. Αν αντικαταστήσω τη μεταβλητή με το 7 έχω 7 + 5 = 12

Όταν ο άγνωστος έχει τη θέση προσθετέου, για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από το άθροισμα τον άλλο προσθετέο.

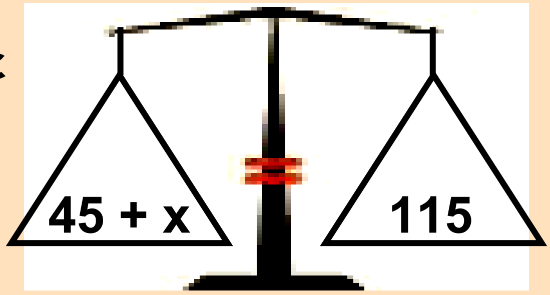
Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης x + 5 = 12 είναι x = 12 – 5

Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί. Αν πρέπει να αφαιρέσω έναν αριθμό από τη μία πλευρά, για να συνεχίσει να ισορροπεί, πρέπει να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό κι από την άλλη.

Εφαρμογή 1η Η εξίσωση σαν ζυγαριά

Σε μια ζυγαριά με δύο δίσκους τοποθετούμε στον έναν βάρος 115 γραμμαρίων και στον άλλο 45 γραμμάρια. Πόσο βάρος πρέπει να τοποθετήσουμε ακόμη, ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά; Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής, γράψε την εξίσωση που περιγράφει την κατάσταση αυτή και υπολόγισε τον άγνωστο.



Λύση

1. Ονομάζω την άγνωστη τιμή x. Η εξίσωση στη ζυγαριά είναι 45 + x = 115.

2. Σκέφτομαι πως για να ισορροπήσει η ζυγαριά πρέπει τα βάρη στους δυο δίσκους να είναι ίσα. Υπολογίζω με το νου πόσο είναι το x, προσθέτοντας όσο βάρος χρειάζεται στο 45 ώστε να γίνει 115.

Έτσι 45 + … = 115. Άρα x = …

Απάντηση: Πρέπει να βάλουμε ακόμη ….. γραμμάρια στο δίσκο.

Εφαρμογή 2η
Λύση εξίσωσης με τις αντίστροφες πράξεις

Ο Λευτέρης είχε 16 κάρτες ποδοσφαιριστών, όταν άρχισε να παίζει με τον Γιώργο και κέρδισε μερικές από αυτόν. Τώρα έχει 27 κάρτες. Πόσες κάρτες κέρδισε από τον Γιώργο; Να εκφράσεις με εξίσωση το πρόβλημα και να το λύσεις.

Λύση

1. Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των καρτών που κέρδισε ο Λευτέρης. Την ονομάζω κ.

2. Η εξίσωση είναι 16 + κ = 27. Για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από το άθροισμα τον άλλο προσθετέο:

3. κ = … – …   Άρα κ = …

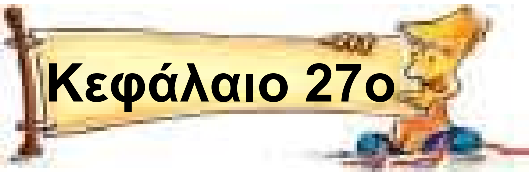
Απάντηση: Ο Λευτέρης κέρδισε …… κάρτες από τον Γιώργο.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους εξίσωση και άγνωστος προσθετέος και μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις πρόσθεσης. Παρουσίασε ένα δικό σου παράδειγμα.

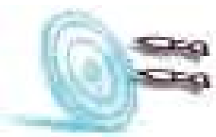
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Λύση μιας εξίσωσης είναι η τιμή του άγνωστου που επαληθεύει την εξίσωση.***	☐	☐
→ ***Η λύση της εξίσωσης 15 + α = 15 είναι το 1.***	☐	☐
→ ***Σε μια εξίσωση πρόσθεσης, κάνεις αφαίρεση για να τη λύσεις.***	☐	☐



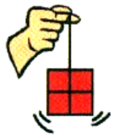
Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι ο μειωτέος ή ο αφαιρετέος

Μαθηματικά σε κίνηση

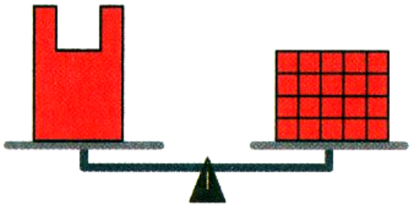


- ➔ *Σχηματίζω την εξίσωση ενός προβλήματος.*
- ➔ *Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις της αφαίρεσης για να λύσω μια εξίσωση.*

Δραστηριότητα 1η



Στη διπλανή ζυγαριά από έναν άγνωστο αριθμό κύβων (κ) αφαιρώ 4 κύβους και η ζυγαριά ισορροπεί.



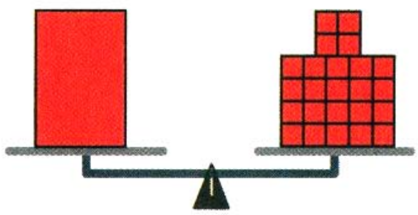
- **Γράψε την εξίσωση που περιγράφει αυτή την ισορροπία:**

...

- **Κατόπιν προσθέτω 4 κύβους σε κάθε πλευρά.**
- **Εξήγησε: Γιατί η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί;**

...

- **Αρχικά στον αριστερό δίσκο είχαμε κ - 4 κύβους. Τώρα πόσους έχουμε; ....**



- **Γράψε την ισότητα που περιγράφει τώρα την ισορροπία**

...

- **Παρατηρώντας τις αλλαγές που έγιναν, μπορείς να διατυπώσεις έναν κανόνα για τον τρόπο που βρίσκουμε τη λύση όταν ο άγνωστος της εξίσωσης είναι μειωτέος;**

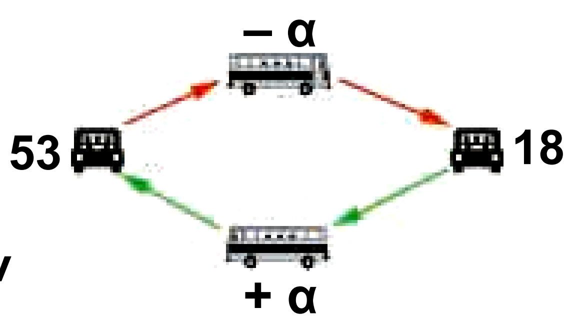
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Οι 53 αθλητές του σχολείου ανέβηκαν στο λεωφορείο που θα τους μετέφερε στο στάδιο. Τα αγόρια κατέβηκαν στην κεντρική είσοδο. Το λεωφορείο στη συνέχεια μετέφερε τις 18 αθλήτριες σε άλλη είσοδο στην άλλη πλευρά του σταδίου. Πόσα ήταν τα αγόρια;

- **Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή (α) γράψε την εξίσωση που εκφράζει το πρόβλημα: ……………………..**

- **Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η μετάβαση στο στάδιο και η επιστροφή των παιδιών.**



- **Παρατήρησε τη σχέση που έχει το σύνολο των παιδιών (53) με τον αριθμό των αγοριών και των κοριτσιών και απάντησε στην ερώτηση:**

Τι θα κάνεις για να βρεις πόσα είναι τα αγόρια;

……………………………………………………………………..

- **Υπολόγισε την τιμή του άγνωστου στην εξίσωση που έγραψες:**

……………………………………………………………………..

- **Μπορείς να διατυπώσεις και να γράψεις έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι αφαιρετέος;**

……………………………………………………………………
……………………………………………………………………

- **Γράψε την εξίσωση που εκφράζει την επιστροφή των παιδιών και υπολόγισε την τιμή του άγνωστου:**

……………………………………………………………………

Ολοκληρώνοντας τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι:

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι μειωτέος

Όταν ο άγνωστος είναι ο μειωτέος, για να λύσω την εξίσωση προσθέτω στη διαφορά τον αφαιρετέο.

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης x – 5 = 12 είναι: x = 12 + 5

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι αφαιρετέος

Όταν ο άγνωστος είναι ο αφαιρετέος, για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από τον μειωτέο τη διαφορά.

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης 18 - x = 7 είναι: x = 18 - 7

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν προσθέσω και στα δυο μέρη τον ίδιο αριθμό.

Εφαρμογή 1η

Σχηματίζω και λύνω εξισώσεις

Η Δήμητρα πριν φύγει για το μάθημα της Μουσικής, πήρε από το πορτοφόλι της βιαστικά μερικά κέρματα και πήγε στο βιβλιοπωλείο. Αγόρασε ένα τετράδιο πενταγράμμου που έκανε 2,90 € και ένα ντοσιέ για τα φύλλα των ασκήσεων που έκανε 3,50 €. Όταν γύρισε είδε ότι είχε στην τσέπη της 2,30 €. Προσπάθησε να σχηματίσεις την εξίσωση και να υπολογίσεις πόσα χρήματα είχε πάρει από το πορτοφόλι.

Λύση

Ονομάζω x την άγνωστη τιμή (τα χρήματα που πήρε).

<u>α΄ τρόπος:</u>

Σχηματίζω την εξίσωση: $x - (2,90 + 3,50) = 2,30$.

Κάνω πρώτα την πράξη στην παρένθεση:
$x - 6,40 = 2,30$.

Για να λύσω την εξίσωση, προσθέτω στη διαφορά τον αφαιρετέο: $x = 2,30 + 6,40$. Άρα $x = 8,70$.

Επαληθεύω την εξίσωση: $8,70 - (2,90 + 3,50) = 2,30$

Απάντηση: Είχε πάρει 8,70 € από το πορτοφόλι της.

<u>β΄ τρόπος:</u> **$x - 2,30 = 2,90 + 3,50$**

....

<u>γ΄ τρόπος:</u> **$x = 2,90 + 3,50 + 2,30$**

....

Εφαρμογή 2η

Πόσα χρήματα του έπεσαν;

Ο Αριστοτέλης ξεκίνησε για το σχολείο με 1,20 € στην τσέπη του. Όταν έφτασε στο σχολείο, διαπίστωσε ότι η τσέπη του ήταν τρύπια και του είχαν μείνει μόνο 85 λεπτά. Πόσα χρήματα του έπεσαν στο δρόμο; Να εκφράσεις με μια εξίσωση το πρόβλημα του Αριστοτέλη και μετά να το λύσεις.

Λύση

Άγνωστη τιμή είναι τα λεπτά που έχασε ο Αριστοτέλης. Την ονομάζω λ.

Με βάση το πρόβλημα σχηματίζω την εξίσωση: 1,20 – λ = 0,85.

Για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από το μειωτέο τη διαφορά: λ = ……… – ………
Άρα λ = ………

***Επαληθεύω την εξίσωση*: 1,20 - ……… = 0,85**

Απάντηση: Του έπεσαν 35 λεπτά.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε να βρίσκουμε τον άγνωστο όταν είναι μειωτέος ή αφαιρετέος σε μια εξίσωση. Παρουσίασε ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Για να κάνω επαλήθευση, αντικαθιστώ τη μεταβλητή με την τιμή της.***	☐	☐
→ ***Για να «ισορροπήσουν» τα δυο μερη μιας εξίσωσης αρκεί να προσθέσω ή να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό και από τα δυο μέρη.***	☐	☐
→ ***Οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος λύνονται με μια πρόσθεση.***	☐	☐

Κεφάλαιο 28ο

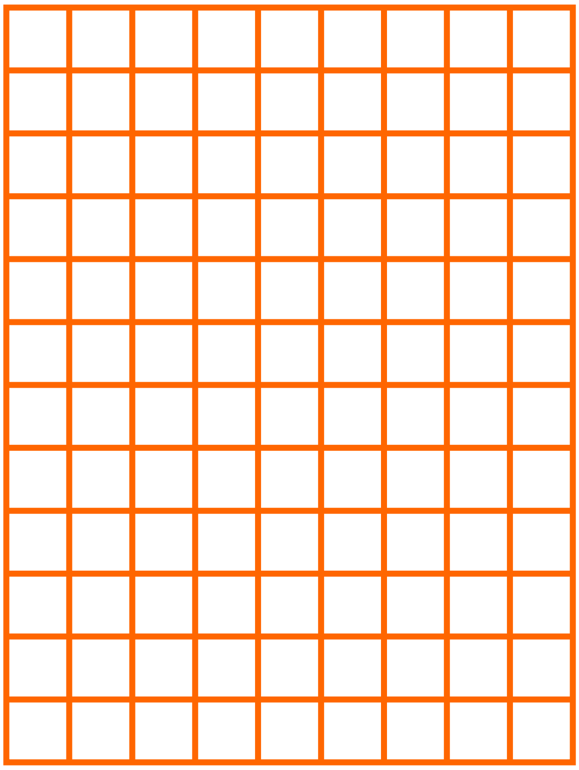
Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου

Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται!

- ***Μελετώ τον τύπο του εμβαδού ως εξίσωση.***
- ***Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις του πολλαπλασιασμού.***
- ***Λύνω εξισώσεις όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου.***

Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό πλαίσιο κάθε τετραγωνάκι είναι 1 τετραγωνικό εκατοστό. Με 3 διαφορετικά χρώματα, να σχεδιάσεις 3 διαφορετικά ορθογώνια με εμβαδά 24 τετραγωνικά εκατοστά το καθένα.



- **Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με τα στοιχεία των ορθογωνίων που σχεδίασες (το πλάτος είναι οριζόντια):**

Μήκος	Πλάτος (εκ.)	Εμβαδό (τ.εκ.)
4	6	24

• Τι παρατηρείς για τη σχέση του εμβαδού με το μήκος και το πλάτος;

• Χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή για το μήκος, μία για το πλάτος και μία για το εμβαδό, γράψε την εξίσωση που δείχνει πώς σχετίζονται το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό σε ένα ορθογώνιο:

....

Δραστηριότητα 2η

• Γνωρίζοντας το εμβαδό ενός ορθογωνίου και τη μία από τις δύο πλευρές του, γράψτε με ποιο τρόπο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την άλλη πλευρά.

....

• Γράψτε τις διαιρέσεις που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό: 5 • 3 = 15

..... = ... : ....   και ..... = ... : ....

• Σε ένα ορθογώνιο το πλάτος είναι 3 εκατοστά και το εμβαδό 36 τ. εκ. Να σχηματίσετε την εξίσωση του εμβαδού και να βρείτε την τιμή του άγνωστου:

....

• Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου;

....
....
....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου

Όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου, για να λύσουμε την εξίσωση διαιρούμε το γινόμενο με τον άλλο παράγοντα.

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης x • 5 = 20 είναι: x = 20 : 5

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν διαιρέσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό.

Εφαρμογή 1η

Η Μαργαρίτα πολλές φορές για να βοηθήσει τη θεία της και να βγάλει χαρτζιλίκι, προσέχει το μικρό ανιψάκι της. Πληρώνεται με 3 € την ώρα. Χρειάζεται να μαζέψει 165 €. Πόσες ώρες πρέπει να κρατήσει το παιδί;

Λύση

→ **Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των ωρών (ω) που πρέπει να κρατήσει το παιδί**

→ **Γράφω την εξίσωση ..... • ω = 165**

→ **Κάνω την αντίστροφη πράξη:**

ω = ... : ...... Άρα ω = ...

→ *Επαλήθευση:* αντικαθιστώ τη μεταβλητή με την τιμή στην αρχική εξίσωση και κάνω την πράξη:
3 • …… = 165

Απάντηση:
Πρέπει να κρατήσει το παιδί για … ώρες (!)

Εφαρμογή 2η

Ο Δημοσθένης ξέρει πως, όταν γράφει τις εργασίες του στον υπολογιστή, η σελίδα χωράει περίπου 250 λέξεις. Πρέπει να γράψει μια εργασία 1.500 λέξεων. Πόσες σελίδες θα είναι; Λύστε το πρόβλημα με εξίσωση.

Λύση

→ Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των σελίδων που θα χρειαστούν. Την ονομάζω σ.

→ Η εξίσωση είναι 250 • *σ* = 1.500.

→ Κάνω την αντίστροφη πράξη: *σ* = 1500 : 250.
Άρα *σ* = 6.

→ Επαλήθευση: 250 • 6 = 1.500

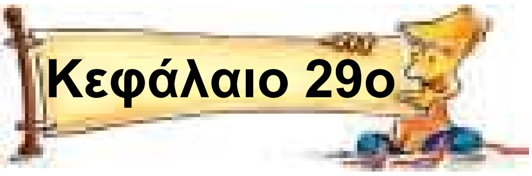
Απάντηση:
Η εργασία θα είναι 6 σελίδες.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε πώς να λύνουμε εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου. Δώσε ένα δικό σου παράδειγμα μιας τέτοιας εξίσωσης.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού είναι η διαίρεση.***	☐	☐
→ ***Η εξίσωση α · 10 = 10 δεν έχει λύση.***	☐	☐
→ ***Η εξίσωση 6x = 18 εκφράζει το εξής πρόβλημα: «Αγόρασα 6 περιοδικά και ξόδεψα x €. Κάθε περιοδικό κόστιζε 18 €. Πόσα € ξόδεψα;»***	☐	☐



Κεφάλαιο 29ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος ή ο διαιρέτης

Αντανακλάσεις…

- ***Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις μιας διαίρεσης.***
- ***Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις για να λύσω μια εξίσωση όταν ο άγνωστος έχει τη θέση του διαιρετέου ή του διαιρέτη.***

Δραστηριότητα 1η

Μετά από μια εκπαιδευτική επίσκεψη στους χώρους του εργοστάσιου χαρτοποιίας, ο υπεύθυνος έδωσε στους μαθητές ένα κιβώτιο με τετράδια (τ) για να τα μοιραστούν. Πόσα ήταν τα τετράδια, αν οι 85 μαθητές του σχολείου πήραν 2 τετράδια ο καθένας;

- **Γράψε την εξίσωση που *περιγρά-φει* το πρόβλημα ……………………..**
- **Υπολόγισε «με το νου» πόσα ήταν τα τετράδια:**

……………………………………………………………………

- **Πως σκέφτηκες για να το βρεις;**

……………………………………………………………………

- **Γράψε τον πολλαπλασιασμό που προκύπτει από τη διαίρεση: 15 : 3 = 5 …… = ….. • …..**
- **Αφού διαπίστωσες ότι ο πολλαπλασιασμός είναι η αντίστροφη πράξη της διαίρεσης, με ποιον τρόπο θα λύσεις την εξίσωση;**

…………………………………………………………………

• Με ποιον τρόπο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι διαιρετέος;

....

....

Δραστηριότητα 2η

Σε πόσες θήκες (θ) μπορούμε να μοιράσουμε τα 176 αυγά της φάρμας όταν κάθε θήκη χωράει 4 αυγά;

• Γράψε την εξίσωση του προβλήματος:

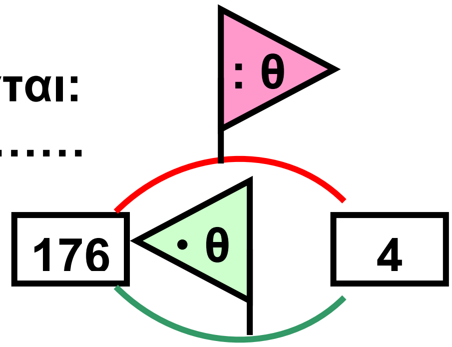
....

• Στο παρακάτω σχήμα η κόκκινη γραμμή ή η πράσινη δείχνει το μοίρασμα των αυγών σε θήκες τεσσάρων θέσεων; ....

Με ποια πράξη μπορείς να υπολογίσεις πόσες θήκες χρειάζονται; ....

• Υπολόγισε τις θήκες που χρειάζονται:

....



• Υπολόγισε με τον ίδιο τρόπο την τιμή του άγνωστου στην εξίσωση που έγραψες:

....

• Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι διαιρέτης;

....

....

• Παρατηρώντας το σχήμα να περιγράψετε στην ομάδα σας τι μας λέει η εξίσωση της πράσινης γραμμής, να τη γράψετε και να υπολογίσετε την τιμή του άγνωστου:

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

• Αν αντικαταστήσεις τον άγνωστο με την τιμή που βρήκες, επαληθεύονται και οι δυο εξισώσεις;

……………………………………………………………………

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι ο τρόπος λύσης των εξισώσεων διαίρεσης εξαρτάται από το αν ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης.

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι διαιρετέος

Όταν ο άγνωστος είναι διαιρετέος, για να λύσουμε την εξίσωση πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο με τον διαιρέτη.

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης $x : 5 = 8$ είναι: $x = 5 \cdot 8$

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι διαιρέτης

Όταν ο άγνωστος είναι διαιρέτης, για να λύσουμε την εξίσωση διαιρούμε τον διαιρετέο με το πηλίκο.

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης $18 : x = 36$ είναι: $x = 18 : 36$

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν πολλαπλασιάσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό.

Εφαρμογή 1η

Η Διευθύντρια του σχολείου έδωσε στις μαθήτριες της Στ΄ τάξης ένα ρολό κορδέλα για τις ανάγκες του χορευτικού που θα παρουσίαζαν. Εκείνες τη χώρισαν σε 18 ίσα κομμάτια. Κάθε κομμάτι ήταν 81 εκατοστά. Πόσα μέτρα ήταν η κορδέλα που τους έδωσε η Διευθύντρια;

Λύση

Ονομάζω την άγνωστη τιμή σ.

→ Σχηματίζω την εξίσωση σ : 18 = 81.

→ Όταν ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος για να βρω την τιμή του πολλαπλασιάζω το πηλίκο με τον διαιρέτη: σ = 81 · 18. Άρα σ = 1.458.

→ Επαληθεύω: 1.458 : 18 = 81

→ Μετατρέπω τα εκατοστά σε μέτρα: 1.458 :100 = 14,58

Απάντηση: Η κορδέλα που τους έδωσε η Διευθύντρια ήταν 14,58 μέτρα.

Εφαρμογή 2η

Ο Θωμάς θέλει να ταξινομήσει τις κάρτες του με τους ποδοσφαιριστές σε κουτιά που χωράνε 45 κάρτες το καθένα. Έχει συνολικά 540 κάρτες. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;

Λύση

Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των κουτιών (κ) που χρειάζεται ο Θωμάς.

__α΄ τρόπος:__ Σχηματίζω την εξίσωση 540 : κ = 45

Εφαρμόζω τη μέθοδο της διαίρεσης: κ = 540 : 45.
Άρα κ = 12.

Επαληθεύω: 540 : 12 = 45

Απάντηση: Θα χρειαστεί 12 κουτιά.

__β΄ τρόπος:__ 45 • κ = 540 ……………………....................................
……………………………………………………………………………

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους άγνωστος διαιρετέος και άγνωστος διαιρέτης και μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις διαίρεσης. Παρουσίασε με την ομάδα σου ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ *Μια εξίσωση διαίρεσης λύνεται μόνο με πολλαπλασιασμό.*	☐	☐
→ *Για να υπολογίσουμε τον άγνωστο όταν έχει τη θέση του διαιρέτη σε μια εξίσωση, πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο με το διαιρέτη*	☐	☐

Ανακεφαλαίωση

Εξισώσεις

«Όταν ο άγνωστος αποκαλύπτεται»

Ορισμοί	
• **Μεταβλητή** οποιοδήποτε γράμμα (ή σύμβολο) που μπαίνει στη θέση μιας άγνωστης τιμής	• ω, x, …
• **Εξίσωση** μία ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό, που συμβολίζουμε συνήθως με γράμματα x ή ψ ή z, … κ.τ.λ., λέγεται εξίσωση με έναν άγνωστο.	• 5 + x = 10,5
• **Λύση της εξίσωσης** η τιμή που την επαληθεύει	• x = 5,5

Περιπτώσεις εξισώσεων

• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους προσθετέους**

• κάνουμε αφαίρεση, π.χ.:

x + 0,2 = 12,8	άρα x = 12,8 – 0,2	άρα x = 12,6
2 + x = 11,5	άρα x = 11,5 – 2	άρα x = 9,5

• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι μειωτέος**

• κάνουμε πρόσθεση, π.χ.:

x – 31 = 45	άρα x = 45 + 31	άρα x = 76

• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι αφαιρετέος**

• **κάνουμε αφαίρεση, π.χ.:**

$20{,}1 - x = 7$ άρα $x = 20{,}1 - 7$ άρα $x = 13{,}1$

• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους παράγοντες του γινομένου**

• **κάνουμε διαίρεση, π.χ.:**

$x \cdot 3 = 96$ άρα $x = 96 : 3$ άρα $x = 32$

$14 \cdot x = 11{,}2$ άρα $x = 11{,}2 : 14$ άρα $x = 0{,}8$

• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος**

• **κάνουμε πολλαπλασιασμό, π.χ.:**

$x : 0{,}5 = 24$ άρα $x = 24 \cdot 0{,}5$ άρα $x = 12$

• **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρέτης**

• **κάνουμε διαίρεση, π.χ.:**

$144 : x = 9$ άρα $x = 144 : 9$ άρα $x = 16$

Χρυσός κανόνας

Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί.

Η ισορροπία πρέπει να διατηρηθεί μέχρι το τέλος, όταν θα έχει μείνει μόνο ο άγνωστος από τη μια μεριά και η τιμή του από την άλλη.
Για να διατηρείται πάντα η ισορροπία, ό,τι κάνουμε από τη μια μεριά, πρέπει να κάνουμε κι από την άλλη.

Άσκηση

Να αντιστοιχίσεις τα δύο μέρη των εξισώσεων όταν έχουν λύση Χ = 9.

2x	=	8
5 + x	=	18
x – 1	=	14
7x	=	1
10 – x	=	2
18 : x	=	63
x : 3	=	3

1ο πρόβλημα *«Το πάρτι»*

Σε ένα πάρτι με μπουφέ υπήρχαν 40 μικρά γλυκά. Μετά το γεύμα πέρασαν όλοι οι καλεσμένοι και πήραν από 3 γλυκά ο καθένας. Στο τέλος έμειναν 4 γλυκά στο δίσκο. Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι; (Να το λύσεις με εξίσωση)

Λύση

Απάντηση:……………………………………………………

2ο πρόβλημα *«Σχολικό περιοδικό»*

Η Όλγα υπολογίζει τα έξοδα για την εκτύπωση ενός σχολικού περιοδικού. Εάν το τυπώσει στο «ΕΚΤΥΠΟΝ», κοστίζει 5 λεπτά η σελίδα για οποιονδήποτε αριθμό αντιγράφων, χωρίς επιπλέον χρέωση για τη σελιδο-ποίηση. Εάν το τυπώσει στο «ΕΝΤΥΠΟΝ», κοστίζει 40 € η σελιδοποίηση και στη συνέχεια 4 λεπτά η σελίδα.

α) Πόσο θα χρεώσει το «ΕΚΤΥΠΟΝ» για 200 αντίγραφα ενός περιοδικού 30 σελίδων;

β) Πόσο θα χρεώσει το «ΕΝΤΥΠΟΝ» για την ίδια εργασία;
γ) Εάν η Όλγα ήθελε μόνο 100 αντίγραφα του περιοδικού, ποια εταιρία θα της έδινε την φτηνότερη λύση;

Λύση

Απάντηση: …………………………………………………..

3ο πρόβλημα ***«Τραπεζικές εργασίες»***

Τη Δευτέρα, η Άρτεμη έβαλε 23 € στον τραπεζικό της λογαριασμό ο οποίος έγινε 57 €.

Τι περιγράφει η εξίσωση δ + 23 = 57; ……………………...
…………………………………………………………………..

Τι αντιπροσωπεύει το δ; ……………………………………..

Πόσο ήταν το δ; ……………………………………………..
Η εξίσωση 57 – τ = 49 περιγράφει την κίνηση του λογαριασμού την Τετάρτη.
Τι έκανε η Άρτεμη την Τετάρτη;
…………………………………………………………………

Πόσο είναι το τ; ……………………………………………..

Η εξίσωση 49 - γ = 49 περιγράφει την κίνηση του λογαριασμού την Παρασκευή
Πόσο είναι το γ; ………………………………..
……………………………………………………..

Ποια κίνηση έγινε την Παρασκευή;
…………………………………………………………………..

3η θεματική ενότητα

Λόγοι – Αναλογίες

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τους λόγους και τις αναλογίες.

Ανάμεσα στις πρώτες μαθηματικές ιδέες των προϊστορικών ανθρώπων είναι οι αναλογίες και η συμμετρία. Οι πρωτόγονες ζωγραφιές στα σπήλαια μαρτυρούν την ύπαρξη αυτών των ιδεών. Οι ζωγραφιές αυτές έχουν σχεδιαστεί από επιδέξιους τεχνίτες οι οποίοι στην προσπάθεια τους να ερμηνεύσουν το περιβάλλον απόδωσαν εικόνες ζώων, κυνηγών, γεωμετρικών σχημάτων κ.ά. σε μεγέθη όχι τυχαία αλλά σε αναλογία με την πραγματικότητα.

Όπως τότε, έτσι και σήμερα η μελέτη του περιβάλλοντος έδωσε στον άνθρωπο τα ερεθίσματα ώστε να συστηματοποιήσει τις σκέψεις του και να τις μετατρέψει σε γνώση. Η γνώση αύτη αποτελεί το εργαλείο που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για να ερμηνεύει το περιβάλλον του, αλλά ταυτόχρονα είναι και η βάση που του επιτρέπει να επιδρά σε αυτό.

Κεφάλαιο 30ο

Λόγος δυο μεγεθών

Σου δίνουμε το … λόγο μας

→ *Συγκρίνω μεγέθη.*
→ *Μελετώ τη σχέση δύο μεγεθών.*
→ *Εκφράζω τη σχέση δύο μεγεθών με λόγο.*
→ *Αναγνωρίζω τους αντίστροφους λόγους.*

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου Δοξάτου ερεύνησαν τις αιτίες της αυξημένης κίνησης στους δρόμους γύρω από το σχολείο τους. Βρήκαν τα στοιχεία για τον αριθμό των αυτοκινήτων και τον αριθμό των κατοίκων της πόλης τους για τα έτη 1980 και 2000 και τα κατέγραψαν στους παρακάτω πίνακες:

Έτος 1980		Έτος 2000	
Αυτοκίνητα	345	Αυτοκίνητα	850
Κάτοικοι	3.450	Κάτοικοι	3.150

- **Παρατηρώντας τα στοιχεία στους πίνακες, σχολιάστε στην ομάδα σας πόσο αυξήθηκε ο αριθμός των αυτοκινήτων μέσα στην τελευταία εικοσαετία και διατυπώστε τα συμπεράσματά σας.**

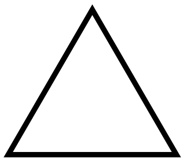
- **Συζητήστε τη σχέση του αριθμού των αυτοκινήτων με τον αριθμό των κατοίκων.**

• Γιατί σήμερα υπάρχει η ανάγκη του σχολικού τροχονόμου; ……………………………………………………
……………………………………………………………………

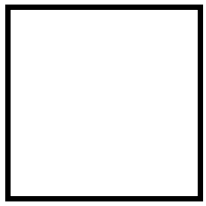
Δραστηριότητα 2η

Συμπλήρωσε στους πίνακες την περίμετρο κάθε σχήματος:

Μήκος πλευράς ισόπλευρου τριγώνου (εκατοστά)	3
Περίμετρος τριγώνου (εκατοστά)	



Μήκος πλευράς τετραγώνου (εκατοστά)	5
Περίμετρος τετραγώνου (εκατοστά)	



• Πώς προκύπτει ο αριθμός στη δεύτερη γραμμή και στις δύο περιπτώσεις; ………………………………………..

• Η σχέση ανάμεσα στο μήκος της πλευράς και την περίμετρο μπορεί να εκφραστεί και ως κλάσμα. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία από τους παραπάνω πίνακες να γράψεις το κλάσμα αυτό για:

• Το τρίγωνο: ……   το τετράγωνο: ……

Σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητο να συγκρίνουμε δύο μεγέθη και να μελετήσουμε τη σχέση τους:

Λόγος

Το αποτέλεσμα της σύγκρισης δύο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα ονομάζεται λόγος. Το κλάσμα αυτό έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο.

Παράδειγμα

Ο πύργος του Άιφελ έχει ύψος περίπου 300 μέτρα, ενώ ο Λευκός Πύργος περίπου 30 μέτρα.

Ο λόγος των υψών τους είναι $\frac{300}{30}$ ή $\frac{30}{3}$ ή 10.

(Δηλαδή ο πρώτος είναι 10 φορές ψηλότερος.)

Εφαρμογή 1η

Στην έκτη τάξη φοιτούν 28 μαθητές. Υπάρχουν 14 θρανία.

α. Ποιος είναι ο λόγος των μαθητών προς τα θρανία;

β. Ποιος είναι ο λόγος των θρανίων προς τους μαθητές;

Λύση - Απάντηση:

α. Ο λόγος $\frac{\text{μαθητές}}{\text{θρανία}}$ είναι ——,δηλαδή απλοποιώντας $\frac{2}{1}$.

Με άλλα λόγια, αντιστοιχούν 2 μαθητές σε 1 θρανίο.

β. Ο λόγος $\frac{\text{θρανία}}{\text{μαθητές}}$ είναι ——,δηλαδή απλοποιώντας $\frac{1}{2}$.

Με άλλα λόγια, αντιστοιχεί 1 θρανίο σε 2 μαθητές.

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι $\frac{2}{1}$ και $\frac{1}{2}$ είναι αντίστροφοι γιατί $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1}$ =....

Εφαρμογή 2η

Τα παιδιά έκαναν μια μικρή έρευνα σχετικά με την κατανάλωση ενέργειας των αυτοκινήτων και βρήκαν ότι ένας πολύ καλός λόγος κατανάλωσης προς απόσταση είναι 1 λίτρο προς 25 χιλιόμετρα ($\frac{1}{25}$).

Ο Νικόλας ρώτησε τον μπαμπά του πόσα περίπου χιλιόμετρα κάνει το αυτοκίνητο τους με ένα ντεπόζιτο βενζίνη και εκείνος του είπε πως συνήθως με 50 λίτρα κάνει 400 χιλιόμετρα. Είναι οικονομικό το αυτοκίνητό τους;

Λύση:

Ο Νικόλας βρίσκει το λόγο $\dfrac{\textit{κατανάλωση (λίτρα)}}{\textit{απόσταση (χμ)}}$

του αυτοκινήτου τους: —— .

Απλοποιεί και βρίσκει —— .

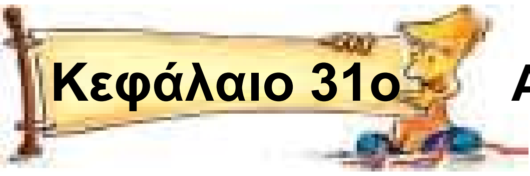
Απάντηση: Το αυτοκίνητο τους έχει πολύ μεγαλύτερο λόγο κατανάλωσης προς απόσταση (με 1 λίτρο ταξιδεύει μόνο 8 χιλιόμετρα, πολύ λιγότερα από τα 25 χιλιόμετρα).

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

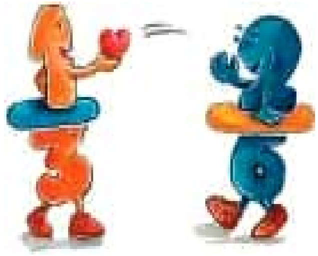
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο λόγος. Μπορείς να εξηγήσεις τη σημασία του με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ *Ο λόγος εκφράζει τη σχέση δύο μεγεθών.*	☐	☐
→ *Σε κάθε λόγο ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή.*	☐	☐
→ *Οι λόγοι* $\frac{7}{8}$ *και* $\frac{8}{7}$ *είναι αντίστροφοι.*	☐	☐



Από τους λόγους στις αναλογίες



Από το λόγο στην αναλογία … τι γλυκό!

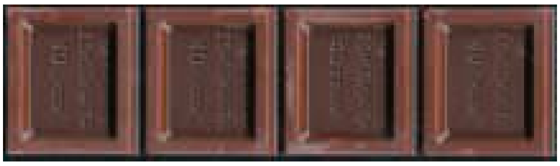
- *Συγκρίνω δυο λόγους.*
- *Αναγνωρίζω την ισότητα δυο λόγων.*
- *Σχηματίζω αναλογίες*

Δραστηριότητα 1η

Στο πλαίσιο του προγράμματος «Αγωγή Υγείας» οι μαθητές της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου Φαρκαδόνας ασχολήθηκαν με τη θερμιδική αξία των γλυκών. Διαβάζοντας τις ετικέτες σε δύο διαφορετικές σοκολάτες διαπίστωσαν ότι, η πρώτη σοκολάτα, βάρους 50 γραμμαρίων, δίνει 250 θερμίδες, ενώ η δεύτερη σοκολάτα, βάρους 100 γραμμαρίων, δίνει 500 θερμίδες.

- **Συμπλήρωσε τον πίνακα όπως έκαναν τα παιδιά:**

Βάρος σοκολάτας σε γραμμάρια	50	100
Θερμιδική αξία		



- **Σύγκρινε τους δύο λόγους.**
- **Τι παρατηρείς;**
- **Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τη θερμιδική αξία (θερμίδες / γραμμάριο) στις δύο σοκολάτες;**

…………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Για την ίδια εργασία τα παιδιά βρήκαν ότι το ένα γραμμάριο σοκολάτας έχει 5 θερμίδες και κατασκεύασαν τον πίνακα θερμίδων της σοκολάτας.

Βάρος σοκολάτας σε γραμμάρια	1	2	3	4	5
Θερμίδες	5				

- Συμπλήρωσε τον πίνακα
- Τι παρατηρείς στους λόγους που σχηματίζονται;

....

- Πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης γραμμής από τους αριθμούς της πρώτης; ....

....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές είναι αναγκαίο να μελετάμε τη σχέση (το λόγο) δύο μεγεθών σε διαφορετικές τιμές.

Αναλογία

Όταν συγκρίνοντας δύο λόγους διαπιστώσουμε ότι είναι ίσοι μεταξύ τους, λέμε ότι αποτελούν μια αναλογία.

Παράδειγμα

Οι λόγοι $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{10}$ σχηματίζουν αναλογία γιατί είναι ίσοι $\left[\frac{1}{5} = \frac{2}{10}\right]$

Για να σχηματίσω αναλογία από ένα λόγο, αρκεί να φτιάξω έναν άλλο λόγο που να είναι ίσος με τον πρώτο, όπως στα κλάσματα (πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας και τους δύο όρους με κάποιον αριθμό).

Εφαρμογή 1η

Από 9 πορτοκάλια βγαζουμε 3 ποτήρια χυμό. Από 18 πορτοκάλια βγάζουμε 6 ποτήρια χυμό. Οι λόγοι πορτοκαλιών προς ποτήρια χυμού στις δύο περιπτώσεις σχηματίζουν αναλογία;

Λύση:

Οι λόγοι $\frac{\text{πορτοκάλια}}{\text{ποτήρια με χυμό}}$ $\frac{9}{3}$, $\frac{18}{6}$ είναι ίσοι

γιατί $\frac{9 \cdot 2}{3 \cdot 2}$ = ___ .

Απάντηση: Οι λόγοι είναι ίσοι. Άρα σχηματίζουν αναλογία.

Εφαρμογή 2η

Για ένα πετυχημένο ρόφημα σοκολάτα η μαμά βάζει 1 κουταλιά κακάο και 2 κουταλιές ζάχαρη με μία κούπα γάλα. Για να έχουμε την ίδια αναλογία όταν έρθουν τρεις φίλοι μας, πόσες κουταλιές κακάο και πόσες κουταλιές ζάχαρη πρέπει να βάλουμε;

Λύση:

Ο λόγος $\frac{\text{κακάο}}{\text{ζάχαρη}}$ στο ρόφημα είναι $\frac{1}{2}$ για μία κούπα γάλα.

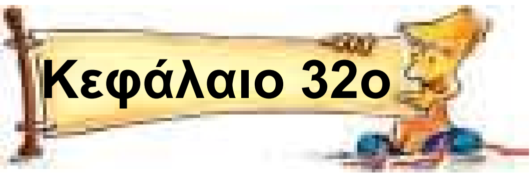
Για να φτιάξουμε ένα λόγο που να αποτελεί αναλογία με το $\frac{1}{2}$ για 3 κούπες γάλα, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους του πρώτου λόγου με το 3, δηλαδή $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{\quad}{\quad}$.

Απάντηση: Στις 3 κούπες γάλα αντιστοιχούν .... κουταλιές κακάο προς .... κουταλιές ζάχαρη

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο αναλογία. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα; Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Η αναλογία εκφράζει την ισότητα δύο λόγων.***	☐	☐
→ ***Σε κάθε αναλογία οι παρονομαστές είναι ίσοι.***	☐	☐
→ ***Οι λόγοι $\frac{2}{9}$ και $\frac{9}{2}$ αποτελούν αναλογία.***	☐	☐



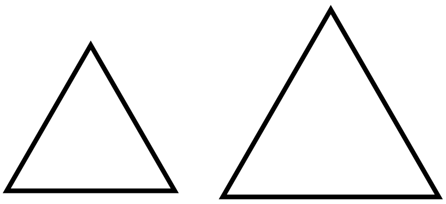
Κεφάλαιο 32ο Αναλογίες

Αναλογία; «Χιαστί» θα βρω το x !

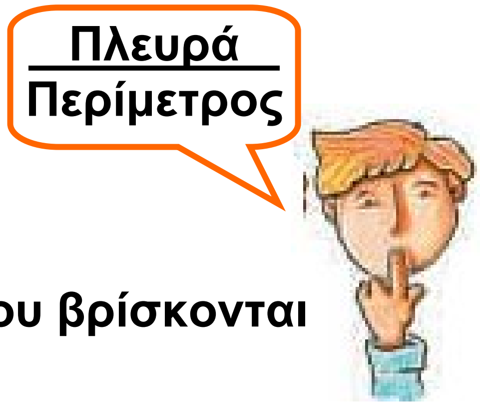
→ ***Βρίσκω τη σχέση των όρων της αναλογίας.***
→ ***Υπολογίζω τον άγνωστο όρο της αναλογίας.***

Δραστηριότητα 1η

- **Συμπλήρωσε τους αριθμούς του πίνακα:**



Πλευρά ισόπλευρου τριγώνου	**1**	**2**
Περίμετρος τριγώνου		

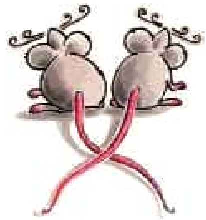


- **Σύγκρινε τους δύο λόγους.**
- **Πώς προκύπτει ο δεύτερος λόγος από τον πρώτο;**
- **Πολλαπλασίασε τους αριθμούς που βρίσκονται στο ίδιο χρώμα.**
- **Σύγκρινε τα δύο γινόμενα που βρήκες. Τι παρατηρείς;**

Δραστηριότητα 2η

Τρεις μήνες σύνδεση στο Internet κοστίζουν 27 €. Οι δώδεκα μήνες κοστίζουν …….. €.

- Συμπλήρωσε τον αριθμό στον πίνακα:



Διάρκεια σύνδεσης	3	12
Κόστος	27	

- Μπορείς εύκολα να συγκρίνεις τους δύο λόγους;
- Δοκίμασε τη μέθοδο του πολλαπλασιασμού χιαστί.

…………………………………………………………………....

- Τι παρατηρείς για τα δύο γινόμενα; …………………....

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε:

Σταυρωτά γινόμενα

Πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους μιας αναλογίας τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα. Τα γινόμενα αυτά λέγονται σταυρωτά γινόμενα.

Παράδειγμα

Στην αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ τα σταυρωτά γινόμενα είναι:

$4 \cdot 3 = 12 \qquad 6 \cdot 2 = 12$

Εφαρμογή 1η

Ένας φούρναρης ανακάτεψε 36 κιλά αλεύρι σιταριού με 12 κιλά αλεύρι καλαμποκιού για να φτιάξει ψωμί ανάμεικτο. Την επόμενη μέρα, για να κάνει περισσότερα ψωμιά, ανακάτεψε 54 κιλά αλεύρι σιταριού με 18 κιλά

αλεύρι καλαμποκιού. Το ανάμεικτο ψωμί είχε την ίδια αναλογία συστατικών τις δύο μέρες;

Λύση:

Σχηματίζω τους λόγους: $\dfrac{\text{αλεύρι σιταριού}}{\text{αλεύρι καλαμποκιού}}$

είναι τη μια μέρα $\dfrac{36}{12}$ **και την άλλη** $\dfrac{54}{18}$ **.**

Για να διαπιστώσω αν υπάρχει αναλογία σχηματίζω τα σταυρωτά γινόμενα:

36 • 18 = …… και 12 • 54 = ……

Διαπίστωσα ότι είναι ίσα.

Άρα $\dfrac{36}{12} = \dfrac{54}{18}$ **δηλαδή οι λόγοι αποτελούν αναλογία.**

Απάντηση: Το ανάμεικτο ψωμί και των δύο ημερών έχει την ίδια αναλογία συστατικών.

Εφαρμογή 2η

Για να φτιάξουμε καρυδόπιτα χρειαζόμαστε 12 αυγά και 8 κούπες ζάχαρη. Αν έχουμε μόνο 9 αυγά, πόσες κούπες ζάχαρη πρέπει να βάλουμε για να έχει το γλυκό την ίδια αναλογία;

Λύση:

Για να σχηματίσω αναλογία, πρέπει να έχω δύο ίσους λόγους. Ο λόγος $\dfrac{\text{αυγά}}{\text{ζάχαρη}}$ **στη συνταγή είναι** $\dfrac{12}{8}$ **.**

Αφού η ποσότητα της ζάχαρης είναι άγνωστη, τη συμβολίζω με Χ. Άρα ο λόγος των αυγών που έχω προς τη ζάχαρη

που χρειάζομαι είναι $\frac{9}{x}$.

1. Σχηματίζω την αναλογία: $\frac{12}{8} = \frac{9}{x}$

2. Εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: $12 \cdot x = 8 \cdot 9$

3. Κάνω τον πολλαπλασιασμό: $12 \cdot x =$ …..

4. Λύνω την εξίσωση: x = …………….

Άρα x = ……

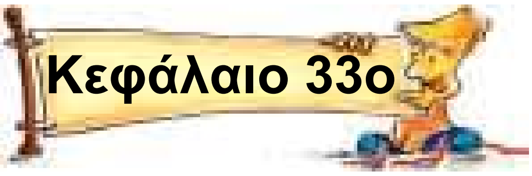
Απάντηση: Πρέπει να βάλουμε …… κούπες ζάχαρη.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο σταυρωτά γινόμενα. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Δύο λόγοι αποτελούν αναλογία αν τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.***	☐	☐
→ ***Σε δύο λόγους πάντοτε τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.***	☐	☐



Κεφάλαιο 33ο

Σταθερά και μεταβλητά ποσά

Εκφράζομαι … ακριβώς!

→ *Μελετώ την έννοια του ποσού.*
→ *Διακρίνω τα ποσά από τις αντίστοιχες τιμές τους.*
→ *Συγκρίνω και αναγνωρίζω τα σταθερά και τα μεταβλητά ποσά.*

Δραστηριότητα 1η

Στο Καρλόβασι, τα παιδιά της Στ΄ τάξης ανέβασαν ένα θεατρικό έργο. Στις πρόβες τα παιδιά σημείωσαν κάποιες φράσεις:

«Δώσε ένα κομμάτι από τη δόξα των προγόνων για να γίνει διπλή η περηφάνια μου»
«Με πόσο πάθος και αρετή πολέμησαν για λίγη ελευθερία!»
«Οι πολιορκητές απείχαν από το Μεσολόγγι 200 μέτρα»
«Οι πολιορκούμενοι είχαν τεράστια αποθέματα ανδρείας και θάρρους»
«Σαράντα πέντε άλογα και χίλιοι πεζοπόροι»
«Ταλαιπωρημένα άλογα και κουρασμένοι πεζοπόροι»

- **Ποιες από τις φράσεις των παιδιών εκφράζουν ποσά (μπορούν να μετρηθούν);**
- **Τι παρατηρείς για τα άλογα και τους πεζοπόρους στις δύο τελευταίες φράσεις;**
- **Σκεφτείτε στην ομάδα σας και παρουσιάστε τρεις φράσεις που εκφράζουν ποσά και τρεις που δεν εκφράζουν ποσά.**

Δραστηριότητα 2η

Όπως οι άνθρωποι, έτσι και τα ποσά έχουν όνομα κι επίθετο!
Κάποιοι άνθρωποι είναι τόσο γνωστοί που δεν χρειάζεται να πούμε το όνομα και το επίθετό τους για να καταλάβουμε σε ποιον αναφερόμαστε. Λέμε για παράδειγμα, ο Μπετόβεν, ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης.
Με τον ίδιο τρόπο κάποια ποσά, όπως το βάρος, το μήκος, το πλάτος, το πλήθος, η θερμοκρασία κ.ά. είναι τόσο γνωστά ώστε δεν αναφέρονται αλλά εννοούνται.
Έτσι, όταν λέμε «χίλιοι πεζοπόροι» εννοούμε «το πλήθος των πεζοπόρων ήταν χίλιοι».
Αντιστοίχισε τη φράση με το ποσό στα δεξιά και συμπλήρωσε την τιμή του.

ΦΡΑΣΗ
Σαράντα πέντε άλογα
Το θερμόμετρο δείχνει 9 βαθμούς
Ο Γιάννης είναι 1,55 μ.
Τα κύματα ήταν ένα μέτρο
Ένα κιλό ψωμί
Άνεμος 7 μποφόρ
Τρία μήλα
Τρία κιλά μήλα

ΠΟΣΟ	ΤΙΜΗ
Το ύψος του Γιάννη	
Το ύψος των κυμάτων	
Η θερμοκρασία	
Το πλήθος των αλόγων	
Η ένταση του ανέμου	
Το βάρος του ψωμιού	
Το βάρος των μήλων	
Το πλήθος των μήλων	

Διαβάστε τη φράση «Πάχυνα! Η ζυγαριά δείχνει πενήντα κιλά!» και βρείτε ποιο είναι το ποσό και ποια η τιμή του.
Ποσό ……………………   Τιμή ……………………

Στην καθημερινή μας ζωή συναντάμε έννοιες που δεν είναι δυνατό να μετρηθούν και τις αντιλαμβανόμαστε υποκειμενικά - διαισθητικά (π.χ. καλό / κακό, γλυκό / πικρό, θαρραλέος / φοβητσιάρης κ.ά.). Συναντάμε όμως και έννοιες που μπορούν να μετρηθούν.

Ποσά

Οι έννοιες που μπορούν να μετρηθούν και επομένως να εκφραστούν με συγκεκριμένο αριθμό λέγονται ποσά.

Παράδειγμα

Η αίθουσα μας είναι 55 τετραγωνικά μέτρα. (το ποσό είναι το εμβαδά της αίθουσας)
Δουλεύω 8 ώρες την ημέρα. (χρονική διάρκεια)

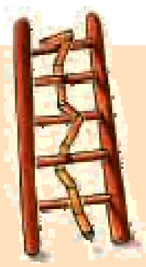
Υπάρχουν ποσά σταθερά, δηλαδή έχουν πάντοτε την ίδια τιμή και ποσά μεταβλητά, τα οποία μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές.

Παράδειγμα

Η απόσταση Αθήνας – Θεσσαλονίκης είναι σταθερό ποσό.
Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο σε 1 ώρα είναι μεταβλητό ποσό (εξαρτάται από την ταχύτητά του).

Εφαρμογή

Διακρίνω τα σταθερά από τα μεταβλητά ποσά



- Σκεφτείτε στην ομάδα και παρουσιάστε ποσά μεταβλητά και ποσά που παραμένουν σταθερά.
- Συζητήστε πώς μεταβάλλεται ένα ποσό (τι το επηρεάζει;).

Παράδειγμα απάντησης:

Στον πίνακα που ακολουθεί, σημειώνω στη στήλη ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ την τιμή για τα ποσά που παραμένουν σταθερά και για τα ποσά που μεταβάλλονται σημειώνω τον παράγοντα που τα επηρεάζει στη στήλη ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ …

ΠΟΣΑ	ΣΤΑΘΕΡΟ / ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ	ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ…
Η θερμοκρασία που παγώνει το καθαρό νερό	Σταθερό	…βαθμοί	—
Το ύψος των κυμάτων της θάλασσας.	Μεταβλητό	—	την ένταση του ανέμου
Το ύψος του Ολύμπου.	Σταθερό	2.917 μ.	—
Το άθροισμα των γωνιών τετραγώνου.	Σταθερό	……°	—
Η κατανάλωση ενός αυτοκινήτου.	Μεταβλητό	—	την ταχύτητά του
Τα έσοδα του κυλικείου του σχολείου.	Μεταβλητό	—	τις πωλήσεις του

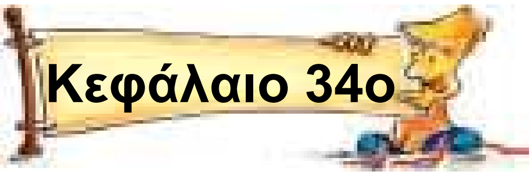
ΠΟΣΑ	ΣΤΑΘΕΡΟ / ΜΕΤΑΒΛΗ-ΤΟ	ΣΤΑΘΕ-ΡΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΤΑΒΑΛΛΕ-ΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ…
Ο λογαρια-σμός του τηλεφώνου.	Μεταβλητό	—	τις μονάδες που έγιναν
Το κόστος της τηλεφωνικής μονάδας.	Μεταβλητό	—	την τιμή της μονάδας
Η θερμοκρα-σία σήμερα.	Μεταβλητό	—	την ώρα, τον άνεμο κ.ά.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τις έννοιες ποσό και τι-μή. Μπορείς να τις εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα; Δώσε παραδείγματα σταθερών και μεταβλητών ποσών.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ *Η Στ΄ τάξη έχει 18 μαθητές. Οι μαθητές είναι το ποσό.*	☐	☐
→ *Ο Λευτέρης είναι άριστος μαθητής (εκφράζει ποσό).*	☐	☐
→ *Ο Λευτέρης είναι 12 ετών (εκφράζει ποσό).*	☐	☐
→ *Σταθερά είναι τα ποσά που εκφράζονται με διάφορες τιμές.*	☐	☐



Ανάλογα ποσά

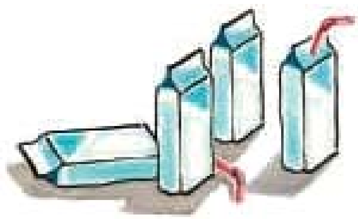
Όταν ανεβαίνω … ανεβαίνεις

→ ***Μελετώ την έννοια των ανάλογων ποσών.***
→ ***Συγκρίνω ποσά.***
→ ***Αναγνωρίζω τα ανάλογα ποσά.***

Δραστηριότητα 1η

Για τις ανάγκες του σχολικού συνεταιρισμού τα παιδιά της Στ΄ τάξης θέλησαν να κάνουν πίνακα με τις ποσότητες και τις τιμές για τους χυμούς του κυλικείου του συνεταιρισμού.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ				
Ποσότητα χυμού (κουτιά)	1	2	4	8	16
Αξία σε €	2	4	8	16	32



- **Από τι εξαρτάται η αξία των χυμών σε κάθε περίπτωση;**
- **Πώς προκύπτει η αξία για κάθε ποσότητα;**
- **Σύγκρινε τους λόγους που σχηματίζονται. Τι παρατηρείς;**

……………………………………………………………………
……………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Το τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα 80 χιλιόμετρα την ώρα.

Μπορείς να υπολογίσεις τα χιλιόμετρα που θα καλύψει σε 2, 3, 4, 5, 6 ... ώρες και να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί;

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ						
Χρόνος σε ώρες	1	2	3	4	5	6	7
Απόσταση σε χιλιόμετρα	80						

- Πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης γραμμής;

…………………………………………………………………………

- Σύγκρινε τον πρώτο αριθμό κάθε γραμμής με κάποιον από τους αριθμούς που ακολουθούν. Πώς προκύπτει εκείνος από τον πρώτο; ……………………………………

…………………………………………………………………………

- Σύγκρινε και τους αντίστοιχους λόγους $\frac{\text{χρόνος}}{\text{απόσταση}}$

…………………………………………………………………………

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές, όταν ένα ποσό μεταβάλλεται, προκαλεί μεταβολή σε ένα άλλο ποσό.

Ανάλογα ποσά

Δύο ποσά είναι ανάλογα, όταν οι τιμές του ενός προκύπτουν από τις τιμές του άλλου πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά με έναν σταθερό αριθμό.

Στα ανάλογα ποσά ο λόγος των τιμών τους διατηρείται σταθερός.

Παράδειγμα

Η αξία ενός υφάσματος είναι ανάλογη προς το μήκος του.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	1	2	3	4
Αξία υφάσματος σε €	5	10	15	20

Οι λόγοι τους είναι ίσοι: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = 0{,}2$

Κάποια ποσά, ενώ φαίνεται ότι εξαρτώνται το ένα από το άλλο, γιατί αυξάνονται ταυτόχρονα, δεν είναι ανάλογα. Τέτοια ποσά είναι η ηλικία και το ύψος ενός ανθρώπου ή η ηλικία και το βάρος του (ευτυχώς!). Μπορείτε να σκεφτείτε κι εσείς άλλα τέτοια ζευγάρια ποσών;

Εφαρμογή 1η

Από τα παρακάτω ζευγάρια ποσών, υπογραμμίζω αυτά που είναι ανάλογα:

Η πλευρά ενός τετραγώνου και η περίμετρός του.
Τα χρήματα που κερδίζουμε και τα χρήματα που ξοδεύουμε.
Η ποσότητα ενός προϊόντος και η χρηματική αξία του.
Η ώρα της ημέρας και η θερμοκρασία.
Λύση:

Η πλευρά ενός τετραγώνου και η περίμετρός του (είναι ανάλογα γιατί η τιμή της περιμέτρου προκύπτει πάντα ………………… ………………………………………………………)

Η ποσότητα ενός προϊόντος και η χρηματική αξία του (είναι ανάλογα γιατί η χρηματική αξία των προϊόντων προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε ……………………..
…………………………………………………………………….)
(Στην πραγματικότητα βέβαια, αν αγοράσω μεγάλη ποσότητα μπορεί να έχω έκπτωση!)

Εφαρμογή 2η

Η Ελένη για να διαβάσει 3 σελίδες κάνει 5 λεπτά. Μπορείς να βρεις πόσο θα κάνει για να διαβάσει 15 σελίδες, 30 σελίδες, 180 σελίδες αν κρατήσει τον ίδιο ρυθμό ανάγνωσης;

Λύση – Απάντηση:

Εξετάζω τα ποσά. Παρατηρώ ότι είναι ανάλογα (επειδή όταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται... η τιμή του ενός, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται... και η τιμή του άλλου).

Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών:

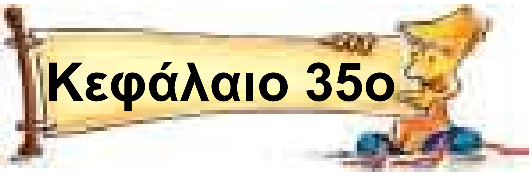
ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός σελίδων	3	15	30	180
Χρόνος σε λεπτά	5	25	…..	……

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο: ανάλογα ποσά. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ ***Το βάρος του τυριού και το βάρος του γάλακτος από το οποίο γίνεται είναι ποσά ανάλογα.***	☐	☐
→ ***Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των τιμών τους είναι πάντα ίσοι.***	☐	☐



Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά

Η εύκολη λύση!

- ***Διακρίνω αν δύο ποσά είναι μεταξύ τους ανάλογα.***
- ***Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.***
- ***Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναλογίας***

Δραστηριότητα 1η

Η σχολική ομάδα μπάσκετ θέλει να προμηθευτεί αθλητικά μπλουζάκια. Βρήκαν ότι σε προσφορά τα 2 μπλουζάκια κοστίζουν 12 €. Πόσο θα κοστίσουν τα μπλουζάκια για όλη την ομάδα που αποτελείται από 8 παίκτες;

- **Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος μπορώ εύκολα να υπολογίσω πόσο κάνουν τα 8 μπλουζάκια;**
- **Ξέροντας όμως την τιμή των 2 (πολλών) τι μπορώ να βρω;**
- **Πώς μπορώ μετά να βρω την τιμή των 8;**
- **Κάνε τις πράξεις στις κενές σειρές που ακολουθούν:**

• ………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
• ………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………
• ………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Στο ίδιο πρόβλημα μπορούμε να εργαστούμε και με άλλο τρόπο:

• Φτιάχνουμε έναν πίνακα για να καταγράψουμε τα δεδομένα του προβλήματος.

• Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε εσύ τα ποσά και τις αντίστοιχες τιμές που μας δίνει το πρόβλημα.

• Την άγνωστη τιμή μπορείς να την ονομάσεις x.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	

• Σκέφτομαι τη σχέση ανάμεσα στα δύο ποσά. (Για διπλάσια μπλουζάκια, χρειάζομαι διπλάσια χρήματα ή όχι;)

Τα ποσά ……………… και ………… είναι ……………………

Οι λόγοι τους …………………………………………………

Δηλαδή: —— = ——

• Με ποια μέθοδο μπορείς να βρεις τον άγνωστο όρο σ' αυτή την αναλογία;

………………………………………………………………………………

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να βρούμε την άγνωστη τιμή σε ένα πρόβλημα ανάλογων ποσών με διάφορους τρόπους:

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα με ποσά ανάλογα βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με διαίρεση) και στη συνέχεια βρίσκω την άγνωστη τιμή (με πολλαπλασιασμό) λέγεται αναγωγή στη μονάδα.

Παράδειγμα

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30 €. Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα ύφασμα;

Λύση

Τα 5 μέτρα κοστίζουν 30 €
Το 1 μέτρο κοστίζει 30 : 5 = 6 €
Τα 12 μέτρα κοστίζουν 12 • 6 = 72 €

β) Σχηματίζοντας την αναλογία

Εργάζομαι ως εξής:

- **Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.**
- **Εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα.**
- **Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.**
- **Σχηματίζω την αναλογία.**
- **Βρίσκω τον άγνωστο όρο της αναλογίας λύνοντας την εξίσωση.**

Παράδειγμα

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30 €. Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα;

Λύση

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	5	12
Αξία σε €	30	x

Τα ποσά μήκος υφάσματος και αξία είναι ανάλογα ποσά (το διπλάσιο μήκος έχει διπλάσια αξία). Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσοι. Σχηματίζω την αναλογία και βρίσκω τον άγνωστο όρο.

$\frac{5}{30} = \frac{12}{x}$ Άρα $5 \cdot x = 3$ επομένως $5 \cdot x = 360$

Άρα $x = 360 : 5$ $x = 72$

Εφαρμογή

Ένας αμπελουργός έκανε 600 κιλά κρασί από 1.800 κιλά σταφύλια. Την επόμενη χρονιά έκανε 800 κιλά κρασί. Πόσα κιλά σταφύλια είχε τη δεύτερη χρονιά;

Λύση

α) Με αναγωγή στη μονάδα:

Τα 600 κιλά κρασί γίνονται από ……… κιλά σταφύλια

Το 1 κιλό κρασί γίνεται από 1.800 : 600 = …… κιλά σταφύλια

Τα 800 κιλά κρασί γίνονται από 800 • …… = …… κιλά σταφύλια

β) Με αναλογία:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Βάρος κρασιού σε κιλά	600	800
Βάρος σταφυλιών σε κιλά	1.800	x

Σχηματίζω την αναλογία και εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: $\frac{600}{1.800} = \frac{800}{x}$

Σχηματίζω την εξίσωση: 600 • x = 1.800 • 800

Και τη λύνω 600 • x = 1.440.000
x = ………… Άρα x = …………

Απάντηση: Τη δεύτερη χρονιά είχε ……… κιλά σταφύλια.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο: αναγωγή στη μονάδα. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
➔ ***Αναγωγή στη μονάδα σημαίνει «βρίσκω την τιμή των πολλών».***	☐	☐
➔ ***Στην αναλογία τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.***	☐	☐
➔ ***Τα ανάλογα ποσά δεν έχουν πάντα ίσους λόγους.***	☐	☐

Περιεχόμενα 2ου τόμου

1η Θεματική Ενότητα

(Συνέχεια από τον 1ο τόμο)

2η Θεματική Ενότητα

3η Θεματική Ενότητα