Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού

1ος τόμος

Κεφάλαια 1-15

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Μιχάλης Αγ. Παπαδόπουλος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Δημοτικό και το Νηπιαγωγείο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Γεώργιος Τύπας
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδ. Ινστιτ.

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Οικονόμου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Όλγα Κασώτη, Εκπαιδευτικός
Πέτρος Κλιάπης, Εκπαιδευτικός
Θωμάς Οικονόμου, Εκπαιδευτικός

ΚΡΙΤΕΣ – ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Δέσποινα Πόταρη, Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Πατρών
Δέσποινα Αγγελοπούλου, Σχολική Σύμβουλος
Κωνσταντίνος Βρυώνης, Εκπαιδευτικός

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Ανδρέας Κατσαούνης, Σκιτσογράφος-Εικονογράφος

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ευφροσύνη Ξιξή, Φιλόλογος

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Γεώργιος Τύπας, Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ</u>

Αθανάσιος Σκούρας,
Μόνιμος Πάρεδρος του
Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

<u>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</u>

Νικόλαος Ναυρίδης,
Εικαστικός καλλιτέχνης

<u>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</u>

ACCESS ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ Α.Ε.

Στη συγγραφή του δεύτερου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και ο Κώστας Ζιώγας, Εκπαιδευτικός

<u>ΔΙΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΡΑΣΗΣ</u>

Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Πέτρος Κλιάπης Όλγα Κασώτη
Θωμάς Οικονόμου

Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού

1ος τόμος

Κεφάλαια 1-15

Αριθμοί και πράξεις

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τους αριθμούς και τις πράξεις με αριθμούς.

Θα ξεκινήσουμε από τα αριθμητικά σύμβολα τα οποία χρησιμοποιούμε από την Α΄ Δημοτικού για να φτιάξουμε τους αριθμούς και να κάνουμε υπολογισμούς.

Ξέρετε πως οι Ινδοί τα χρησιμοποιούσαν από το 350 π.Χ.;

Γνωρίζετε ακόμα ότι τα δίδαξαν αργότερα οι Άραβες στους Ευρωπαίους και για το λόγο αυτό ονομάστηκαν «αραβικοί αριθμοί»;

Τα σύμβολα που γνωρίζουμε δεν τελειοποιήθηκαν σε κάποιον ορισμένο χρόνο ή τόπο αλλά εξελίχτηκαν με συνεχή ανάπτυξη και πιθανότατα τελειοποιήθηκαν τους τελευταίους αιώνες.

Στο σκίτσο που ακολουθεί βλέπετε την εξέλιξη των συμβόλων από το 800 μετά Χριστόν έως σήμερα.

Κεφάλαιο 1ο

Φυσικοί αριθμοί

Καλημέρα, φίλε μου Αριθμέ

➞ Διαβάζω και γράφω φυσικούς αριθμούς.

➞ Κατανοώ την αρχή της διαδοχής στην ακολουθία των φυσικών αριθμών

➞ Μαθαίνω την αξία των ψηφίων ενός φυσικού αριθμού.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 64ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού προγράμματος SOCRATES/ COMENIUS, αναζήτησαν στοιχεία για τους ανήλικους εργαζόμενους στην Ελλάδα.

Ανήλικοι εργαζόμενοι ανά τομέα απασχόλησης στην Ελλάδα		
Τομέας Απασχόλησης	Ηλικία	
	10-14	15-18
Γεωργία, κτηνοτροφία	3.053	22.798
Αλιεία	30	679
Ορυχεία - λατομεία		32
Βιομηχανία	556	16.470
ΔΕΗ, Ύδρευση, Φ. Αέριο		58
Κατασκευές	273	8.857
Εμπόριο	664	16.373
Ξενοδοχ. - εστιατόρια	199	8.074
Μεταφορές		1.766
Τράπεζες		448
Άλλες δραστηριότητες	41	3.654
Παροχή υπηρεσιών		4.384
Οικιακό προσωπικό		397
ΣΥΝΟΛΟ	4.816	83.989
Πηγή: ΕΣΥΕ, Έρευνα Εργατικού Δυναμικού, 1996		

Στον παραπάνω πίνακα περιλαμβάνονται τα στοιχεία που συγκέντρωσαν.

- Ταξινομήστε τους αριθμούς του πίνακα σε ομάδες, ανάλογα με το πλήθος των ψηφίων τους.

(2ψηφία) ....
....

(3ψηφία) ....
....

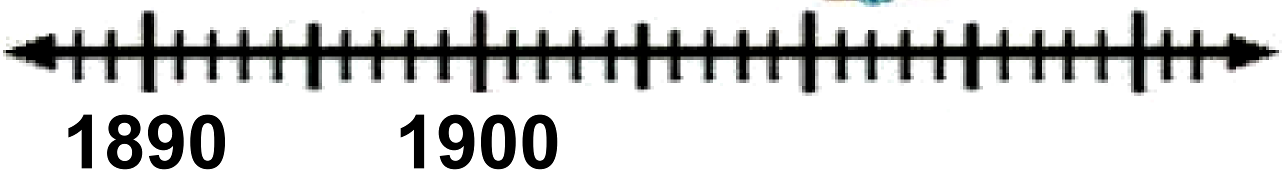
(4ψηφία) ....
....

(5ψηφία) ....
....

- Σε ποιον από τους αριθμούς το ψηφίο 2 έχει τη μεγαλύτερη αξία;
- Πόσα παιδιά μικρότερα από 15 ετών εργάζονταν στην Ελλάδα το 1996;

- **Πόσοι έφηβοι 15-18 ετών εργάζονταν σε βιομηχανίες;**
- **Σε ποιον κλάδο εργάζονταν οι περισσότεροι ανήλικοι;**
- **Συζητήστε στην τάξη για τη σημασία των αριθμών στην εξαγωγή συμπερασμάτων.**

Δραστηριότητα 2η



Να τοποθετήσετε στην ιστορική γραμμή τα ακόλουθα ιστορικά γεγονότα.

Α. Οι πρώτοι σύγχρονοι Ολυμπιακοί Αγώνες 1896

Β. Δεκαέξι χρόνια μετά τους Ολυμπιακούς Αγώνες γίνεται ο Α΄ Βαλκανικός πόλεμος.

Γ. Δύο χρόνια μετά αρχίζει ο Α΄ Παγκόσμιος πόλεμος, που διαρκεί 4 χρόνια (Σημειώστε την αρχή και το τέλος του.)

Δ. Η λήξη του πολέμου βρίσκει τον Οδυσσέα Ελύτη στην Αθήνα σε ηλικία 7 ετών. (Σημειώστε τη χρονολογία της γέννησης του.)

Πολλές φορές στη ζωή μας χρησιμοποιούμε αριθμούς για να εκφράσουμε ένα πλήθος ή μια σειρά. Λέμε, για παράδειγμα, ότι από τους 23 μαθητές της τάξης στη γραμμή ο Γιάννης είναι 1ος. Οι αριθμοί 23 και 1 ονομάζονται «φυσικοί αριθμοί».

Φυσικοί αριθμοί

Οι αριθμοί: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99, ..., 1000, ... λέγονται **φυσικοί αριθμοί.**

Κάθε φυσικός αριθμός, εκτός από το 0, σχηματίζεται από τον προηγούμενό του, με την πρόσθεση του αριθμού 1.

Παράδειγμα

Ο αριθμός 6 έχει επόμενο τον αριθμό 7, ο αριθμός 99 τον αριθμό 100, ο αριθμός 1000 τον αριθμό 1001 κ.ο.κ.

Για τη γραφή όλων των φυσικών αριθμών υπάρχουν δέκα ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Το ίδιο ψηφίο, ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό, δηλώνει μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κ.λπ.

Παράδειγμα

Ο αριθμός 434 σχηματίζεται με τα ψηφία 4 και 3. Για το σχηματισμό

του αριθμού 11, χρησιμοποιήσαμε μόνο το ψηφίο 1.

Εφαρμογή 1η

Να γραφεί με ψηφία ο αριθμός επτά εκατομμύρια δεκαπέντε χιλιάδες εννιακόσια δύο.

Λύση

Κάθε ψηφίο διαβάζεται ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό. Το ψηφίο μηδέν (0) δε διαβάζεται, αλλά γράφεται για να κρατά τα άλλα ψηφία στη σωστή τους θέση και δηλώνει ότι λείπουν οι μονάδες της θέσης που κατέχει.
Στους αριθμούς που έχουν περισσότερα από τρία ψηφία, για λόγους ευκολίας στην ανάγνωση, χωρίζουμε με μία τελεία κάθε τριάδα ψηφίων, αρχίζοντας από τις μονάδες (δεξιά).

Μονάδες εκατομμυρίων	Εκατοντάδες χιλιάδων	Δεκάδες χιλιάδων	Μονάδες χιλιάδων	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
7.	0	1	5.	9	0	2

Έτσι, θα γράψουμε τον αριθμό 7015902 χρησιμοποιώντας τις τελείες διαχωρισμού: …………………..

Εφαρμογή 2η

Τι φανερώνει το ψηφίο 2 στους παρακάτω αριθμούς;

α. 102 β.1.020 γ. 12.618

δ. 548.281 ε. 32.405.186

Λύση

α. μονάδες, β. δεκάδες,

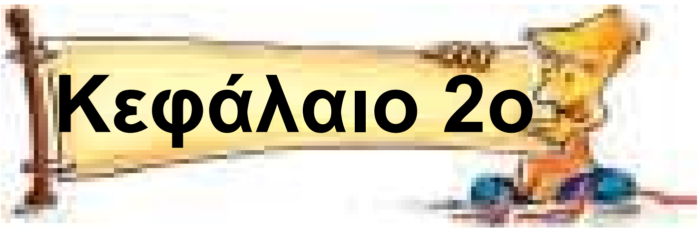
γ. μονάδες χιλιάδων,
δ. εκατοντάδες,
ε. μονάδες εκατομμυρίων

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο φυσικός αριθμός. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- Το μηδέν ως ψηφίο δηλώνει ότι δεν υπάρχουν μονάδες μιας τάξης. ☐
- Ανάμεσα στο 10 και το 40 το ψηφίο 3 εμφανίζεται 5 φορές. ☐
- Οι μονοψήφιοι φυσικοί αριθμοί είναι 9. ☐



Δεκαδικοί αριθμοί

Αριθμοί με... συνοδεία

➝Διαβάζω και γράφω δεκαδικούς αριθμούς.

➝ Μαθαίνω την αξία των ψηφίων ενός δεκαδικού αριθμού.

➝ Κατανοώ τις ιδιότητες των δεκαδικών αριθμών.

Δραστηριότητα 1

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 25ου Δημοτικού Σχολείου Τρικάλων θέλησαν να καταγράψουν το ύψος τους. Μετρήθηκαν λοιπόν και κατέγραψαν στον παρακάτω πίνακα τον αριθμό των παιδιών που αντιστοιχούν σε κάθε ύψος.

ΥΨΟΣ ΣΕ ΜΕΤΡΑ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ	ΥΨΟΣ ΣΕ ΕΚΑΤΟΣΤΑ
1,48	1	
1,49	1	
1,50	1	
1,51	1	
1,52	0	
1,53	2	
1,54	2	
1,55	4	
1,56	3	
1,57	3	
1,58	2	
1,59	2	
1,60	0	
1,61	1	

- Τι αριθμούς χρησιμοποίησαν για να καταγράψουν τις μετρήσεις τους;
- Επαρκούν οι φυσικοί αριθμοί για να εκφράσουμε μετρήσεις;

- Μπορείς να συμπληρώσεις την τελευταία σειρά του πίνακα;
- Τι αριθμούς χρησιμοποίησες; Γιατί;

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Πριν από τους αγώνες άρσης βαρών οι αθλητές της ίδιας κατηγορίας ζυγίζονται με ακρίβεια γραμμαρίου, ώστε σε περίπτωση ισοπαλίας να κερδίζει ο ελαφρύτερος.

Στο παρακάτω σχήμα καταγράφεται το αποτέλεσμα της ζύγισης του αθλητή Πύρρου Δήμα στους Ολυμπιακούς Αγώνες του 2000· η

υποδιαστολή χωρίζει το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος.
Συμπλήρωσε στο σχήμα τι δηλώνουν οι αριθμοί 0, 6 και 5 στο δεκαδικό μέρος.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες				
	8	4	,	0	6	5

- **Προσπαθήστε τώρα να εκφράσετε το αποτέλεσμα της ζύγισης με λόγια.**

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

Μέσα από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώσαμε ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν αρκούν για να εκφράσουμε κάποιες μετρήσεις με ακρίβεια. Έτσι, χρησιμοποιούμε ένα άλλο είδος αριθμών που ονομάζονται «δεκαδικοί αριθμοί».

Δεκαδικοί Αριθμοί

Δεκαδικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που αποτελούνται από ένα ακέραιο και ένα δεκαδικό μέρος. Τα δύο μέρη χωρίζονται μεταξύ τους με την υποδιαστολή (,).
Όπως οι φυσικοί, έτσι και οι δεκαδικοί αριθμοί, σχηματίζονται από μονάδες διάφορων τάξεων στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.

Παράδειγμα

1,72

27,39

84,206

Στους παραπάνω δεκαδικούς αριθμους το ψηφίο 2 έχει διαφορετική αξία, ανάλογα με τη θέση που έχει στον αριθμό.

Τόσο στο ακέραιο όσο και στο δεκαδικό μέρος κάθε τάξη είναι 10 φορές μεγαλύτερη από την αμέσως επόμενη προς τα δεξιά της.
Η αξία ενός δεκαδικού αριθμού δεν αλλάζει, αν προσθέσουμε ή διαγράφουμε μηδενικά στο τέλος του.

Παράδειγμα

1 δέκατο = 10 εκατοστά
1 εκατοστό = 10 χιλιοστά
(δείξτε το στο χάρακα σας)
0,1 = 0,10
0,01 = 0,010

Εφαρμογή 1η

Να γραφεί με ψηφία ο αριθμός εκατόν δύο και σαράντα πέντε χιλιοστά.
Ονομάστε κάθε ψηφίο, ανάλογα με την αξία θέσης του στον αριθμό.

Λύση

Το δεκαδικό μέρος διαβάζεται με το όνομα της αξίας του τελευταίου ψηφίου. Έτσι σε αυτόν τον αριθμό, αφού γράψουμε το ακέραιο μέρος του (102), συνεχίζουμε στο δεκαδικό, γνωρίζοντας ότι το ψηφίο 5 πρέπει να μπει στην τρίτη θέση μετά την υποδιαστολή.
Γράφουμε: 102,045.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες		Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
1	0	2	,	0	4	5

Εφαρμογή 2η

Μετρήσαμε το μήκος τριών τύπων μπαταριών και βρήκαμε τα εξής αποτελέσματα:

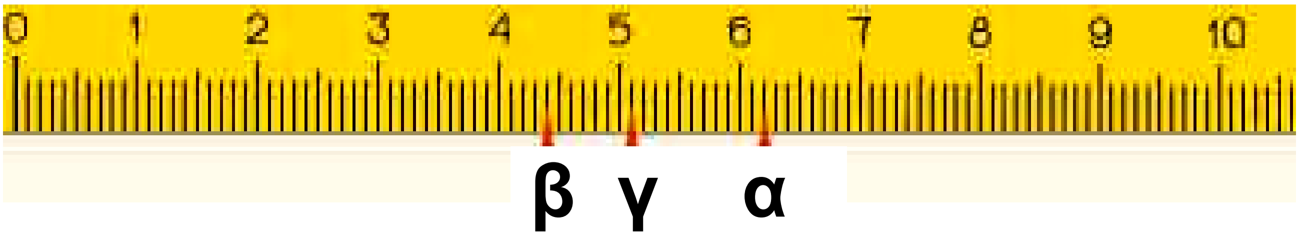
α) τύπος D: 6,2 εκατοστά,

β) τύπος AAA: 4,4 εκατοστά,

γ)τύπος AA: 5,1 εκατοστά.

Σημειώστε στην αριθμογραμμή τα σημεία α, β και γ που αντιστοιχούν στις μετρήσεις.

Λύση

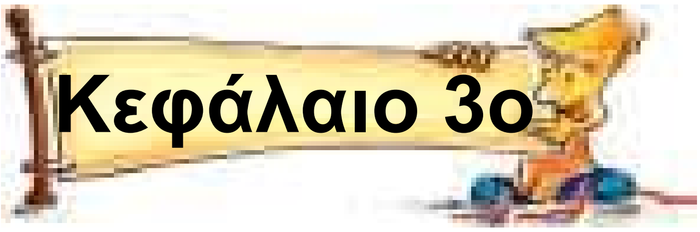


Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο δεκαδικός αριθμός. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Μετά την υποδιαστολή γράφεται το ακέραιο μέρος.** ☐
- **Τα εκατοστά γράφονται στη δεύτερη θέση μετά την υποδιαστολή.** ☐
- **Το 1 δέκατο της ακέραιης μονάδας είναι ίσο με 10χιλιοστά της ίδιας ακέραιης μονάδας.** ☐



Μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα

Οι αριθμοί αλλάζουν εμφάνιση

➙ Κατανοώ την ανάγκη μετατροπής των αριθμών από τη μία μορφή στην άλλη.

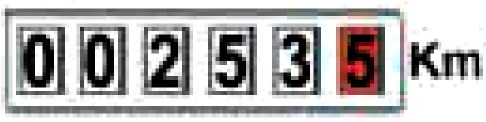
➙ Μετατρέπω τους δεκαδικούς αριθμούς σε κλάσματα.

➙ Μετατρέπω τα δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 2ου Δημοτικού Σχολείου Νιγρίτας επισκέφθηκαν τον αρχαιολογικό χώρο στο Δίον. Κατά την επιστροφή θέλησαν να καταγράψουν την απόσταση από το σχολείο τους. Ζήτησαν λοιπόν από τον οδηγό να «μηδενίσει» το μετρητή του λεωφορείου. Το λεωφορείο κατά την επιστροφή άφησε τους μαθητές στην πλατεία του χωριού που απέχει $\frac{3}{10}$ του χιλιομέτρου από το σχολείο τους.

Η ένδειξη του μετρητή φαίνεται στη διπλανή



Ο δάσκαλος εξήγησε στα παιδιά ότι η απόσταση δεν ήταν 2.535 αλλά 253,5 χιλιόμετρα, επειδή το κόκκινο ψηφίο δεν μετρά χιλιόμετρα αλλά δέκατα του χιλιομέτρου.

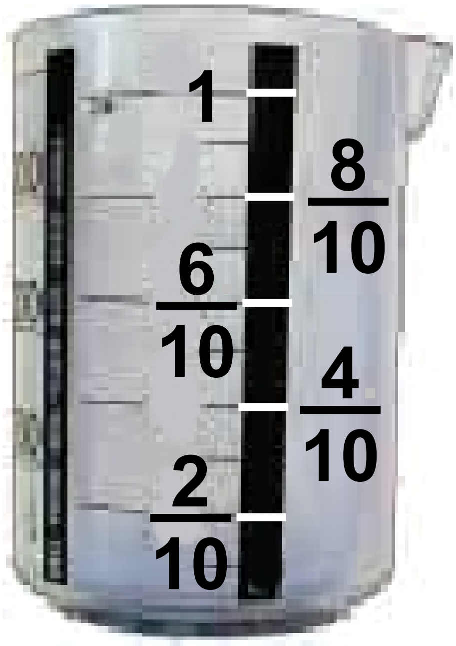
• Αφού τα αριθμητικά δεδομένα είναι διαφορετικής μορφής, τι πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να υπολογίσουν πόσο απέχει το Δίον από το σχολείο τους;

....

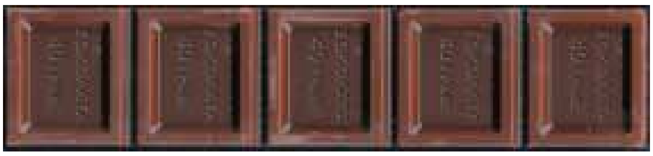
....

....

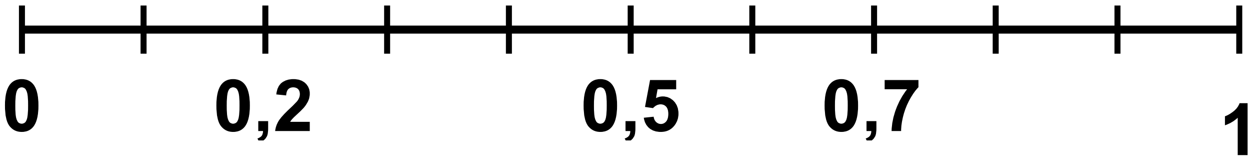
Δραστηριότητα 2η



Για να φτιάξουν ένα γλυκό στο ολοήμερο τμήμα, τα παιδιά ζύγισαν 0,2 κιλά σοκολάτας. Κατόπιν έβαλαν να λιώσει σε ένα δοχείο / δοσομετρητή του 1 κιλού. Χρωματίστε το παρακάτω σχήμα μέχρι την ένδειξη έως την οποία ανέβηκε η στάθμη της λιωμένης σοκολάτας.



- **Τοποθετήσετε τα κλάσματα των ενδείξεων του δοσομετρητή στην παρακάτω αριθμογραμμή.**



- **Διατυπώστε έναν κανόνα για τη μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα.**

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

Κάνοντας τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές χρειάζεται να γράψουμε τα δεκαδικά κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς και αντίστροφα.

Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα και αντίστροφα

Οι δεκαδικοί αριθμοί είναι δυνατό

να γραφούν ως **δεκαδικά κλάσματα** και τα δεκαδικά κλάσματα ως δεκαδικοί αριθμοί.

Παράδειγμα

Ο αριθμός 0,5 μπορεί να γραφεί ως $\frac{5}{10}$.

Ο αριθμός $\frac{8}{10}$ μπορεί να γραφεί ως 0,8.

Για να γράψουμε έναν δεκαδικό αριθμό ως κλάσμα, γράφουμε όλο τον αριθμό, χωρίς την υποδιαστολή, στη θέση του **αριθμητή** και στη θέση του **παρονομαστή** γράφουμε τον αριθμό 1 με τόσα μηδενικά όσα ήταν τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.

Παράδειγμα

Ο αριθμός 1,5 γίνεται: 15 αριθμητής, με παρονομαστή το 10,
δηλαδή $\frac{15}{10}$ ή $1\frac{5}{10}$.

Για να γράψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό, γράφουμε μόνο τον αριθμητή του και χωρίζουμε με υποδιαστολή τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα μηδενικά είχε ο παρονομαστής.

Παράδειγμα

Ο αριθμός $\frac{5}{10}$ γράφεται ως 0,8.

Εφαρμογή 1η

Πώς θα γραφεί ως κλάσμα ο δεκαδικός αριθμός δύο και σαράντα πέντε εκατοστά;

Λύση

Ο αριθμός 2,45 γράφεται στη θέση του αριθμητή, χωρίς την υποδιαστολή, ενώ στη θέση του παρονομαστή γράφεται η μονάδα (1) με δύο μηδενικά (00), δηλαδή το 100.

Έτσι έχουμε: 2,45 = ―― .

Εφαρμογή 2η

Αν αφαιρέσουμε από τον δεκαδικό αριθμό 55,70 τον αριθμό $\frac{25}{100}$ ποιος αριθμός θα προκύψει;

Λύση

Ο αριθμός $\frac{25}{100}$ γράφεται ως δεκαδικός: 0,25.

Αφαιρούμε τώρα από το 55,70 το 0,25

55,70 – 0,25 =…………

Απάντηση:
Θα προκύψει ο αριθμός …………

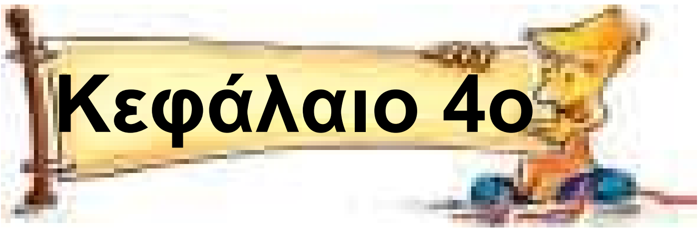
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη διαδικασία της **μετατροπής δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα και αντίστροφα.** Εξήγησε με παραδείγματα τη διαδικασία αυτή.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

→ **Κάτι που κοστίζει 30 λεπτά, κοστίζει $\frac{30}{100}$ του €.** ☐

→ **Για να μετατρέψουμε έναν δεκαδικό αριθμό σε κλάσμα, αρκεί να βάλουμε το 10 στη θέση του παρονομαστή.** ☐



Σύγκριση φυσικών ή δεκαδικών αριθμών

Οι αριθμοί αναμετριούνται

→ Συγκρίνω φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.

→ Χρησιμοποιώ τα σύμβολα
> και <.

→ Διατάσσω τους φυσικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.

→ Παριστάνω τους αριθμούς με σημεία πάνω σε μια ευθεία.

Δραστηριότητα 1η

«Υπερατού»

Το παιχνίδι «Υπερατού» παίζεται με κάρτες που έχουν φωτογραφίες και πίνακες με τα χαρακτηριστικά αυτοκινήτων, σκαφών, αεροπλάνων κ.λπ.

Οι δύο παίκτες ανακατεύουν τις κάρτες και παίρνουν από μισές. Ο πρώτος παίκτης διαλέγει από την 1η κάρτα του εκείνο το χαρακτηριστικό που πιστεύει ότι υπερτερεί από το αντίστοιχο στην κάρτα του αντιπάλου. Λέει το χαρακτηριστικό με την τιμή στον αντίπαλο και, αν υπερισχύει, τότε ο αντίπαλος του δίνει την κάρτα του. Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρι να τελειώσουν όλες οι κάρτες κάποιου παίκτη.

Γ1

Θ1

Γ1

Ταχύτης (Χλμ/Ώρα)	260
Ισχύς (Ίπποι/KW)	440/323
Στροφές ανά λεπτό	12000
Κύλινδροι	6
Κυβισμός σε κ.εκ.	2500
Βάρος (κιλά)	350

Θ1

Ταχύτης (Χλμ/Ώρα)	170
Ισχύς (Ίπποι/KW)	1400/1029
Στροφές ανά λεπτό	6100
Κύλινδροι	16
Κυβισμός σε κ.εκ.	13600
Βάρος (κιλά)	4000

- Τι θα διάλεγες να πεις αν είχες την κάρτα Γ1, χωρίς να γνωρίζεις τι έχει ο αντίπαλος;
- Ανάμεσα στα δύο σκάφη αυτό με τη μεγαλύτερη ισχύ είναι και το πιο γρήγορο;
- Με τη σύγκριση μπορούμε να βρούμε ποιο σκάφος είναι το πιο γρήγορο, το πιο δυνατό και το πιο βαρύ. Μπορούμε όμως να βρούμε ποιο υπερτερεί σε όλα;

Δραστηριότητα 2η

«Οι αποστάσεις στις Κυκλάδες»

ΟΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ (ΣΕ ΜΙΛΙΑ) ΤΩΝ ΓΥΡΩ ΝΗΣΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΛΙΜΑΝΙ ΤΗΣ ΣΥΡΟΥ				
Πάρος	Νάξος	Κύθνος	Τήνος	Μύκο-νος
25,2	30,3	40,5	12,2	19,1

ΟΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ (ΣΕ ΜΙΛΙΑ) ΤΩΝ ΓΥΡΩ ΝΗΣΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΛΙΜΑΝΙ ΤΗΣ ΣΥΡΟΥ			
Σίφνος	Σέριφος	Κέα	Άνδρος
41,3	37,5	33,8	51,2

Ενώ στο χάρτη της προηγούμενης σελίδας η Σύρος φαίνεται να βρίσκεται στο κέντρο των νησιών, οι αποστάσεις ανάμεσα στα λιμάνια διαφέρουν, όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα.

- **Ποιο είναι το πιο μακρινό και ποιο το πιο κοντινό νησί, σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα;**

....

....

- **Η Σέριφος ή η Κύθνος φαίνεται να είναι πιο κοντά στη Σύρο στο χάρτη;**
- **Αφού εξετάσετε τα στοιχεία του πίνακα, απαντήστε στο ίδιο ερώτημα.**
- **Διατάξτε τα λιμάνια από το κοντινότερο προς το πιο μακρινό:**

....

....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να διαπιστώσουμε ότι πολλές φορές χρειάζεται να συγκρίνουμε φυσικούς ή δεκαδικούς αριθμούς μεταξύ τους.

Σύγκριση και διάταξη αριθμών

Δύο αριθμοί (φυσικοί ή δεκαδικοί) μπορούν πάντα να **συγκριθούν** μεταξύ τους.
Το αποτέλεσμα της σύγκρισης εκφράζεται με τα σύμβολα <, >, =.

Παράδειγμα

801 < 811   1,13 < 1,15

Μπορούμε να **διατάξουμε** τους αριθμούς, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της σύγκρισής τους, από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο (αύξουσα σειρά) ή από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο (φθίνουσα σειρά).

Παράδειγμα

2,05 < 3,1 < 3,5

23 > 15 > 9

$\cancel{9 < 23 > 15}$

Η σύγκριση και η διάταξη των αριθμών μας επιτρέπει να παρεμβάλουμε έναν ή περισσότερους αριθμούς ανάμεσα σε δύο άλλους.

Παράδειγμα

1 < .... < 3

Εφαρμογή 1η

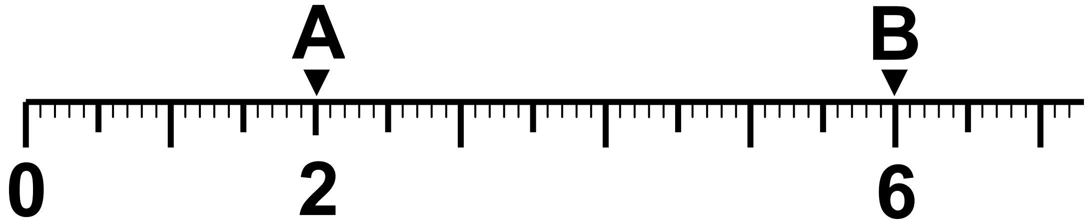
Ένα έτοιμο τοστ στοιχίζει 1,10 €. Για να το φτιάξουμε μόνοι μας, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα εξής υλικά: ψωμί που κοστίζει 0,20 €, σαλάμι που κοστίζει 0,23 € και κασέρι που κοστίζει 0,18 €. Σε ποια περίπτωση μας στοιχίζει το τοστ περισσότερο;

Λύση

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα ποσά που πληρώνουμε στις δύο περιπτώσεις, πρέπει να βρούμε πόσο πληρώνουμε για όλα τα υλικά όταν το φτιάχνουμε μόνοι μας. Έτσι έχουμε:
0,20 + 0,23 + 0,18 = …………
Επομένως, πληρώνουμε περισσότερο όταν το αγοράζουμε έτοιμο, αφού 1,10 > …………

Εφαρμογή 2η

Αν τα σημεία Α και Β πάνω στην αριθμογραμμή αντιστοιχούν στους αριθμούς 2 και 6, σε ποιον αριθμό αντιστοιχεί το μέσο του τμήματος ΑΒ;



Λύση

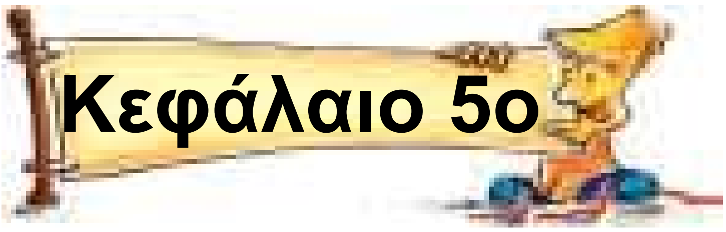
Η απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β είναι 4 μονάδες. Το μέσο τους απέχει 2 μονάδες από το καθένα. Το ζητούμενο σημείο απέχει από το Α δύο (2) μονάδες, προσθέτουμε και τις 2 μονάδες που απέχει το σημείο Α από το μηδέν και βρίσκουμε: 2 + 2 = 4.
Άρα το μέσο του τμήματος ΑΒ αντιστοιχεί στον αριθμό …… της αριθμογραμμής.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους σύγκριση, μεγαλύτερος, μικρότερος, διάταξη αριθμών και αριθμογραμμή. Εξήγησε με παραδείγματα τους όρους αυτούς.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- Ο αριθμός 2.006 παρεμβάλλεται ανάμεσα στους αριθμούς 2.005 και 2.007 ☐
- $5{,}014 < 5{,}041$ ☐
- $11.100 > 11.001 > 10.101 > > 10.110$ ☐



Κεφάλαιο 5ο

Πρόσθεση και αφαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

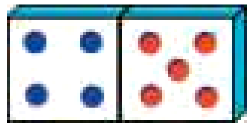
Προσθέσεις και αφαιρέσεις

➞ Προσθέτω και αφαιρώ φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.

➞ Χρησιμοποιώ τις ιδιότητες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

➞ Αναγνωρίζω ότι η αφαίρεση είναι αντίθετη πράξη της πρόσθεσης.

Δραστηριότητα 1η



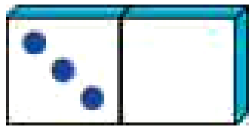
Σε ένα παιχνίδι ντόμινο βρίσκεται στα χέρια σου η διπλανή κάρτα.

● Ποιο είναι το άθροισμα των σημείων της; ....

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να οδηγηθούμε στο άθροισμα;
- Τι παρατηρείς; ....

....

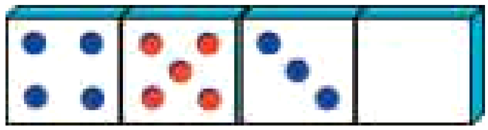
Τι παρατηρείς στη δεύτερη κάρτα για το άθροισμα με το 0;



....

....

Αν έχεις να προσθέσεις τις δύο αυτές κάρτες μαζί, να περιγράψεις τους τρόπους με τους οποίους μπορείς να το κάνεις:



....

....

....

....

Δραστηριότητα 2η

Μια πράξη ή μια ενέργεια που εξουδετερώνει μια άλλη λέγεται αντίστροφή της (π.χ. ανεβαίνω τη σκάλα - κατεβαίνω τη σκάλα).

- **Βρείτε άλλες αντίστροφες πράξεις ή ενέργειες.**

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

Αν από τον αριθμό 26 αφαιρέσουμε τον αριθμό 8 βρίσκουμε 18. Πώς από τον αριθμό 18 μπορούμε να ξαναβρούμε το 26;
Σημειώστε με ισότητες αυτές τις πράξεις.

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

- **Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε για τις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση;**

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στα εξής συμπεράσματα:

Πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών

Αν αλλάξουμε τη σειρά των προσθετέων, δεν αλλάζει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης (αντιμεταθετική ιδιότητα).

Παράδειγμα

προσθετέοι άθροισμα

49 + 16 = 65	**3,2 + 11,5 = 14,7**
16 + 49 = 65	**11,5 + 3,2 = 14,7**

Σε μια πρόσθεση πολλών αριθμών, προσθέτουμε πρώτα τους δύο και μετά στο άθροισμα τους τον τρίτο κ.ο.κ. Αν αλλάξουμε τα ζευγάρια των προσθετέων, το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δεν αλλάζει (προσεταιριστική ιδιότητα).

Παράδειγμα

49 + 16 + 14 = (49 + 16) + 14 =
= 65 + 14 = 79

49 + 16 + 14 = 49 + (16 + 14) =
= 49 + 30 = 79

Η αφαίρεση είναι πράξη αντίστροφη της πρόσθεσης. Σε κάθε αφαίρεση, αν προσθέσουμε τη διαφορά και τον αφαιρετέο, βρίσκουμε τον μειωτέο.

Παράδειγμα

μειωτέος - αφαιρετέος = διαφορά

693 - 541 = 152	92,5 - 48,2 = 44,3
152 + 541 = 693	44,3 + 48,2 = 92,5

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης μας βοηθούν να υπολογίζουμε πιο γρήγορα αθροίσματα με πολλούς αριθμούς. Η πρόσθεση και η αφαίρεση στους δεκαδικούς αριθμούς γίνονται όπως και στους φυσικούς. Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ψηφία σύμφωνα με την αξία τους.

Εφαρμογή 1η

Η Φωτεινή μάζεψε 18,85 €. Πόσα χρήματα πρέπει να προσθέσει ακόμα στις οικονο-μίες της, ώστε να συγκεντρώσει

35,60 € και να αγοράσει μια συσκευή DVD για τον υπολογιστή της;

Λύση – Απάντηση

Τα χρήματα που χρειάζεται να συγκεντρώσει θα είναι τόσα ώστε αν προστεθούν στο αρχικό ποσό, το άθροισμα να είναι ίσο με 35,60 €. Δηλαδή:
18,85 + άγνωστο ποσό = 35,60 €.
Ξέροντας ότι η αφαίρεση είναι πράξη αντίστροφη της πρόσθεσης, λύνω το πρόβλημα κάνοντας την πράξη: 35,60 - 18,85 = …………

Εφαρμογή 2η

Υπολογίστε με το νου το άθροισμα 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = …..

Λύση

Παρατήρησε δύο διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους

υπολογίζεται το άθροισμα:

Επιλέγω ένα ζευγάρι προσθετέων και βρίσκω το άθροισμά τους. Μετά επιλέγω έναν από τους υπόλοιπους προσθετέους για να τον κάνω ζευγάρι με το προηγούμενο άθροισμα και συνεχίζω έτσι μέχρι να τελειώσουν όλοι οι προσθετέοι. ...

Αλλάζω τη σειρά των προσθετέων ώστε να γίνουν ζευγάρια που έχουν άθροισμα το 10. Μετά προσθέτω όσους δεν έχουν ζευγάρι. Π.χ.
(9+1) + (8+2) + (7+3) + (6+4) + 5 = …

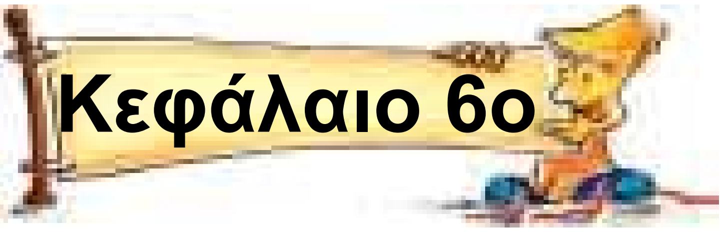
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **αντιμεταθετική ιδιότητα, προσεταιριστική ιδιότητα και αντίστροφες πράξεις.**

Εξήγησε με παραδείγματα τους όρους αυτούς.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- Η ισότητα: 74 + 62 + 26 = 100 + 62 είναι σωστή. ☐
- Μπορούμε να κάνουμε αφαίρεση ως δοκιμή της πρόσθεσης. ☐
- Στην αφαίρεση ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. ☐



Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Οι αριθμοί αναπαράγονται

➙ Πολλαπλασιάζω φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.

➙ Χρησιμοποιώ τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού.

➙ Διαπιστώνω την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

➙ Πολλαπλασιάζω με το 10, το 100, το 1000... και με το 0,1, το 0,01, το 0,001

Δραστηριότητα 1η

Ο Πυθαγόρας, ο μεγάλος Έλληνας φιλόσοφος και μαθηματικός, που

γεννήθηκε στη Σάμο το 580 π.Χ., ίδρυσε την περίφημη Πυθαγόρειο Φιλοσοφική Σχολή. Με τις μελέτες του βοήθησε στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας.

Ο πίνακας της επόμενης σελίδας είναι επινόηση του Πυθαγόρα για να δείξει πώς υπολογίζονται τα γινόμενα του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών από το 0 ως το 10.

- **Συμπλήρωσε τον πίνακα με τα υπόλοιπα γινόμενα.**
- **Τι παρατηρείς για τις γραμμές και τις στήλες του; Αναγνωρίζεις κάποιες σχέσεις;**

....

....

....

....

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0									9	
2	0								16		20
3	0							21		27	
4	0						24		32		
5	0					25		35			
6	0				24		36				
7	0			21		35					
8	0		16		32						
9	0	9		27							
10	0		20								100

Δραστηριότητα 2η

Ο χορηγός της εθνικής ομάδας ποδηλασίας παρέχει ένα κράνος και μια στολή σε κάθε μέλος της ομάδας. Το κράνος στοιχί-

ζει 45,8 € και η στολή 52 €. Η ομάδα αποτελείται από 5 άτομα.

- **Με πόσους τρόπους μπορεί ο χορηγός να υπολογίσει το κόστος της χορηγίας;**

...

...

...

...

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Στον πολλαπλασιασμό, αν αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων, δεν αλλάζει το γινόμενο (αντιμεταθετική ιδιότητα).

Παράδειγμα

παράγοντες γινόμενο

$2 \cdot 8 = 16$ ή $8 \cdot 2 = 16$

$2{,}5 \cdot 8{,}4 = 21$ ή $8{,}4 \cdot 2{,}5 = 21$

Για να πολλαπλασιάσουμε τρεις αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τους δύο μεταξύ τους και μετά το γινόμενο τους με τον τρίτο (**προσεταιριστική ιδιότητα**).

Παράδειγμα

$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$ ή

$2 \cdot (3 \cdot 5) = 2 \cdot 15 = 30$

$(2{,}5 \cdot 3) \cdot 4{,}2 = 7{,}5 \cdot 4{,}2 = 31{,}5$ ή

$2{,}5 \cdot (3 \cdot 4{,}2) = 2{,}5 \cdot 12{,}6 = 31{,}5$

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με άθροισμα δύο ή περισσότερων προσθετέων, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό

με κάθε προσθετέο και να προσθέσουμε τα επιμέρους γινόμενα (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση)
Η ιδιότητα αυτή ισχύει και ως προς την αφαίρεση.

Παράδειγμα

το γινόμενο $20 \cdot (12 + 0{,}5)$ μπορεί να βρεθεί κι έτσι:
$20 \cdot 12 + 20 \cdot 0{,}5 = 240 + 10 = 250$

$20 \cdot (12 - 2) = 20 \cdot 12 - 20 \cdot 2 = 240 - 40 = 200$

Οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μας βοηθούν να υπολογίζουμε εύκολα γινόμενα με πολλούς αριθμούς. Ο πολλαπλασιασμός στους δεκαδικούς αριθμούς γίνεται

όπως και στους φυσικούς. Στο γινόμενο τα δεκαδικά ψηφία είναι τόσα, όσα ήταν συνολικά τα δεκαδικά ψηφία σε όλους τους παράγοντες.

Εφαρμογή 1η

Πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με το 10, το 100, το 1.000 …

Λύση:

Φυσικοί: Αρκεί να προσθέσω στο τέλος του αριθμού ένα 0 για να μεγαλώσει 10 φορές, δύο 0 για να μεγαλώσει 100 φορές, τρία 0 για να μεγαλώσει 1000 φορές κ.ο.κ.

8 · 10 = 80

8 · 100 = 800

8 · 1.000 = 8.000

8 · 10.000 = 80.000

Δεκαδικοί: Θυμάμαι ότι στους δεκαδικούς αριθμούς η αξία κάθε δεκαδικού ψηφίου είναι κατά δέκα φορές μεγαλύτερη από την αξία του ψηφίου που βρίσκεται στα δεξιά του. Άρα η μετακίνηση της υποδιαστολής μία θέση δεξιά μεγαλώνει τον αριθμό δέκα φορές:
8,255 • 10 =.....,.....

Εφαρμογή 2η

Πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με το 0,1 ή το 0,01 ή το 0,001 ...

Λύση:

Όταν πολλαπλασιάζω έναν αριθμό με το 1, ο αριθμός δε μεταβάλλεται. Το 0,1 είναι 10 φορές μικρότερο από το 1. Άρα όταν πολλαπλασιάσω τον αριθμό με το 0,1 τότε αυτός

μικραίνει 10 φορές. Για να μικρύνω έναν αριθμό 10 φορές αρκεί να μετακινήσω την υποδιαστολή μια θέση προς τα αριστερά:

$935 \cdot 0{,}1 = 93{,}5$
$935 \cdot 0{,}01 = 9{,}35$
$93{,}5 \cdot 0{,}01 = 0{,}935$

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **αντιμεταθετική ιδιότητα, προσεταιριστική ιδιότητα και επιμεριστική ιδιότητα**. Εξήγησέ τους με παραδείγματα.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- ➜ **Η ισότητα: 35 · 10 · 0 = 350 είναι σωστή.** ☐
- ➜ **Το 5 · 19 + 5 · 6 μπορεί να γίνει 5 · (19 + 6) = 5 · 25 = 125** ☐
- ➜ **Η ισότητα: 0,31 · 0,1 = 0,31 είναι σωστή.** ☐

Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Δίκαιη μοιρασιά!

→ Διαιρώ φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.

→ Μελετώ τη διαίρεση ενός αριθμού με το 1 ή με τον εαυτό του.

→ Διαπιστώνω ότι η τέλεια διαίρεση είναι αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.

→ Διαιρώ με το 10, το 100, το 1000 ... και με το 0,1, το 0,01, το 0,001...

Δραστηριότητα 1η

Στο Δημοτικό Σχολείο Μετσόβου έφτασαν δύο δέματα με το Β΄ τεύχος του βιβλίου Μαθηματικών, της Στ΄ τάξης. Το ένα δέμα έχει 40 βιβλία και το άλλο 80. Η δασκάλα φώναξε 4 παιδιά για να τα μεταφέρουν.

- Πώς θα βρουν από πόσα βιβλία θα κουβαλήσει κάθε παιδί;

………………………………………………

………………………………………………

- Με πόσους τρόπους μπορείς να υπολογίσεις το αποτέλεσμα;

………………………………………………

………………………………………………

- Αν τα κουβαλούσαν 10 παιδιά;

………………………………………………

………………………………………………

- Αν διπλασιαστεί ο αριθμός των βιβλίων (120 • 2) και διπλασιαστεί και ο αριθμός των παιδιών (4 • 2) από πόσα βιβλία θα κουβαλήσει κάθε παιδί;

……………………………………………

……………………………………………

Τι παρατηρείς;

……………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Στους παρακάτω πολλαπλασιασμούς συμπλήρωσε τους παράγοντες που λείπουν:

4 · …… = 36	…… · 8 = 48
3 · …… = 63	10 · …… = 120
…… · 1000 = 4000	

- **Με ποια διαδικασία τούς βρήκες;**

……………………………………………

……………………………………………

- **Ποια σχέση διακρίνεις ανάμεσα στη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό;**

- Ποιες διαιρέσεις προκύπτουν από την ισότητα $6 \cdot 8 = 48$;

α) ....

β) ....

- Μπορείς με βάση τα προηγούμενα να εξηγήσεις το αποτέλεσμα της διαίρεσης $0 : 4 = 0$;

....

....

- Μπορούμε να διαιρέσουμε έναν αριθμό με το μηδέν;

....

....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε τα ακόλουθα:

Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Τέλεια λέγεται η διαίρεση στην

οποία το υπόλοιπο είναι 0. Όταν το υπόλοιπο είναι διαφορετικό από το 0, η διαίρεση λέγεται ατελής.

Παράδειγμα

Διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο, υπόλοιπο

$$\begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \quad \text{τέλεια} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \quad \text{ατελής}$$

Η τέλεια διαίρεση είναι πράξη **αντί-στροφη** του πολλαπλασιασμού. Σε κάθε διαίρεση ο διαιρετέος είναι ίσος με το γινόμενο του διαιρέτη επί το πηλίκο συν το υπόλοιπο.

Παράδειγμα

$$4 \cdot 3 = 12$$

$$12 : 4 = 3 \longleftrightarrow 12 : 3 = 4$$

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

Κάθε αριθμός, αν διαιρεθεί με το 1, δίνει πηλίκο τον εαυτό του. Κάθε αριθμός, αν διαιρεθεί με τον εαυτό του, δίνει πηλίκο το 1.

Παράδειγμα

12 : 1 = 12
12 : 12 = 1

3,5 : 1 = 3,5
3,5 : 3,5 = 1

Το 0, με όποιον αριθμό και αν διαιρεθεί, δίνει πηλίκο 0.

Παράδειγμα

0 : 12 = 0

0 : 3,5 = 0

Σε κάθε διαίρεση, αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τους δύο όρους με τον ίδιο αριθμό, το πηλίκο δεν αλλάζει.

Παράδειγμα 12 : 3 = 4

(12 • 2) : (3 • 2) = 24 : 6 = 4

Εφαρμογή 1η

Διαιρούμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με 10, το 100, το 1000 ...,

Λύση

Όταν διαιρώ έναν αριθμό με το 10, το 100, το 1000, ..., τότε ο αριθμός μικραίνει κατά 10 ή 100 ή 1000 ... φορές αντίστοιχα. Αρκεί λοιπόν να μετακινήσω την υποδιαστολή 1 ή 2 ή 3 ... θέσεις προς τα αριστερά:

8 : 10 = 0,8 **8 :100 = 0,08**

8 : 1.000 = 0,008 **0,8 :10 =....,....**

Εφαρμογή 2η

Διαιρούμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με το 0,1 ή το 0,01 ή το 0,001 ...,

Λύση

Γνωρίζω ότι το πηλίκο δεν αλλάζει, αν πολλαπλασιάσω το διαιρετέο και τον διαιρέτη με τον ίδιο αριθμό. Για να γίνει εύκολα η διαίρεση μπορώ να μετατρέψω το διαιρέτη στον αριθμό 1 πολλαπλασιάζοντάς τον με το 10, το 100, το 1000, …,

93,5 : 0,1 = (93,5 · 10) : (0,1 · 10) = 935 : 1 = 935

458 : 0,01 = (458 · 100) : (0,01 · 100) = 45800 : 1 = 45.800

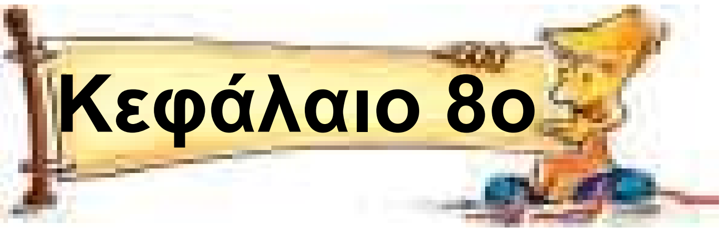
Παρατηρώ ότι για να διαιρέσω έναν αριθμό με το 0,1 ή το 0,01 ή το 0,001… αρκεί **να μετακινήσω την υποδιαστολή 1 ή 2 ή 3 … θέσεις προς τα δεξιά**, σαν να τον πολλαπλασιάζω με το 10, το 100, το 1000, …, αντίστοιχα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους τέλεια και ατελής διαίρεση, διαίρεση αριθμού με το 1 ή με τον εαυτό του. Εξήγησε τους όρους αυτούς με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Η ισότητα: 10 : 2 = 2 : 10 είναι σωστή.** ☐
- **Από τη διαίρεση Δ : δ = π μπορώ να πω ότι ισχύει Δ = δ · π.** ☐
- **Η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι πράξεις αντίστροφες.** ☐



Πράξεις με μεικτές αριθμητικές παραστάσεις

Μαθαίνω τη γλώσσα των αριθμών

➔ Διαπιστώνω την ανάγκη της προτεραιότητας σε μια σειρά από πράξεις.

➔ Μαθαίνω τη σειρά των πράξεων για τον υπολογισμό της τιμής μιας αριθμητικής παράστασης.

➔ Υπολογίζω την τιμή της αριθμητικής παράστασης.

➔ Σχηματίζω αριθμητικές παραστάσεις για τη λύση προβλημάτων.

Δραστηριότητα 1η

Πού πήγαν τα 90 λεπτά μου;

Ο Τοτός πήγε στο βιβλιοπωλείο της γειτονιάς για να αγοράσει κάποια πράγματα έχοντας 10 €. Αγόρασε 10 τετράδια προς 0,45 € το ένα, 2 ντοσιέ προς 0,80 € το ένα και 1 μπλοκ ακουαρέλας προς 1,90 €. Έδωσε το χαρτονόμισμα των 10 € και πήρε 2 € ρέστα.

- **Κάνοντας με το νου τις πράξεις υπολογίστε με την ομάδα σας τα χρήματα που ξόδεψε και γράψτε το αποτέλεσμα.**

τετράδια 10 · 0,45	+	ντοσιέ 2 · 0,80	+	μπλοκ 1,90	=	Σύνολο

Ο Τοτός, για να είναι σίγουρος, προτίμησε να κάνει τις πράξεις με

τη σειρά στον υπολογιστή τσέπης που είχε:

10	X	0,45	+	2	X	0,80	+	1,90	=	7,1

- Ακολούθησε και συ την ίδια λογική και κάνε τις πράξεις με το μολύβι και την ίδια σειρά:

$10 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}80 + 1{,}90 =$

....

....

- Με ποια σειρά έγιναν οι πράξεις με το νου;

....

....

- Με ποια σειρά έκανες τις πράξεις με το μολύβι στη δεύτερη περίπτωση;

....

....

- Ποιο αποτέλεσμα είναι σωστό;

....

- **Μπορείτε με την ομάδα σας να προτείνετε έναν κανόνα για τη σειρά των πράξεων;**

…………………………………………………………

…………………………………………………………

…………………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Η σωστή σειρά

Ο ζαχαροπλάστης Ανρί, αυτή την εβδομάδα, πούλησε 85 μερίδες μους σοκολάτας προς 3,80 € τη μία. Είχε προετοιμάσει όμως 100 μερίδες που του κόστισαν 2,40 € η μερίδα.

- **Βοήθησε τον Ανρί να υπολογίσει το κέρδος του για αυτή την εβδομάδα στον πίνακα που ακολουθεί:**

Έσοδα		Έξοδα		Κέρδος
85 • 3,8	–	100 • 2,4	=	

- Με ποια σειρά έκανες τις πράξεις;

Πρώτα .... μετά .... και τέλος ....

- Μπορούσες να κάνεις τις πράξεις με διαφορετική σειρά; .... γιατί; ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε τα εξής:

Αριθμητικές παραστάσεις

Μια σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων λέγεται αριθμητική παράσταση.

Παράδειγμα

45 + 6 + 3,2 + 0,9 + 65

8 • 2,5 + 40

Σε ένα πρόβλημα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε μια ποσότητα, πρέπει να κάνουμε κάποιες πράξεις με συγκεκριμένη σειρά. Όλα αυτά μπορούμε να τα εκφράσουμε με μια αριθμητική παράσταση.

Παράδειγμα

Αγόρασα 2 παγωτά των 0,90 € το καθένα και 3 μπουκαλάκια νερό των 0,45 € το καθένα. Πόσο πλήρωσα;

Λύση:

$2 \cdot 0{,}90 + 3 \cdot 0{,}45 =$

$1{,}80 + 1{,}35 = 3{,}15$

Στις αριθμητικές παραστάσεις, οι πράξεις γίνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά με μια ορισμένη σειρά:

α) πρώτα πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις και

β) μετά προσθέσεις και αφαιρέσεις

Παράδειγμα

15 : 3 · 5 + 3,5 = 5 · 5 + 3,5 =
25 + 3,5 = 28,5

(αφού η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός έχουν την ίδια προτεραιότητα, εκτελούμε τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά και μετά την πρόσθεση)

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την ίδια σειρά.

Παράδειγμα

(117,6 + 98,4) : (40 – 22) =
216 : 18 = 12

Εφαρμογή 1η

Ο Ανρί για το μους σοκολάτας αγόρασε τα εξής υλικά: 2,5 κιλά

σοκολάτα προς 16,8 € το κιλό, 1,25 κιλά βούτυρο προς 10,2 € το κιλό, 40 αβγά προς 0,65 € το ένα, 1,5 κιλά κρέμα γάλακτος προς 7,5 € το κιλό και 1,25 κιλά ζάχαρη προς 3,2 € το κιλό. Υπολόγισε πόσο του κοστίζει κάθε μερίδα, αφού με τα υλικά που αγόρασε έφτιαξε 40 μερίδες.

Λύση

Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε πόσο πλήρωσε για την αγορά κάθε υλικού, μετά να προσθέσουμε τα επιμέρους ποσά και να διαιρέσουμε το συνολικό άθροισμα με το 40 για να βρούμε πόσο κοστίζει η 1 μερίδα.

Για να γίνουν οι προσθέσεις πριν από τη διαίρεση, πρέπει να μπουν σε παρένθεση. Μέσα στην παρένθεση η προτεραιότητα των πράξεων αρκεί για να τηρηθεί η σωστή σειρά:

(2,5 · 16,8 + 1,25 · 10,2 + 40 · 0,65 + 1,5 · 7,5 + 1,25 · 3,2) : 40 =
(42 + 12,75 + 26 + 11,25 + 4) : 40 =
96 : 40 = 2,4

Απάντηση: Κάθε μερίδα στοιχίζει 2,4 €

Εφαρμογή 2η

Να λύσετε την αριθμητική παράσταση: 25 + 32 : 8 – 5 · 4

Λύση

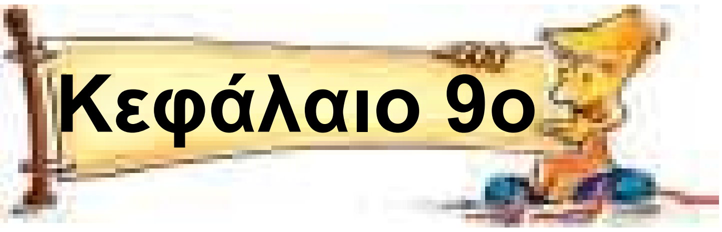
Γνωρίζουμε ότι αρχίζουμε από αριστερά, πρώτα κάνοντας τις διαιρέσεις και τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις:
25 + 32 : 8 – 5 · 4 =
25 + 4 – 20 = 29 – 20 = 9

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο αριθμητική παράσταση. Εξήγησε τον με δικά σου παραδείγματα.

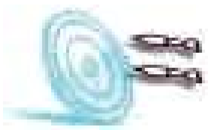
Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Μια σειρά αριθμών λέγεται αριθμητική παράσταση.** ☐
- **Στις αριθμητικές παραστάσεις οι προσθέσεις μπαίνουν σε παρένθεση.** ☐
- **Δεν μπορώ να κάνω αριθμητική παράσταση χωρίς παρενθέσεις.** ☐



Λύνω σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων

Μιλώ τη γλώσσα των αριθμών



→ Λύνω ένα πρόβλημα ακολουθώντας μια σειρά από βήματα.

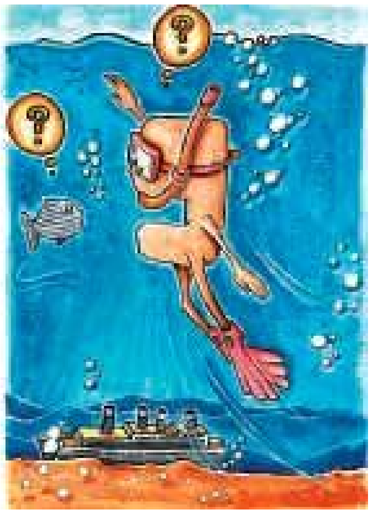
→ Λύνω σύνθετα προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες και τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων.

Τώρα που «φρεσκάραμε» τις γνώσεις μας για τους φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς και για τις ιδιότητες των πράξεων, και αφού εξασκηθήκαμε με ασκήσεις και προβλήματα για κάθε τομέα ξεχωριστά, ας εξασκηθούμε περισσότερο εφαρμόζοντας τις γνώσεις μας σε γενικότερα προβλήματα, όπως είναι αυτά που έτσι κι αλλιώς συναντάμε κάθε μέρα.

Δραστηριότητα

Το υπερωκεάνιο «Τιτανικός» βυθίστηκε το 1912. Οι επιβάτες του ήταν 1316 άτομα και το πλήρωμά του 885. Είχε 20 σωσίβιες λέμβους, η καθεμία από τις οποίες χωρούσε 58 άτομα. Στο ναυάγιο χάθηκαν 1490 άτομα. Αν γέμιζαν όλες οι σωσίβιες λέμβοι, πόσο περισσότεροι διασωθέντες θα υπήρχαν;

Αφού διαβάσεις με προσοχή το πρόβλημα, απάντησε στις ερωτήσεις:



- Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία που θα σε

βοηθήσουν στη λύση;
(τι ξέρεις;) ....

....

....

....

- **Ποια είναι τα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος;**
(τι δεν ξέρεις;) ....

....

- **Πώς σχετίζονται τα γνωστά με τα άγνωστα στοιχεία;**

....

....

- **Οργάνωσε το σχέδιο λύσης και διάλεξε ποιες πράξεις θα χρησιμοποιήσεις (+) (–) (:) (·)**

Αρχικά θα κάνω .... **ώστε να** ....

....

Στη συνέχεια θα ....

……………………………………………

……………………………………………

Τέλος ………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

- **Κάνε τις πράξεις. (Μπορείς με το νου ή με χαρτί και μολύβι.)**

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

- **Απάντησε στο πρόβλημα.**

……………………………………………

- **Έλεγξε αν είναι η απάντηση λογική σύμφωνα με τα δεδομένα.**

……………………………………………

Η προηγούμενη δραστηριότητα μας βοηθά να συμπεράνουμε τα εξής:

Λύνω προβλήματα

Όταν έχω να λύσω ένα πρόβλημα ακολουθώ με τη σειρά τα παρακάτω βήματα:
Αν δεν είναι γραμμένο, το γράφω γιατί έτσι θα μπορέσω να το μελετήσω καλύτερα:

✓ **Διαβάζω** (όσες φορές είναι απαραίτητο) μέχρι να μπορώ να πω με βεβαιότητα ότι κατάλαβα:

α. Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία (δεδομένα).

β. Ποια είναι τα άγνωστα (ζητούμενα).

✓ **Καταστρώνω** ένα σχέδιο λύσης και αποφασίζω ποιες πράξεις θα κάνω για να λύσω το πρόβλημα.

✓ **Εκτελώ** τις πράξεις με προσοχή.

✓ **Απαντώ** στην ερώτηση του προβλήματος.

Τέλος **ελέγχω** αν το αποτέλεσμα είναι λογικό. Αν δεν είναι, αρχίζω τα βήματα από την αρχή.

Εφαρμογή

Πόσα ρέστα θα πάρω από 25 €, αν πληρώσω 3 εισιτήρια στον κινηματογράφο, το καθένα από τα οποία κοστίζει 7,20 €;

Λύση

Βήμα 1: Αφού διαβάσω καλά το πρόβλημα, χωρίζω τα γνωστά από τα άγνωστα στοιχεία

Ξέρω (γνωστά - γ):

Πόσα εισιτήρια θα αγοράσω (γ1), πόσο κοστίζει το ένα εισιτήριο (γ2) και πόσα χρήματα έδωσα (γ3).

Δεν ξέρω (άγνωστα - α):
Πόσο κοστίζουν συνολικά τα εισιτήρια (α1)
και πόσα ρέστα θα πάρω (α2).

Βήμα 2: Οργανώνω σχέδιο λύσης
Για να βρω πόσα ρέστα θα πάρω (α2) πρέπει να αφαιρέσω το συνολικό κόστος των εισιτηρίων (α1) από τα χρήματα που έδωσα (γ3). Άρα πρέπει
1. Πρώτα να βρω πόσο κάνουν τα εισιτήρια (α1) και μετά
2. Να αφαιρέσω αυτό που θα βρω (α1) από τα χρήματα που έδωσα (γ3).

Βήμα 3: Κάνω τις πράξεις

1. Για να βρω πόσο κάνουν τα εισιτήρια θα πολλαπλασιάσω το 7,20 με το 3:
7,20 · 3 = ………… €

2. Για να βρω πόσα ρέστα θα πάρω, θα αφαιρέσω αυτό που βρήκα από το 25:

25 – ……… = ………… € ή

25 – 7,20 · 3 = ……………… =

= …………… = …………… €

Σημείωση: Μπορώ να κάνω τις πράξεις με το νου, με μολύβι και χαρτί ή με τον υπολογιστή τσέπης.

Απάντηση: Θα πάρω ……… € ρέστα.

Βήμα 4: Ελέγχω την απάντηση σε σχέση με την ερώτηση.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την **τεχνική επίλυσης προβλημάτων.** Θυμήσου και ανάφερε τα 4 βήματα της τεχνικής.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Αν λύσεις το πρόβλημα δεν είναι απαραίτητο και να γράψεις την απάντηση αφού θα την ανακαλύψουν ανάμεσα στις πράξεις.** ☐
- **Το αποτέλεσμα δεν φαίνεται λογικό. Δεν πειράζει, αφού σίγουρα έχω κάνει τις πράξεις σωστά.** ☐
- **Η σχέση ανάμεσα στα γνωστά και στα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος με βοηθά να αποφασίσω ποιες πράξεις θα κάνω.** ☐

Η χρήση του υπολογιστή τσέπης

Ένα μηχάνημα που μιλάει μαθηματικά μαζί μου

➞ Μαθαίνω τη χρήση του υπολογιστή τσέπης.

➞ Διακρίνω σε ποιες περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοποιήσω τον υπολογιστή τσέπης.

➞ Λύνω προβλήματα με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης.

Δραστηριότητα 1η

Ο υπολογιστής τσέπης είναι ένα εργαλείο που μας βοηθά να υπολογίζουμε τις μεγάλες και χρονοβόρες πράξεις εύκολα και γρήγορα. Ας πάρουμε στα χέρια μας έναν υπολογιστή τσέπης κι ας ανακαλύψουμε πώς λειτουργεί και πώς χρησιμοποιείται.

- Μπορείς να τον «ανοίξεις»;
- Πώς βλέπεις ότι έχει «ανοίξει»;
- Βεβαιώσου ότι εντόπισες τα παρακάτω πλήκτρα και ότι ξέρεις τι κάνουν:

+ ……………………………………………

− ……………………………………………

X ……………………………………………

÷ ……………………………………………

= ……………………………………………

• ……………………………………………

C ……………………………………………

- **Παρατήρησε τι εμφανίζεται στην οθόνη, καθώς πατάς κάθε πλήκτρο και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:**

η οθόνη εμφανίζει	**3**	**38**	**38**				
καθώς πληκτρο-λογώ:	**3**	**8**	**+**	**7**	**9**	**9**	**=**

- **Κάνε μερικούς υπολογισμούς, παρατηρώντας κάθε φορά την οθόνη:**

952,90 – 860 =

16,05 · 437 =

0,80 + 0,32 + 6,58 =

2048 : 50 =

Δραστηριότητα 2η

Ο υπολογιστής τσέπης δεν αντικαθιστά τις υπόλοιπες μεθόδους υπολογισμού! Επιλέγω πότε πρέπει να εργαστώ με το νου, με χαρτί και μολύβι ή με υπολογιστή τσέπης. Επέλεξε με ποια από τις τρεις μεθόδους μπορείς να απαντήσεις πιο γρήγορα σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις. Μέτρησε και σημείωσε για κάθε περίπτωση πόσα πλήκτρα πρέπει να πατήσεις στον υπολογιστή τσέπης.

- **110 + 24 = ...**
- **1100 : 10 = ...**
- **Είναι τέλεια η διαίρεση**
99578 : 2; ΝΑΙ – ΟΧΙ ....
- **(2 • 48 + 112 : 2 – 4 • 0,5) : 2 =**

...

- 32 · 22459,90 = ...
- Είναι πάντα η χρήση του υπολογιστή τσέπης η πιο σύντομη μέθοδος; ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

Ο υπολογιστής τσέπης

✓ (Πότε;) Χρησιμοποιούμε τον υπολογιστή τσέπης για να πραγματοποιήσουμε γρήγορα μεγάλους υπολογισμούς ή για να κάνουμε γρήγορη επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας.

✓ (Τι είδους;) Διαλέγουμε έναν υπολογιστή απλό κι εύχρηστο και όχι κάποιον με χαρακτηριστικά που δεν μας χρειάζονται όπως, για παράδειγμα, να κάνει επιστημονι-

κούς υπολογισμούς και γραφήματα ή να έχει μουσική και ρολόι.

✓ (Όρια;) Σε έναν υπολογιστή τσέπης η οθόνη «χωράει» συνήθως 8 ή 9 ψηφία. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να επεξεργαστεί αριθμούς με περισσότερα ψηφία από αυτά.

✓ (Έλεγχος;) Το αποτέλεσμα της πράξης που κάναμε στον υπολογιστή τσέπης χρειάζεται να το εξετάζουμε με τη λογική.

Αρκετές φορές καταλήγουμε σε λανθασμένους υπολογισμούς, γιατί είτε κάναμε λάθος στην πληκτρολόγηση κάποιου συμβόλου ή της υποδιαστολής είτε δεν λάβαμε υπόψη τη σειρά των πράξεων.

Εφαρμογή 1η

Θυμάστε την αποτυχημένη προσπάθεια του Τοτού να βρει το σωστό αποτέλεσμα υπολογίζοντας την αριθμητική παράσταση $10 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}80 + 1{,}90$ στον υπολογιστή τσέπης; Μπορεί να βρεθεί το αποτέλεσμα χωρίς να χρειαστεί να σημειώνουμε τα επιμέρους αποτελέσματα σε χαρτί;

Λύση:

Για να τηρηθεί η σωστή σειρά κατά την εκτέλεση των πράξεων:

α. Κάνουμε τον 1ο πολλαπλασιασμό και σημειώνουμε το αποτέλεσμα του κάπου.

β. Κάνουμε το 2ο πολλαπλασιασμό και σημειώνουμε το αποτέλεσμά του.

γ. Προσθέτουμε τα δύο αποτελέσματα.

δ. Προσθέτουμε το 1,90 στο προηγούμενο άθροισμα.

Ο υπολογιστής τσέπης έχει έναν χώρο μνήμης στον οποίο μπορούμε να αποθηκεύουμε αριθμούς που θα προστεθούν μεταξύ τους. Το πλήκτρο M+ αθροίζει διαδοχικά μέσα στη μνήμη τους αριθμούς που βάζουμε. Το πλήκτρο M^R εμφανίζει τον αριθμό που υπάρχει αυτή τη στιγμή στη μνήμη και το πλήκτρο M^C «αδειάζει» τη μνήμη. Αυτή η αριθμητική παράσταση, λοιπόν μπορεί να γίνει στον υπολογιστή τσέπης ως εξής:

10 X 0 . 45 = M+ 2 X 0 . 80 =

M+ 1 . 90 M+ M^R

Εφαρμογή 2η

Η καρδιά ενός ανθρώπου κάνει κατά μέσο όρο 70 χτύπους το λεπτό. Πόσους χτύπους έχει κάνει η καρδιά σου μέχρι τώρα, δηλαδή κατά τη διάρκεια των 12 χρόνων που λειτουργεί;

Λύση:

Βρίσκουμε πρώτα πόσους παλμούς κάνει την ώρα, μετά πόσους την ημέρα, έπειτα πόσους το χρόνο και τέλος πόσους τα 12 χρόνια:

70 X 60 X 24 X 360 X 12 = 435.456.000

Απάντηση: Έχει κάνει 435.456.000 παλμούς ως τώρα!

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

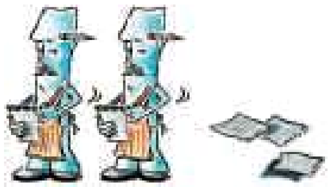
Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη χρήση του υπολογιστή τσέπης. Θυμήσου τα βήματα στην επίλυση ενός προβλήματος και πες σε ποιο βήμα μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

→ **Το πλήκτρο X, «καθαρίζει» την οθόνη.** ☐

→ **Με τον υπολογιστή τσέπης δεν χρειάζεται να κάνουμε έλεγχο του αποτελέσματος με τη λογική, γιατί δεν κάνει ποτέ λάθη.** ☐

→ **Οι μεγάλες πράξεις είναι αδύνατον να γίνουν χωρίς υπολογιστή τσέπης.** ☐



Στρογγυλοποίηση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Πρόχειροι λογαριασμοί

➙ Κατανοώ τους κανόνες της στρογγυλοποίησης.

➙ Στρογγυλοποιώ φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.

➙ Εκτιμώ το αποτέλεσμα μιας πράξης κατά προσέγγιση.

Σε μερικές περιπτώσεις δεν μας είναι απαραίτητο να εκφραζόμαστε με απόλυτη ακρίβεια. Τότε στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς, ώστε να είναι εύκολο να τους θυμόμαστε.

Δραστηριότητα 1η

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τρεις πολυπληθέστερες χώρες του κόσμου και ο συνολικός πληθυσμός της γης το έτος 2005.

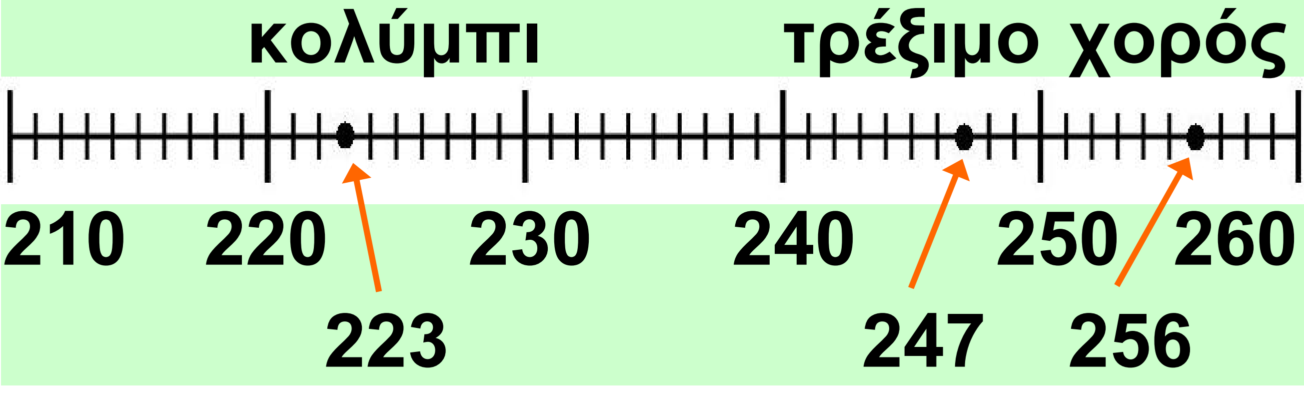
Κίνα	1.242.612.226	
Ινδία	1.028.610.328	
Η.Π.Α.	281.421.906	
Σύνολο Γης	6.464.749.417	
Πηγή: U.N.Population Vital Statistics Report 2007		

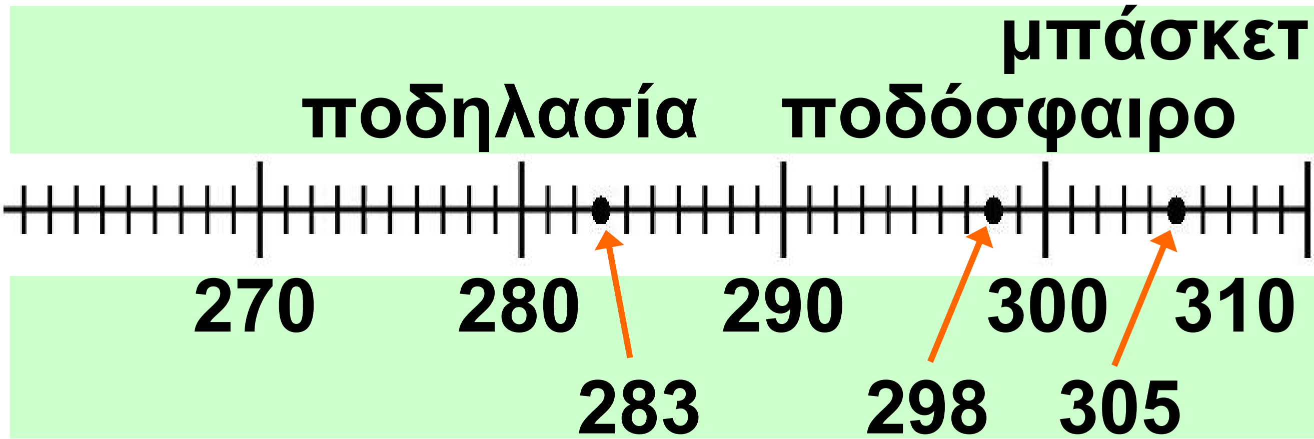
- **Είναι εύκολο διαβάζοντας τον πίνακα να θυμηθείς τα στοιχεία;**
- **Προσπάθησε, στην κενή στήλη να γράψεις για κάθε χώρα έναν αριθμό που να δείχνει περίπου τον πληθυσμό της και να είναι πιο εύκολο να τον θυμηθείς.**

- Πόση είναι περίπου η διαφορά των πληθυσμών της Κίνας και της Ινδίας; ……………………………
- Φαίνεται η διαφορά αυτή και μετά τη στρογγυλοποίηση που έκανες;

Δραστηριότητα 2η

Στο γραφείο «Αγωγής Υγείας» τα παιδιά παρατήρησαν το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνονται σημειωμένες οι θερμίδες που καίει κάποιος όταν κάνει ορισμένες δραστηριότητες για 1 ώρα (π.χ. κολύμπι, τρέξιμο, ποδηλασία, χορός, μπάσκετ, ποδόσφαιρο).





Χρησιμοποιώντας το παραπάνω σχήμα στρογγυλοποιήστε τις μετρήσεις στη δεκάδα:

- **223:** …………………………
- **247:** …………………………
- **256:** …………………………
- **283:** …………………………
- **298:** …………………………
- **305:** …………………………
- **Πώς αποφασίσατε σε ποια δεκάδα θα στρογγυλοποιήσετε κάθε μέτρηση;**…………………………

………………………………………………

………………………………………………

Από τις προηγούμενες δραστηριό-τητες μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Στρογγυλοποίηση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Συχνά στη θέση κάποιου αριθμού χρησιμοποιούμε κάποιον άλλο, μικρότερο ή μεγαλύτερο, πολύ κο-ντινό στον αρχικό, για πρακτικούς λόγους. Αυτή η διαδικασία λέγεται **στρογγυλοποίηση**.

Παράδειγμα

- Ο υπολογιστής τσέπης κοστίζει 4,95 €. Αντί για το ακριβές ποσό, λέμε: «κοστίζει περίπου 5€».

Ανάλογα με την περίπτωση στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς στα δέκατα, στα εκατοστά, στις δεκάδες, στις εκατοντάδες ή όπου είναι πιο κατάλληλο για να διευκολυνθούμε στους λογαριασμούς μας, χωρίς να παραποιηθεί η πραγματικότητα.

Παράδειγμα

- Το βάρος μου είναι 68 κιλά.

Περίπου 70 (σωστό).
Περίπου 100 (λάθος).

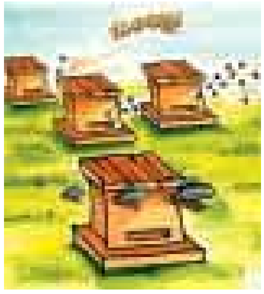
Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν αριθμό εξετάζουμε τα εξής: Αν το **ψηφίο** που βρίσκεται στα **δεξιά** από εκείνο στο οποίο θέλουμε να γίνει η στρογγυλοποίηση είναι **0, 1, 2, 3** ή **4**, τότε απλώς το αντικαθιστούμε, όπως και όλα τα επόμενα προς τα δεξιά, με μηδενικά. Αν το **ψηφίο** που βρίσκεται στα **δεξιά** είναι **5, 6, 7, 8** ή **9**, τότε αυξάνουμε το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε κατά μία μονάδα και μετά αντικαθιστούμε τα ψηφία στα δεξιά του με μηδενικά.

Παράδειγμα

- Σ' έναν αγώνα υπήρχαν 4.815 θεατές.
Στρογγυλοποιώ στις εκατοντάδες: υπήρχαν περίπου 4.800 θεατές.
- Σε άλλον αγώνα υπήρχαν 4.875 θεατές.
Στρογγυλοποιώ: υπήρχαν περίπου 4.900 θεατές.

Δεν στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται ως κώδικας επικοινωνίας (π.χ. ο αριθμός της ταυτότητας ή της πινακίδας του αυτοκινήτου, ο Τ.Κ. του σπιτιού κ.λπ.).

Εφαρμογή 1η



Μια συνηθισμένη κυψέλη έχει 12.475 μέλισσες. Πόσες μέλισσες έχει περίπου ένας μελισσοκόμος με 6 κυψέλες;

Λύση

Για να κάνουμε έναν γρήγορο, κατά προσέγγιση, υπολογισμό θα στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 12.475 στην πλησιέστερη εκατοντάδα, θα γίνει δηλαδή 12.500.
Άρα 12.500 · 6 = 75.000
Απάντηση: Έχει περίπου 75.000 μέλισσες.

Εφαρμογή 2η

Ένα κουτί με CD εγγραφής κοστίζει 1,29 €. Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε κατά προσέγγιση για 5 κουτιά;

Λύση

Για ένα γρήγορο, κατά προσέγγιση, υπολογισμό θα στρογγυλοποιήσουμε το 1,29 στο πλησιέστερο δέκατο, θα γίνει δηλαδή 1,30. Άρα 1,30 • 5 = 6,50.

Απάντηση: Θα πληρώσουμε **περίπου 6,5 €.**

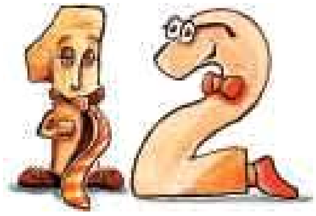
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη **στρογγυλοποίηση των αριθμών**. Εξήγησε με ένα παράδειγμα τη διαδικασία της στρογγυλοποίησης.

Σημειώστε **Σ** αν είναι σωστές ή **Λ** αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- ➙ Στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς των τηλεφώνων. ☐
- ➙ Στρογγυλοποιούμε πάντα όταν κάνουμε υπολογισμούς. ☐
- ➙ Ο αριθμός 25.109 στρογγυλοποιημένος στις εκατοντάδες γίνεται 25.100. ☐

Κεφάλαιο 12ο



Διαιρέτες ενός αριθμού – Μ.Κ.Δ. αριθμών

Μπαίνεις μόνο αν χωράς ακριβώς

→ Μαθαίνω τι είναι ο διαιρέτης ενός φυσικού αριθμού.

→ Βρίσκω τους διαιρέτες ενός αριθμού.

→ Εντοπίζω τους κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσότερων αριθμών και βρίσκω το μεγαλύτερο.

Δραστηριότητα 1η

Σε ένα κουτί με μπισκότα αναγράφεται: «35 μπισκότα, σε χωριστές αεροστεγείς συσκευασίες»

- Πόσες ίδιες χωριστές συσκευασίες νομίζεις ότι έχει το κουτί;

…………………………………………

- Πόσα μπισκότα έχει κάθε χωριστή συσκευασία;

…………………………………………

- Υπάρχουν άλλες περιπτώσεις;

…………………………………………

…………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Στο ζαχαροπλαστείο του Ανρί ετοιμάζουν συσκευασίες με διάφορα γλυκά. Μια μέρα έχουν 40 τρουφάκια, 48 εκλέρ και 32 καριόκες. Μοιράζουν τα γλυκά με τέτοιο τρόπο, ώστε όλα τα κουτιά να είναι ίδια μεταξύ τους, να είναι όσο το δυνατό περισσότερα και να μην περισσεύει κανένα γλυκό. Πώς τα μοίρασαν;

- **Αν είχαν να μοιράσουν μόνο τα 40 τρουφάκια, σε πόσα ίδια κουτιά θα μπορούσαν να τα μοιράσουν;**

...

- **Συμπληρώστε: σε 2 (από 20 γλυκά), ή σε 4 ....**

...

- **Υπολογίστε το ίδιο για τα 48 εκλέρ: σε ....**

...

- **Βρείτε το ίδιο για τις 32 καριόκες; Σε ....**

...

- **Υπογραμμίστε τους αριθμούς των κουτιών που είναι κοινοί (ίδιοι) και στις 3 σειρές.**
- **Αν χρησιμοποιήσουν μόνο 2 ίδια κουτιά στα οποία θα βάλουν όλα τα γλυκά, γράψτε πόσα γλυκά από κάθε είδος θα περιέχει το καθένα:**

……………………………………………

……………………………………………

- **Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ίδιων κουτιών που μπορούν να γεμίσουν με γλυκά από κάθε είδος;**

……………………………………………

- **Πόσα γλυκά από κάθε είδος θα έχει κάθε κουτί σ’ αυτή την περίπτωση;**

Θα περιέχει: ……………………………

……………………………………………

Πολλές φορές χρειάζεται να εξετάσουμε με πόσους δυνατούς τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε έναν αριθμό χωρίς να έχουμε υπόλοιπο. Αυτό γίνεται βρίσκοντας τους διαιρέτες του αριθμού αυτού.

Διαιρέτες αριθμού, Μ.Κ.Δ. αριθμών

Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρεί ακριβώς έναν άλλο φυσικό αριθμό λέγεται διαιρέτης του.

Παράδειγμα

Ο αριθμός 9 έχει διαιρέτες τους αριθμούς: 1, 3, 9.

Δύο ή περισσότεροι φυσικοί αριθμοί έχουν έναν τουλάχιστον κοινό διαιρέτη.
Ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους λέγεται Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.).

Παράδειγμα

Ο αριθμός 16 έχει διαιρέτες τους αριθμούς: 1, 2, 4, 8, 16.

Ο αριθμός 24 έχει διαιρέτες τους: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Οι αριθμοί 1, 2, 4, 8 είναι κοινοί διαιρέτες του 16 και του 24.

Ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης τους είναι το 8.

Εφαρμογή 1η

Έχω μια συλλογή με 20 φωτογραφίες και θέλω να τις βάλω στο άλμπουμ με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σελίδα να έχει τον ίδιο αριθμό φωτογραφιών. Με πόσους τρόπους μπορώ να τις χωρίσω (εκτός από το να βάλω μία φωτογραφία σε κάθε σελίδα) ξέροντας ότι η σελίδα χωράει μέχρι 10 φωτογραφίες;

Λύση

Οι φωτογραφίες πρέπει να μοιραστούν σε ίσα μέρη, χωρίς να περισσεύει καμία. Κάθε μέρος θα

είναι αριθμός που διαιρεί το 20 ακριβώς, θα είναι δηλαδή διαιρέτης του.
Αρκεί λοιπόν να βρω τους διαιρέτες του 20, για να έχω όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους μπορώ να βάλω τις φωτογραφίες στις σελίδες.
Διαιρέτες του 20 είναι οι αριθμοί:
1, 2, 4, 5, 10, 20.

Απάντηση: Άρα μπορώ να βάλω …………… **φωτογραφίες σε κάθε σελίδα.**

Εφαρμογή 2η

Ένας βιβλιοπώλης θέλει να φτιάξει όσο το δυνατό περισσότερα όμοια πακετάκια με χρωματιστές πλαστελίνες. Έχει 48 πράσινες και 36 κόκκινες πλαστελίνες. Πόσα πακετάκια θα φτιάξει, χωρίς να του

περισσέψει καμία πλαστελίνη;

Λύση:

Πρέπει να βρούμε πρώτα τους διαιρέτες του 48 και του 36 και μετά από τους κοινούς διαιρέτες τους να διαλέξουμε τον μεγαλύτερο (το Μ.Κ.Δ.).

Διαιρέτες του 48 είναι οι αριθμοί:
1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Διαιρέτες του 36 είναι οι αριθμοί:
1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Μ.Κ.Δ. (48, 36): ……………

Απάντηση: Ο βιβλιοπώλης θα φτιάξει ……… πακέτα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **διαιρέτης** και **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** **(Μ.Κ.Δ.)**. Εξήγησε τον καθένα με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- Κάθε φυσικός αριθμός έχει διαιρέτες τουλάχιστον το 1 και τον εαυτό του. ☐
- Ο αριθμός 3 είναι διαιρέτης του αριθμού 26. ☐
- Ο Μ.Κ.Δ. του 4 και του 8 είναι το 8. ☐

Κεφάλαιο 13ο

Κριτήρια διαιρετότητας

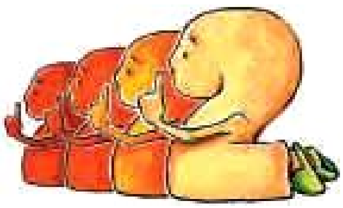
Μάντεψε το μυστικό κανόνα μου

→ **Διακρίνω ποιοι αριθμοί διαιρούνται με το 2, το 3, το 5, το 9, το 10 ή το 25.**

→ **Ανακαλύπτω κριτήρια για να ξεχωρίζω αν ένας αριθμός διαιρείται με το 2, το 3, το 5, το 9, το 10 ή το 25.**

→ **Λύνω προβλήματα χρησιμοποιώντας τα κριτήρια διαιρετότητας.**

Δραστηριότητα 1η



Ένα σχολείο έχει 165 κορίτσια και 132 αγόρια. Είναι δυνατό τα κορίτσια να παραταχθούν σε

δυάδες, τριάδες ή πεντάδες χωρίς να περισσεύει κανένα; Μπορεί να συμβεί το ίδιο με τα αγόρια;

- **Ποια πράξη θα κάνεις για να χωρίσεις τα παιδιά σε δυάδες και να διαπιστώσεις αν χωρίζονται ακριβώς ή αν περισσεύει κανένα;**

………………………………………………………

- **Κάνε την πράξη για τα κορίτσια σε δυάδες:** ……………………………………
- **Κάνε το ίδιο για τα αγόρια:**

………………………………………………………

- **Κάνε την πράξη για τα κορίτσια σε τριάδες:**……………………………………
- **Κάνε το ίδιο για τα αγόρια:**

………………………………………………………

- **Κάνε την πράξη για τα κορίτσια σε πεντάδες:** …………………………………
- **Κάνε το ίδιο για τα αγόρια:**

………………………………………………………

• Μπορείς να βρεις έναν κανόνα για τη διαίρεση ενός αριθμού με το 5;
Ένας αριθμός διαιρείται με 5 όταν
………………………………………………
………………………………………………

• Ένα κανόνα για τη διαίρεση ενός αριθμού με το 2;
Ένας αριθμός ……………………………
………………………………………………
………………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Στη Γεωργική Σχολή Θεσσαλονίκης συσκευάζουν τα αβγά σε αβγοθήκες 4 θέσεων. Τα αβγά που έχουν να συσκευάσουν σήμερα είναι 104. Μπορούν να συσκευαστούν σε τετράδες χωρίς να περισσέψει κανένα; Μπορεί να βρεθεί κανόνας, ώστε οι υπεύθυνοι να γνωρίζουν αν τα αβγά κάθε ημέρας συσκευάζονται σε τετράδες ακριβώς;

- Κάνοντας τη διαίρεση, διαπιστώνετε αν υπάρχει υπόλοιπο.

....

- Τα πολλαπλάσια του 104 θα διαιρούνται ακριβώς με το 4;
- Γράψτε μερικά από αυτά:

....

- Τι κοινό έχουν τα τελευταία ψηφία των αριθμών αυτών; ....

....

- Διατυπώστε έναν κανόνα.

....

....

Πολλές φορές μας χρειάζεται να διακρίνουμε αν ένας αριθμός διαιρείται ακριβώς από έναν άλλο. Για να διευκολυνθούμε όσο γίνεται έχουμε ανακαλύψει κάποιους κανόνες, στους οποίους υπακού-ουν όλοι οι φυσικοί αριθμοί. Είναι τα κριτήρια διαιρετότητας:

Κριτήρια διαιρετότητας

1. Ένας αριθμός διαιρείται με το 10, το 100, το 1000, ..., αν τελειώνει σε ένα, δύο, τρία, … μηδενικά αντίστοιχα.

Παράδειγμα

Ο αριθμός 230 διαιρείται με το 10, ο αριθμός 2300 με το 10 και το 100, …

2. Ένας αριθμός διαιρείται με το 2, αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, 8.

Παράδειγμα

Οι αριθμοί 6, 28, 374, 1350 διαιρούνται με το 2.

3. Ένας αριθμός διαιρείται με το 5, αν τελειώνει σε 0 ή σε 5.

Παράδειγμα

Οι αριθμοί 75, 105, 300, 2630 διαιρούνται με το 5.

4. Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή με το 9.

Παράδειγμα

Ο αριθμός 201 διαιρείται με το 3, ενώ ο αριθμός 261 διαιρείται με το 3 και το 9.

5. Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 ή το 25, αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4 ή με το 25.

Παράδειγμα

Το 132 διαιρείται με το 4, ενώ το 275 διαιρείται με το 25.

Οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2 λέγονται άρτιοι (ζυγοί) αριθμοί, ενώ οι υπόλοιποι λέγονται περιττοί (μονοί).

Παράδειγμα

0, 2, 4, ..., 98, 100, ..., 948, ...

Εφαρμογή 1η

Οι μαθητές ενός σχολείου είναι περισσότεροι από 283 και λιγότεροι από 293. Είναι δυνατό να παραταχθούν σε τριάδες ή πεντάδες χωρίς να περισσεύει κανένας. Πόσοι είναι;

Λύση

Αφού οι μαθητές παρατάσσονται σε

τριάδες ή πεντάδες, αυτό σημαίνει πως το σύνολο τους είναι αριθμός που διαιρείται με το 3 αλλά και με το 5 ταυτόχρονα. Ανάμεσα στους αριθμούς 283 και 293 υπάρχουν μόνο 2 αριθμοί που διαιρούνται με το 5: το 285 και το 290. Το 285 διαιρείται και με το 3 (γιατί 2 + 8 + 5 = 15), αλλά το 290 δεν διαιρείται με το 3 (γιατί 2 + 9 + 0 = 11).

Απάντηση: Οι μαθητές είναι ……….

Εφαρμογή 2η

Στην παρέλαση τα παιδιά προσπά-θησαν να μετρήσουν τα άρματα. Στο τέλος όμως διαφώνησαν, καθώς άλλοι έλεγαν ότι ήταν 57 και άλλοι 59. Μπορείς να βρεις ποιος έχει δίκιο, αν ξέρεις ότι τα άρματα περνούσαν σε τριάδες;

Λύση

Αφού ξέρουμε ότι τα άρματα περνούσαν σε τριάδες, αυτό σημαίνει ότι το σύνολο τους ήταν αριθμός που διαιρείται με το 3. Το 57 διαιρείται (γιατί 5 + 7 = 12) ενώ το 59 δε διαιρείται (γιατί 5 + 9 = 14).

Απάντηση: Δίκιο έχουν τα παιδιά που υποστηρίζουν ότι τα άρματα ήταν ………

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε τα κριτήρια διαιρετότητας. Θυμήσου κάθε κριτήριο αναφέροντας ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Ο αριθμός 309 διαιρείται με το 3 και με το 9.** ☐
- **Όποιος αριθμός διαιρείται ακριβώς με το 2 είναι ζυγός αριθμός.** ☐
- **Μπορώ να πω αν θα έχω υπόλοιπο σε μια διαίρεση με το 5 χωρίς να κάνω την πράξη.** ☐

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Είμαι και ο πρώτος

Εγώ είμαι ο <u>πρώτος</u> πρώτος.

Είμαι κι εγώ πρώτος

Είμαστε και οι πρώτοι!

→ Γνωρίζω τους πρώτους και τους σύνθετους αριθμούς.

→ Μαθαίνω τι είναι το «κόσκινο του Ερατοσθένη».

→ Διακρίνω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος με τα κριτήρια διαιρετότητας.

Δραστηριότητα 1η

Στο Δημοτικό Σχολείο Σύμης, τα παιδιά της ΣΤ΄ τάξης, μετά το μάθημα για τους διαιρέτες των αριθμών και τα κριτήρια διαιρετότητας, αποφάσισαν να παίξουν ένα παιχνίδι. Το ονόμασαν «δεν μπαίνω σε σειρές» και αναρωτήθηκαν: «Πόσα παιδιά πρέπει να έχει μια τάξη ώστε να μην μπορούν να παραταχθούν σε σειρές χωρίς να περισσεύει έστω και ένα παιδί;»

Ποιο κριτήριο δεν πρέπει να ικανοποιεί ο αριθμός που ψάχνουν για να μην μπορούν να παραταχθούν σε:

- **Δυάδες:** ……………………………
……………………………………………
- **Τριάδες:** …………………………
……………………………………………

• **Τετράδες:** ....

....

• **Πεντάδες:** ....

....

• **Μπορείς τώρα να βρεις τους πιθανούς αριθμούς μαθητών που φαντάστηκαν τα παιδιά; (Μια τάξη έχει μέχρι 30 μαθητές.)**

....

• **Τι παρατηρείς για τους διαιρέτες αυτών των αριθμών;**

Δραστηριότητα 2η

«Το κόσκινο του Ερατοσθένη»

Ο Ερατοσθένης, σπουδαίος Έλληνας μαθηματικός και φιλόσοφος, γεννήθηκε περίπου το 275 π.Χ. Ήταν ο πρώτος που υπολόγισε τη διάμετρο της Γης με ακρίβεια.

Δυστυχώς σώζονται ελάχιστες από τις μελέτες του.

Ο παρακάτω πίνακας είναι μία επινόησή του, για να ξεχωρίζει τους αριθμούς που έχουν μόνο 2 διαιρέτες από τους υπόλοιπους.

Για να τους ξεχωρίσεις κι εσύ, να διαγράψεις:

- **τον αριθμό 1.**
- **τα πολλαπλάσια του 2, εκτός από το 2.**
- **τα πολλαπλάσια του 3, εκτός από το 3.**
- **τα πολλαπλάσια του 5, εκτός από το 5.**
- **τα πολλαπλάσια του 7, εκτός από το 7.**
- **Βάλε σε έναν κύκλο τους αριθμούς που απέμειναν.**
- **Πόσοι έμειναν; ………………………**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Από την αρχαιότητα ακόμη οι αριθμοί αποτελούσαν πρόκληση για μελέτη. Το 300 π.Χ. ο Ευκλείδης ήταν από τους πρώτους που μελέτησαν τους αριθμούς σε σχέση με τους διαιρέτες τους και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες.

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Ένας αριθμός, μεγαλύτερος από το 1, που έχει μόνο **δύο διαιρέτες** (το 1 και τον εαυτό του) λέγεται **πρώτος.**

Παράδειγμα

Ο αριθμός 2, έχει για διαιρέτες μόνο το 1 και το 2.

Ένας αριθμός που έχει τουλάχιστον **τρεις διαιρέτες** λέγεται **σύνθετος.**

Παράδειγμα

Ο αριθμός 4, έχει για διαιρέτες το 1, το 2 και το 4.

Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος (έχει μόνο **έναν διαιρέτη**, τον εαυτό του).

Εφαρμογή 1η

Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 101 έως 110 είναι πρώτοι αριθμοί.

Λύση

101 102 103 104 105 106

107 108 109 110

Πρώτα διαγράφω τους άρτιους αριθμούς (διαιρούνται με το 2). Μετά το 105 (που διαιρείται με το 3). Κανένας από τους υπόλοιπους αριθμούς δεν διαιρείται με το 5 σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας. Δοκιμάζω, όπως ο Ερατοσθένης, και με το 7 και διαπιστώνω ότι δεν διαιρούνται ούτε μ' αυτό. Πρέπει να δοκιμάσω όμως αν διαιρούνται με κάποιον από τους υπόλοιπους πρώτους αριθμούς μέχρι το 100.

Απάντηση: Πρώτοι είναι οι αριθμοί 101, 103, 107 και 109.
Σύνθετοι είναι οι αριθμοί 102, 104, 105, 106, 108 και 110.

ΑΝ ΕΙΧΑ ΝΑ ΕΛΕΓΞΩ ΜΕΧΡΙ ΤΟ 1.000;

Εφαρμογή 2η

Το Στ΄1 έχει 23 μαθητές και το Στ΄2 έχει 24. Ο γυμναστής θέλει να χωρίσει κάθε τμήμα σε ίσες ομάδες. Σε ποιο τμήμα θα δυσκολευτεί και γιατί; Στο άλλο τμήμα πόσοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί που μπορεί να κάνει;

Λύση- Απάντηση

Το Στ΄1 δεν μπορεί να χωριστεί σε ομάδες χωρίς να περισσεύει κανέ-

να παιδί, γιατί το 23 δεν έχει άλλους διαιρέτες εκτός από το 1 και το 23 (είναι πρώτος αριθμός). Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να το «παράγουμε» παρά μόνο με τον πολλαπλασιασμό 1 • 23.

Το Στ΄2 μπορεί να χωριστεί με πολλούς τρόπους, γιατί το 24 έχει πολλούς διαιρέτες (είναι σύνθετος αριθμός).

Πιθανοί συνδυασμοί είναι:

12 ομάδες από …… παιδιά κάθε ομάδα (12 • 2 = 24)

2 ομάδες από …… παιδιά κάθε ομάδα (2 • 12 = 24)

3 ομάδες από …… παιδιά κάθε ομάδα (3 • 8 = 24)

8 ομάδες από …… παιδιά κάθε ομάδα (8 • 3 = 24)

4 ομάδες από …… παιδιά κάθε ομάδα (4 • 6 = 24)

6 ομάδες από …… παιδιά κάθε ομάδα (6 • 4 = 24)
24 ομάδες από …… παιδιά κάθε ομάδα (24 • 1 = 24)

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **πρώτος** και **σύνθετος αριθμός**.
Εξήγησέ τους με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

→ Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός ζυγός αριθμός που είναι πρώτος. ☐
→ Με το «κόσκινο του Ερατοσθένη» βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς. ☐

Κεφάλαιο 15ο

Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

Δέντρα με αριθμούς

→ Αναλύω έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

→ Μαθαίνω τη διαδικασία ανάλυσης με δεντροδιάγραμμα και με διαδοχικές διαιρέσεις.

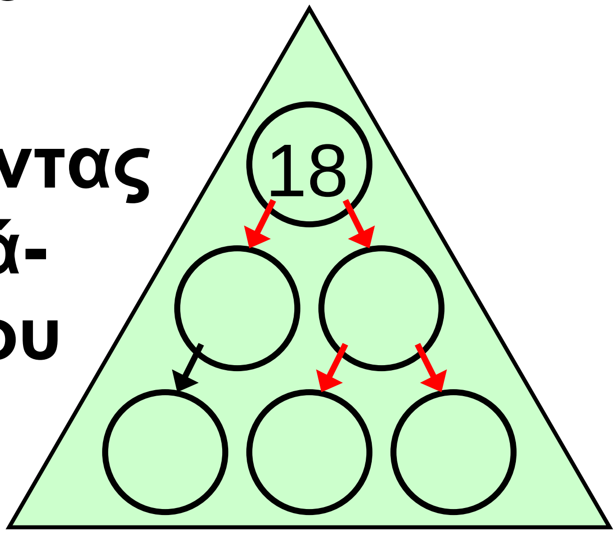
Δραστηριότητα 1η

«Δεντροδιαγράμματα»

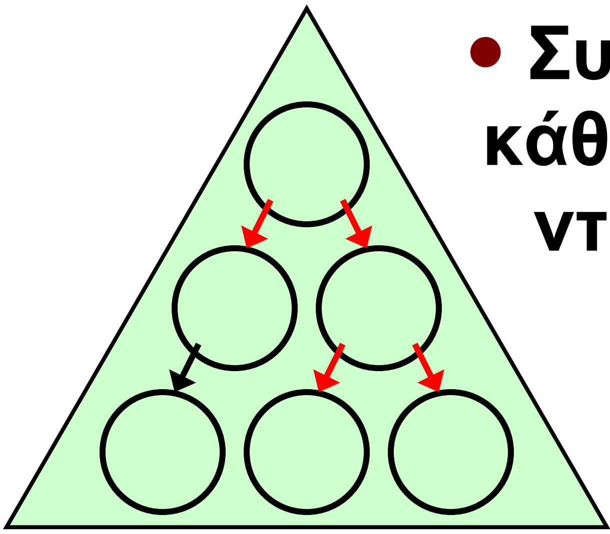
Τα παιδιά της Στ΄ τάξης αναρωτήθηκαν: «Μπορούμε οποιονδήποτε σύνθετο αριθμό να τον εκφράσουμε ως γινόμενο πρώτων αριθμών;» Ας

πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό 18:

- Γράψε στο διπλανό «δέντρο» το 18 ως γινόμενο δύο παραγόντων:



- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες:
- Θα μπορούσες να ξεκινήσεις (πάλι από το 18) με άλλους παράγοντες;

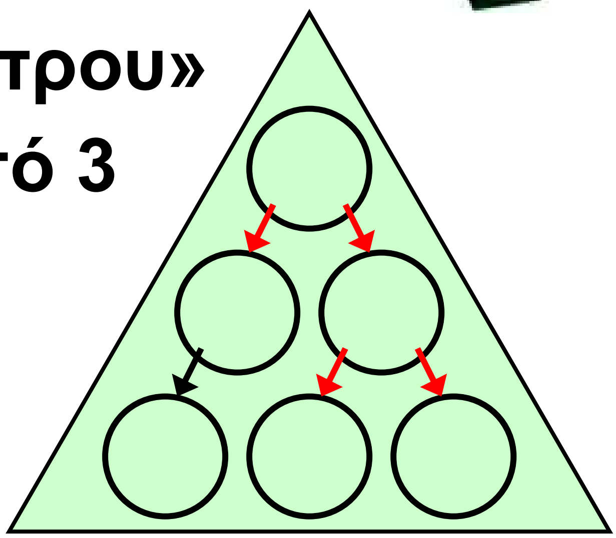


- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε σε πρώτους παράγοντες.
- Τι παρατηρείς για το τελικό γινόμενο στα δύο δέντρα;

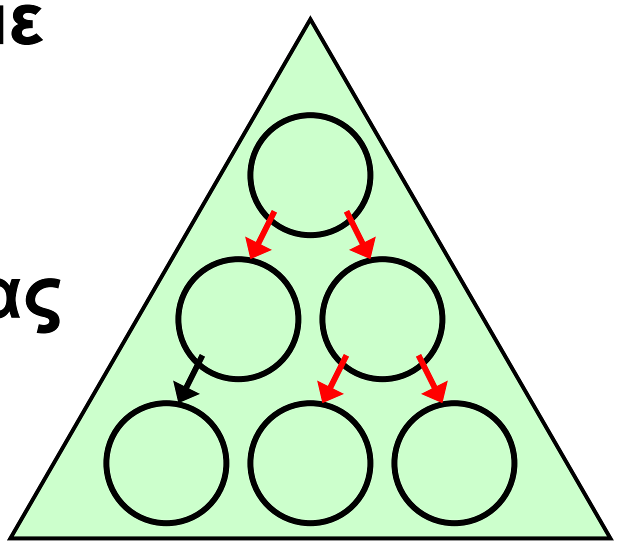
Δραστηριότητα 2η

Από την προηγούμενη δραστηριότητα τα παιδιά κατάλαβαν ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι το «κατασκευαστικό» υλικό για να φτιαχτούν όλοι οι σύνθετοι αριθμοί. Άρα κάθε σύνθετος αριθμός είναι φτιαγμένος από έναν μοναδικό συνδυασμό πρώτων αριθμών. Σκέφτηκαν να τους παρομοιάσουν με τα παιδικά τουβλάκια και να δοκιμάσουν τώρα να παράγουν δέντρα με αριθμούς ξεκινώντας από τα κάτω κλαδιά προς τα πάνω.

- **Γράψε στα κάτω κλαδιά του διπλανού «δέντρου» ένα συνδυασμό από 3 πρώτους παράγοντες (ίδιους ή διαφορετικούς).**



- Ανεβαίνοντας στο πιο πάνω «κλαδί» να κάνεις τον πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο παράγοντες και να μεταφέρεις τον τρίτο όπως είναι.
- Στο τελευταίο κλαδί να κάνεις και τον άλλο πολλαπλασιασμό.
- Δοκίμασε τώρα με άλλους πρώτους παράγοντες.
- Συνέχισε κάνοντας τον πρώτο πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο και μετάφερε τον τρίτο.



- Κάνε τον τελευταίο πολλαπλασιασμό. Η διαδικασία παραγωγής του αριθμού ολοκληρώθηκε.

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στο συμπέρασμα:

Γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ένας σύνθετος αριθμός μπορεί να εκφραστεί και ως γινόμενο πρώτων αριθμών (γινόμενο πρώτων παραγόντων).

Παράδειγμα

Ο αριθμός 10, μπορεί να εκφραστεί και ως $2 \cdot 5$.

Η σειρά των διαιρέσεων δεν παίζει κανένα ρόλο, γιατί κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μόνο κατά έναν τρόπο.

Παράδειγμα

$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$

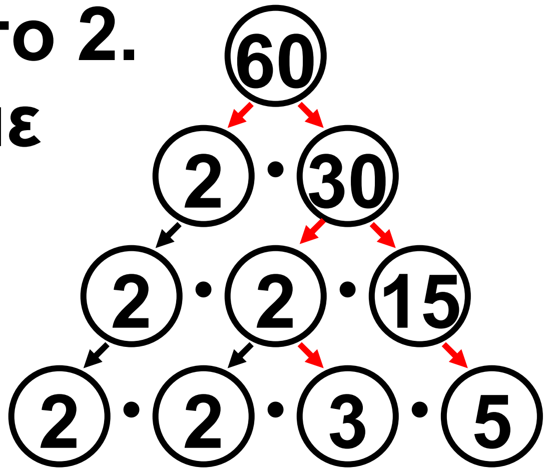
Για να αναλύσουμε έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, μπορούμε να εργαστούμε με δεντροδιάγραμμα ή διαδοχικές διαιρέσεις.

Εφαρμογή 1η

Να εκφράσετε τον αριθμό 60 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με δεντροδιάγραμμα.

Λύση

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 60. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Επομένως, γράφουμε το γινόμενο 2 · 30.



β. Από κάτω, αφού γράψουμε ξανά τον

πρώτο παράγοντα (το 2), συνεχί-
ζουμε αναλύοντας με τον ίδιο τρόπο το 30. Διαιρείται με το 2 και έτσι γράφουμε το γινόμενο 2 • 15.

γ. Γράφουμε ξανά τους πρώτους παράγοντες όπως είναι (2 • 2) και συνεχίζουμε αναλύοντας το 15. Δεν διαιρείται με το 2 και έτσι εξετάζουμε αν διαιρείται με το 3. Διαιρείται και έτσι γράφουμε το γινόμενο 3 • 5. Η ανάλυση τελειώνει, γιατί όλοι οι παράγοντες είναι πρώτοι αριθμοί. Απάντηση: Το 60 εκφράζεται ως 2 • 2 • 3 • 5.

Εφαρμογή 1η

Να εκφράσετε τον αριθμό 90 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με διαδοχικές διαιρέσεις.

Λύση

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 90. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Έτσι τον διαιρούμε και γράφουμε από κάτω το πηλίκο, που είναι 45.

β. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για το 45. Διαιρούμε με το 3 και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 15.

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

γ. Διαιρούμε το 15 με το 3, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 5.

δ. Διαιρούμε με το 5, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 1. Η ανάλυση τελειώνει, γιατί το τελευταίο πηλίκο είναι το 1.

Απάντηση: Ο αριθμός 90 εκφράζεται ως 2 • 3 • 3 • 5.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο ανάλυση σύνθετου αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Εξήγησέ τον με ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- Όλοι οι σύνθετοι αριθμοί μπορούν να γραφούν ως γινόμενα των πρώτων παραγόντων 2 και 3. ☐
- Πρέπει να βάζουμε τους παράγοντες με μια συγκεκριμένη σειρά. ☐
- Είναι σωστή η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$. ☐

Περιεχόμενα 1ου τόμου

1η Θεματική Ενότητα