

# **Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού**

**3ος τόμος**

**Κεφάλαια 36 - 53**

<b>ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ</b>	<i>Όλγα Κασώτη, Εκπαιδευτικός Πέτρος Κλιάπης, Εκπαιδευτικός Θωμάς Οικονόμου, Εκπαιδευτικός</i>
<b>ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ</b>	<i>Δέσποινα Πόταρη, Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Πατρών Δέσποινα Αγγελοπούλου, Σχολική Σύμβουλος Κωνσταντίνος Βρυώνης, Εκπαιδευτικός</i>
<b>ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ</b>	<i>Ανδρέας Κατσαούνης, Σκιτσογράφος-Εικονογράφος</i>
<b>ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</b>	<i>Ευφροσύνη Ξιγή, Φιλολόγος</i>
<b>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ</b>	<i>Γεώργιος Τύπας, Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου</i>
<b>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</b>	<i>Νικόλαος Ναυρίδης, Εικαστικός καλλιτέχνης</i>
<b>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</b>	<b>ACCESS ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ Α.Ε.</b>

Στη συγγραφή του δεύτερου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και ο Κώστας Ζιώγας, Εκπαιδευτικός

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**Πέτρος Κλιάπης Όλγα Κασώτη Θωμάς Οικονόμου**

# **Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού**

**3ος τόμος**

**Κεφάλαια 36-53**

**Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία  
Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων  
σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»**

**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ**

**Μιχάλης Αγ. Παπαδόπουλος**

**Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ *Πρόεδρος του  
Παιδαγωγ. Ινστιτούτου***

**Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και  
παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με  
βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Δημοτικό και το  
Νηπιαγωγείο»**

**Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου**

**Γεώργιος Τύπας**

***Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδ. Ινστιτ.***

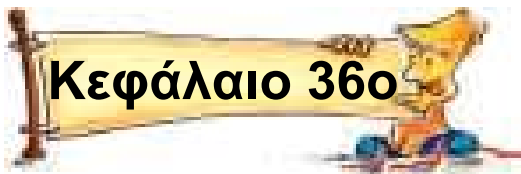
**Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου**

**Γεώργιος Οικονόμου**

***Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδ. Ινστιτ.***

**Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό  
Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.**

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ  
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ  
*Ομάδα Εργασίας Αποφ. 16158/6-11-06*  
*και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ***



## Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά

**Μαζί δεν κάνουμε και χώρια δεν μπορούμε!**



→ Μελετώ την έννοια των αντίστροφων ποσών.

→ Συγκρίνω ποσά.

→ Αναγνωρίζω τα αντίστροφα ποσά.

### Δραστηριότητα 1η

Τα παιδιά της Στ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου Ν. Καλλικράτειας συγκέντρωσαν στο ταμείο τους 90 €. Με τα χρήματα αυτά θέλησαν να εμπλουτίσουν τη βιβλιοθήκη της τάξης τους. Στο τοπικό βιβλιοπωλείο υπήρχαν βιβλία με διάφορες τιμές. Γύρισαν στο σχολείο και έφτιαξαν έναν πίνακα με τις τιμές των βιβλίων και τις ποσότητες που θα μπορούσαν να αγοράσουν με τα 90 € που είχαν.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ				
Τιμή βιβλίου σε €	3	6	9	15	
Αριθμός βιβλίων	30				

- Μπορείς με την ομάδα σου να συμπληρώσεις τον πίνακα;
- Παρατηρήστε στον πίνακα τη σχέση του αριθμού των βιβλίων με την τιμή.

- Όταν η τιμή του βιβλίου γίνει διπλάσια, μπορώ να αγοράσω τον ίδιο αριθμό βιβλίων;
- Συζητήστε: Τι νομίζετε ότι ενδιαφέρει τα παιδιά για τη σχολική βιβλιοθήκη: η ποσότητα ή οι ακριβές εκδόσεις;

## Δραστηριότητα 2η

Ο Διευθυντής, κάθε καλοκαίρι, για να ετοιμάσει το Σχολείο για την καινούρια σχολική χρονιά φροντίζει για το βάψιμό του. Για να βαφεί όλο το Σχολείο χρειάζονται 12 μέρες δουλειά. Πέρυσι ο ελαιοχρωματιστής ήταν μόνος και πήρε 12 μεροκάματα. Επειδή όμως οι εργασίες πρέπει να έχουν τελειώσει πριν αρχίσουν τα μαθήματα, φέτος ο Διευθυντής ζήτησε από άλλα 3 συνεργεία (με περισσότερους εργάτες) μια εκτίμηση για τις μέρες που θα χρειαστούν για το βάψιμο. Τις απαντήσεις τους τις κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα:



ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός εργατών του συνεργείου	1	2	3	4
Ημέρες εργασίας	12	6	4	3

- Παρατήρησε τη σχέση αριθμού των εργατών προς τις ημέρες που θα εργάζονται για το βάψιμο.
- Προσπάθησε να βρεις τα μεροκάματα που θα χρειαστούν σε κάθε περίπτωση.

Μεροκάματα για κάθε συνεργείο	$1 \cdot 12 = 12$			
-------------------------------	-------------------	--	--	--

- Τι παρατηρείς; .....
- Συζητήστε: Αν έπρεπε να διαλέξετε εσείς, ποιο συνεργείο θα διαλέγατε;

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές, όταν ένα ποσό αλλάζει, προκαλεί αντίστροφη αλλαγή σε ένα άλλο ποσό.

### Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα λέγονται δύο ποσά, στα οποία, όταν πολλαπλασιάζεται η τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, η αντίστοιχη τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό.

Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα με έναν σταθερό αριθμό.

### Παράδειγμα

Ο αριθμός των εργατών είναι αντιστρόφως ανάλογος προς τις ημέρες εργασίας για ένα συγκεκριμένο έργο.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός εργατών	1	2	3	4
Ημέρες εργασίας	12	6	4	3

Τα αντίστοιχα γινόμενά τους είναι ίσα:  $1 \cdot 12 = 12$ ,  
 $2 \cdot 6 = 12$ ,  $3 \cdot 4 = 12$ ,  $4 \cdot 3 = 12$

### Εφαρμογή 1η

Εξετάσετε τα παρακάτω ζευγάρια ποσών, και υπογραμμίστε τα αντιστρόφως ανάλογα:

**Αριθμός εργατών** και **χρόνος εκτέλεσης** ενός έργου.  
**Ταχύτητα** αυτοκινήτου και **ώρες** που ταξιδεύει για μια διαδρομή.

**Άτομα** και **ποσότητα φαγητού** που καταναλώνουν.  
**Κιλά** και **αξία** σε οποιοδήποτε προϊόν.

Λύση:



**Αριθμός εργατών** και **χρόνος εκτέλεσης** ενός έργου.  
(Είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί με διπλάσιο αριθμό εργατών

ο χρόνος εκτέλεσης ενός έργου μειώνεται στο μισό.)

**Ταχύτητα** αυτοκινήτου και **ώρες** που ταξιδεύει για μια διαδρομή. (Είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί με διπλάσια ταχύτητα οι ώρες που θα ταξιδεύει για να καλύψει μια διαδρομή μειώνονται στο μισό.)

## **Εφαρμογή 2η**

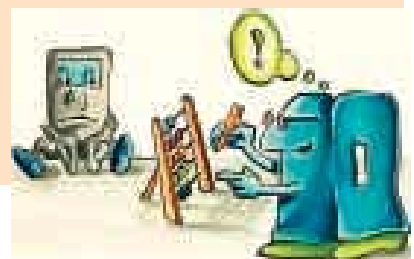
Το ποσό που θα μοιράσει η ΛΟΤΤΑΡΙΑ σ' αυτή την κλήρωση στους νικητές είναι 60.000 €. Πόσα θα είναι τα κέρδη του νικητή, αν είναι ένας; Πόσα θα είναι τα κέρδη του καθενός, αν οι νικητές είναι δύο; Αν είναι τρεις ή τέσσερις;

Λύση:

α. Τα ποσά στο πρόβλημα είναι: **Αριθμός νικητών**, **Κέρδη σε ΕΥΡΩ**.

β. Εξετάζω τη σχέση των ποσών μεταξύ τους (τι συμβαίνει στα κέρδη όσο αυξάνεται ο αριθμός των νικητών;).

γ. Παρατηρώ ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα



δ. Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών και συμπληρώνω τις τιμές.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός νικητών	1	2	3	4
Κέρδη σε €	60.000	.....	20.000	.....

### Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

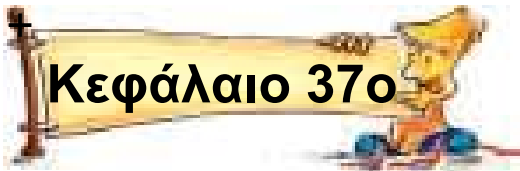
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Δύο ποσά που αυξάνονται ταυτόχρονα είναι αντιστρόφως ανάλογα.

→ Στα αντίστροφα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσα.



## Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά

### **Παίρνοντας αποφάσεις!**



→ Διακρίνω αν δύο ποσά είναι μεταξύ τους αντιστρόφως ανάλογα.

→ Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.

→ Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο των ίσων γινομένων.

### **Δραστηριότητα 1η**

Το πρόγραμμα της παιδικής κατασκήνωσης προβλέπει ότι τα παιδιά θα τρώνε ένα παγωτό την ημέρα. Ο υπεύθυνος για το πρόγραμμα διατροφής της κατασκήνωσης, προμηθεύτηκε τόσα παγωτά, ώστε να επαρκέσουν για **20 ημέρες** για τους **15 μαθητές** που θα φιλοξενούσε η κατασκήνωση. Αν έρθουν **25 μαθητές** για **πόσες ημέρες** θα έχουν παγωτό;

- Μπορώ να βρω εύκολα για πόσες ημέρες θα έχουν παγωτό τα 25 παιδιά;
- Αν στην κατασκήνωση, αντί για 15 παιδιά, πήγαινε μόνο 1 παιδί, μπορώ να υπολογίσω για πόσες μέρες θα είχε παγωτά (αν έτρωγε ένα την ημέρα);
- Με τον τρόπο αυτό βρίσκω πόσα είναι τα παγωτά. Στη συνέχεια μπορώ να βρω για πόσες ημέρες θα επαρκέσουν για τους 25 μαθητές.

- Κάνω τις πράξεις: Αφού προβλεπόταν 15 παιδιά να έχουν παγωτά για 20 μέρες, 1 παιδί θα έχει παγωτά για .....

Άρα τα παγωτά είναι .....

Όμως τα παιδιά είναι 25 και θα μοιραστούν τα παγωτά.

Έτσι θα έχουν παγωτά για.....



## Δραστηριότητα 2η

- Στο ίδιο πρόβλημα εργάζομαι με άλλο τρόπο:
- Βρίσκω τα ποσά. Μπορείς να τα ονομάσεις;
- Συμπλήρωσε τα ποσά και τις αντίστοιχες τιμές που μας δίνει το πρόβλημα. Την άγνωστη τιμή τη συμβολίζω με X.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	

Εξετάζω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά **αριθμός μαθητών** και **αριθμός ημερών**... (δηλαδή όταν οι μαθητές γίνουν περισσότεροι, τα παγωτά επαρκούν για περισσότερες ή για λιγότερες ημέρες;) Διακρίνω, ότι τα ποσά **αριθμός μαθητών** και **αριθμός ημερών** είναι μεταξύ τους .....

Τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι.....

Δηλαδή: ..... · ..... = ..... · .....

- Μπορείς τώρα να βρεις τον άγνωστο όρο αυτής της ισότητας;

.....  
.....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να βρούμε την άγνωστη τιμή σε ένα πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά με δύο τρόπους:

### α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα με ποσά αντιστρόφως ανάλογα, βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με πολλαπλασιασμό) και στη συνέχεια διαιρώντας βρίσκω την άγνωστη τιμή, λέγεται αναγωγή στη μονάδα.

### Παράδειγμα

Οι 3 εργάτες τελειώνουν ένα έργο σε 20 ημέρες. Σε πόσες ημέρες τελειώνουν το ίδιο έργο οι 10 εργάτες;

### Λύση

Οι 3 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 20 ημέρες.

Ο 1 εργάτης τελειώνει το έργο σε  $20 \cdot 3 = 60$  ημέρες

Οι 10 εργάτες τελειώνουν το έργο σε  $60 : 10 = 6$  ημέρες

### β) Σχηματίζοντας πίνακα ποσών και τιμών

Εργάζομαι ως εξής:

- Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.
- Εξετάζω αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.
- Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.
- Σχηματίζω την εξίσωση που δημιουργείται από τα ίσα γινόμενα των τιμών.
- Βρίσκω τον άγνωστο όρο, λύνοντας την εξίσωση.

### Παράδειγμα

Στο προηγούμενο παράδειγμα εργαζόμαστε με πίνακα.

Φτιάχνουμε τον πίνακα ποσών και τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός εργατών	3	10
Ημέρες εργασίας	20	X

Τα ποσά **αριθμός εργατών** και **ημέρες εργασίας** είναι αντιστρόφως ανάλογα (ο διπλάσιος αριθμός εργατών τελειώνει το έργο στις μισές μέρες).

Άρα τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα.

Σχηματίζω τα γινόμενα και βρίσκω τον άγνωστο όρο.

$$10 \cdot X = 20 \cdot 3$$

$$10 \cdot X = 60 \quad \text{επομένως}$$

$$X = 60 : 10 \quad \text{Άρα } X = 6 \text{ ημέρες}$$

### Εφαρμογή

Τα 12 λεωφορεία για τη μεταφορά των μαθητών κάνουν 2 δρομολόγια. Τα 4 λεωφορεία χάλασαν. Πόσα δρομολόγια θα κάνουν τα 8 λεωφορεία που έμειναν;

Λύση:

α) με αναγωγή στη μονάδα:

Τα 12 λεωφορεία κάνουν 2 δρομολόγια

Το 1 λεωφορείο θα έκανε  $12 \cdot 2 = 24$  δρομολόγια

Τα 8 λεωφορεία θα κάνουν  $24 : 8 = 3$  δρομολόγια

β) με πίνακα τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός λεωφορείων	3	10
Δρομολόγια	20	X



Σχηματίζω την εξίσωση των ίσων γινόμενων:

$$8 \cdot X = 12 \cdot 2 \quad \text{και τη λύνω} \quad 8 \cdot X = 24$$

$$\text{επομένως } X = \dots\dots \quad \text{Άρα } X = \dots\dots$$

Απάντηση: Τα 8 λεωφορεία θα κάνουν ..... δρομολόγια.

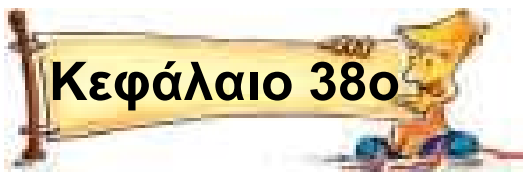
## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο αναγωγή στη μονάδα σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

- |  |                          |                          |
|--|--------------------------|--------------------------|
| → Αναγωγή στη μονάδα σημαίνει: βρίσκω την τιμή του ενός.       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| → Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| → Τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά έχουν πάντα ίσους λόγους.        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



## Η απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά

### *Η απλή μέθοδος των τριών!*



*Λύνω τα προβλήματα των ανάλογων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.*

### **Δραστηριότητα**

Τα παιδιά της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου της Αντιμάχειας στα πλαίσια ενός ευρωπαϊκού προγράμματος απέκτησαν φίλους σε ένα σχολείο στη Σκοτία. Αποφάσισαν να τους στείλουν 12 μουσικά CD με ελληνική μουσική. Στα μαγαζιά του νησιού τα 5 μουσικά CD κοστίζουν 30 €. Πόσα χρήματα θα χρειαστούν;

- Ποια είναι τα ποσά; .....
- Πως μεταβάλλονται; .....
- Είναι τα ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα;  
.....

• Αφού διακρίνω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά, προχωρώ στη λύση.

Ξέρω να λύνω πρόβλημα ανάλογων ποσών σχηματίζοντας την αναλογία:

1ο βήμα: Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών



ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός CD		
Αξία σε €		X

2ο βήμα: Σχηματίζω την αναλογία:  $\frac{\text{---}}{\text{---}} = \frac{\text{---}}{X}$

3ο βήμα: Εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα:

4ο βήμα: Λύνω την εξίσωση:  $X = \text{.....}$

Παρατηρώ την εξίσωση που σχημάτισα προηγουμένως

$X = 12 \cdot 30 : 5$  (ή  $X = 12 \cdot \frac{30}{5}$ ) και τη θέση των αριθμών

στον πίνακα ποσών και τιμών. Διαπιστώνω ότι το άγνωστο ποσό (x) είναι ίσο με τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα που σχηματίζουν οι

αριθμοί δίπλα του αλλά αντεστραμμένο:  $X = 12 \cdot \frac{30}{5}$

Στην παρατήρηση αυτή στηρίχθηκε μια άλλη μέθοδος για να λύσουμε προβλήματα ποσών, όπου γνωρίζουμε τρεις τιμές και ψάχνουμε την τέταρτη. Η μέθοδος αυτή ονομάστηκε απλή μέθοδος των τριών.

Λύνω το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών:

1ο βήμα: Κάνω κατάταξη (τακτοποιώ τα ποσά, προσέχοντας τώρα να βάλω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

τα **5 CD** κοστίζουν **30 €**

τα **12 CD** κοστίζουν **X;**

2ο βήμα: Ελέγχω ότι τα ποσά είναι ανάλογα

3ο βήμα: Εφαρμόζω και λύνω  $X = 30 \cdot \frac{12}{5}$

δηλαδή  $X = \frac{30 \cdot 12}{5}$  άρα  $X = \frac{360}{5}$  Άρα  $X = 72 €$

Από την παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώνουμε ότι, για να λύσουμε προβλήματα ανάλογων ποσών, υπάρχει και μια τρίτη μέθοδος (εκτός από την αναγωγή στη μονάδα και την αναλογία), η απλή μέθοδος των τριών.

### Απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά

Για να βρω την άγνωστη τιμή σε προβλήματα ανάλογων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών, ακολουθώ τρία βήματα:

1ο βήμα: Κατάταξη (βάζω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

2ο βήμα: Σύγκριση ποσών (εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα)

3ο βήμα: Λύση (πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το X επί το κλάσμα των άλλων δύο αριθμών αντεστραμμένο)

### Παράδειγμα

τα **3 τετράδια** κοστίζουν **2 €**

τα **27 τετράδια** κοστίζουν **X €;**

$$X = 2 \cdot \frac{27}{3} \quad \text{δηλαδή } X = \frac{2 \cdot 27}{3}$$

$$\text{άρα } X = \frac{54}{3} \quad \text{άρα } X = 18 \text{ €}$$

### Εφαρμογή

Ο καυστήρας της κεντρικής θέρμανσης του σχολείου καταναλώνει 54 λίτρα πετρέλαιο σε 3 ώρες.



Πόσες ώρες θα λειτουργεί το καλοριφέρ αν στη δεξαμενή υπάρχουν ακόμη 378 λίτρα πετρελαίου;

Λύση:

1ο βήμα: Κάνω την κατάταξη.

Σε 3 ώρες καίει 54 λίτρα

Σε X ώρες καίει 378 λίτρα;

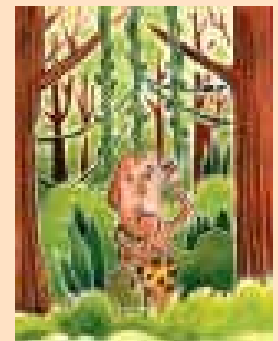
2ο βήμα: Εξετάζω τα ποσά. Είναι ανάλογα.

3ο βήμα: Λύνω το πρόβλημα.

$$X = 3 \cdot \frac{378}{54} \quad \text{δηλαδή } X = \frac{3 \cdot 378}{54}$$

άρα  $X = \text{---}$  άρα  $X = \text{.....}$  ώρες

Απάντηση: Θα λειτουργεί για ..... ώρες.



## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε την απλή μέθοδο των τριών σε ποσά ανάλογα. Μπορείς να την εξηγήσεις με δικά σου λόγια;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- |   | Σωστό                    | Λάθος                    |
|---|--------------------------|--------------------------|
| → Τα προβλήματα των ανάλογων ποσών λύνονται μόνο με την «απλή μέθοδο».                          | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| → Με όποια μέθοδο κι αν λύσω το πρόβλημα το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.                        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| → Στην κατάταξη στην απλή μέθοδο των τριών προσέχω τα ποσά του ίδιου είδους να είναι σε στήλες. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



## Η απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά



**Είναι απλό όταν ξέρω τις τρεις τιμές!**

**Λύνω τα προβλήματα των αντίστροφων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.**

### Δραστηριότητα

Για να υδροδοτήσουν ένα νέο οικισμό, οι μηχανικοί της εταιρείας ύδρευσης υπολόγισαν ότι θα χρειαστούν 180 σωλήνες των 5 μέτρων. Στην αποθήκη της εταιρείας υπάρχουν μόνο σωλήνες των 3 μέτρων. Πόσους τέτοιους σωλήνες θα χρειαστούν;

- Για να καλύψουμε την ίδια απόσταση με μικρότερους σωλήνες θα χρειαστούμε περισσότερους ή λιγότερους;

- Είναι τα ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα;

- Αφού διερευνήσω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά, προχωρώ στη λύση.

Ξέρω να λύνω πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά σχηματίζοντας τον πίνακα τιμών και εφαρμόζοντας τα ίσα γινόμενα:



- Στον πίνακα ποσών και τιμών συμπληρώνω τις τιμές:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μήκος σωλήνα		
Ποσότητα σωλήνων		X

- Εξετάζω τα γινόμενα των τιμών. Αυτά είναι:

.....

- Εφαρμόζω τα ίσα γινόμενα: .....  $\cdot X =$  .....

- Λύνω την εξίσωση:  $X =$  .....

Λύνω το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών:

Όπως στα ανάλογα ποσά, έτσι και στα αντιστρόφως ανάλογα γνωρίζουμε τρεις τιμές και ψάχνουμε την τέταρτη. Η απλή μέθοδος των τριών που εφαρμόζεται στα προβλήματα με ανάλογα ποσά μπορεί να εφαρμοστεί και στα αντιστρόφως ανάλογα μετά την κατάταξη των ποσών του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο.

Με μια διαφορά:

Το άγνωστο ποσό το βρίσκουμε πολλαπλασιάζοντας **τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα** που σχηματίζουν οι αριθμοί δίπλα του όπως είναι (όχι αντεστραμμένο)

1ο βήμα: Κάνω κατάταξη (τακτοποιώ τα ποσά, προσέχοντας τώρα να βάλω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

όταν το μήκος του σωλήνα:

είναι **5 μέτρα** χρειάζονται **180 σωλήνες**  
είναι **3 μέτρα** χρειάζονται **X σωλήνες;**

2ο βήμα: Ελέγχω τα ποσά και διακρίνω ότι είναι αντιστρόφως ανάλογα

3ο βήμα: Λύνω  $X = 180 \cdot \frac{5}{3}$  δηλαδή  $X = \frac{180 \cdot 5}{3}$

άρα  $X = \frac{900}{3}$  άρα  $X = 300$

Από την παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώνουμε ότι, για να λύσουμε προβλήματα αντίστροφων ποσών, υπάρχει και μια τρίτη μέθοδος (εκτός από την αναγωγή στη μονάδα και τον πίνακα ποσών και τιμών), η απλή μέθοδος των τριών.

### Απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά

Για να βρω την άγνωστη τιμή σε προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών, ακολουθώ τρία βήματα:

1ο βήμα: Κατάταξη (βάζω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

2ο βήμα: Σύγκριση ποσών (εξετάζω αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα)

3ο βήμα: Λύση (πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το  $X$  επί το κλάσμα των άλλων δύο αριθμών)

### Παράδειγμα

οι 3 εργάτες τελειώνουν σε 6 ημ.

οι 9 εργάτες τελειώνουν σε  $X$  ημ.;

$$X = 6 \cdot \frac{3}{9} \quad \text{δηλαδή } X = \frac{6 \cdot 3}{9}$$

$$\text{άρα } X = \frac{18}{9} \quad \text{άρα } X = 2 \text{ ημέρες}$$

Δεν πρέπει να ξεχνώ στο τέλος να ελέγχω την απάντηση. Αφού τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, οι περισσότεροι εργάτες χρειάζονται λιγότερες μέρες. Αυτό που βρήκα είναι λογικό;

## Εφαρμογή

Για να καλύψουν το πάτωμα του γυμναστηρίου με σανίδες, οι τεχνίτες υπολόγισαν ότι θα χρειαστούν 180 σανίδες μήκους 2,5 μέτρων. Τι ποσότητα θα πρέπει να αγοράσουν, αν χρησιμοποιήσουν σανίδες μήκους 2 μέτρων (και ίδιου πλάτους);



Λύση:

1ο βήμα: Κάνω την κατάταξη

όταν το μήκος των σανίδων:

είναι ..... χρειάζονται .....

είναι ..... χρειάζονται X σανίδες;

2ο βήμα: Εξετάζω τα ποσά: .....

3ο βήμα: Λύνω το πρόβλημα  $X =$  .....

Ελέγχω: Με μικρότερες σανίδες θα χρειαστούν περισσότερες από 180 ή λιγότερες;

Απάντηση: Θα χρειαστούν ..... σανίδες.

## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε την απλή μέθοδο των τριών σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Μπορείς να την εξηγήσεις με δικά σου λόγια;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Τα προβλήματα των αντίστροφων ποσών λύνονται με τρεις τρόπους.

→ Στα αντίστροφα ποσά, για να βρω το  $X$  πολλαπλασιάζω τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα των άλλων δυο αντεστραμμένο.

→ Στην κατάταξη προσέχω τα ποσά του ίδιου είδους να είναι σε στήλες.



## Κεφάλαιο 4ο

## Εκτιμώ το ποσοστό



### *Συγκρίνω (πο)σωστά %*



→ Κατανοώ ότι ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτού.

→ Μετατρέπω τα κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100.

→ Αντιλαμβάνομαι το σύνολο ως το 100% και εκτιμώ το ποσοστό.

### **Δραστηριότητα 1η**

Η Ε΄ και η Στ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου Θυμιανών συμμετείχαν στη δενδροφύτευση που οργάνωσε ο δήμος Χίου με σκοπό να αναδασώσει τις καμένες εκτάσεις στο νησί. Τα παιδιά της Ε΄ τάξης φύτεψαν 25 δεντράκια, από τα οποία φύτρωσαν τα 20. Τα παιδιά της Στ΄ τάξης φύτεψαν 50 δέντρα, από τα οποία φύτρωσαν τα 30. Ποια τάξη είχε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας στη δενδροφύτευση;



- Για να απαντήσουμε στην ερώτηση τι πρέπει να λάβουμε υπόψη;
- Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας είχε η τάξη της οποίας φύτρωσαν περισσότερα δέντρα; Εξηγήστε γιατί.

## Δραστηριότητα 2η

Στον αγώνα μπάσκετ της Στ' τάξης μεταξύ του 21ου και του 109ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, το τελικό σκορ ήταν 57 – 61. Οι δυο καλύτεροι παίκτες των δύο ομάδων ήταν ο Αχιλλέας Ι. κι ο Σωτήρης Κ. Ο Αχιλλέας πέτυχε 17 καλάθια στις 25 προσπάθειες ενώ ο Σωτήρης πέτυχε 16 καλάθια στα 20.



Ποιος είχε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

- Μπορείς εύκολα συγκρίνοντας τις επιτυχημένες βολές των δύο παικτών να αποφασίσεις ποιος ήταν καλύτερος παίκτης; .....
- Σχημάτισε τους λόγους επιτυχιών προς προσπάθειες για κάθε παίκτη.

$$\text{Αχιλλέας} = \frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}} = \text{————} \text{ και}$$

$$\text{Σωτήρης} = \frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}} = \text{————}$$

- Γιατί δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τους παραπάνω λόγους εύκολα;

.....

- Προσπάθησε να κάνεις τους λόγους ομώνυμα κλάσματα: ———, ———

- Είναι εύκολο να συμπεράνεις τώρα ποιος είχε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ένας εύκολος και κοινός τρόπος σύγκρισης του *μέρους προς το σύνολο* είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα κλάσμα με παρονομαστή το 100.

## Ποσοστά

Ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτού (ο λόγος του μέρους προς όλο το ποσό).

### Παράδειγμα

Το τεστ στα Αγγλικά είχε 20 ερωτήσεις.

Μαργαρίτα: Είχα ποσοστό επιτυχίας 19 στα 20 (19/20)

Βασίλης: Είχα ποσοστό επιτυχίας 17 στα 20 (17/20)

Όταν το μέρος ενός ποσού το μετατρέψουμε σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 100, τότε λέμε ότι έχουμε ποσοστό στα 100. Το ποσοστό  $\frac{\alpha}{100}$  συμβολίζουμε α%.

### Παράδειγμα

Η δασκάλα τους ανακοινώνει τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στα 100:

- Μαργαρίτα, είχες 95%.
- Βασίλη, εσύ είχες 85%.

Για μικρό μέρος μεγάλου ποσού χρησιμοποιούμε κλάσμα με παρονομαστή το 1.000 και το λέμε ποσοστό στα χίλια (‰).

## Εφαρμογή 1η

### Υπολογισμός ποσοστού με το νου

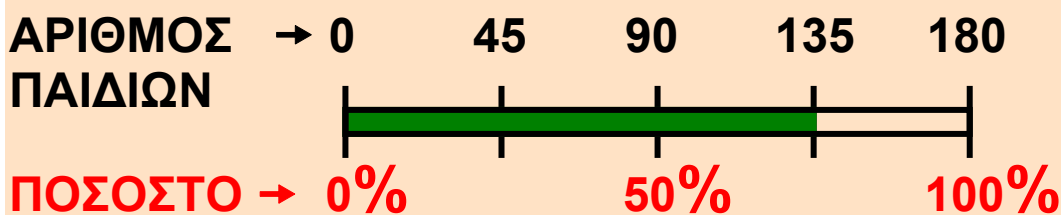
Μετά την επίσκεψη του σχολείου στον κινηματογράφο τα παιδιά έκαναν μια μικρή έρευνα για το αν άρεσε η ταινία. Από τα 180 παιδιά τα 135 απάντησαν ότι τους άρεσε. Πόσο ήταν το ποσοστό στα 100 (%) των παιδιών στα οποία άρεσε η ταινία;



Λύση - Απάντηση:

Σκέφτομαι ότι τα 180 παιδιά είναι το 100% αυτών που ρωτήθηκαν.

Υπολογίζω με το νου ότι τα μισά, δηλαδή τα 90, είναι το 50% και τα μισά από αυτά, δηλαδή τα 45, είναι το 25%. Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να χρωματίσουμε μέχρι τον αριθμό 135 και να συμπληρώσουμε το αντίστοιχο ποσοστό.



## Εφαρμογή 2η

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται η αρχική τιμή ενός προϊόντος, που είναι 400 € και 3 τελικές τιμές από τις οποίες καθεμία προκύπτει μετά την έκπτωση. Μπορείς να υπολογίσεις με το νου πόσο στα 100 (%) είναι η έκπτωση σε κάθε περίπτωση;

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΚΠΤΩΣΗΣ (%)	ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ

Λύση: Τα 400 € είναι το 100% της τιμής. Τα μισά (200 €) είναι το 50% της τιμής. Άρα, όταν η τελική τιμή είναι 200 €, το ποσοστό της έκπτωσης είναι 50%. Τα 100 € αντιστοιχούν στο  $\frac{1}{4}$  των 400 €, δηλαδή στο 25%. Στη β' περίπτωση πληρώνουμε 100 € λιγότερα από την αρχική τιμή. Άρα το ποσοστό της έκπτωσης είναι 25%. Με την ίδια λογική στη γ' περίπτωση τα 50 € λιγότερα που πληρώνουμε είναι το  $\frac{1}{8}$  των 400 € (το μισό του 25%). Άρα το ποσοστό της έκπτωσης είναι 12,5%.

## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο ποσοστό. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Το ποσοστό είναι ένας λόγος.



→ Τα ποσοστά τα χρησιμοποιούμε μόνο για εκπτώσεις.



# Κεφάλαιο 41ο Βρίσκω το ποσοστό



## Παίζοντας με τα ποσοστά



Κατανοώ τη σχέση μεταξύ κλάσματος, ποσοστού και δεκαδικού αριθμού.

Εκφράζω ποσοστό στα 100 (%) με κλάσμα και δεκαδικό αριθμό. Βρίσκω το ποσοστό ενός ποσού όταν ξέρω το ποσοστό στα 100 (%).

### Δραστηριότητα 1η

- Στην εικόνα της επόμενης σελίδας βλέπεις ένα βάτραχο. Κάτω από την εικόνα υπάρχει η ένδειξη 0,5 x. Τι νομίζεις ότι σημαίνει;



**ΒΑΤΡΑΧΟΣ 0,5 X**

Στα φωτοαντιγραφικά μηχανήματα, για να μεγεθύνεις ή να σμικρύνεις το φωτοαντίγραφο πρέπει να αλλάξεις την ένδειξη του ποσοστού.

50% ↔ 200% **100%**

◀ Σμίκρυνση/Μεγέθυνση ▶

- Ποια ένδειξη θα έβαζες για να πάρεις μια εικόνα που θα είναι μισή από την αρχική σου εικόνα;

- Μετρώντας τις διαστάσεις των δύο εικόνων, βρίσκουμε τη σχέση τους

$$\frac{\text{τελικό μέγεθος}}{\text{αρχικό μέγεθος}} = \frac{10 \text{ εκ.}}{20 \text{ εκ.}} = \frac{\dots\dots}{100} = 0,\dots\dots$$



- Η τελική εικόνα είναι το .....% της αρχικής.

## Δραστηριότητα 2η

Στις 4/7/2004 η Εθνική Ομάδα ποδοσφαίρου της Ελλάδας έπαιξε στον τελικό του Ευρωπαϊκού Πρωταθλήματος και στέφθηκε πρωταθλήτρια Ευρώπης. Όλοι οι Έλληνες πανηγύρισαν την κατάκτηση του κυπέλλου, λίγοι όμως ήταν αυτοί που είχαν την ευκαιρία να βρίσκονται στο στάδιο. Το στάδιο «Ντα Λουζ» της Λισαβόνας χωρούσε 65.000 άτομα και ήταν πλήρες. Από το σύνολο των εισιτηρίων, καθεμία από τις ομάδες πήρε το 25%, ενώ τα υπόλοιπα είχαν προπωληθεί. Πόσα ήταν τα εισιτήρια που είχε η ελληνική ομάδα στη διάθεσή της;



- Πώς θα βρεις το μέρος (25%) όταν ξέρεις το σύνολο, (65.000); .....
- Να εκφράσεις τώρα το ποσοστό 25% με τη δεκαδική του μορφή: .....
- Κάνε τώρα την ίδια πράξη με τον δεκαδικό αριθμό: .....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το ποσοστό με πολλούς τρόπους.

### Ποσοστό ενός ποσού

Το ποσοστό στα εκατό (%) μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός αριθμός, που δηλώνει εκατοστά. Τα κλάσματα είναι δυνατό να μετατραπούν σε ποσοστά αν τα μετατρέψουμε στα ισοδύναμα τους εκατοστιαία ή αν κάνουμε τη διαίρεση ανάμεσα στους όρους (με προσέγγιση εκατοστού).

#### Παράδειγμα

$$45\% = \left( \frac{45}{100} \right) = 45 : 100 = 0,45$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{20}{100} = 20\% \quad \text{ή} \quad \frac{1}{5} = 1 : 5 = 0,20 = 20\%$$

Βρίσκω το ποσοστό σημαίνει βρίσκω το μέρος του όλου.

#### Παράδειγμα

Το 15% του 70 είναι:  $\frac{15}{100} \cdot 70 = 10,5$  ή  $0,15 \cdot 70 = 10,5$

---

### Εφαρμογή 1η

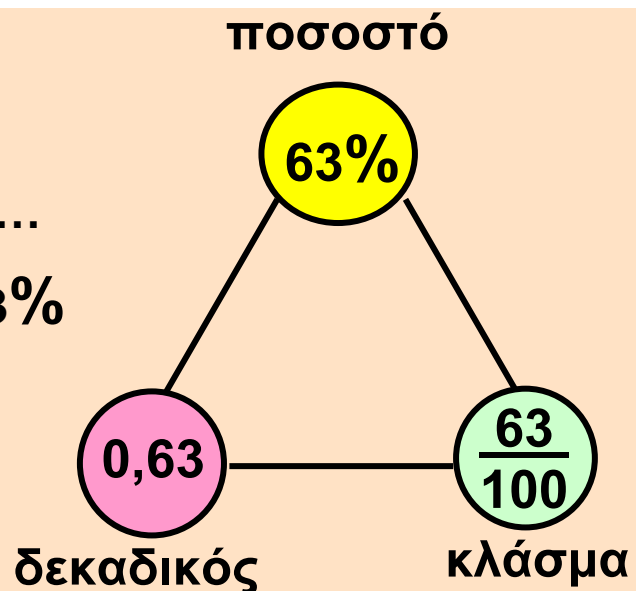
Εκφράζω το ποσό 63 λεπτά ως ποσοστό του ΕΥΡΩ. Το γράφω με τη μορφή κλάσματος, με τη μορφή δεκαδικού και με το σύμβολο του ποσοστού.

Λύση - Απάντηση:

→ με μορφή κλάσματος:  $\frac{63}{100}$

→ με μορφή δεκαδικού: .....

→ με σύμβολο ποσοστού: 63%



## Εφαρμογή 2η

Στη συσκευασία ενός γιαουρτιού αναγράφεται: «Γιαούρτι από αγελαδινό γάλα. Βάρος 200 γραμμάρια, λιπαρά 3%». Τρώγοντας το συγκεκριμένο γιαούρτι πόσα λιπαρά θα καταναλώσω;



Λύση:

Το ποσοστό 3% εκφράζει την περιεκτικό-

τητα σε λιπαρά, δηλαδή το λόγο  $\frac{\text{βάρος λιπαρών}}{\text{βάρος γιαουρτιού}}$

Πρέπει να βρω την ποσότητα των λιπαρών που περιέχονται στα 200 γραμμάρια γιαουρτιού. Πολλαπλασιάζω τα 200 γρ. με

το κλάσμα  $\frac{3}{100}$  (ή με το δεκαδικό 0,03) και βρίσκω  $\frac{600}{100}$  ή 6 γρ.

Μπορείς να λύσεις το πρόβλημα με άλλο τρόπο σκέψης.

Απάντηση: Θα καταναλώσω 6 γραμμάρια λιπαρά.

## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό εκφράσαμε τα ποσοστά με τρεις τρόπους και μάθαμε να βρίσκουμε το ποσοστό ενός ποσού. Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα;

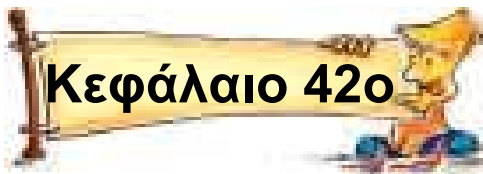
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Το ποσοστό μπορεί να εκφραστεί μόνο με κλάσμα.

→ Η μετοχή κέρδισε 0,06 της αξίας της, δηλαδή 6%.

→ Ο ένας στους τέσσερις  $\left(\frac{1}{4}\right)$  είναι το 25% του συνόλου.



## Κεφάλαιο 42ο

Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την τελική τιμή



**ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ**

### Ποσοστά της αλλαγής



→ Κατανοώ τη σχέση μεταξύ αρχικής τιμής, ποσοστού και τελικής τιμής.

→ Λύνω προβλήματα γνωρίζοντας την αρχική τιμή και το ποσοστό και ζητώντας την τελική τιμή.

### Δραστηριότητα 1η

Καθημερινά ακούμε ή διαβάζουμε στα Μ.Μ.Ε. πληροφορίες, όπως:

- Η τιμή του ψωμιού αυξήθηκε τον τελευταίο χρόνο κατά 3%.
- Οι τιμές των υπολογιστών μειώθηκαν από πέρυσι κατά 8%.
- Η τουριστική κίνηση στη Σάμο ήταν φέτος αυξημένη κατά 12%.



• Τι νομίζεις ότι χρειάζεται να γνωρίζει κάποιος για να μας δώσει αυτές τις πληροφορίες;

• .....

• Αν εκτός από τις παραπάνω πληροφορίες γνωρίζεις και τις περσινές τιμές, μπορείς να υπολογίσεις τις φετινές τιμές; .....

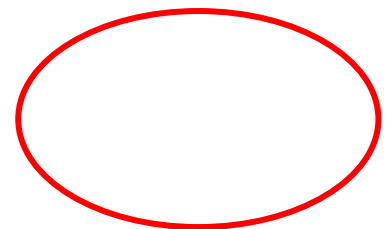
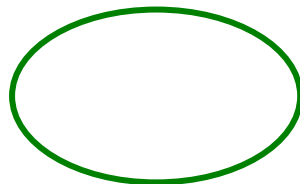
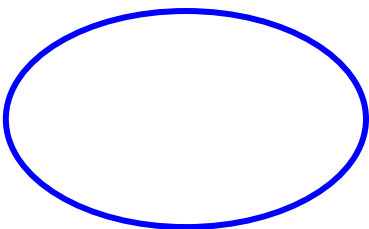
• Αν ναι, με ποιον τρόπο .....

## Δραστηριότητα 2η

Η Αγγελική θέλει να αγοράσει καινούριο υπολογιστή. Βρήκε έναν στο διαφημιστικό φυλλάδιο κάποιου καταστήματος με 550 €. Προσέχει όμως ότι, στην άκρη του φυλλαδίου, γράφει ότι στην τιμή δεν συμπεριλαμβάνεται ο Φ.Π.Α. (18%). Μπορείς να βρεις πόσο θα πληρώσει τελικά γι' αυτόν τον υπολογιστή;



- Τι είναι αυτό που πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα;
- Κάνε την πράξη: .....
- Ποια είναι τα στοιχεία του προβλήματος των οποίων γνωρίζεις τώρα τις τιμές;
- Γράψε στο παρακάτω σχήμα τα δύο γνωστά στοιχεία του προβλήματος (όχι τις τιμές) (στο πράσινο και στο μπλε πλαίσιο) και το ένα άγνωστο και συμπλήρωσε ανάμεσα τους, τα σύμβολα που δείχνουν τη σχέση μεταξύ τους.



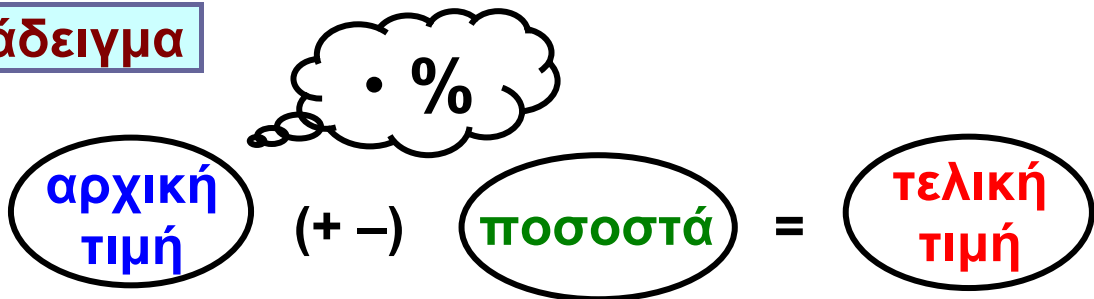
- Μπορείς τώρα να απαντήσεις στην Αγγελική πόσο θα πληρώσει για τον υπολογιστή;

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές το ποσοστό δηλώνει πόσο άλλαξε η αρχική τιμή ενός ποσού προσθετικά (αύξηση) ή αφαιρετικά (μείωση)

## Βρίσκω την τελική τιμή ενός ποσού

Όταν η τιμή ενός ποσού αυξάνεται ή μειώνεται, το ποσοστό είναι το μέρος του ποσού που δηλώνει πόση αύξηση ή μείωση υπάρχει στην αρχική τιμή του ποσού. Αν δεν γνωρίζουμε το ποσοστό επί της τιμής (αλλά μόνο το ποσοστό %), βρίσκουμε πρώτα αυτό, που τώρα ονομάζεται αύξηση ή μείωση της αρχικής τιμής. Η τελική τιμή του ποσού προκύπτει, όταν στην αρχική τιμή προσθέσουμε την αύξηση ή αφαιρέσουμε τη μείωση (το ποσοστό).

### Παράδειγμα



Πώς προκύπτει η τελική τιμή του υπολογιστή της δραστηριότητας 2:

$$550 \text{ €} + 99 \text{ €} = 649 \text{ €}$$

Τα ποσά στα ποσοστά είναι πάντα ανάλογα. [Π.χ: Το κέρδος στα βιβλία είναι 20%. Αφού στα 100 € το κέρδος είναι 20 €, στα διπλάσια (200 €) είναι διπλάσιο (40 €), στα τριπλάσια (300 €) το τριπλάσιο (60 €) κ.ο.κ.] Άρα μπορούμε να λύνουμε τα προβλήματα ποσοστών με τις μεθόδους που λύνουμε τα προβλήματα των ανάλογων ποσών (αναγωγή στη μονάδα, αναλογία, απλή μέθοδος των τριών). Και στις τρεις μεθόδους η μία από τις τιμές είναι το 100 (ή το 1000 αν πρόκειται για ποσοστό ‰).

## Εφαρμογή

Το βιβλιοπωλείο της γειτονιάς κάνει έκπτωση 30% στα βιβλία του. Είναι ευκαιρία να αγοράσεις ένα μεγάλο λεξικό που κόστιζε 25 €. Πόσο θα το αγοράσεις τώρα;

Λύση:



Γνωρίζω την αρχική τιμή και το ποσοστό %.

1. Θα βρω τη μείωση της αρχικής τιμής (την έκπτωση):

$$\frac{30}{100} \cdot 25 = 0,3 \cdot 25 = 7,5$$

2. Θα αφαιρέσω την έκπτωση από την αρχική τιμή:

$$25 - 7,5 = 17,5$$

Απάντηση:

Μετά την έκπτωση το λεξικό θα κοστίζει 17,5 €

Μπορείς να λύσεις το πρόβλημα με μία από τις τρεις μεθόδους, όπως λύνεις τα προβλήματα με ανάλογα ποσά. Πρέπει να προσέξεις όμως στην κατάταξη πώς θα βάλεις τις τιμές και ίσως χρειαστεί να κάνεις κάποια πράξη στο ποσοστό % με το νου, για να βρεις τις τιμές που χρειάζονται.

Για παράδειγμα με αναλογία: Αφού θέλω να βρω κατευθείαν την τελική τιμή για το βιβλίο που κόστιζε αρχικά 25 €, πρέπει να σκεφτώ, ποια θα ήταν η τελική τιμή ενός βιβλίου που κόστιζε αρχικά 100 €.

Η έκπτωσή του θα ήταν 30 € (έκπτωση 30%). Άρα θα κόστιζε αρχικά 70 €.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Κόστος μετά την έκπτωση	70	X
Κόστος πριν την έκπτωση	100	25

$$\frac{\text{τελική τιμή} \rightarrow 70}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow 100} = \frac{X}{25}$$

Μπορείς να το λύσεις συνεχίζοντας με τα σταυρωτά γινόμενα ( $100 \cdot X = 70 \cdot 25$ ) ή από την αρχή με κάποια άλλη από τις μεθόδους λύσης προβλημάτων ανάλογων ποσών.

## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σχέση: αρχική τιμή - ποσοστό - τελική τιμή και μάθαμε να βρίσκουμε την τελική τιμή. Μπορείς να δώσεις ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

- Το ποσοστό μπορεί να εκφράζει την αύξηση ή τη μείωση της αρχικής τιμής.
- Η τελική τιμή προκύπτει αν πολλαπλασιάσω το ποσοστό % με την αρχική τιμή.

# Κεφάλαιο 43ο



Λύνω προβλήματα με ποσοστά:  
Βρίσκω την αρχική τιμή

**Από πού έρχομαι;**



Μελετώ τη σχέση μεταξύ αρχικής τιμής,  
ποσοστού και τελικής τιμής.  
Βρίσκω την αρχική τιμή σε προβλήματα  
ποσοστών.

## Δραστηριότητα 1η

Ένα μαγαζί με ποδήλατα διαφημίζει ότι έχει βάλει έκπτωση 35% σε όλα τα είδη του.

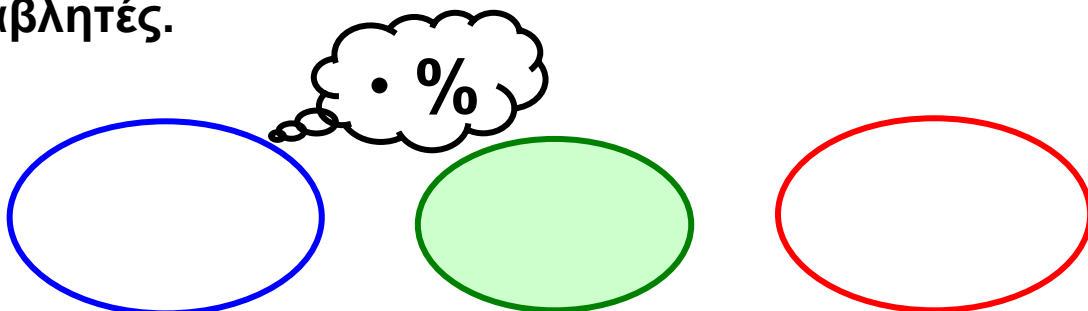
Βλέπεις στη βιτρίνα ένα ποδήλατο που κοστίζει μετά την έκπτωση 78 €. Πόσο κόστιζε αρχικά;



- Σε τι διαφέρει το πρόβλημα αυτό από τα προβλήματα ποσοστών του προηγούμενου μαθήματος;

.....  
.....

- Θυμήσου το σχήμα του προηγούμενου μαθήματος σχετικά με τις διάφορες τιμές στα προβλήματα ποσοστών και συμπλήρωσε τις τιμές του προβλήματος. Στη θέση των άγνωστων τιμών μπορείς να βάλεις μεταβλητές.



- Στο συγκεκριμένο ποδήλατο γνωρίζεις την ..... τιμή και ψάχνεις .....
- Στο κλάσμα  $\frac{35}{100}$  (ποσοστό %) το 100 δηλώνει την ..... τιμή ενός ποδηλάτου.
- Να βρεις την τελική τιμή για το ποδήλατο των 100 € .....
- Τώρα μπορείς να συμπληρώσεις τον πίνακα και την αναλογία:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Κοστίζει μετά την έκπτωση		
Κόστιζε πριν την έκπτωση	100	

$$\frac{\text{τελική τιμή}}{\text{αρχική τιμή}} \cdot \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{\quad}$$

- Μπορείς να το λύσεις με όποια άλλη από τις μεθόδους των ανάλογων ποσών θέλεις.

### Δραστηριότητα 2η

Το πρωί η Βασιλική διάβασε πάνω στο κουτί με το γάλα: «Πίνοντας 500 ml γάλα (2 μεγάλα ποτήρια) ο οργανισμός μας παίρνει το 75% της Συνιστώμενης Ημερήσιας Ποσότητας ασβεστίου». Είδε στο διατροφικό πίνακα ότι 100 ml γάλα περιέχουν 120 mg ασβέστιο και σκέφτηκε να υπολογίσει πόσα mg ασβεστίου χρειάζεται ο οργανισμός καθημερινά.



**ΦΡΕΣΚΟ  
ΓΑΛΑ**

- Τι πρέπει να βρούμε πρώτα; .....
- Κάνε την πράξη: .....

• Αυτό που βρήκες είναι το σύνολο των αναγκών ή το μέρος; .....

• Είναι αρκετό αυτό που βρήκες, μαζί με το 75% για να εφαρμόσεις κάποια από τις μεθόδους λύσης των προβλημάτων με ποσοστά; .....

• Επέλεξε μια μέθοδο και εξήγησε πώς θα έλυνες το πρόβλημα.

.....  
.....  
.....

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, στα προβλήματα ποσοστών, επειδή ο αριθμός 100 είναι πάντα γνωστός, αρκεί να ξέρουμε δύο τιμές για να βρούμε την άγνωστη.

### **Βρίσκω την αρχική τιμή ενός ποσού**

Όταν το ζητούμενο σ' ένα πρόβλημα με ποσοστά είναι η αρχική τιμή, για να την υπολογίσουμε αρκεί να γνωρίζουμε το ποσοστό % και μια τιμή ακόμα.

Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την τιμή που δεν χρειάζεται (π.χ. στο παρακάτω παράδειγμα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το κέρδος, δηλαδή την αύξηση).

#### **Παράδειγμα**

Πόσο αγοράζει την εφημερίδα το περίπτερο όταν την πουλάει 2 € και το ποσοστό κέρδους είναι 25%;

Λύση: Γνωρίζω το ποσοστό κέρδους στα % και την τελική τιμή πώλησης.

1. Θα υπολογίσω την τελική τιμή όταν η αρχική τιμή είναι 100 €: Αν αγοράζει την εφημερίδα 100 € (αρχική τιμή) και κερδίζει 25 € (κέρδος), άρα την πουλάει 125 € (τελική τιμή).

2. Συμπληρώνω την αναλογία:  $\frac{\text{τελική τιμή} \rightarrow 125}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow 100} = \frac{2}{X}$

Απάντηση: Αγοράζει την εφημερίδα 1,6 €.

Σε προβλήματα στα οποία το ποσοστό δηλώνει μέρος του συνόλου και όχι κάποια αύξηση ή μείωση της αρχικής τιμής δεν υπάρχει τελική τιμή.

### Παράδειγμα

Στη 2η δραστηριότητα των σελίδων 40 και 41, πρώτα βρίσκουμε το **ποσοστό** στην αρχική τιμή, που είναι το **μέρος**:  $5 \cdot 120 = 600$  mg ασβέστιο και μετά την **αρχική τιμή**, που είναι το **σύνολο**:

$$\frac{\text{ποσοστό} \rightarrow 75}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow 100} = \frac{600}{X} \quad 75 \cdot X = 600 \cdot 100$$

$$75 \cdot X = 60.000, \quad \text{άρα } X = 60.000 : 75,$$

$$\text{άρα } X = 800 \text{ mg ασβέστιο}$$

### Εφαρμογή

Ρωτήσαμε κάποιους μαθητές ηλικίας 12 - 14 ετών «πόσο συχνά σερφάρετε στο ίντερνέτ;» Οι 210 μαθητές (ποσοστό 70%) απάντησαν «μια φορά την εβδομάδα». Οι υπόλοιποι απάντησαν «μια φορά το μήνα». Πόσοι ήταν οι υπόλοιποι μαθητές;



**Λύση:**

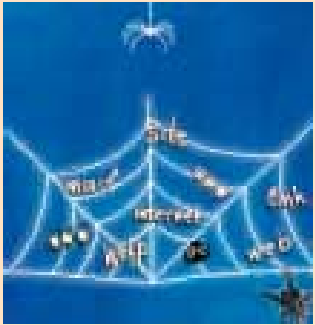
Γνωρίζω το ποσοστό στα % και το ποσοστό στην αρχική τιμή. Δεν ξέρω την αρχική τιμή (πόσοι ήταν όλοι οι μαθητές).

Άρα μπορώ κατευθείαν να συμπληρώσω την αναλογία:

$$\frac{\text{ποσοστό} \rightarrow 70}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow 100} = \frac{210}{X}$$

$$70 \cdot X = 210 \cdot 100 \quad 70 \cdot X = \dots\dots\dots$$

$$X = \dots\dots\dots \quad X = \dots\dots\dots$$



Άρα όλοι οι μαθητές ήταν 300. Οι υπόλοιποι μαθητές ήταν  $300 - 210 = 90$

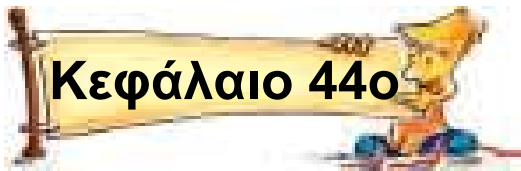
**Απάντηση:** Οι υπόλοιποι μαθητές ήταν 90.

### Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σχέση: αρχική τιμή - ποσοστό - τελική τιμή και μάθαμε να βρίσκουμε την αρχική τιμή. Μπορείς να δώσεις ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ Για να υπολογίσω την αρχική τιμή αρκεί να ξέρω άλλες δυο τιμές.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
→ Στα προβλήματα ποσοστών πάντα υπάρχει τελική τιμή.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
→ Σε μια έρευνα το δείγμα είναι μέρος του συνολικού πληθυσμού.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



## Κεφάλαιο 44ο

Λύνω προβλήματα με ποσοστά:  
Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό



*Για να μη λέμε πολλά ...*



→ Κατανοώ την ανάγκη χρήσης  
του ποσοστού (%).

→ Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό (%) σε  
προβλήματα ποσοστών.

### Δραστηριότητα 1η

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο πληθυσμός της Ελλάδας κατά τις απογραφές του 1971 και 2001.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΕΛΛΑΔΑΣ ΚΑΤΑ ΦΥΛΛΟ ΚΑΙ ΟΜΑΔΕΣ ΗΛΙΚΙΩΝ		
	1971	2001
Σύνολο Ελλάδας	8.768.372	10.964.020
0 – 14 ετών	2.223.904	1.666.888
15 – 64 ετών	5.587.352	7.423.899
64 ετών και άνω	957.116	1.873.243

- Τι παρατηρείς σχετικά με τον πληθυσμό των παιδιών (0 - 14 ετών); .....
- Βρες πόσο μειώθηκε αυτή η πληθυσμιακή ομάδα (μπορείς να χρησιμοποιήσεις υπολογιστή τσέπης)  
.....
- Γιατί δεν είναι εύκολο να εκφράσεις (και να θυμάσαι) τη μείωση και να κάνεις συγκρίσεις χρησιμοποιώντας τις τιμές του πίνακα;

- Για να εκφράσεις τη μείωση ως ποσοστό στους 100 κατοίκους (%), κάτι που είναι πιο εύκολο να διαχειριστείς, τι είναι αυτό που πρέπει να βρεις;
- .....

- Συμπλήρωσε τον πίνακα ποσών και τιμών. Μπορείς να συνεχίσεις με όποια μέθοδο θέλεις για να βρεις την τιμή του άγνωστου.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μείωση κατοίκων		X
Αρχικός αριθμός κατοίκων		100

- Αυτό που θα βρεις είναι ότι από το 1971 ως το 2001, ο πληθυσμός της Ελλάδας στην ηλικιακή ομάδα 0 - 14 ετών παρουσίασε μείωση ..... %.

### Δραστηριότητα 2η

Ένα μαγαζί διαφημίζει εκπτώσεις από 10% ως 40%. Βλέπεις ένα τζιν μπουφάν του οποίου η αρχική τιμή ήταν 38 € και η τελική 28,5 €. Πόσο στα εκατό (%) ήταν η έκπτωση;



- Συμπλήρωσε το λόγο  $\frac{\quad}{100}$ , βάζοντας στη θέση του άγνωστου μια μεταβλητή.
  - Γράψε τώρα με λόγια τους όρους σ' αυτό το κλάσμα:
- 

- Αφού θέλεις να βρεις κατευθείαν την έκπτωση στα 100 €, τι πρέπει να βρεις πρώτα για να φτιάξεις τον πίνακα ποσών και τιμών με τα δεδομένα που σου χρειάζονται;
- .....

- Κάνε αυτή την πράξη με το νου και συμπλήρωσε τον πίνακα:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Έκπτωση		
		100

- Τώρα μπορείς να συμπληρώσεις την αναλογία:

$$\frac{\text{έκπτωση} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} = \frac{\quad}{100}$$

- Μπορείς να το λύσεις με όποια άλλη από τις μεθόδους των ανάλογων ποσών θέλεις.

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να εκφράσουμε ένα μέρος ενός ποσού ως ποσοστό στα εκατό (%).

### Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό (%)

Η τιμή στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό είναι η αρχική τιμή. Όταν το ζητούμενο σε ένα πρόβλημα είναι το ποσοστό %, δηλαδή το ποσοστό σε αρχική τιμή 100, για να το βρούμε πρέπει να γνωρίζουμε την αρχική τιμή και την αύξηση ή τη μείωση στην αρχική τιμή.

### Παράδειγμα

Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει ένα βιβλίο 8 € και το πουλά 14 €. Πόσο στα εκατό (%) είναι το κέρδος του;

Λύση: Γνωρίζω την τιμή αγοράς (αρχική τιμή) και την τιμή πώλησης (τελική τιμή).

α. Υπολογίζω το ποσοστό κέρδους στην αρχική τιμή:  
 $14 - 8 = 6 \text{ € κέρδος}$

β. Συμπληρώνω την αναλογία:

$$\frac{\text{κέρδος} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} = \frac{6}{8} = \frac{X}{100}$$

$$8 \cdot X = 6 \cdot 100 \quad \text{άρα } 8 \cdot X = 600 \quad X = 600 : 8 \quad X = 75$$

Απάντηση: Το κέρδος του είναι 75%.

Αν γνωρίζουμε την τελική τιμή και δεν γνωρίζουμε την αρχική τιμή ή το ποσοστό αύξησης ή μείωσης στην αρχική, μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα αυτό που δεν γνωρίζουμε και μετά να συνεχίσουμε για να βρούμε το ποσοστό στα εκατό (%).

### Παράδειγμα

Στη 2η δραστηριότητα των σελίδων 45 και 46, πρώτα βρίσκουμε την έκπτωση στην αρχική τιμή:

$$38 - 28,50 = 9,50 \text{ € έκπτωση}$$

και μετά την έκπτωση στα 100, δηλαδή το ποσοστό %

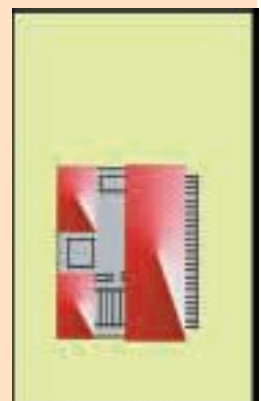
$$\frac{\text{έκπτωση} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} = \frac{9,50}{38} = \frac{X}{100}$$

$$38 \cdot X = 9,50 \cdot 100 \quad 38 \cdot X = 950 \quad \text{άρα } X = 950 : 38$$

$$X = 25\% \text{ έκπτωση}$$

### Εφαρμογή

Το οικόπεδο του σχολείου έχει μήκος 60 μέτρα και πλάτος 45 μέτρα. Το κτίριο καταλαμβάνει 675 τετραγωνικά μέτρα και το υπόλοιπο είναι αυλή. Τι ποσοστό στα 100 (%) της επιφάνειας του οικοπέδου είναι χτισμένο και τι ποσοστό είναι ακάλυπτο;



**Λύση:**

α. Βρίσκω τη συνολική έκταση του οικοπέδου (αρχική τιμή), που είναι η τιμή στην οποία θα υπολογίσω το ποσοστό:  $60 \cdot 45 = 2700$  τετραγωνικά μέτρα

β. Το ποσοστό κάλυψης του οικοπέδου είναι 675 στα 2.700.

γ. Συμπληρώνω την αναλογία:  $\frac{\text{ποσοστό} \rightarrow 675}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow 2700} = \frac{X}{100}$

$$2700 \cdot X = 675 \cdot 100 \quad 2700 \cdot X = \dots\dots\dots \quad X = \dots\dots\dots$$

$$X = \dots\dots\dots$$

**Απάντηση:** Το ποσοστό στα 100 (%) της επιφάνειας του οικοπέδου που είναι χτισμένο είναι 25% και το ακάλυπτο μέρος είναι το υπόλοιπο, δηλαδή 75%.

## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σχέση: αρχική τιμή - ποσοστό - τελική τιμή και μάθαμε να βρίσκουμε το ποσοστό %. Μπορείς να δώσεις ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Στο ποσοστό % το 100 είναι αρχική τιμή.       

→ Για να βρω το ποσοστό % πρέπει να ξέρω το ποσοστό στην αρχική τιμή.

# Ανακεφαλαίωση

## Λόγοι – Αναλογίες Όταν μιλάμε συμβολικά

### • Ανάλογα ποσά

#### πίνακας

$\alpha$	3	4	6	8
$\beta$	6	8	12	16

#### σχέση

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = 0,5 \qquad \frac{\alpha}{\beta} = 0,5$$

### • Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

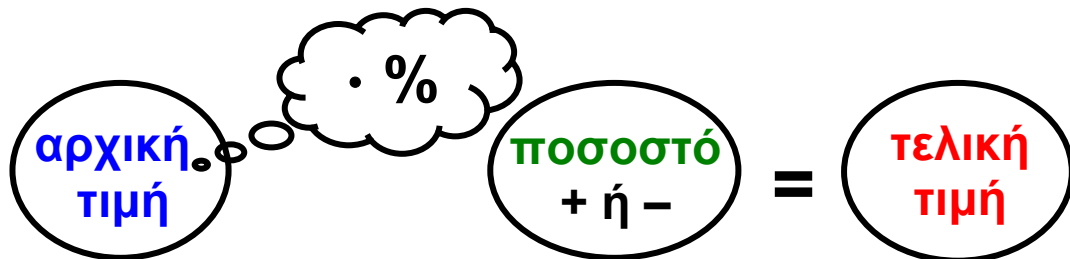
#### πίνακας

$\alpha$	4	5	8	8
$\beta$	10	8	5	16

#### σχέση

$$4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40 \qquad \alpha \cdot \beta = 40$$

- **Ποσοστό**
  - μέρος κάποιου ποσού που δηλώνει τη σχέση *μέρος προς ποσό*
- **Ποσοστό %**
  - ένα μέρος του 100 που εκφράζεται ως λόγος, ως δεκαδικός ή με το σύμβολο %
- **Αρχική τιμή**
  - η τιμή του αρχικού ποσού πάνω στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό
- **Τελική τιμή**
  - η τιμή που προκύπτει όταν το ποσοστό αφαιρεθεί ή προστεθεί στην αρχική τιμή
- η σχέση που τα συνδέει
  - φαίνεται συμβολικά στο σχήμα:



## Περιπτώσεις προβλημάτων ποσοστών

### Βρίσκουμε το ποσοστό

- όταν γνωρίζουμε το μέρος και την αρχική τιμή
  - κάνουμε διαίρεση π.χ.: ποσοστό 3 στα 12  
 $\frac{3}{12}$  δηλαδή  $3 : 12 = 0,25$
- όταν γνωρίζουμε το ποσοστό στα εκατό (%) και την αρχική τιμή
  - κάνουμε πολλαπλασιασμό π.χ.:  
 το 25% του 12  $\frac{25}{100} \cdot 12 = \frac{300}{100} = 3$

## Βρίσκουμε την τελική τιμή

- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και το ποσοστό αύξησης ή μείωσης

- κάνουμε πρόσθεση ή αφαίρεση π.χ.:  
αύξηση 3 στα 12      τελική τιμή  $12 + 3 = 15$

- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και το ποσοστό στα εκατό (%), υπάρχουν δύο τρόποι εργασίας

- α. βρίσκουμε πρώτα το ποσοστό αύξησης ή μείωσης (με πολλαπλασιασμό)
  - β. βρίσκουμε την τελική τιμή στα 100 με το νου και σχηματίζουμε αναλογία

## Βρίσκουμε την αρχική τιμή

- όταν γνωρίζουμε το ποσοστό % και το ποσοστό στην αρχική τιμή

- σχηματίζουμε αναλογία

- όταν γνωρίζουμε το ποσοστό στα εκατό (%) και την τελική τιμή

- βρίσκουμε πρώτα την τελική τιμή στα 100 με το νου

## Βρίσκουμε το ποσοστό %

- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και το ποσοστό στην αρχική τιμή

- σχηματίζουμε αναλογία

- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και την τελική τιμή

- βρίσκουμε πρώτα το ποσοστό αύξησης ή μείωσης (με αφαίρεση)

## Χρυσοί κανόνες

Η τιμή του ποσού στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό, για το πρόβλημα ποσοστών, λέγεται αρχική τιμή (ακόμα κι αν είναι η τιμή πώλησης ενός προϊόντος).

Τα ποσά στα ποσοστά είναι πάντα ανάλογα. Τα προβλήματα ποσοστών λύνονται με τις μεθόδους λύσης των ανάλογων ποσών (αναγωγή στη μονάδα, αναλογία, απλή μέθοδο των τριών). Επειδή υπάρχει πάντα η τιμή 100, γνωρίζοντας δύο τιμές, μπορούμε να βρούμε τις άλλες δύο, αρκεί να προσέξουμε στην κατάταξη. Μπορεί να χρειάζεται νοερή πράξη στα 100.

### 1ο πρόβλημα «Οι εκλογές»

Στους εκλογικούς καταλόγους είναι γραμμένα 16.000 άτομα. Από αυτά ψήφισαν στις δημοτικές εκλογές 85%. Η παράταξη Α΄ πήρε 51%, ενώ η παράταξη Β΄ πήρε 34% των ψήφων. Οι υπόλοιποι ψήφισαν λευκό ή άκυρο. Πόσα άτομα ψήφισαν και πόσες ψήφους πήρε κάθε παράταξη;



Λύση

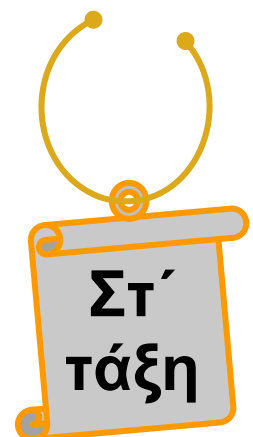
Απάντηση: .....

## 2ο πρόβλημα «ΟΙ ΕΚΠΤΩΣΕΙΣ»

Η Γεωργία έχει αναλάβει την έρευνα αγοράς για να αγοράσει 25 κρεμαστά με ασημένιες μικρές πλακέτες για αναμνηστικά για την Στ΄ τάξη.

Βρήκε την ίδια πλακέτα σε δύο καταστήματα. Η αρχική τιμή της ήταν και στα δύο 10 €. Το πρώτο κατάστημα είχε βάλει έκπτωση αρχικά 25% και τώρα 10% στην τιμή της έκπτωσης, ενώ το δεύτερο κατάστημα είχε αρχικά έκπτωση 10% και τώρα ακόμη 25%. Υπάρχει διαφορά στην τιμή;

Λύση



Απάντηση:

.....

### 3ο πρόβλημα *«Κέρδος πάνω στο κέρδος»*







































































Μια αυτοκινητοβιομηχανία πουλάει τα αυτοκίνητα στις αντιπροσωπείες με 20% κέρδος στην τιμή κόστους. Ο αντιπρόσωπός της στην Ελλάδα τα πουλάει με κέρδος 10% στην τιμή αγοράς τους. Ο κ. Παπαγεωργίου αγόρασε το αυτοκίνητό του από τον αντιπρόσωπο και πλήρωσε 9.900 €. Ποιο ήταν το κόστος κατασκευής του αυτοκινήτου;

Λύση

Απάντηση: .....

## 4η θεματική ενότητα

### Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων

Περιοχή	Απειλούμενα είδη φυτών
Κρήτη	            
Πελοπόννησος	         
Ανατολικό Αιγαίο	        
Στερεά Ελλάδα	      
Κεντρική Β. Ελλάδα	    
Δυτικό Αιγαίο	    
Ανατολική Β. Ελλάδα	   
Κυκλάδες	   
Βόρεια Πίνδος	   
Νότια Πίνδος	  
Ιόνιοι Νήσοι	 
Ανατολική Κ. Ελλάδα	 
Βόρειο Αιγαίο	 

 = 20 είδη

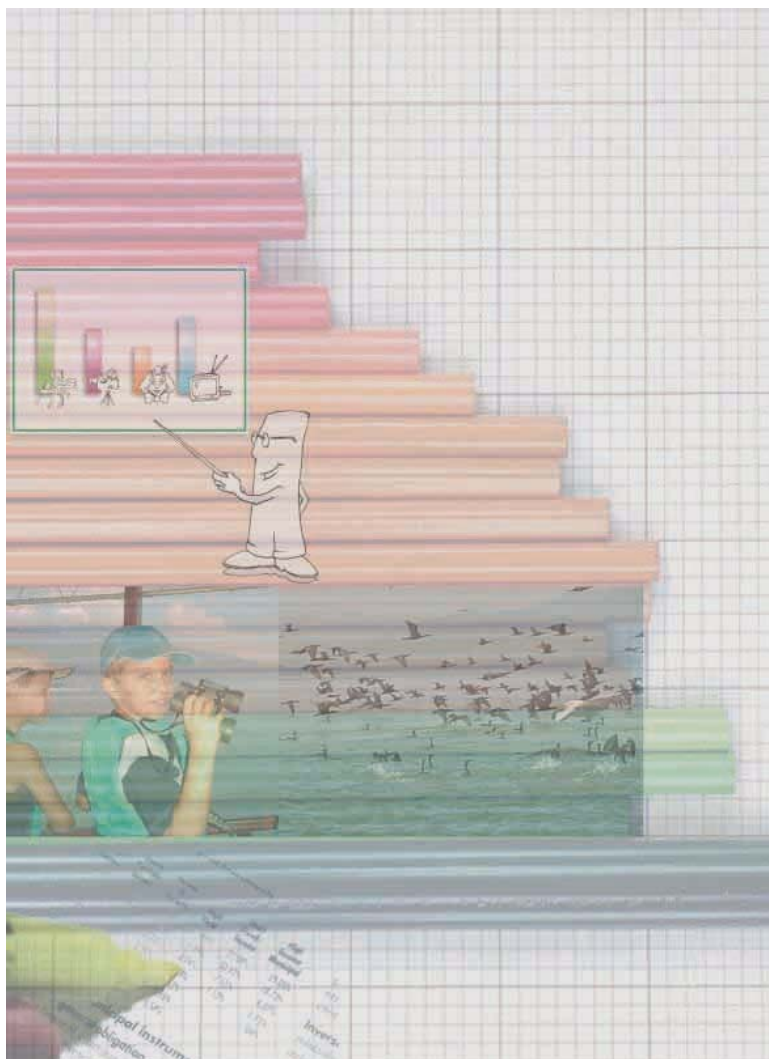
Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τη συλλογή και την επεξεργασία δεδομένων.

Όλες οι πληροφορίες που μπορούμε να συγκεντρώσουμε από παρατηρήσεις, μετρήσεις, εξετάσεις ερωτηματολόγια κ.λπ. λέγονται δεδομένα.

Για να μπορέσεις να ερμηνεύσεις τα δεδομένα αυτά πρέπει να τα οργανώσεις και να τα παρουσιάσεις με τη μορφή εικόνας.

Τι είδους εικόνα θα διαλέξεις όμως; Η Στατιστική θα σε βοηθήσει να κατασκευάζεις τέτοιες εικόνες αλλά και να τις ερμηνεύεις.

Καλή διασκέδαση λοιπόν παρέα με τις εικόνες και τη Στατιστική...



## Κεφάλαιο 45ο

Απεικονίζω δεδομένα με  
ραβδόγραμμα ή εικονόγραμμα



**Αξίζει όσο χίλιες λέξεις...**






































































- Ανακαλύπτω τη χρησιμότητα των γραφικών παραστάσεων.
- Αντλώ πληροφορίες από το ραβδόγραμμα και το εικονόγραμμα.
- Μαθαίνω να κατασκευάζω ένα ραβδόγραμμα.

### Δραστηριότητα 1η.

Όταν επισκέφθηκαν το Κέντρο Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης Κλειτορίας, τα παιδιά άκουσαν τον υπεύθυνο να τους μιλά για τα απειλούμενα φυτά της Ελλάδας. Τους έδειξε τον παρακάτω πίνακα και τους εξήγησε ότι δείχνει τα απειλούμενα φυτά όπως είναι καταγεγραμμένα στις διάφορες περιοχές στις οποίες φυτρώνουν (ακόμη).

Με έκπληξη άκουσαν ότι τα 932 από τα 5.605 είδη φυτών που υπάρχουν στην Ελλάδα κινδυνεύουν να εξαφανιστούν, ενώ 1 φυτό έχει ήδη εξαφανιστεί.

- Τι διαφορά έχει αυτός ο «πίνακας» από τους πίνακες που συνάντησες μέχρι τώρα;
- Ποιες πληροφορίες παίρνεις από αυτόν και ποιες όχι;

Περιοχή	Απειλούμενα είδη φυτών
Κρήτη	            
Πελοπόννησος	         
Ανατολικό Αιγαίο	       
Στερεά Ελλάδα	     
Κεντρική Β. Ελλάδα	   
Δυτικό Αιγαίο	    
Ανατολική Β. Ελλάδα	   
Κυκλάδες	   
Βόρεια Πίνδος	   
Νότια Πίνδος	  
Ιόνιοι Νήσοι	 
Ανατολική Κ. Ελλάδα	 
Βόρειο Αιγαίο	 

 = 20 είδη

## Δραστηριότητα 2η.

Το γράφημα είναι ένας τρόπος για να μελετήσεις ή να παρουσιάσεις δεδομένα. Παρακάτω παρουσιάζονται στοιχεία για κάποια πουλιά με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Άνοιγμα φτερών αρπακτικών πτηνών	
Πτηνά	Άνοιγμα φτερών σε εκ.
Γυπαετός	270
Γύπας	260
Μαυροπετρίτης	94
Πετρίτης	103
Σπιζαετός	155
Χρυσαιετός	203



- Ποιο πουλί έχει το μεγαλύτερο άνοιγμα φτερών; Χρησιμοποίησες τον πίνακα ή το γράφημα για να το βρεις;
- Πόσο ακριβώς είναι το άνοιγμα των φτερών του γυπαετού; Αυτήν την πληροφορία ποια από τις δύο παρουσιάσεις σου την προσφέρει ευκολότερα;

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι, για να καταγράψουμε δεδομένα ή πληροφορίες με σύντομο και παραστατικό τρόπο, χρησιμοποιούμε τα γραφήματα.

### Ραβδόγραμμα και εικονόγραμμα

Σε ένα γράφημα ράβδων ή ραβδόγραμμα συγκρίνουμε τα δεδομένα, συγκρίνοντας τα μήκη (ή τα ύψη) των ράβδων.

Τα χαρακτηριστικά ενός ραβδογράμματος:

1. Το ραβδόγραμμα πρέπει πάντα να έχει τίτλο.
2. Η αριθμητική κλίμακα μπορεί να είναι στην οριζόντια ή στην κάθετη πλευρά, οπότε οι ράβδοι είναι αντίστοιχα οριζόντιες ή κάθετες.
3. Οι αποστάσεις ανάμεσα στους αριθμούς πρέπει να είναι ίσες.

### Παράδειγμα



Το εικονόγραμμα είναι ένα είδος ραβδογράμματος στο οποίο χρησιμοποιείται ένα σύμβολο για να αναπαραστήσει έναν συγκεκριμένο αριθμό αντικειμένων (π.χ. 🚗 = 1.000 αυτοκίνητα).

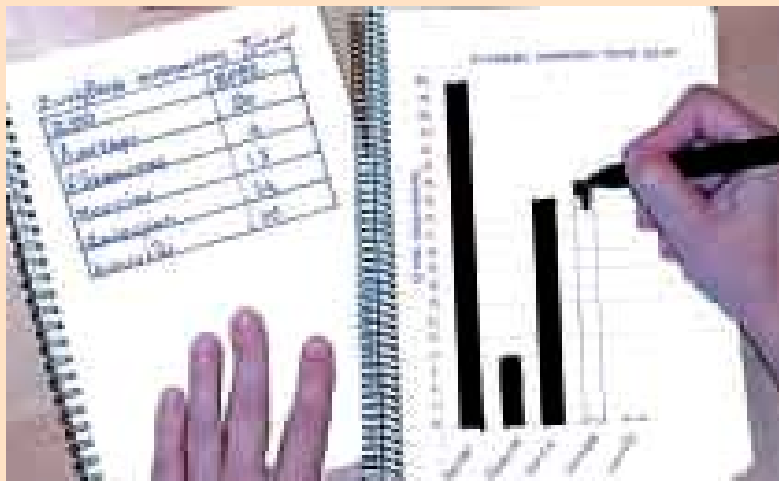
## **Εφαρμογή**

### **Φτιάξε ένα δικό σου ραβδόγραμμα**

Παρακολουθώντας ένα ντοκιμαντέρ για τα ζώα τα παιδιά της Στ΄ τάξης κατέγραψαν στοιχεία σχετικά με τις συνήθειες ύπνου διάφορων ζώων. Στη διάρκεια του εικοσιτετραώρου ο σκίουρος ξεκουράζεται 14 ώρες, ενώ το κουνέλι αρκείται σε 10. Τα ποντίκια χρειάζονται 13 ώρες ανάπαυση, σε αντίθεση με τον ελέφαντα που αρκείται σε μόλις 4 ώρες. Τέλος, το ζώο με τη μεγαλύτερη ανάγκη για ξεκούραση φαίνεται πως είναι το λιοντάρι, μια και περνά τις 20 ώρες του εικοσιτετραώρου ξαπλωμένο. Να απεικονίσεις τα στοιχεία αυτά με ραβδόγραμμα.

### **Λύση - Απάντηση:**

1. Φτιάξε ένα πίνακα με τα στοιχεία του προβλήματος.
2. Γράψε ένα τίτλο για το γράφημά σου.
3. Γράψε τα ονόματα από τα ζώα στη μια πλευρά και αποφάσισε την απόσταση που θα χρησιμοποιήσεις για την αριθμητική κλίμακα στην άλλη πλευρά (π.χ. μια γραμμή του τετραδίου ισούται με 1 ώρα)
4. Σχημάτισε και χρωμάτισε τις ράβδους.



## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το ραβδόγραμμα και το εικονόγραμμα. Σκέψου και πες ένα δικό σου παράδειγμα στο οποίο να μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Στα ραβδογράμματα η τιμή κάθε ράβδου φαίνεται από το μήκος (ή το ύψος) της.

→ Πρώτα κατασκευάζουμε την κλίμακα στο ραβδόγραμμα και μετά συγκεντρώνουμε τα στοιχεία

# Κεφάλαιο 46ο



## Ταξινομώ δεδομένα – εξάγω συμπεράσματα

### Η ώρα των αποφάσεων



→ Συλλέγω, καταγράφω και ταξινομώ δεδομένα.

→ Παρουσιάζω την κατανομή συχνότητας των δεδομένων.

→ Χρησιμοποιώ τα αποτελέσματα της επεξεργασίας των δεδομένων.

### Δραστηριότητα

Οι υπεύθυνοι ενός πάρκου αναψυχής για να αποφασίσουν τι είδους δραστηριότητες πρέπει να προσφέρονται στο πάρκο, ενδιαφέρονται να μάθουν τις ηλικίες των νέων που επισκέπτονται το χώρο. Κατέγραψαν λοιπόν τις ηλικίες των παιδιών (όχι των συνοδών τους) και των εφήβων που το επισκέφθηκαν κατά τις τέσσερις πρώτες μέρες της λειτουργίας του. Οι παρακάτω καρτέλες είναι δύο από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για την καταγραφή.

8	10	12	8	14	16	15	14
13	9	11	12	10	14	11	13
12	14	13	14	12	11	13	13
14	13	11	12	15	14	11	13
10	9	12	17	13	14	15	17
13	12	11	15	13	12	16	14
15	12	14	13	11	12	15	14
13	14	12	15	14	11	13	13

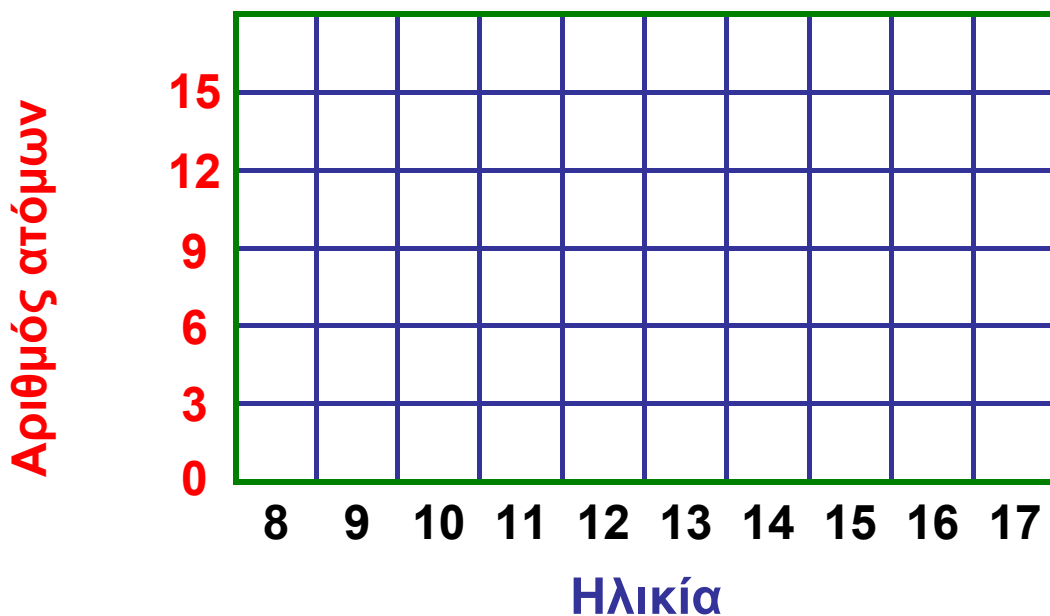
- Πώς νομίζεις ότι συγκέντρωσαν τα στοιχεία οι υπεύθυνοι;
- Με ποιους άλλους τρόπους μπορεί κανείς να συγκεντρώσει στοιχεία για ένα θέμα;
- Για ποιο λόγο νομίζεις ότι συγκεντρώνονται τα στοιχεία αυτά;
- Είναι εύκολο να βγάλουμε συμπεράσματα από αυτά τα δεδομένα, όπως είναι;
- Για να πάρουμε τις πληροφορίες που θέλουμε, αρκεί να συλλέξουμε τα δεδομένα;

Στις προηγούμενες καρτέλες, κάθε αριθμός αντιπροσωπεύει έναν άνθρωπο. Όλοι πρέπει να καταμετρηθούν. Η πρώτη εργασία ταξινόμησης είναι να γράψεις (στα παρακάτω κελιά) όλους τους αριθμούς σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.


- Τώρα μπορείς να μετρήσεις πόσοι ήταν οι επισκέπτες από κάθε ηλικία. Ένας τρόπος για να θυμάσαι τη μέτρηση είναι ο παρακάτω: για κάθε ένα άτομο που θα καταμετράς θα σημειώνεις μια γραμμή **I**. Θα ομαδοποιείς τις γραμμές ανά 5, με μια γραμμή στη μέση: **IIII**.

Ηλικία	Καταμέτρηση με σύμβολα I	Συχνότητα
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
Σύνολο		

- Μετά κάνε το παρακάτω ραβδόγραμμα:



- Ποιες είναι οι διαπιστώσεις από τα δεδομένα;

- Ποια μπορεί να είναι η απόφαση για τις δραστηριότητες που πρέπει να προσφέρονται στο πάρκο;

.....  
 .....

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι τα αριθμητικά δεδομένα με κατάλληλη επεξεργασία μας βοηθούν να βγάζουμε συμπεράσματα, να κάνουμε προβλέψεις και να παίρνουμε αποφάσεις.

### Κατανομή συχνοτήτων

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων μας δείχνει πόσο συχνά υπάρχει κάθε δεδομένο στην καταγραφή μας.

*Τρόπος εργασίας*

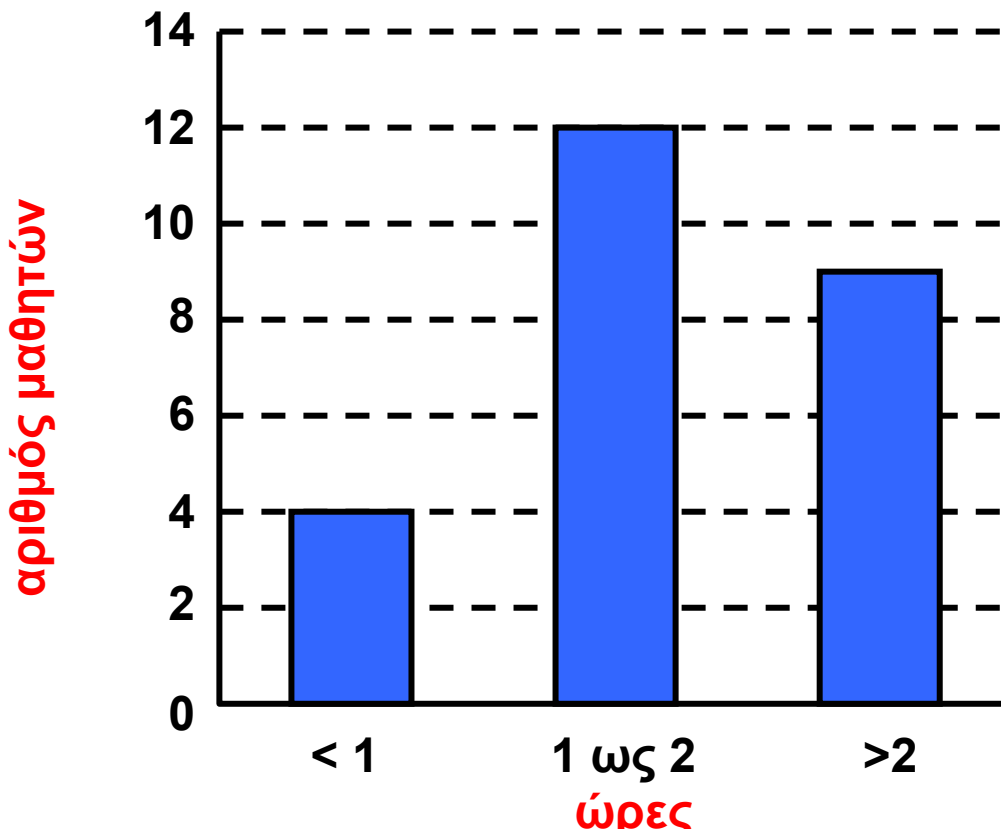
1. Συλλέγουμε τα δεδομένα.
2. Τακτοποιούμε τα δεδομένα σε μια σειρά (αύξουσα ή φθίνουσα).
3. Καταμετρούμε τη συχνότητα εμφάνισης κάθε δεδομένου.
4. Παρουσιάζουμε τα δεδομένα με γράφημα.

### Παράδειγμα

Χρόνος καθημερινής προετοιμασίας μαθημάτων

Ώρες	Καταμέτρηση	Συχνότητα
< 1		4
1 ως 2		12
> 2		9

## Χρόνος προετοιμασίας μαθημάτων



### Εφαρμογή

Τα παιδιά ρώτησαν το δάσκαλο τι χρειάζονται τα κριτήρια αξιολόγησης στα μαθηματικά. Εκείνος τους εξήγησε πως έπειτα από κάθε κριτήριο αξιολόγησης καταγράφει τις επιδόσεις τους και επεξεργάζεται τα δεδομένα, ώστε να αποφασίσει αν τα περισσότερα παιδιά κατάλαβαν το κεφάλαιο ή αν χρειάζεται να επαναλάβει κάτι.

«Για παράδειγμα, ας ελέγξουμε αν καταλάβατε το κεφάλαιο *Εξισώσεις* ή αν χρειάζεται κάποια επανάληψη του κεφαλαίου. Οι βαθμοί σας ήταν: 9, 8, 8, 9, 10, 7, 8, 9, 7, 10, 10, 7, 6, 9, 10, 8, 9, 9, 8, 10. Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε;»

Λύση:

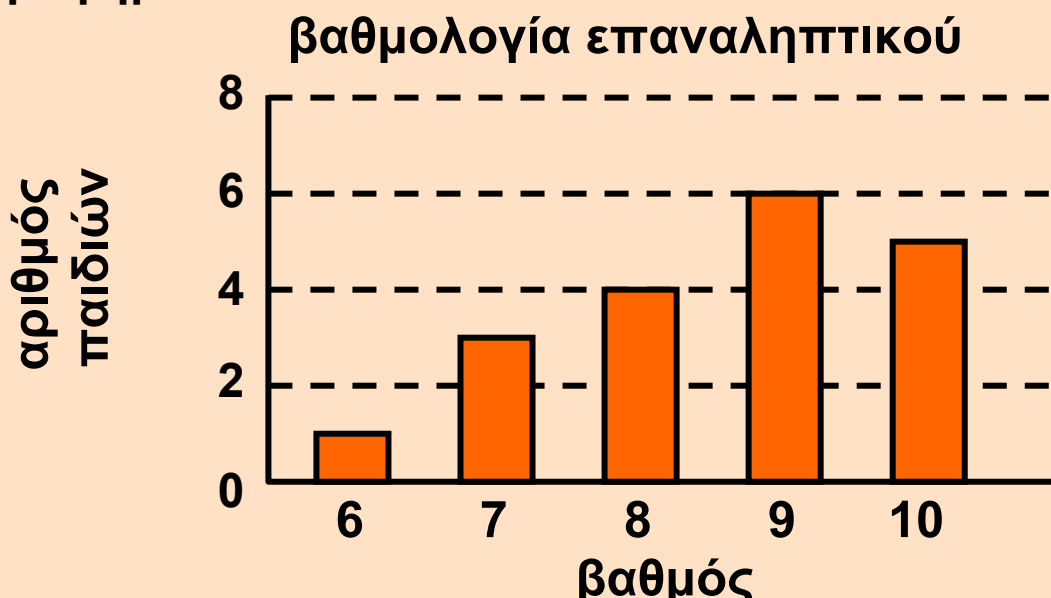
1. – 2. Αφού συλλέξαμε τα δεδομένα θα τα βάλουμε κατά αύξουσα σειρά:

6	7	7	7	8	8	8	8	8	9
9	9	9	9	9	10	10	10	10	10

3. Θα φτιάξουμε έναν πίνακα συχνοτήτων με όλους τους βαθμούς.

ΒΑΘΜΟΣ	ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
6	I	1
7	III	3
8	IIII	4
9	++++ I	6
10	++++	5

4. Με τα δεδομένα του πίνακα θα φτιάξουμε ένα γράφημα.



Απάντηση: Διαπίστωση: Τα περισσότερα παιδιά κατάλαβαν το κεφάλαιο. Απόφαση: Δεν θα γίνει επανάληψη σε όλη την τάξη, απλώς μόνο ορισμένα παιδιά θα χρειαστεί να βοηθηθούν από το δάσκαλο.

## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο κατανομή συχνότητας. Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα τι μας χρειάζεται;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ *Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων πρέπει να περιλαμβάνει όλα τα δεδομένα.*

→ *Με βάση τα δεδομένα κάνουμε προβλέψεις για το μέλλον.*



## Κεφάλαιο 47ο

## Άλλοι τύποι γραφημάτων



### *Το πήρες το μήνυμα;*



→ Αντλώ πληροφορίες από ένα γράφημα γραμμής.

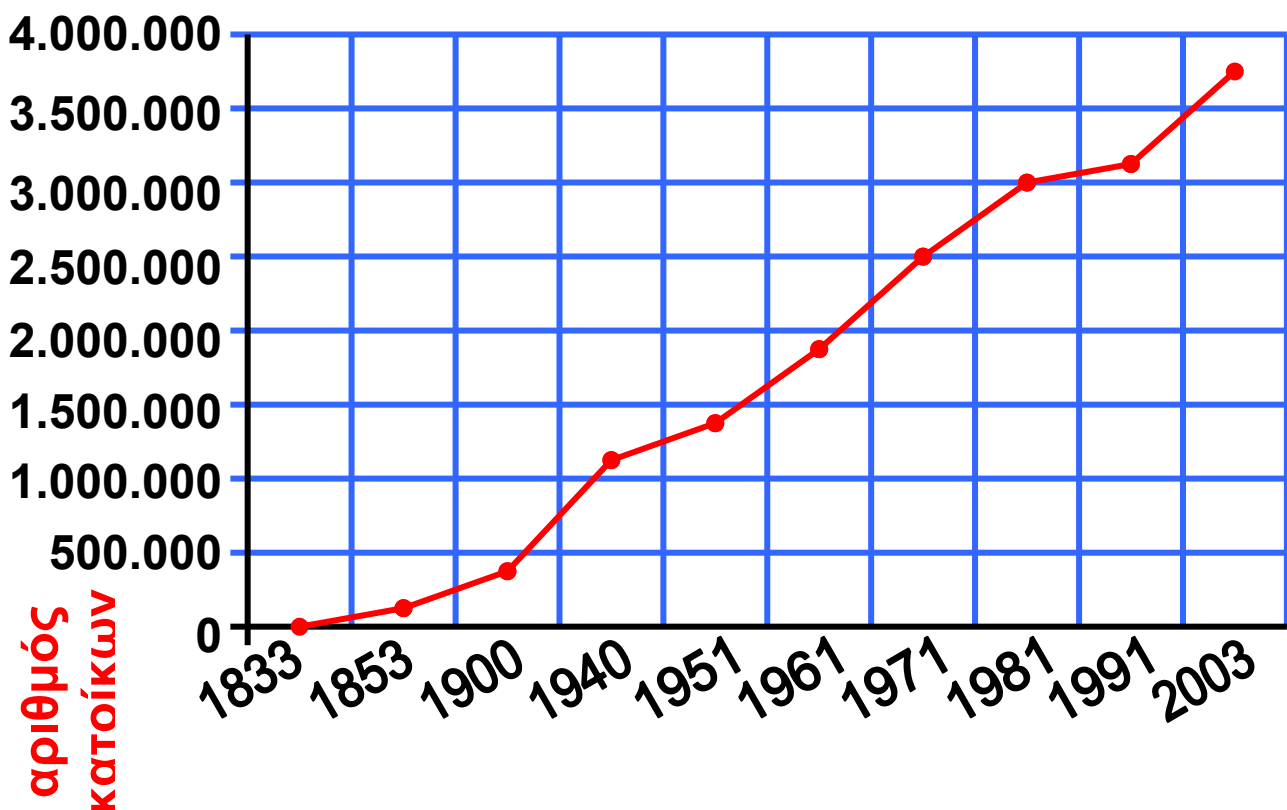
→ Μελετώ ένα κυκλικό διάγραμμα.

→ Επιλέγω τον κατάλληλο τύπο γραφήματος.

### **Δραστηριότητα 1η.**

Το παρακάτω γράφημα παρουσιάζει την αύξηση του πληθυσμού στην Αττική από τότε που η Αθήνα έγινε πρωτεύουσα του ελληνικού κράτους μέχρι το 2003.

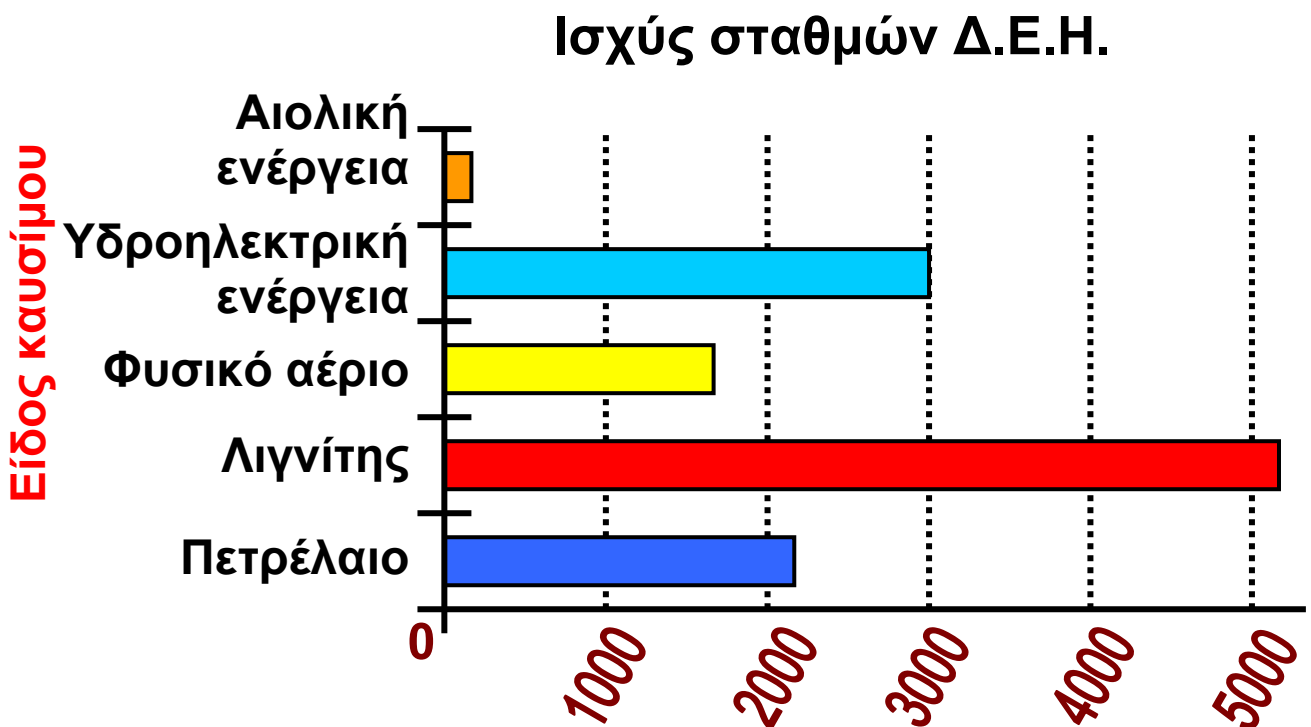
### Πληθυσμός Αττικής



- Τι διαπιστώνουμε για τον πληθυσμό της πρωτεύουσας με μια ματιά από το γράφημα;
- Γιατί προτιμήσαμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα με αυτόν τον τύπο γραφήματος κι όχι με ραβδόγραμμα;
- Θυμήσου το γράφημα που έφτιαξες με δύο ανάλογα ποσά και σύγκρινέ το μ' αυτό.

### Δραστηριότητα 2η.

Η ποσότητα ενέργειας που παράγεται από τη Δ.Ε.Η. (31-12-03) από τους διάφορους σταθμούς παραγωγής φαίνεται παρακάτω στο ραβδόγραμμα και στο κυκλικό διάγραμμα.





- Ποιο είδος παραγωγής είναι το κυρίαρχο; Χρησιμοποίησες το ραβδόγραμμα ή το κυκλικό διάγραμμα για να το βρεις;
- Περίπου τι ποσοστό της συνολικής παραγωγής είναι η υδροηλεκτρική; Από ποιο γράφημα παίρνεις καλύτερα αυτή την πληροφορία;
- Θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις κυκλικό διάγραμμα για την δραστηριότητα 1;

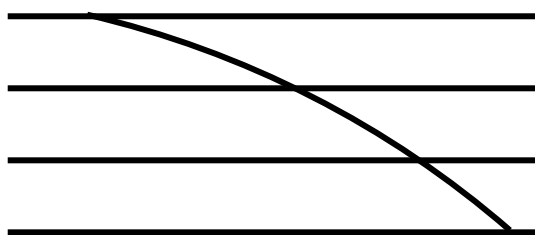
Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, για να παρουσιάσουμε και να τονίσουμε με διαφορετικό τρόπο τα δεδομένα χρησιμοποιούμε διαφορετικούς τύπους γραφημάτων.

### Γράφημα γραμμής και κυκλικό διάγραμμα

Το γράφημα γραμμής χρησιμοποιείται για την παρουσίαση δεδομένων που αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου.

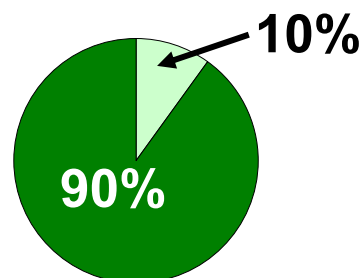
Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για την παρουσίαση της σχέσης του μέρους προς το σύνολο.

## Παράδειγμα



Η ταχύτητα ενός ποδηλάτη καθώς ανεβαίνει ένα λόφο

Το 10% των ανθρώπων είναι αριστερόχειρες



Όταν επιλέγουμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα μας, πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι το γράφημα δίνει πληροφορίες με «γρήγορο» τρόπο, οπότε πρέπει να επιλέγουμε τον κατάλληλο τύπο γραφήματος για να τονίσουμε την πληροφορία που θέλουμε.

## Εφαρμογή

### Επιλογή του κατάλληλου γραφήματος

Τα παιδιά έκαναν μια έρευνα ανάμεσα στους συμμαθητές τους καταγράφοντας το πώς ξοδεύουν το χαρτζιλίκι τους κατά τη διάρκεια της εβδομάδας. Συγκέντρωσαν τα στοιχεία και αφού τα επεξεργάστηκαν κατέληξαν στον παρακάτω πίνακα.

Ημέρα	Ποσοστό % που ξόδεψαν
Δευτέρα	10 %
Τρίτη	8 %
Τετάρτη	8 %
Πέμπτη	0 %
Παρασκευή	10 %
Σάββατο	34 %
Κυριακή	20 %

Ποιος είναι ο καλύτερος τύπος γραφήματος για να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους;

**Λύση - Απάντηση:**

Τα δεδομένα είναι τέτοιου είδους που μπορούν να παρουσιαστούν με πολλούς τύπους γραφημάτων.

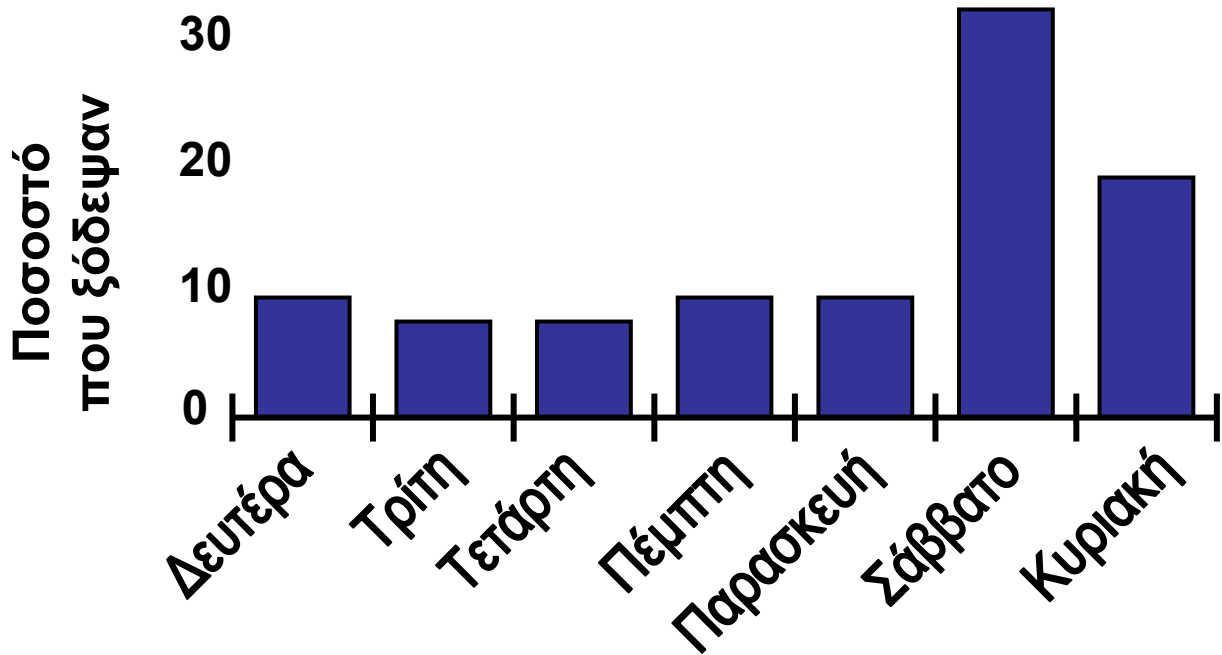
Εξαρτάται από το τι θέλουν να τονίσουν τα παιδιά με το γράφημά τους.

1. Αν θέλουν να δείξουν πώς αλλάζει (αυξάνεται ή μειώνεται) το ποσό που ξοδεύουν στη διάρκεια της εβδομάδας, θα χρησιμοποιήσουν το γράφημα γραμμής.



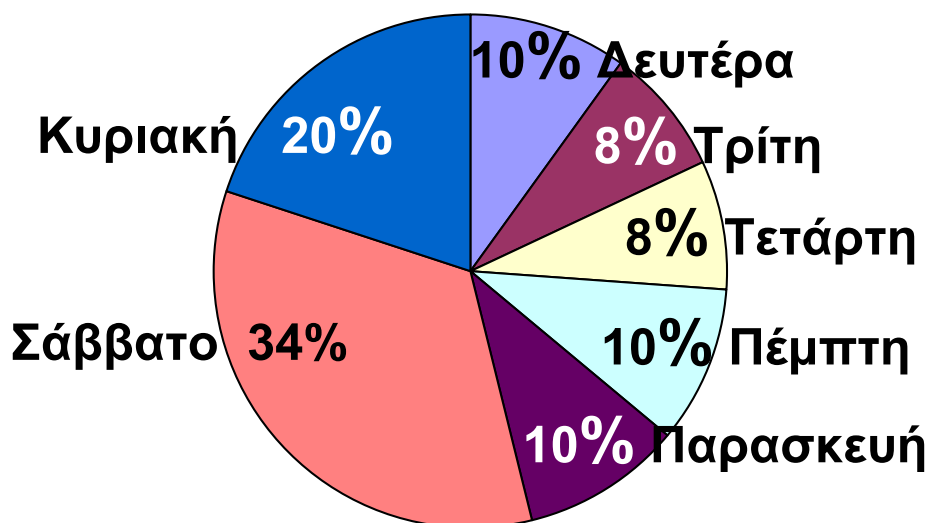
2. Αν θέλουν να παρουσιάσουν το ποσοστό κάθε μέρας μεμονωμένα, θα χρησιμοποιήσουν το ραβδόγραμμα.

### Κατανομή στο χαρτζιλίκι της εβδομάδας



3. Αν θέλουν να τονίσουν τη σχέση της καθημερινής κατανάλωσης προς το σύνολο της εβδομάδας, θα χρησιμοποιήσουν το κυκλικό διάγραμμα.

### Κατανομή στο χαρτζιλίκι της εβδομάδας



## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το γράφημα γραμμής και το κυκλικό διάγραμμα. Να δώσεις ένα δικό σου παράδειγμα στο οποίο μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

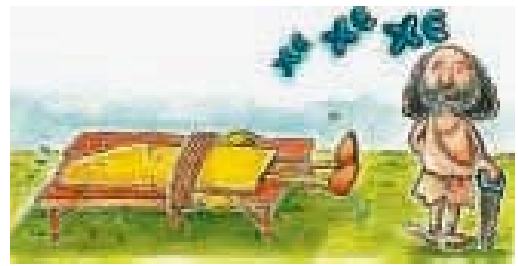
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Για την καταγραφή του πυρετού είναι καλύτερο το ραβδόγραμμα.

→ Στο ραβδόγραμμα και στο γράφημα γραμμής το σύνολο δε φαίνεται αμέσως.

## Κεφάλαιο 48ο Βρίσκω το μέσο όρο



### Ο Προκρούστης των αριθμών



→ Κατανοώ την έννοια του μέσου όρου.

- Κατανοώ την ανάγκη χρήσης του μέσου όρου.
- Υπολογίζω και χρησιμοποιώ το μέσο όρο.

### Δραστηριότητα

Στην οροσειρά Λευκά Όρη της Κρήτης ζει μια μοναδική ποικιλία αγριοκάτσικων, τα κρι-κρι. Όταν οι καιρικές συνθήκες βοηθήσουν την ανάπτυξη της βλάστησης, ο πληθυσμός των κρι-κρι αυξάνεται. Έτσι την επόμενη χρονιά η βλάστηση δεν επαρκεί για να ζήσουν. Οι οικολογικές οργανώσεις λοιπόν προσπαθούν να βοηθήσουν τα ζώα, ώστε να μην πεθάνουν από ασιτία. Κάθε χρόνο καταγράφουν τον πληθυσμό των κρι-κρι στα βουνά ώστε, αν χρειαστεί, να μετακινηθούν πληθυσμοί ζώων. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα δεδομένα μιας χρονιάς.



Ανατολική πλευρά	Δυτική πλευρά	Βόρεια πλευρά	Νότια πλευρά
11	17	22	62

- Κάθε πλευρά του βουνού μπορεί να θρέψει περίπου τον ίδιο αριθμό ζώων. Πού νομίζεις ότι χρειάζεται να επέμβουμε για να φέρουμε σε ισορροπία τον πληθυσμό;

- Τι νομίζεις πως πρέπει να γίνει για να σωθούν τα ζώα στη Νότια πλευρά;
- Χρησιμοποιώντας το σύμβολο «γιώτα» (I) να κατά-γράψεις με μολύβι στη δεύτερη στήλη σε πεντάδες (όπως έκανες στον πίνακα συχνοτήτων) τα ζώα που υπάρχουν σε κάθε πλευρά.

Πλευρά	Σύμβολα ζώων πριν τη μετακίνηση	Σύμβολα ζώων μετά τη μετακίνηση	Αριθμός ζώων μετά τη μετακίνηση
Ανατολική			
Δυτική			
Βόρεια			
Νότια			

- Μπορείς τώρα να μετακινείς ζώα στην επόμενη στήλη για να τα μοιράσεις στις πλευρές; (Σκέψου από πού θα πάρεις ζώα για να τα μοιράσεις; Από κάθε πλευρά;)
  - Πόσα ζώα έχει τώρα κάθε πλευρά;
- .....
- Γράψε τον αριθμό στην επόμενη στήλη του πίνακα.
  - Αν αναπαριστούσες μετά την ανακατανομή τον αριθμό των κρι-κρι με ένα ραβδόγραμμα, πώς θα ήταν το ραβδόγραμμα αυτό;
  - Χωρίς να κάνεις όλες τις παραπάνω ενέργειες, πώς θα μπορούσες, στο τετράδιό σου, να λύσεις το

πρόβλημα και να μοιράσεις τα κρι-κρι εξίσου σε όλες τις πλευρές του βουνού;

.....  
.....  
.....  
.....

Στην παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώσαμε ότι υπάρχει ένας αριθμός ο οποίος δείχνει πόσα ζώα θα έχουμε σε κάθε πλευρά του βουνού, αν θελήσουμε να μοιράσουμε το σύνολο των ζώων όσο γίνεται πιο ισότιμα ανάμεσα στις πλευρές.

### Μέσος όρος

Πολλές φορές χρειάζεται να περιγράψουμε ένα πλήθος δεδομένων με μια μόνο τιμή. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε το μέσο όρο.

Ο μέσος όρος, που λέγεται και μέση τιμή, υπολογίζεται προσθέτοντας τις τιμές όλων των δεδομένων και διαιρώντας το άθροισμα με το πλήθος των δεδομένων.

### Παράδειγμα

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε έξι τεστ στα μαθηματικά ήταν 7, 10, 7, 8, 7 και 9. Ο μέσος όρος της βαθμολογίας του είναι:  $(7 + 10 + 7 + 8 + 7 + 9) : 6 = 48 : 6 = 8$

Το 8 είναι ο βαθμός που δείχνει περιληπτικά τις επιδόσεις του μαθητή στα τεστ.

## Εφαρμογή

Το Υπουργείο Παιδείας ζητάει συχνά στατιστικά στοιχεία για τους μαθητές που τελειώνουν το δημοτικό σχολείο και εγγράφονται στο γυμνάσιο. Για το λόγο αυτό στο 4ο Γραφείο Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης της Θεσσαλονίκης η κ. Πόπη συγκέντρωσε τα δυναμολόγια (αριθμός μαθητών ανά τάξη) για όλα τα τμήματα της Στ' τάξης σε 20 σχολεία στο κέντρο της Θεσσαλονίκης. Ο αριθμός των μαθητών σε κάθε σχολείο φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.



25	28	30	27	24	26	28	25	26	27
26	29	24	30	30	28	27	24	27	29

Πόσα παιδιά υπάρχουν κατά μέσο όρο στην Στ' τάξη στα σχολεία του κέντρου της πόλης της Θεσσαλονίκης;

Λύση:

Για να βρω το μέσο όρο των παιδιών θα πρέπει να αθροίσω τις τιμές όλων των τάξεων και το άθροισμα να το διαιρέσω με το πλήθος των τάξεων.

$$(25 + 28 + 30 + 27 + 24 + 26 + 28 + 25 + 26 + 27 + 26 + 29 + 24 + 30 + 30 + 28 + 27 + 24 + 27 + 29) : 20 = 540 : 20 = 27$$

Απάντηση: Ο μέσος όρος των μαθητών στην Στ' τάξη των σχολείων της Θεσσαλονίκης είναι 27 μαθητές.

## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε την έννοια του μέσου όρου (ή μέσης τιμής). Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα τι μας χρειάζεται;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Ο μέσος όρος είναι πάντα ακέραιος αριθμός

→ Οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 10 έχουν μέση τιμή το 5

→ Όταν οι σερβιτόροι αθροίζουν τα φιλοδωρήματα που μαζεύουν και μετά τα μοιράζονται, αυτό που παίρνει ο καθένας είναι ο μέσος όρος.

## 5η θεματική ενότητα

### Μετρήσεις – Μοτίβα



Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τις μετρήσεις και τα μοτίβα.

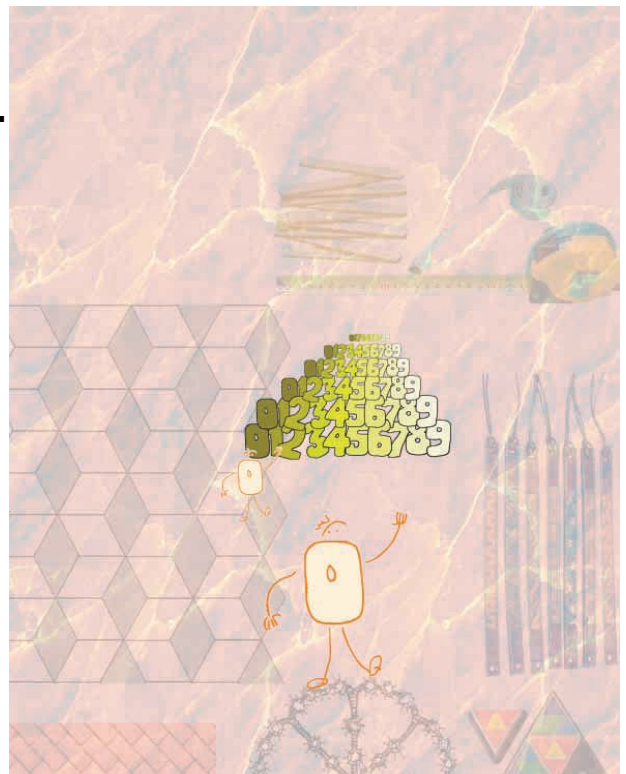
Οι μετρήσεις είναι ίσως η εφαρμογή των μαθηματικών στην καθημερινή μας ζωή. Μετράμε αποστάσεις, διαστάσεις, το χρόνο, το βάρος και το κόστος.

Μπορείς να φανταστείς τη ζωή σου χωρίς όλες αυτές τις μετρήσεις;

Τα μοτίβα είναι η «μαγεία της επανάληψης». Θα έχεις δει υφαντά και κεντήματα ή χαλιά λαϊκής τέχνης. Ένα απλό σχέδιο επαναλαμβάνεται και δημιουργεί μια πολύ όμορφη σύνθεση. Στη ζωγραφική οι πίνακες του Esher είναι διάσημοι ακριβώς γι' αυτό το χαρακτηριστικό: για τα μοτίβα από τα οποία αποτελούνται.

Είναι εξαιρετικά προκλητικό να ψάχνεις για μοτίβα! Μόλις ανακαλύψεις το μοτίβο μπορείς να προβλέψεις τι ακολουθεί!

Καλή διασκέδαση...





## Μετρώ το μήκος



### *Πόσο μακριά είπες;*



- Μελετώ τις μετρήσεις μήκους στην καθημερινή ζωή και κατανοώ την ανάγκη για μια τυποποιημένη μονάδα μέτρησης.
- Μελετώ τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια του μέτρου καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους.
- Χρησιμοποιώ τα εργαλεία μέτρησης μήκους και εκφράζω τις μετρήσεις με διαφορετικούς αριθμούς.

### **Δραστηριότητα 1η**

Το Σινικό Τείχος της Κίνας χτίστηκε πριν από τουλάχιστον 2.000 χρόνια. Ο αυτοκράτορας που το κατασκεύασε διέταξε να γίνει έξι άλογα πλατύ στην κορυφή, οχτώ άλογα πλατύ στη βάση και ψηλό όσο πέντε άνθρωποι.



Φωτογραφία  
Joan Ho

- Ποια μονάδα μέτρησης χρησιμοποιήθηκε για το πλάτος του Τείχους και ποια για το ύψος;  
.....  
.....
- Μπορείς να υπολογίσεις πόσο περίπου είναι το ύψος του σε μέτρα;  
.....
- Πώς θα μπορούσες εσύ να μετρήσεις μια απόσταση αν δεν υπήρχε διαθέσιμο κάποιο εργαλείο μέτρησης;

- .....
- .....
- Τι προβλήματα δημιουργεί μια τέτοια μέτρηση;
- .....

- «Η μάχη με τους Πέρσες έγινε στη Μυκάλη όπου ο πορθμός έχει πλάτος επτά στάδια». Τι πληροφορίες μας δίνει η φράση αυτή για τη μέτρηση αποστάσεων στην αρχαία Ελλάδα; .....
- .....
- .....

## Δραστηριότητα 2η

Η μονάδα μέτρησης αποστάσεων (μήκους, ύψους, πλάτους) που χρησιμοποιείται σήμερα σχεδόν παντού είναι το μέτρο. Ένα τμήμα του μέτρου είναι ο χάρακάς σου.

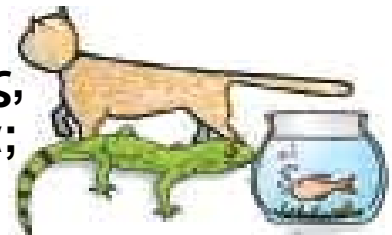


Αν προεκτείνεις το χάρακα μέχρι τα 100 εκατοστόμετρα θα έχεις ένα **μέτρο**

Η απόσταση ανάμεσα σε δύο μικρές γραμμούλες είναι ένα **χιλιοστόμετρο**

Δέκα χιλιοστόμετρα είναι ένα **εκατοστόμετρο**

- Αν θέλω να εκφράσω το μήκος της γάτας, του χρυσόψαρου και της σαύρας, θα το εκφράσω σε μέτρα ή σε εκατοστά;



- Αν θέλω να εκφράσω το μήκος της τίγρης, του δελφινιού και του κροκόδειλου, θα το εκφράσω σε μέτρα ή σε εκατοστά;

• Αν θέλω να συγκρίνω το μέγεθος της σαύρας και του κροκόδειλου (ή να υπολογίσω τη διαφορά τους) τι θα κάνω; .....

.....

• Το Σινικό Τείχος έχει μήκος τρία εκατομμύρια μέτρα! Πόσα χιλιόμετρα νομίζεις ότι είναι; .....

.....

• Εξήγησε πώς μετέτρεψες τα μέτρα σε χιλιόμετρα:

.....

.....

.....

Διαπιστώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης μήκους το μέτρο, μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις που είναι ακριβείς και κατανοητές από όλους.

### Μετρήσεις μήκους, πράξεις ανάμεσα σε μετρήσεις

Το μήκος το μετράμε με το μέτρο και το εκφράζουμε σε χιλιοστά, εκατοστά, μέτρα και χιλιόμετρα. Μπορούμε να εκφράσουμε το μήκος με φυσικό, δεκαδικό, συμμιγή ή κλασματικό αριθμό.

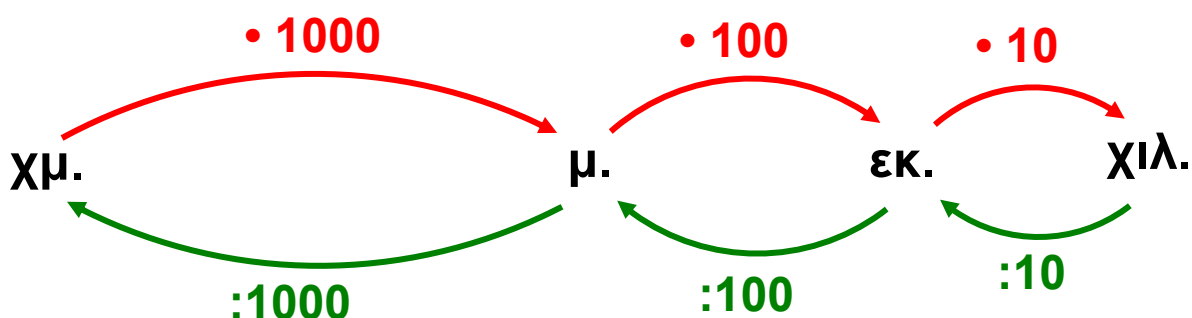
#### Παράδειγμα

Το μήκος του θρανίου μου είναι 1,20 μ. ή 120 εκ.

ή 1 μ. 20 εκ. ή  $\frac{120}{100}$  μ.

Για να μετατρέψουμε τη μέτρηση από μικρότερη μονάδα σε μεγαλύτερη, διαιρούμε με τον κατάλληλο αριθμό. Αντίστοιχα, για να μετατρέψουμε από μεγαλύτερη μονάδα σε μικρότερη πολλαπλασιάζουμε.

## Παράδειγμα



Για να κάνουμε πράξεις ανάμεσα σε μετρήσεις μήκους, πρέπει οι μετρήσεις να εκφράζονται στην ίδια υποδιαίρεση (ή πολλαπλάσιο) του μέτρου και με αριθμούς της ίδιας μορφής.

## Παράδειγμα

85 εκ.

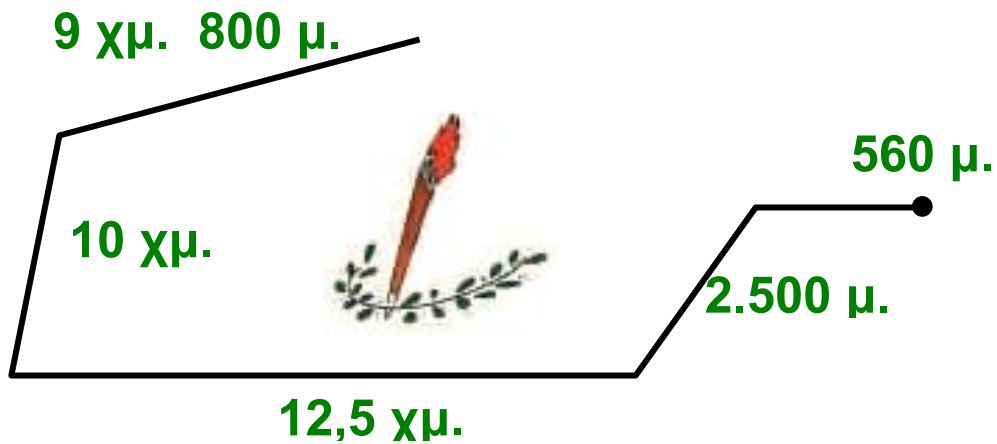
1,36 μ.

Το συνολικό μήκος των τμημάτων είναι:  
 $85 \text{ εκ.} + 136 \text{ εκ.} = 221 \text{ εκ.}$  ή  $2,21 \text{ μ.}$

Σημείωση: Το τμήμα του μέτρου που αποτελείται από 10 εκατοστόμετρα ονομάζεται δεκατόμετρο.

## Εφαρμογή

Στο σχεδιάγραμμα της επόμενης σελίδας φαίνονται οι τελευταίοι σταθμοί στη διαδρομή της ολυμπιακής φλόγας μέχρι το βωμό του Σταδίου στην Αθήνα το 2004. Υπολόγισε την απόσταση που διάνυσαν οι λαμπαδηδρόμοι μεταφέροντας τη φλόγα σε αυτή τη διαδρομή.



**Λύση:**

Θα προσθέσουμε τις πέντε αυτές αποστάσεις.

1. Θα μετατρέψουμε όλες τις μετρήσεις σε χιλιόμετρα:  
 Ο συμμιγής αριθμός 9 χμ. 800 μ. θα γίνει δεκαδικός  
 ..... χμ.

Οι μετρήσεις που είναι σε μέτρα πρέπει να διαιρεθούν  
 με το 1000.

Έτσι το 560 μ. θα γίνει ..... χμ. και το 2.500 μ. θα γίνει  
 ..... χμ.

2. Θα κάνουμε την πρόσθεση:

..... + ..... + ..... + ..... + ..... = ..... χμ.

**Απάντηση:** Οι λαμπαδηδρόμοι των τελευταίων  
 σταθμών διάνυσαν ..... χιλιόμετρα ή ..... μέτρα  
 μέχρι το Στάδιο.

## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το μέτρο, τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια του. Να εκφράσεις μια μέτρηση που έκανες, με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Για να μετατρέψουμε τα εκατοστόμετρα σε μέτρα διαιρούμε με το 100.

→ 0,62χιλ. = 620 εκ.

→ Για να μετατρέψουμε μία μεγαλύτερη μονάδα (όπως τα χιλιόμετρα) σε μία μικρότερη (όπως τα μέτρα) πολλαπλασιάζουμε.



## Μετρώ και λογαριάζω βάρη



### **Μπορώ να τα σηκώσω;**



→ Μελετώ τις μετρήσεις βάρους στην καθημερινή ζωή.

→ Μελετώ τις υποδιαιρέσεις και το πολλαπλάσιο του κιλού καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους.

→ Εκφράζω τις μετρήσεις βάρους με αριθμούς διαφορετικής μορφής.

### **Δραστηριότητα 1η**



Στο πρόγραμμα Αγωγής Υγείας στο οποίο συμμετείχαν τα παιδιά έμαθαν ότι το μεγαλύτερο βάρος που επιτρέπεται να σηκώνει ένας μαθητής χωρίς να κινδυνεύει είναι ίσο με το 10% του σωματικού του βάρους!

• Ποια μονάδα μέτρησης χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε το βάρος των σωμάτων;

• Πώς μπορείς να βρεις το βάρος σου;

.....

• Με πόσους τρόπους μπορείς να βρεις το βάρος της τσάντας σου; .....

.....

• Πώς θα διαπιστώσεις αν η τσάντα σου έχει το επιτρεπτό βάρος; .....

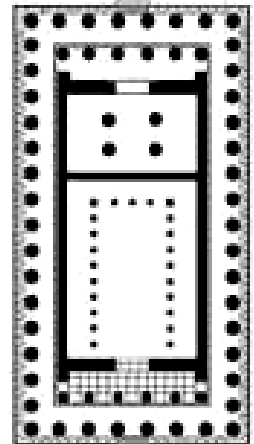
.....

## Δραστηριότητα 2η

Ο Παρθενώνας είναι ένα μοναδικό έργο της παγκόσμιας αρχιτεκτονικής. Το χτίσιμό του ήταν ένα πολύ δύσκολο επίτευγμα κανείς, ότι οι κολόνες που τον απαρτίζουν, είναι τεράστια κομμάτια από μάρμαρο και έχουν μεταφερθεί από την Πεντέλη που βρίσκεται 19 χιλιόμετρα μακριά! Οι εξωτερικές κολόνες μόνο, υπολογίζεται ότι ζυγίζουν η καθεμία κατά μέσο όρο 90 τόνους!



- Μελετώντας τη διπλανή κάτοψη του Παρθενώνα, όπου κάθε μαύρος κύκλος παριστάνει μία κολόνα, υπολόγισε το βάρος του μαρμάρου που χρησιμοποιήθηκε για όλες τις εξωτερικές κολόνες:



.....  
.....

- Θα εκφράσεις τη μέτρηση αυτή σε γραμμάρια, σε κιλά ή σε τόνους; .....

- Ανάφερε δύο υλικά σώματα των οποίων το βάρος να εκφράζεται σε γραμμάρια: .....  
κιλά: .....  
τόνους: .....

- Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο μετρήσεις βάρους που η μία να εκφράζεται σε τόνους και η άλλη σε κιλά, τι κάνουμε; *[Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε τη διαφορά στο βάρος του ενήλικου ελέφαντα (5 τόνοι) και του νεογέννητου μικρού του (150 κιλά)].*

.....  
.....  
.....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το βάρος των υλικών σωμάτων, όσο μικρά ή μεγάλα κι αν είναι αυτά, και να εκφράσουμε τις μετρήσεις χρησιμοποιώντας το κιλό, το γραμμάριο ή τον τόνο.

### Μετρήσεις βάρους, πράξεις ανάμεσα σε μετρήσεις

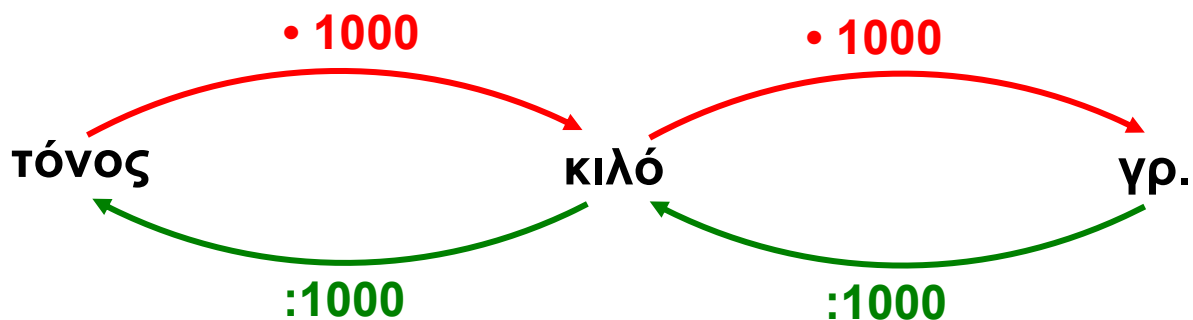
Μονάδα μέτρησης του βάρους είναι το κιλό (κ.) ή χιλιόγραμμο (χγρ. ή kg). Υποδιαίρεση του κιλού είναι το γραμμάριο (γρ. ή gr) και πολλαπλάσιο του ο τόνος (τόν. ή t). Τη μέτρηση μπορούμε να την εκφράσουμε με δεκαδικό, φυσικό ή συμμιγή αριθμό.

#### Παράδειγμα

Το βάρος της τσάντας είναι 4,8 κιλά ή 4.800 γρ. ή 4 κιλά 800 γραμμάρια.

Για να μετατρέψουμε τη μέτρηση από μικρότερη μονάδα σε μεγαλύτερη, διαιρούμε με τον κατάλληλο αριθμό. Αντίστοιχα, για να μετατρέψουμε από μεγαλύτερη μονάδα σε μικρότερη πολλαπλασιάζουμε.

#### Παράδειγμα



Για να κάνουμε πράξεις ανάμεσα σε μετρήσεις βάρους, πρέπει οι μετρήσεις να εκφράζονται στην ίδια υποδιαίρεση (ή πολλαπλάσιο) του κιλού και με αριθμούς της ίδιας μορφής.

### Παράδειγμα

$$2,5 \text{ κ.} + 650 \text{ γρ.} = 2,5 \text{ κ.} + 0,65 \text{ κ.} = 3,15 \text{ κ.}$$

### Εφαρμογή

Το βάρος ενός φύλλου φωτοτυπικού χαρτιού είναι 5 γραμμάρια. Ο δήμος Θεσσαλονίκης συγκέντρωσε σε ένα μήνα τις παρακάτω ποσότητες χαρτιού για ανακύκλωση από κάθε δημοτικό διαμέρισμα αντίστοιχα:

$$\begin{array}{ll} \text{Α}': 1 \text{ τόν.}, & \text{Β}': 1 \text{ τόν. } 500 \text{ κ.}, \\ \text{Γ}': 1,59 \text{ τόν.}, & \text{Δ}': 1.200 \text{ κ.} \end{array}$$

Αν το σύνολο αυτής της ποσότητας γίνει ανακυκλωμένο χαρτί φωτοτυπικού, πόσα φύλλα ανακυκλωμένου χαρτιού θα γίνουν;

Λύση:

1. Για να προσθέσω τους παραπάνω αριθμούς, θα μετατρέψω όλες τις μετρήσεις σε τόνους ενώ παράλληλα θα μετατρέψω τον συμμαγή σε δεκαδικό:

$$\begin{array}{l} \text{Α}': 1 \text{ τόν.}, \\ \text{Β}': 1 \text{ τόν. } 500 \text{ κ.} = 1,5 \text{ τόν.}, \\ \text{Γ}': 1,59 \text{ τόν.}, \\ \text{Δ}': 1.200 : 1.000 = 1,2 \text{ τόν.} \end{array}$$

(αν αποφασίσεις να μετατρέψεις τις μετρήσεις σε κιλά, τι θα γίνει ο συμμαγής; .....)

2. Βρίσκω με πρόσθεση τη συνολική ποσότητα:

$$1 + 1,5 + 1,59 + 1,2 = \dots\dots\dots \text{τόν.}$$

3. Θα μετατρέψω τους τόνους σε γραμμάρια για να κάνω διαίρεση μέτρησης:

$$\dots\dots\dots \cdot 1.000.000 = \dots\dots\dots\text{γρ.}$$

4. Κάνω τη διαίρεση:  $\dots\dots\dots : 5 = \dots\dots\dots$

Απάντηση:

Οι τόνοι χαρτιού που συγκεντρώθηκαν από το δήμο για ανακύκλωση θα μπορούσαν να γίνουν  $\dots\dots\dots$  φύλλα ανακυκλωμένου φωτοτυπικού χαρτιού.

## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το κιλό, το γραμμάριο και τον τόνο. Να εκφράσεις μια μέτρηση βάρους, με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Για να μετατρέψουμε τα γραμμάρια σε τόνους διαιρούμε με το 1000.

→ Για να μετατρέψουμε τους τόνους σε κιλά πολλαπλασιάζουμε με το 1000.

→  $\frac{3}{4}$  τόνου = 75.000 γραμμάρια.



Μετρώ  
το χρόνο



## Σταμάτα μια στιγμή!



- Εκφράζω την ώρα με διαφορετικούς τρόπους.
- Μελετώ τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια της ώρας καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους.
- Μαθαίνω για τη διαφορά ώρας στα διάφορα μέρη της γης.
- Λύνω προβλήματα σχετικά με χρονική διάρκεια.

### Δραστηριότητα 1η

Στην παρακάτω εικόνα βλέπεις ένα τμήμα από το τηλεοπτικό πρόγραμμα.

16:30	Εκπαιδευτική Τηλεόραση
17:00	Κινούμενα Σχέδια
17:45	Ειδήσεις, Καιρός
18:00	Ντοκιμαντέρ για τη φύση
19:00	Παιδική εκπομπή
21:30	Μουσική εκπομπή
00:30	Αθλητική εκπομπή
01:00	Ειδήσεις
01:10	Ξένη ταινία

- Ποιο πρόγραμμα έχει τη μεγαλύτερη διάρκεια;
- Ποιο έχει τη μικρότερη διάρκεια;

- Αν θέλεις να μαγνητοσκοπήσεις το πρόγραμμα εκπαιδευτικής τηλεόρασης και τα κινούμενα σχέδια, αρκεί να ρυθμίσεις την εγγραφή για 1 ώρα;
  - Αν θέλεις να μαγνητοσκοπήσεις τη μουσική εκπομπή, για πόσες ώρες πρέπει να ρυθμίσεις την εγγραφή;
  - Τι ώρα αρχίζει η αθλητική εκπομπή;
- .....
- Να εκφράσεις την ώρα 17:45 με όσους τρόπους μπορείς:
- .....
- .....

### Δραστηριότητα 2η

Το Γκρήνουιτς (Greenwich) είναι μια περιοχή του Λονδί-νου, σε σχέση με την οποία έχει ρυθμιστεί η ώρα όλου του πλανήτη. Οι χώρες που βρίσκονται στα ανατολικά του Γκρήνουιτς είναι μπροστά στην ώρα και οι χώρες που βρίσκονται στα δυτικά του είναι πίσω στην ώρα. Η Αθήνα βρίσκεται στη ζώνη «ώρα Γκρήνουιτς + 2» (GMT + 2).



- Η πτήση Λονδίνο - Αθήνα διαρκεί 4 ώρες. Αν κάποιος αναχωρήσει από το Λονδίνο στις 9:30, θα προλάβει την πτήση από Αθήνα για Θεσσαλονίκη στις 14:30;

Εξήγησε: .....

.....

.....

- Η πτήση Αθήνα - Λονδίνο αναχωρεί στις 18:30. Τι ώρα θα είναι στο Λονδίνο, όταν προσγειωθεί; Κάνε τις πράξεις:

.....  
.....

Η μέτρηση του χρόνου είναι σχετική με την περιστροφή της Γης γύρω από τον εαυτό της (μερόνυχτο) και την περιστροφή της γύρω από τον Ήλιο (έτος). Για πρακτικούς λόγους έχουμε χωρίσει την ημέρα σε 24 ίσα κομμάτια (ώρες) και υπολογίζουμε τη διάρκεια των δραστηριοτήτων μας με τις ώρες, τις υποδιαιρέσεις και τα πολλαπλάσια τους.

### **Μετρήσεις χρόνου – Υπολογισμός χρονικής διάρκειας**

Τα μικρά χρονικά διαστήματα τα μετρούμε με την ώρα και τις υποδιαιρέσεις της.

1 ώρα = 60 λεπτά (λ.),

1 λεπτό = 60 δευτερόλεπτα (δ.).

#### **Παράδειγμα**

Το μάθημα διαρκεί 45 λεπτά ενώ το διάλειμμα μόνο 10.

Τα μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα τα μετράμε με την ημέρα (24 ώρες) και τα πολλαπλάσιά της: εβδομάδα (7 ημέρες), μήνας (30 ημέρες), έτος (12 μήνες).

Για πολύ μεγάλες χρονικές περιόδους χρησιμοποιούμε τον αιώνα (100 έτη) ή τη χιλιετία (1.000 έτη).

#### **Παράδειγμα**

Ο μέσος όρος ζωής του ανθρώπου είναι 75 χρόνια.

Τις ώρες μπορούμε να τις εκφράσουμε με 12ωρο τρόπο (π.μ. ή μ.μ.) ή 24ωρο. Όταν κάνουμε πράξεις ανάμεσα σε ώρες για να υπολογίσουμε μια χρονική διάρκεια, πρέπει να εκφράζουμε τις ώρες με 24ωρο τρόπο.

### Παράδειγμα

8:15 μ.μ. σημαίνει 8 ώρες και 15 λεπτά μετά τις 12 το μεσημέρι, δηλαδή  $8:15 + 12:00 = 20:15$

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Οι ώρες και οι ημερομηνίες είναι συμμιγείς αριθμοί.

### Παράδειγμα

Το 6:30 δεν είναι 6,30.

### Εφαρμογή 1η

Τα παιδιά πηγαίνουν στο σχολείο στις 8:15 π.μ. και σχολάνε στη 1:30 μ.μ. Πόσες ώρες μένουν στο σχολείο;



Λύση:

Για να υπολογίσουμε τη χρονική διάρκεια ανάμεσα στην ώρα έναρξης και την ώρα λήξης των μαθημάτων πρέπει να βρούμε τη διαφορά τους.

1. Θα μετατρέψουμε την ώρα λήξης στον 24ωρο τρόπο έκφρασης:  $1:30 + 12 = 13:30$

2. Θα κάνουμε την αφαίρεση των συμμιγών αριθμών:

13 ώρες	30 λεπτά
– 8 ώρες	15 λεπτά
<hr/>	
.... ώρες	.... λεπτά

Απάντηση:

Τα παιδιά μένουν στο σχολείο ... ώρες και ... λεπτά.

### Εφαρμογή 2η



Ο ποιητής Κωστής Παλαμάς γεννήθηκε στις 13 Ιανουαρίου 1859 και πέθανε στις 27 Φεβρουαρίου 1943. Πόσο έζησε;

Λύση:

Κάνω την αφαίρεση των συμμιγών αριθμών:

$$\begin{array}{r} 1943 \text{ έτη } 2 \text{ μήνες } 27 \text{ ημέρες} \\ - 1859 \text{ έτη } 1 \text{ μήνας } 13 \text{ ημέρες} \\ \hline \end{array}$$

.....

Απάντηση: Έζησε ... έτη ... μήνες ... ημέρες.

### Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τις μονάδες μέτρησης του χρόνου. Ανάφερε όλες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη, με τη σχέση που συνδέει τη μία με την άλλη.

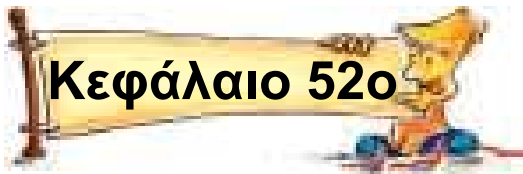
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Για να μετατρέψουμε 3 μήνες σε ώρες πολλαπλασιάζουμε  $3 \cdot 30$

→ Για να μετατρέψουμε τα έτη σε χιλιετίες πολλαπλασιάζουμε με το 1000.

→  $2 \frac{3}{4}$  ώρες + 30 λεπτά = 3 ώρες 15 λεπτά.



## Μετρώ την αξία με χρήματα



### Όσο - όσο ...



→ Μελετώ το ΕΥΡΩ, μαθαίνω τι είναι ισοτιμία νομισματικών μονάδων.

→ Μαθαίνω τι είναι ο τόκος και το επιτόκιο.

→ Λύνω προβλήματα σχετικά με χρήματα.

### Δραστηριότητα 1η



Φαντάσου να έπρεπε, για να πάρεις μια μπλούζα, να δώσεις ένα καλάθι μήλα! Από πολύ νωρίς οι άνθρωποι κατάλαβαν ότι η μέθοδος της ανταλλαγής είναι «άβολη» και χρησιμοποίησαν για το εμπόριο τα χρήματα με συμφωνημένη αξία.

• Να κάνεις μια κατάσταση με κάποια πράγματα που θα ήθελες να ψωνίσεις:


• Πόσα λεφτά θα έπαιρνες μαζί σου για τα ψώνια αυτά;

.....

• Όταν αγοράζεις κάθε προϊόν έχεις το ακριβές αντίτιμο;

• Αν όχι, περίγραψε τι γίνεται στην περίπτωση αυτή:

.....

.....

- Γιατί οι χώρες στην Ευρωπαϊκή Ένωση χρησιμοποιούν το ίδιο νόμισμα;

## Δραστηριότητα 2η

Οι τράπεζες είναι ιδρύματα που διαχειρίζονται χρήματα. Όταν μας δανείζει χρήματα η τράπεζα, πληρώνουμε ένα ποσό (τόκος), το οποίο είναι ένα ποσοστό του χρηματικού ποσού που δανειστήκαμε. Η τράπεζα το υπολογίζει σύμφωνα με ένα ποσοστό στα 100 (επιτόκιο) που έχει ορίσει για αμοιβή. Αντίθετα, όταν εμείς καταθέτουμε χρήματα στην τράπεζα, τότε η τράπεζα πληρώνει τόκο σε εμάς (που τον υπολογίζει πάλι σύμφωνα με κάποιο επιτόκιο).

Θυμάσαι τα ποσοστά; Για να βρεις τον τόκο που θα πληρώσεις ή θα πάρεις θα εργαστείς όπως στα προβλήματα με ποσοστά.

- Η Τράπεζα προσφέρει επιτόκιο 2% το χρόνο για τις καταθέσεις. Πόσο τόκο θα πάρεις σε ένα χρόνο αν καταθέσεις 1.000 €;

Εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο το υπολόγισες:

.....  
.....

- Η Τράπεζα ζητάει επιτόκιο 8% το χρόνο για τα δάνεια! Πόσο τόκο θα πληρώσεις σε ένα χρόνο αν δανειστείς 1.000 €;

Εξήγησε τον τρόπο με τον οποίο το υπολόγισες:

.....  
.....



Τα χρήματα χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν την αξία ενός αντικειμένου ή μιας υπηρεσίας. Με χρήματα αγοράζουμε ή πουλάμε αντικείμενα και υπηρεσίες.

### **Νομισματική μονάδα, επιτόκιο, τόκος**

Κάθε κράτος έχει τη δική του νομισματική μονάδα. Στην Ενωμένη Ευρώπη όμως, τα περισσότερα κράτη έχουν κοινή νομισματική μονάδα: το ΕΥΡΩ (€).

1 € = 100 λεπτά

Αν θέλουμε να αλλάξουμε τα ΕΥΡΩ με νομίσματα άλλων κρατών, η τράπεζα θα ελέγξει την ισοτιμία των νομισμάτων.

#### **Παράδειγμα**

Το νόμισμα της Αμερικής είναι το δολάριο (\$)

1 \$ = 100 σεντς

Βρες την ισοτιμία δολαρίου και ΕΥΡΩ .....

Όταν καταθέτουμε ή δανειζόμαστε χρήματα, παίρνουμε ή πληρώνουμε αντίστοιχα ένα ποσό για την πράξη αυτή. Το ποσό αυτό λέγεται τόκος.

Επιτόκιο είναι ο τόκος για 100 € για ένα έτος.

#### **Παράδειγμα**

Δανείζομαι 100 € με επιτόκιο 5%.

Σε ένα χρόνο δίνω 5 € τόκο.

Δανείζω 100 € με επιτόκιο 2%.

Σε ένα χρόνο θα πάρω 2 € τόκο.

## **Εφαρμογή 1η**

### **Διαχειρίζομαι χρήματα**



Είσαι έμπορος παιχνιδιών και σκέφτεσαι να εισάγεις παιχνίδια από την Κίνα. Τι πρέπει να υπολογίσεις, για να βρεις πόσο πρέπει να πουλήσεις κάθε παιχνίδι στην ελληνική αγορά και να έχεις κέρδος;

**Λύση - Απάντηση:**

1. Πρέπει να υπολογίσω, σύμφωνα με την ισοτιμία των νομισμάτων (με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση), πόσο στοιχίζουν τα παιχνίδια σε ΕΥΡΩ.
2. Μετά θα προσθέσω στην τιμή αγοράς το κόστος μεταφοράς των παιχνιδιών.
3. Θα διαιρέσω για να βρω πόσο μου κοστίζει κάθε παιχνίδι μετά τη μεταφορά.
4. Θα υπολογίσω τους φόρους.
5. Στο τελικό κόστος του παιχνιδιού θα προσθέσω το επιθυμητό κέρδος.
6. Η τιμή πώλησης στην Ελλάδα είναι ανταγωνιστική σε σχέση με τα ελληνικά παιχνίδια;

## **Εφαρμογή 2η**

### **Εξόφληση δανείου**



Η κυρία Τζεκάκη, για να αγοράσει ένα αυτόκινητο, πήρε δάνειο από την Τράπεζα 8.000 € με επιτόκιο 12%. Πόσο τόκο θα έχει πληρώσει όταν εξοφλήσει το δάνειο σε δύο χρόνια;

**Λύση:**

Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με όποια από τις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων με ποσοστά θέλουμε.

Ένας τρόπος είναι εφαρμόζοντας την αναλογία:

$$\frac{\text{τόκος}}{\text{κεφάλαιο}} = \frac{12}{100} = \frac{X}{100}$$

Επομένως  $100 \cdot X = 12 \cdot 8000$

Άρα  $X = \frac{\quad}{\quad}$                        $X = \frac{\quad}{\quad}$                        $X = \dots\dots\dots$

Αυτό που βρήκαμε είναι ο τόκος για ένα έτος.

Άρα  $\dots \cdot 2 = \dots\dots\dots$

Απάντηση: Όταν εξοφλήσει το δάνειο η κ. Τζεκάκη, εκτός από το κεφάλαιο των 8.000 € που δανείστηκε, θα έχει πληρώσει και  $\dots\dots\dots$  € τόκο.

### Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη νομισματική μονάδα ΕΥΡΩ (€) και τους όρους τόκος και επιτόκιο. Να χρησιμοποιήσεις τους όρους αυτούς σε ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Σωστό    Λάθος

→ Για 100 ΕΥΡΩ πήραμε 120 δολάρια. Άρα η ισοτιμία ήταν:  $1 \text{ €} = 1,2 \text{ \$}$ .                                           

→ Αν καταθέσω 1.000 € με επιτόκιο 2%, σε 6 μήνες θα πάρω τόκο 20 €.

→ 3.500 λεπτά = 350 €



## Κεφάλαιο 53ο

## Γεωμετρικά μοτίβα



**Ωραίο σχέδιο!**



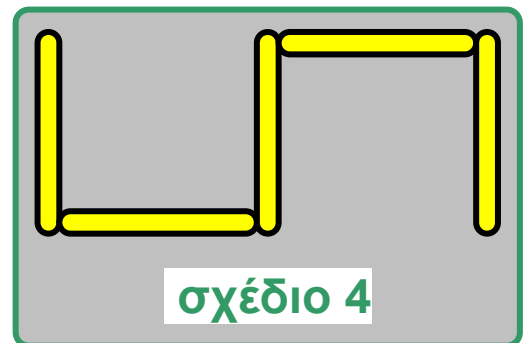
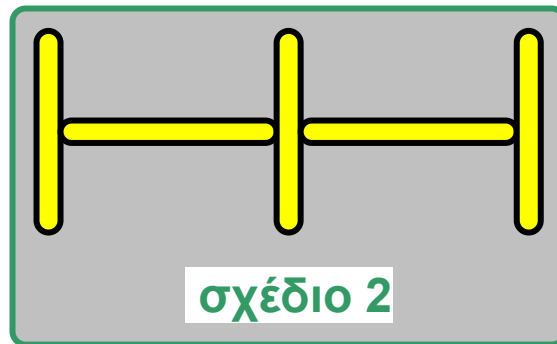
→ Αναγνωρίζω γεωμετρικά μοτίβα.

→ Κατανοώ ότι τα μοτίβα περιγράφουν μια κανονική ή προβλέψιμη αλλαγή.

→ Περιγράφω μοτίβα και συνεχίζω την ακολουθία.

### Δραστηριότητα 1η

Οι παρακάτω εικόνες είναι από ένα διαφημιστικό φυλλάδιο με σχέδια για φράχτες.



- Για να καταλάβεις πως θα είναι ο φράχτης, χρειάζεται να υπάρχει μεγαλύτερο τμήμα του στην εικόνα;

.....  
.....

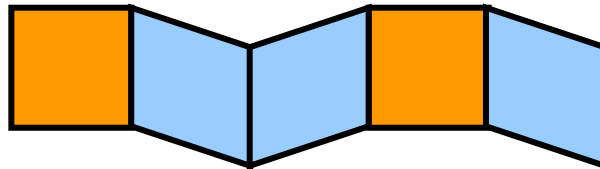
- Γιατί συμβαίνει αυτό; (Ποιο είναι το κοινό χαρακτηριστικό όλων των παραπάνω σχεδίων;)

.....  
 .....

- Χρησιμοποιώντας ξυλάκια, να φτιάξεις ένα δικό σου δείγμα για φράχτη.

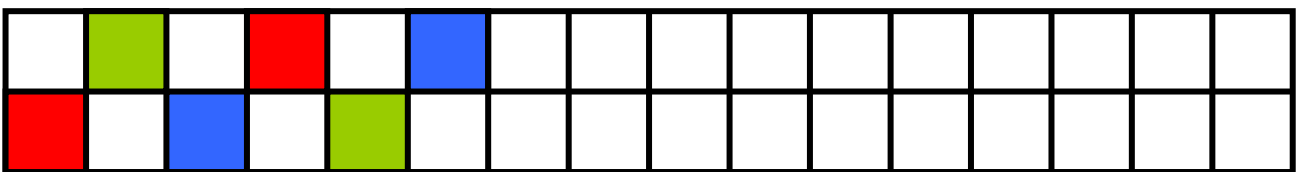
### Δραστηριότητα 2η

Παρακάτω βλέπεις ένα τμήμα από μια διακοσμητική κατασκευή.



- Να συνεχίσεις την κατασκευή ώστε τα κουτάκια να γίνουν επτά.

Χρησιμοποίησε χρωματιστούς κύβους κατασκευών (ή χρωματιστά χαρτάκια) για να φτιάξεις ένα σχέδιο όπως το παρακάτω.



- Εξήγησε τι χρειάστηκε να παρατηρήσεις για να συνεχίσεις την ακολουθία και στις δύο περιπτώσεις:

.....  
 .....

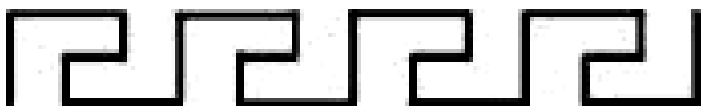
- Χρησιμοποίησε χρωματιστούς κύβους κατασκευών (ή χρωματιστά χαρτάκια) για να φτιάξεις ένα δικό σου σχέδιο που επαναλαμβάνεται.

Πολλές φορές, για να αναλύσουμε ένα σύνθετο πρόβλημα, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε αν υπάρχει κάποιο στοιχείο που επαναλαμβάνεται.

## Γεωμετρικά μοτίβα

Το στοιχείο που επαναλαμβάνεται και δημιουργεί ένα σχέδιο ονομάζεται γεωμετρικό μοτίβο.

### Παράδειγμα



Αρχαίος ελληνικός μαίανδρος

Για να δημιουργήσουμε ή να επεκτείνουμε ένα σχέδιο με επαναλαμβανόμενα μέρη, αρκεί να γνωρίζουμε το μοτίβο του και τον τρόπο με τον οποίο αυτό επαναλαμβάνεται.

## Εφαρμογή 1η

### Μοτίβα στη φύση

Ποιο είναι το μοτίβο στη δημιουργία της κηρήθρας των μελισσών;

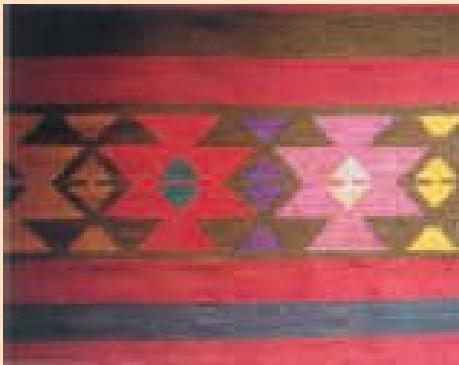
Λύση - Απάντηση:

Παρατηρώντας το σύνθετο σχέδιο μιας κηρήθρας μελισσών, διαπιστώνουμε ότι το μοτίβο που επαναλαμβάνεται είναι ένα κανονικό εξάγωνο (δηλαδή ένα εξάγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες). Το ένα εξάγωνο με το άλλο εφάπτονται στη μία πλευρά.

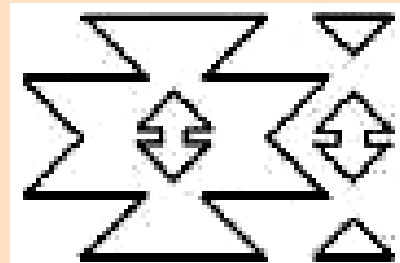
## Εφαρμογή 2η

### Μοτίβα στην τέχνη

Στην Ελλάδα, αλλά και σε πολλές άλλες χώρες, δημιουργήθηκαν από τους λαϊκούς πολιτισμούς υπέροχα μοτίβα που χρησιμοποιήθηκαν για κατασκευή κουβερτών ή χαλιών. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται ένα χαλί με παραδοσιακό ελληνικό σχέδιο. Προσπαθήστε να διακρίνετε το μοτίβο και να το σχεδιάσετε.



Λύση-Απάντηση:



## Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο γεωμετρικό μοτίβο. Να αναφέρεις ένα δικό σου παράδειγμα με κάποιο σχέδιο βασισμένο σε ένα μοτίβο.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
→ Τα βήματα στο χορό αποτελούν ένα μοτίβο.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
→ Το μοτίβο ενός σχεδίου με βοηθά να προβλέψω τη συνέχειά του.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
→ Όλα τα σχέδια βασίζονται σε κάποιο μοτίβο.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Περιεχόμενα 3ου τόμου

### Θεματική Ενότητα 3

(Συνέχεια από τον 2ο τόμο)

36. Μαζί δεν κάνουμε και χώρια δεν μπορούμε!  
(Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά) .....5
37. Παίρνοντας αποφάσεις! (Λύνω προβλήματα με  
αντιστρόφως ανάλογα ποσά) ..... 10
38. Η απλή μέθοδος των τριών! (Η απλή μέθοδος των  
τριών στα ανάλογα ποσά).....15
39. Είναι απλό όταν ξέρω τις τρεις τιμές! (Η απλή  
μέθοδος των τριών στα αντιστρόφως ανάλογα  
ποσά) .....19
40. Συγκρίνω (πο)σωστά % (Εκτιμώ το ποσοστό) .....24
41. Παίζοντας με τα ποσοστά (Βρίσκω το ποσοστό) ...29
42. Ποσοστά της αλλαγής (Λύνω προβλήματα με  
ποσοστά: Βρίσκω την τελική τιμή) .....34
43. Από πού έρχομαι; (Λύνω προβλήματα με  
ποσοστά: Βρίσκω την αρχική τιμή) .....39
44. Η εξερεύνηση του άγνωστου! (Η έννοια της  
μεταβλητής).....44
- Όταν μιλάμε συμβολικά (Ανακεφαλαίωση για τη  
θεματική ενότητα 3: Λόγοι - Αναλογίες) .....49*

## Θεματική Ενότητα 4

Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων.....	55
45. Αξίζει όσο χίλιες λέξεις... (Απεικονίζω δεδομένα με ραβδόγραμμα ή εικονόγραμμα).....	57
46. Η ώρα των αποφάσεων (Ταξινομώ δεδομένα – εξάγω συμπεράσματα) .....	63
47. Το πήρες το μήνυμα; (Άλλοι τύποι γραφημάτων)...	70
48. Ο Προκρούστης των αριθμών (Βρίσκω το μέσο όρο).....	77

## Θεματική Ενότητα 5

Μετρήσεις - Μοτίβα .....	82
49. Πόσο μακριά είπες; (Μετρώ το μήκος) .....	83
50. Μπορώ να τα σηκώσω; (Μετρώ και λογαριάζω βάρη).....	89
51. Σταμάτα μια στιγμή! (Μετρώ το χρόνο) .....	94
52. Όσο - όσο... (Μετρώ την αξία με χρήματα).....	99
53. Ωραίο σχέδιο! (Γεωμετρικά μοτίβα).....	104





**Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').**

***Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.***