Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού

3ος τόμος

Κεφάλαια 28-40

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Μιχάλης Αγ. Παπαδόπουλος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Δημοτικό και το Νηπιαγωγείο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Γεώργιος Τύπας
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδ. Ινστιτ.

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Οικονόμου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Όλγα Κασώτη, Εκπαιδευτικός
Πέτρος Κλιάπης, Εκπαιδευτικός
Θωμάς Οικονόμου, Εκπαιδευτικός

ΚΡΙΤΕΣ – ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Δέσποινα Πόταρη, Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Πατρών
Δέσποινα Αγγελοπούλου, Σχολική Σύμβουλος
Κωνσταντίνος Βρυώνης, Εκπαιδευτικός

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Ανδρέας Κατσαούνης, Σκιτσογράφος-Εικονογράφος

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Ευφροσύνη Ξιξή, Φιλόλογος

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Γεώργιος Τύπας, Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ

Αθανάσιος Σκούρας,
Μόνιμος Πάρεδρος του
Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

Νικόλαος Ναυρίδης,
Εικαστικός καλλιτέχνης

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ACCESS ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ Α.Ε.

Στη συγγραφή του δεύτερου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και ο Κώστας Ζιώγας, Εκπαιδευτικός

ΔΙΑΣΚΕΥΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΡΑΣΗΣ

Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και
75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Πέτρος Κλιάπης Όλγα Κασώτη
Θωμάς Οικονόμου

Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού

3ος τόμος

Κεφάλαια 28-40

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου

Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται!

➙ Μελετώ τον τύπο του εμβαδού ως εξίσωση.

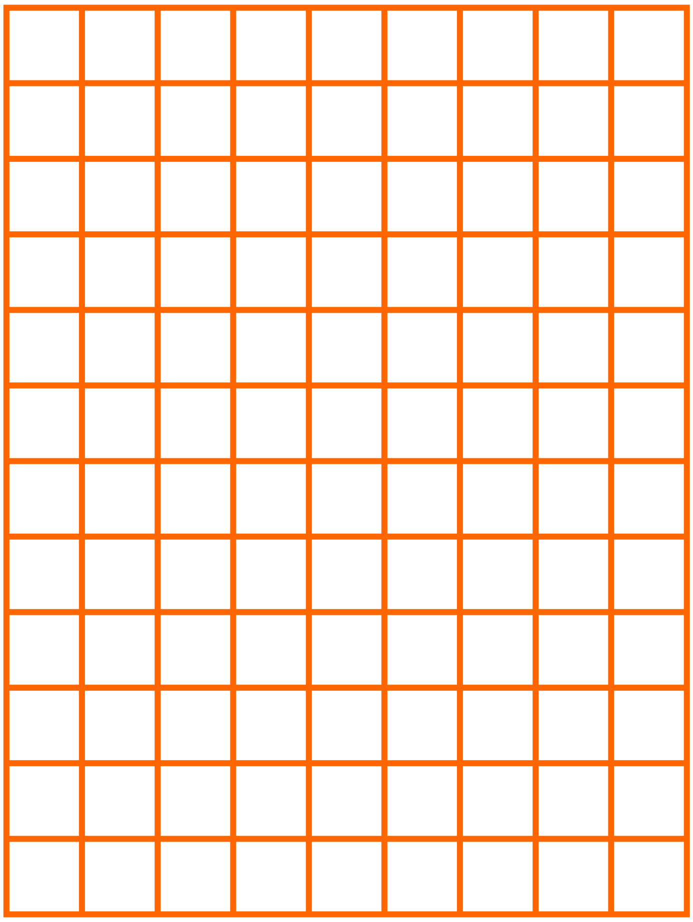
➙ Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις του πολλαπλασιασμού.

➙ Λύνω εξισώσεις όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου.

Δραστηριότητα 1η

Στο παρακάτω πλαίσιο κάθε τετραγωνάκι είναι 1 τετραγωνικό εκατοστό. Με 3 διαφορετικά χρώματα, να σχεδιάσεις 3 διαφορετικά ορθογώνια με εμβαδά 24 τετραγωνικά εκατοστά το καθένα.

- Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με τα στοιχεία των ορθογωνίων που σχεδίασες (το πλάτος είναι οριζόντια):



Μήκος	Πλάτος (εκ.)	Εμβαδό (τ.εκ.)

- Τι παρατηρείς για τη σχέση του εμβαδού με το μήκος και το πλάτος;
- Χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή για το μήκος, μία για το πλάτος και

μία για το εμβαδό, γράψε την εξίσωση που δείχνει πώς σχετίζονται το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό σε ένα ορθογώνιο:

....

Δραστηριότητα 2η

- Γνωρίζοντας το εμβαδό ενός ορθογωνίου και τη μία από τις δύο πλευρές του, γράψτε με ποιο τρόπο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την άλλη πλευρά.

....

....

- Γράψτε τις διαιρέσεις που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό: 5 • 3 = 15

..... = ... : .... και ..... = ... : ....

- Σε ένα ορθογώνιο το πλάτος είναι 3 εκατοστά και το εμβαδό 36 τ. εκ. Να σχηματίσετε την εξίσωση του εμβαδού και να βρείτε την τιμή του άγνωστου:

....

....

- **Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου;**

....

....

....

....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου

Όταν ο άγνωστος είναι **παράγο-ντας γινομένου**, για να λύσουμε

**την εξίσωση διαιρούμε το γινόμε-
νο με τον άλλο παράγοντα.**

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης x · 5 = 20 είναι: x = 20 : 5

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν διαιρέσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό.

Εφαρμογή 1η

Η Μαργαρίτα πολλές φορές για να βοηθήσει τη θεία της και να βγάλει χαρτζιλίκι, προσέχει το μικρό ανιψάκι της. Πληρώνεται με 3 € την ώρα. Χρειάζεται να μαζέψει 165 €. Πόσες ώρες πρέπει να κρατήσει το παιδί;

Λύση

➔ Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των ωρών (ω) που πρέπει να κρατήσει το παιδί

➔ Γράφω την εξίσωση ..... • ω = 165

➔ Κάνω την αντίστροφη πράξη:
ω = ... : ...... Άρα ω = ...

➔ Επαλήθευση: αντικαθιστώ τη μεταβλητή με την τιμή στην αρχική εξίσωση και κάνω την πράξη:
3 • ...... = 165

Απάντηση:
Πρέπει να κρατήσει το παιδί για ..... ώρες (!)

Εφαρμογή 2η

Ο Δημοσθένης ξέρει πως, όταν γράφει τις εργασίες του στον υπολογιστή, η σελίδα χωράει περίπου 250 λέξεις. Πρέπει να γράψει μια εργασία 1.500

λέξεων. Πόσες σελίδες θα είναι; Λύστε το πρόβλημα με εξίσωση.

Λύση

→ Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των σελίδων που θα χρειαστούν. Την ονομάζω σ.

→ Η εξίσωση είναι 250 • σ = 1.500.

→ Κάνω την αντίστροφη πράξη: σ = 1500 : 250. Άρα σ = 6.

→ Επαλήθευση: 250 • 6 = 1.500

Απάντηση:
Η εργασία θα είναι 6 σελίδες.

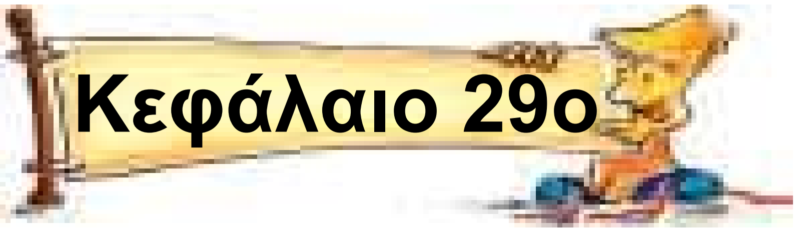
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε πώς να λύνουμε εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου. Δώσε ένα δικό σου

παράδειγμα μιας τέτοιας εξίσωσης.

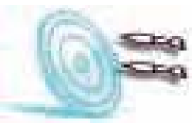
Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού είναι η διαίρεση.** ☐
- **Η εξίσωση α · 10 = 10 δεν έχει λύση.** ☐
- **Η εξίσωση 6x = 18 εκφράζει το εξής πρόβλημα: «Αγόρασα 6 περιοδικά και ξόδεψα x €. Κάθε περιοδικό κόστιζε 18 €. Πόσα € ξόδεψα;»** ☐



Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης

Αντανακλάσεις...



→ Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις μιας διαίρεσης.

→ Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις για να λύσω μια εξίσωση όταν ο άγνωστος έχει τη θέση του διαιρετέου ή του διαιρέτη.

Δραστηριότητα 1η

Μετά από μια εκπαιδευτική επίσκεψη στους χώρους του εργοστάσιου χαρτοποιίας, ο υπεύθυνος έδωσε στους μαθητές ένα κιβώτιο με τετράδια (τ) για να τα μοιραστούν. Πόσα ήταν τα τετράδια, αν οι 85 μαθητές του σχολείου πήραν 2 τετράδια ο καθένας;

- Γράψε την εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα
- Υπολόγισε «με το νου» πόσα ήταν τα τετράδια: ....
- Πως σκέφτηκες για να το βρεις;

....

- Γράψε τον πολλαπλασιασμό που προκύπτει από τη διαίρεση:

15 : 3 = 5 ...... = ... • ....

- Αφού διαπίστωσες ότι ο πολλαπλασιασμός είναι η αντίστροφη πράξη της διαίρεσης, με ποιον τρόπο θα λύσεις την εξίσωση;

....

- Με ποιον τρόπο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι διαιρετέος;

....

Δραστηριότητα 2η

Σε πόσες θήκες (θ) μπορούμε να μοιράσουμε τα 176 αυγά της φάρμας όταν κάθε θήκη χωράει 4 αυγά;

- **Γράψε την εξίσωση του προβλήματος:**

....

- **Στο παρακάτω σχήμα η κόκκινη γραμμή ή η πράσινη δείχνει το μοίρασμα των αυγών σε θήκες τεσσάρων θέσεων;**

....

Με ποια πράξη μπορείς να υπολογίσεις πόσες θήκες χρειάζονται;

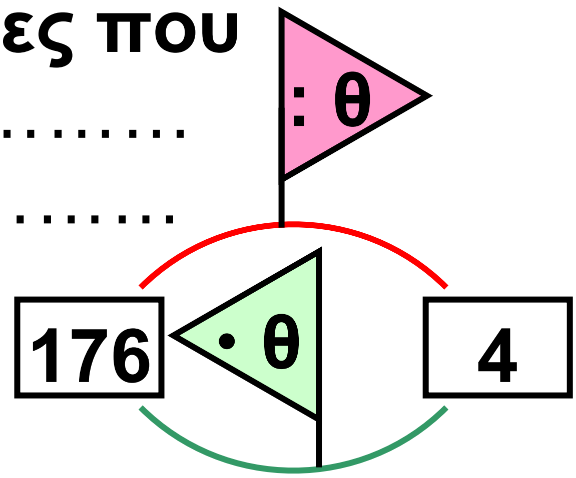
....

- **Υπολόγισε τις θήκες που χρειάζονται:** ....

....

....

....



- **Υπολόγισε με τον ίδιο τρόπο την τιμή του άγνωστου στην εξίσωση που έγραψες:**

……………………………………………

……………………………………………

- **Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι διαιρέτης;**

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

- **Παρατηρώντας το σχήμα να περιγράψετε στην ομάδα σας τι μας λέει η εξίσωση της πράσινης γραμμής, να τη γράψετε και να υπολογίσετε την τιμή του άγνωστου:**

……………………………………………

……………………………………………

• Αν αντικαταστήσεις τον άγνωστο με την τιμή που βρήκες, επαληθεύονται και οι δυο εξισώσεις;

…………………………………………

…………………………………………

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι ο τρόπος λύσης των εξισώσεων διαίρεσης εξαρτάται από το αν ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης.

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι διαιρετέος

Όταν ο άγνωστος είναι **διαιρετέος**, για να λύσουμε την εξίσωση **πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο με τον διαιρέτη.**

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης
$x : 5 = 8$ είναι: $x = 5 \cdot 8$

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι διαιρέτης

Όταν ο άγνωστος είναι διαιρέτης, για να λύσουμε την εξίσωση **διαιρούμε τον διαιρετέο με το πηλίκο.**

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης
$18 : x = 36$ είναι: $x = 18 : 36$

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν πολλαπλασιάσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό.

Εφαρμογή 1η

Η Διευθύντρια του σχολείου έδωσε στις μαθήτριες της Στ΄ τάξης
ένα ρολό κορδέλα για τις ανάγκες του χορευτικού που θα παρουσίαζαν. Εκείνες τη χώρισαν σε 18 ίσα κομμάτια. Κάθε κομμάτι ήταν 81

εκατοστά. Πόσα μέτρα ήταν η κορδέλα που τους έδωσε η Διευθύντρια;

Λύση

Ονομάζω την άγνωστη τιμή σ.

→ Σχηματίζω την εξίσωση σ : 18 = 81.

→ Όταν ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος για να βρω την τιμή του πολλαπλασιάζω το πηλίκο με τον διαιρέτη: σ = 81 • 18.
Άρα σ = 1.458.

→ Επαληθεύω: 1.458 : 18 = 81

→ Μετατρέπω τα εκατοστά σε μέτρα: 1.458 : 100 = 14,58

Απάντηση: Η κορδέλα που τους έδωσε η Διευθύντρια ήταν 14,58 μέτρα.

Εφαρμογή 2η

Ο Θωμάς θέλει να ταξινομήσει τις κάρτες του με τους ποδοσφαιριστές σε κουτιά που χωράνε 45 κάρτες το καθένα. Έχει συνολικά 540 κάρτες. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;

Λύση

Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των κουτιών (κ) που χρειάζεται ο Θωμάς.

α΄ τρόπος: Σχηματίζω την εξίσωση

540 : κ = 45

Εφαρμόζω τη μέθοδο της διαίρεσης:

κ = 540 : 45. Άρα κ = 12.

Επαληθεύω: **540 : 12 = 45**

Απάντηση: Θα χρειαστεί 12 κουτιά.

β΄ τρόπος: 45 • κ = 540

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους άγνωστος διαιρετέος και άγνωστος διαιρέτης και μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις διαίρεσης. Παρουσίασε με την ομάδα σου ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

→ **Μια εξίσωση διαίρεσης λύνεται μόνο με πολλαπλασιασμό.** ☐

→ **Για να υπολογίσουμε τον άγνωστο όταν έχει τη θέση του διαιρέτη σε μια εξίσωση, πολλα-πλασιάζουμε το πηλίκο με το διαιρέτη.** ☐

Ανακεφαλαίωση

Εξισώσεις

«Όταν ο άγνωστος αποκαλύπτεται»

Ορισμοί

- **Μεταβλητή**
οποιοδήποτε γράμμα (ή σύμβολο) που μπαίνει στη θέση μιας άγνωστης τιμής
- ω, χ, …

- **Εξίσωση** Μια ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό, που συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα x ή ψ ή z, …… κ.τ.λ., λέγεται εξίσωση με έναν άγνωστο.
- $5 + x = 10{,}5$

- **Λύση της εξίσωσης**

η τιμή που την επαληθεύει

- $x = 5,5$

Περιπτώσεις εξισώσεων

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους προσθετέους**
- κάνουμε αφαίρεση, π.χ.:

$x + 0,2 = 12,8$ άρα $x = 12,8 – 0,2$
άρα $x = 12,6$

$2 + x = 11,5$ άρα $x = 11,5 – 2$
άρα $x = 9,5$

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι μειωτέος**
- κάνουμε πρόσθεση, π.χ.:

$x – 31 = 45$ άρα $x = 45 + 31$
άρα $x = 76$

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι αφαιρετέος**
- **κάνουμε αφαίρεση, π.χ.:**

20,1 – x = 7 άρα x = 20,1 – 7
άρα x = 13,1

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους παράγοντες του γινομένου**
- **κάνουμε διαίρεση, π.χ.:**

x · 3 = 96 άρα x = 96 : 3
άρα x = 32

14 · x = 11,2   άρα x = 11,2 : 14
άρα x = 0,8

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος**
- **κάνουμε πολλαπλασιασμό, π.χ.:**

x : 0,5 = 24 άρα x = 24 · 0,5
άρα x = 12

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρέτης**
- **κάνουμε διαίρεση, π.χ.:**

144 : x = 9 άρα x = 144 : 9

άρα x = 16

Χρυσός κανόνας

Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί.
Η ισορροπία πρέπει να διατηρηθεί μέχρι το τέλος, όταν θα έχει μείνει μόνο ο άγνωστος από τη μια μεριά και η τιμή του από την άλλη.
Για να διατηρείται πάντα η ισορροπία, ό,τι κάνουμε από τη μια μεριά, πρέπει να κάνουμε κι από την άλλη.

Άσκηση

Να αντιστοιχίσεις τα δύο μέρη των εξισώσεων όταν έχουν λύση x = 9.

$2x$	=	8
$5 + x$	=	18
$x – 1$	=	14
$7x$	=	1
$10 – x$	=	2
$18 : x$	=	63
$x : 3$	=	3

1ο πρόβλημα «Το πάρτι»

Σε ένα πάρτι με μπουφέ υπήρχαν 40 μικρά γλυκά. Μετά το γεύμα πέρασαν όλοι οι καλεσμένοι και πήραν από 3 γλυκά ο καθένας. Στο τέλος έμειναν 4 γλυκά στο δίσκο. Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι; (Να το λύσεις με εξίσωση)

Λύση

Απάντηση: ....

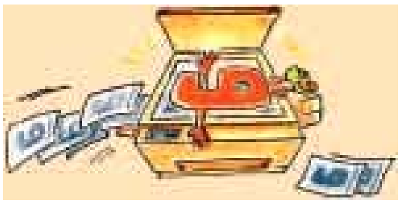
....

<u>2</u>ο πρόβλημα «Σχολικό περιοδικό»

Η Όλγα υπολογίζει τα έξοδα για την εκτύπωση ενός σχολικού περιοδικού. Εάν το τυπώσει στο «ΕΚΤΥΠΟΝ», κοστίζει 5 λεπτά η σελίδα για οποιονδήποτε αριθμό αντιγράφων, χωρίς επιπλέον χρέωση για τη σελιδοποίηση. Εάν το τυπώσει στο «ΕΝΤΥΠΟΝ», κοστίζει 40 € η σελιδοποίηση και στη συνέχεια 4 λεπτά η σελίδα.

α) Πόσο θα χρεώσει το «ΕΚΤΥΠΟΝ» για 200 αντίγραφα ενός περιοδικού 30 σελίδων;

β) Πόσο θα χρεώσει το «ΕΝΤΥΠΟΝ» για την ίδια εργασία;



γ) Εάν η Όλγα ήθελε μόνο 100 αντίγραφα του περιοδικού, ποια εταιρία θα της έδινε την φτηνότερη λύση;

Λύση

Απάντηση: ....
....

<u>3</u>ο πρόβλημα

«Τραπεζικές εργασίες»

Τη Δευτέρα, η Άρτεμη έβαλε 23 € στον τραπεζικό της λογαριασμό ο οποίος έγινε 57 €.

Τι περιγράφει η εξίσωση
δ + 23 = 57; ....
....

Τι αντιπροσωπεύει το δ; ....
....

Πόσο ήταν το δ; ....
....

Η εξίσωση 57 – τ = 49 περιγράφει την κίνηση του λογαριασμού την Τετάρτη.

Τι έκανε η Άρτεμη την Τετάρτη;
....

Πόσο είναι το τ; ....
....

Η εξίσωση 49 - γ = 49 περιγράφει την κίνηση του λογαριασμού την Παρασκευή

Πόσο είναι το γ; ....

..

Ποια κίνηση έγινε την Παρασκευή;

..

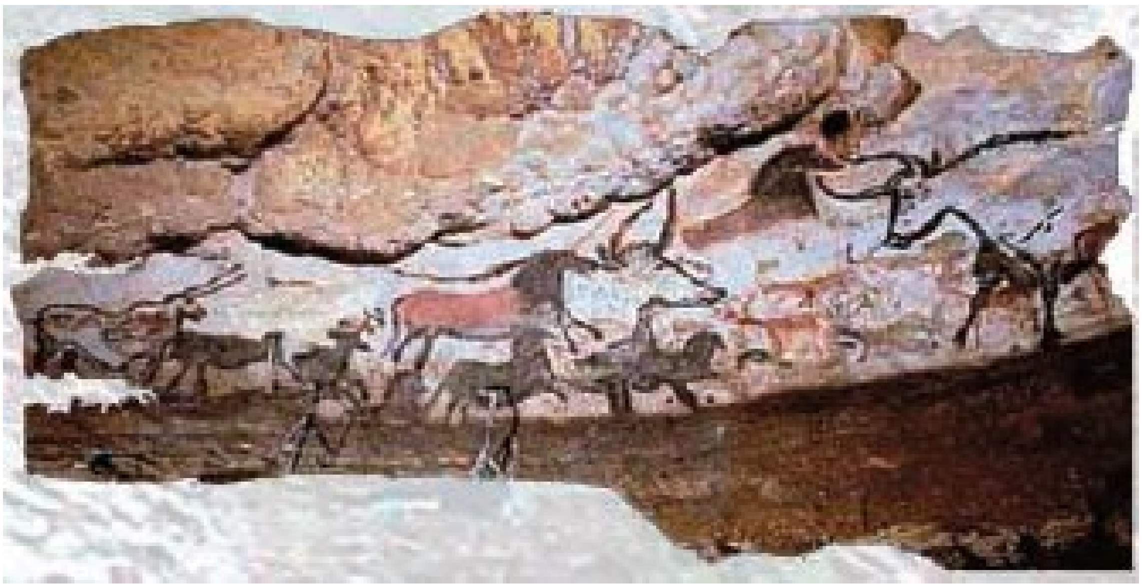
3η θεματική ενότητα

Λόγοι – Αναλογίες

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τους λόγους και τις αναλογίες.

Ανάμεσα στις πρώτες μαθηματικές ιδέες των προϊστορικών ανθρώπων είναι οι αναλογίες και η συμμετρία. Οι πρωτόγονες ζωγραφιές στα σπήλαια μαρτυρούν την ύπαρξη αυτών των ιδεών. Οι ζωγραφιές αυτές έχουν σχεδιαστεί από επιδέξιους τεχνίτες οι οποίοι στην προσπάθεια τους να ερμηνεύσουν το περιβάλλον απόδωσαν εικόνες ζώων, κυνηγών, γεωμετρικών σχημάτων κ.ά. σε μεγέθη όχι τυχαία αλλά σε αναλογία με την πραγματικότητα.

Όπως τότε, έτσι και σήμερα η μελέτη του περιβάλλοντος έδωσε στον άνθρωπο τα ερεθίσματα ώστε να συστηματοποιήσει τις σκέψεις του και να τις μετατρέψει σε γνώση. Η γνώση αύτη αποτελεί το εργαλείο που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για να ερμηνεύει το περιβάλλον του, αλλά ταυτόχρονα είναι και η βάση που του επιτρέπει να επιδρά σε αυτό.



Κεφάλαιο 30ο

Λόγος δυο μεγεθών

Σου δίνουμε το... λόγο μας

→ Συγκρίνω μεγέθη.

→ Μελετώ τη σχέση δύο μεγεθών.

→ Εκφράζω τη σχέση δύο μεγεθών με λόγο.

→ Αναγνωρίζω τους αντίστροφους λόγους.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου Δοξάτου ερεύνησαν τις αιτίες της αυξημένης κίνησης στους δρόμους γύρω από το σχολείο τους. Βρήκαν τα στοιχεία για τον αριθμό των αυτοκινήτων και τον αριθμό των κατοίκων της πόλης τους για τα έτη 1980 και 2000 και τα κατέγραψαν στους παρακάτω πίνακες:

Έτος 1980	
Αυτοκίνητα	345
Κάτοικοι	3.450

Έτος 2000	
Αυτοκίνητα	850
Κάτοικοι	3.150

- Παρατηρώντας τα στοιχεία στους πίνακες, σχολιάστε στην ομάδα σας πόσο αυξήθηκε ο αριθμός των αυτοκινήτων μέσα στην τελευταία εικοσαετία και διατυπώστε τα συμπεράσματά σας.
- Συζητήστε τη σχέση του αριθμού των αυτοκινήτων με τον αριθμό των κατοίκων.

- Γιατί σήμερα υπάρχει η ανάγκη του σχολικού τροχονόμου;

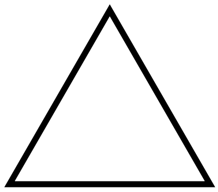
…………………………………………………

…………………………………………………

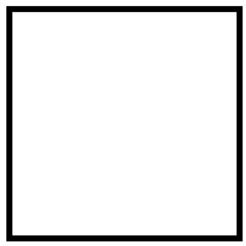
Δραστηριότητα 2η

Συμπλήρωσε στους πίνακες την περίμετρο κάθε σχήματος:

Μήκος πλευράς ισόπλευρου τριγώνου (εκατοστά)	3
Περίμετρος τριγώνου (εκατοστά)	



Μήκος πλευράς τετραγώνου (εκατοστά)	5
Περίμετρος τετραγώνου (εκατοστά)	



- **Πώς προκύπτει ο αριθμός στη δεύτερη γραμμή και στις δύο περιπτώσεις; ……………………………**

……………………………………………………

- **Η σχέση ανάμεσα στο μήκος της πλευράς και την περίμετρο μπορεί να εκφραστεί και ως κλάσμα. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία από τους παραπάνω πίνακες να γράψεις το κλάσμα αυτό για:**
- **Το τρίγωνο: …. το τετράγωνο: ….**

Σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητο να συγκρίνουμε δύο μεγέθη και να μελετήσουμε τη σχέση τους:

Λόγος

Το αποτέλεσμα της σύγκρισης δύο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα ονομάζεται λόγος. Το

κλάσμα αυτό έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο.

Παραδείγματα

Ο πύργος του Άιφελ έχει ύψος περίπου 300 μέτρα, ενώ ο Λευκός Πύργος περίπου 30 μέτρα.
Ο λόγος των υψών τους είναι

$$\frac{300}{30} \text{ ή } \frac{30}{3} \text{ ή } 10.$$

(Δηλαδή ο πρώτος είναι 10 φορές ψηλότερος.)

Εφαρμογή 1η

Στην έκτη τάξη φοιτούν 28 μαθητές. Υπάρχουν 14 θρανία.
α. Ποιος είναι ο λόγος των μαθητών προς τα θρανία;
β. Ποιος είναι ο λόγος των θρανίων προς τους μαθητές;

Λύση - Απάντηση:

α. Ο λόγος $\frac{\text{μαθητές}}{\text{θρανία}}$ είναι ——,

δηλαδή απλοποιώντας $\frac{2}{1}$.

Με άλλα λόγια, αντιστοιχούν
2 μαθητές σε 1 θρανίο.

β. Ο λόγος $\frac{\text{θρανία}}{\text{μαθητές}}$ είναι ——,

δηλαδή απλοποιώντας $\frac{1}{2}$.

Με άλλα λόγια, αντιστοιχεί 1 θρανίο
σε 2 μαθητές.
Παρατηρούμε ότι οι λόγοι $\frac{2}{1}$ και
$\frac{1}{2}$ είναι αντίστροφοι γιατί

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = \dots.$$

Εφαρμογή 2η

Τα παιδιά έκαναν μια μικρή έρευνα σχετικά με την κατανάλωση ενέργειας των αυτοκινήτων και βρήκαν ότι ένας πολύ καλός λόγος κατανάλωσης προς απόσταση είναι 1 λίτρο προς 25 χιλιόμετρα ($\frac{1}{25}$).

Ο Νικόλας ρώτησε τον μπαμπά του πόσα περίπου χιλιόμετρα κάνει το αυτοκίνητο τους με ένα ντεπόζιτο βενζίνη και εκείνος του είπε πως συνήθως με 50 λίτρα κάνει 400 χιλιόμετρα. Είναι οικονομικό το αυτοκίνητο τους;

Λύση:

Ο Νικόλας βρίσκει το λόγο

$$\frac{\text{κατανάλωση (λίτρα)}}{\text{απόσταση (χμ)}}$$

του αυτοκινήτου τους: —— .

Απλοποιεί και βρίσκει —— .

Απάντηση: Το αυτοκίνητο τους έχει πολύ μεγαλύτερο λόγο κατανάλωσης προς απόσταση (με 1 λίτρο ταξιδεύει μόνο 8 χιλιόμετρα, πολύ λιγότερα από τα 25 χιλιόμετρα).

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

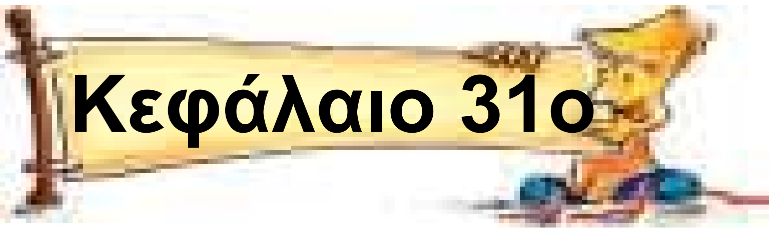
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **λόγος**. Μπορείς να εξηγήσεις τη σημασία του με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε **Σ** αν είναι σωστές ή **Λ** αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

→ Ο λόγος εκφράζει τη σχέση δύο μεγεθών. ☐

→ Σε κάθε λόγο ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή. ☐

→ Οι λόγοι $\frac{7}{8}$ και $\frac{8}{7}$ είναι αντίστροφοι. ☐



Από το λόγους στις αναλογίες

Από το λόγο στις αναλογία… τι γλυκό

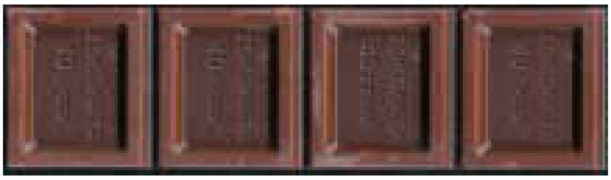
➝ Συγκρίνω δυο λόγους.

➝ Αναγνωρίζω την ισότητα δυο λόγων.

➝ Σχηματίζω αναλογίες

Δραστηριότητα 1η

Στο πλαίσιο του προγράμματος «Αγωγή Υγείας» οι μαθητές της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου Φαρκαδόνας ασχολήθηκαν με τη θερμιδική αξία των γλυκών. Διαβάζοντας τις ετικέτες σε δύο διαφορετικές σοκολάτες διαπίστωσαν ότι, η πρώτη σοκολάτα, βάρους 50 γραμμαρίων, δίνει 250 θερμίδες, ενώ η δεύτερη σοκολάτα, βάρους 100 γραμμαρίων, δίνει 500 θερμίδες.



- Συμπλήρωσε τον πίνακα όπως έκαναν τα παιδιά:

Βάρος σοκολάτας σε γραμμάρια	50	100
Θερμιδική αξία		

- Σύγκρινε τους δύο λόγους.
- Τι παρατηρείς;
- Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τη θερμιδική αξία (θερμίδες / γραμμάριο) στις δύο σοκολάτες;

……………………………………………

……………………………………………

Δραστηριότητα 2η

Για την ίδια εργασία τα παιδιά βρήκαν ότι το ένα γραμμάριο σοκολάτας έχει 5 θερμίδες και κατασκεύασαν τον πίνακα θερμίδων της σοκολάτας.

Βάρος σοκολάτας σε γραμμάρια	1	2	3	4	5
Θερμίδες	5				

- Συμπλήρωσε τον πίνακα
- Τι παρατηρείς στους λόγους που σχηματίζονται; ……………………………

……………………………………………

- Πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης γραμμής από τους αριθμούς της πρώτης; ………………

……………………………………………

Από τις προηγούμενες δραστηριό-τητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές είναι αναγκαίο να μελετάμε τη σχέση (το λόγο) δύο μεγεθών σε διαφορετικές τιμές.

Αναλογία

Όταν συγκρίνοντας δύο λόγους διαπιστώσουμε ότι είναι ίσοι μεταξύ τους, λέμε ότι αποτελούν μια **αναλογία**.

Παραδείγματα

Οι λόγοι $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{10}$ σχηματίζουν αναλογία γιατί είναι ίσοι $\left(\frac{1}{5}=\frac{2}{10}\right)$

Για να σχηματίσω αναλογία από ένα λόγο, αρκεί να φτιάξω έναν άλλο λόγο που να είναι ίσος με τον πρώτο, όπως στα κλάσματα (πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας και τους δύο όρους με κάποιον αριθμό).

Εφαρμογή 1η

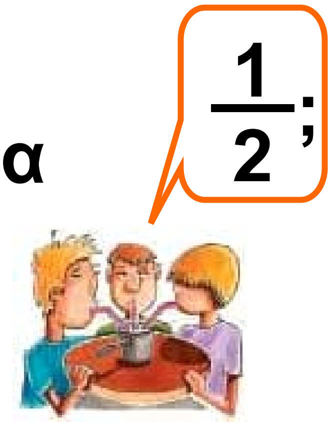
Από 9 πορτοκάλια βγάζουμε 3 ποτήρια χυμό. Από 18 πορτοκάλια βγάζουμε 6 ποτήρια χυμό. Οι λόγοι πορτοκαλιών προς ποτήρια χυμού στις δύο περιπτώσεις σχηματίζουν αναλογία;

Λύση: Οι λόγοι $\dfrac{\text{πορτοκάλια}}{\text{ποτήρια με χυμό}}$

$\dfrac{9}{3}$, $\dfrac{18}{6}$ είναι ίσοι γιατί $\dfrac{9 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \underline{\qquad}$.

Απάντηση: Οι λόγοι είναι ίσοι. Άρα σχηματίζουν αναλογία.

Εφαρμογή 2η



Για ένα πετυχημένο ρόφημα σοκολάτα η μαμά βάζει 1 κουταλιά κακάο και 2 κουταλιές ζάχαρη με μία κούπα γάλα. Για να έχουμε την ίδια αναλογία όταν έρθουν τρεις φίλοι μας, πόσες κουταλιές κακάο και πόσες κουταλιές ζάχαρη πρέπει να βάλουμε;

Λύση:

Ο λόγος $\frac{\text{κακάο}}{\text{ζάχαρη}}$ στο ρόφημα είναι $\frac{1}{2}$ για μία κούπα γάλα.

Για να φτιάξουμε ένα λόγο που να αποτελεί αναλογία με το $\frac{1}{2}$ για 3 κούπες γάλα, πρέπει να πολλαπλα-

σιάσουμε και τους δύο όρους του πρώτου λόγου με το 3, δηλαδή

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{\quad}{\quad}.$$

Απάντηση: Στις 3 κούπες γάλα αντιστοιχούν .... κουταλιές κακάο προς .... κουταλιές ζάχαρη.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο αναλογία. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

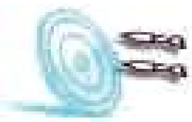
Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Η αναλογία εκφράζει την ισότητα δύο λόγων.** ☐
- **Σε κάθε αναλογία οι παρονομαστές είναι ίσοι.** ☐
- **Οι λόγοι $\frac{2}{9}$ και $\frac{9}{2}$ αποτελούν αναλογία.** ☐

Κεφάλαιο 32ο

Αναλογίες

Αναλογία; «Χιαστί» θα βρω το x!



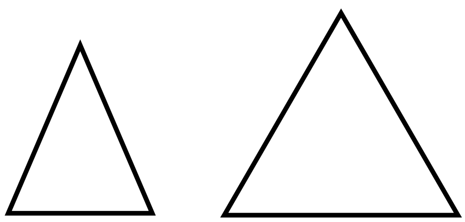
→ Βρίσκω τη σχέση των όρων της αναλογίας.

→ Υπολογίζω τον άγνωστο όρο της αναλογίας.

Δραστηριότητα 1η

• Συμπλήρωσε τους αριθμούς του πίνακα:

$$\frac{\text{Πλευρά}}{\text{Περίμετρος}}$$

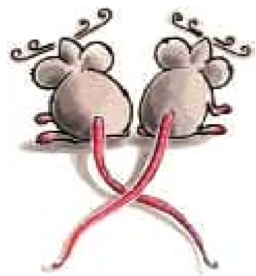


Πλευρά ισόπλευρου τριγώνου	1	2
Περίμετρος τριγώνου		

- Σύγκρινε τους δύο λόγους.
- Πώς προκύπτει ο δεύτερος λόγος από τον πρώτο;
- Πολλαπλασίασε τους αριθμούς που βρίσκονται στο ίδιο χρώμα.
- Σύγκρινε τα δύο γινόμενα που βρήκες. Τι παρατηρείς;

Δραστηριότητα 2η

Τρεις μήνες σύνδεση στο Internet κοστίζουν 27 €. Οι δώδεκα μήνες κοστίζουν …….. €.



- Συμπλήρωσε τον αριθμό στον πίνακα:

Διάρκεια σύνδεσης	3	12
Κόστος	27	

- Μπορείς εύκολα να συγκρίνεις τους δύο λόγους;

- **Δοκίμασε τη μέθοδο του πολλαπλασιασμού χιαστί.**

………………………………………………

- **Τι παρατηρείς για τα δύο γινόμενα;**

………………………………………………

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε:

Σταυρωτά γινόμενα

Πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους μιας αναλογίας τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα. Τα γινόμενα αυτά λέγονται σταυρωτά γινόμενα.

Παραδείγματα

Στην αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ τα σταυρωτά γινόμενα είναι: $4 \cdot 3 = 12$ $\quad$ $6 \cdot 2 = 12$

Εφαρμογή 1η

Ένας φούρναρης ανακάτεψε 36 κιλά αλεύρι σιταριού με 12 κιλά αλεύρι καλαμποκιού για να φτιάξει ψωμί ανάμεικτο. Την επόμενη μέρα, για να κάνει περισσότερα ψωμιά, ανακάτεψε 54 κιλά αλεύρι σιταριού με 18 κιλά αλεύρι καλαμποκιού. Το ανάμεικτο ψωμί είχε την ίδια αναλογία συστατικών τις δύο μέρες;

Λύση:

Σχηματίζω τους λόγους:

$$\frac{\text{αλεύρι σιταριού}}{\text{αλεύρι καλαμποκιού}}$$ **είναι τη μια μέρα** $\frac{36}{12}$ **και την άλλη** $\frac{54}{18}$.

Για να διαπιστώσω αν υπάρχει αναλογία σχηματίζω τα σταυρωτά γινόμενα:

36 · 18 = …… και 12 · 54 = ……

Διαπίστωσα ότι είναι ίσα. Άρα

$\frac{36}{12} = \frac{54}{18}$, δηλαδή οι λόγοι αποτελούν αναλογία.

Απάντηση: **Το ανάμεικτο ψωμί και των δύο ημερών έχει την ίδια αναλογία συστατικών.**

Εφαρμογή 2η

Για να φτιάξουμε καρυδόπιτα χρειαζόμαστε 12 αυγά και 8 κούπες ζάχαρη. Αν έχουμε μόνο 9 αυγά, πόσες κούπες ζάχαρη πρέπει να βάλουμε για να έχει το γλυκό την ίδια αναλογία;

Λύση:

Για να σχηματίσω αναλογία, πρέπει να έχω δύο ίσους λόγους.

Ο λόγος $\frac{\text{αυγά}}{\text{ζάχαρη}}$ στη συνταγή είναι $\frac{12}{8}$. Αφού η ποσότητα της ζάχαρης είναι άγνωστη, τη συμβολίζω με x. Άρα ο λόγος των αυγών που έχω προς τη ζάχαρη που χρειάζομαι είναι $\frac{9}{x}$.

1. Σχηματίζω την αναλογία: $\frac{12}{8} = \frac{9}{x}$

2. Εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: $12 \cdot x = 8 \cdot 9$

3. Κάνω τον πολλαπλασιασμό: $12 \cdot x =$ ……

4. Λύνω την εξίσωση: $x =$ ……
Άρα $x =$ ……

Απάντηση: Πρέπει να βάλουμε …… κούπες ζάχαρη.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο σταυρωτά γινόμενα. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Δύο λόγοι αποτελούν αναλογία αν τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.** ☐
- **Σε δύο λόγους πάντοτε τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.** ☐

Σταθερά και μεταβλητά ποσά

Εκφράζομαι … ακριβώς!

→ Μελετώ την έννοια του ποσού.

→ Διακρίνω τα ποσά από τις αντίστοιχες τιμές τους.

→ Συγκρίνω και αναγνωρίζω τα σταθερά και τα μεταβλητά ποσά.

Δραστηριότητα 1η

Στο Καρλόβασι, τα παιδιά της Στ΄ τάξης ανέβασαν ένα θεατρικό έργο. Στις πρόβες τα παιδιά σημείωσαν κάποιες φράσεις:
«Δώσε ένα κομμάτι από τη δόξα των προγόνων για να γίνει διπλή η περηφάνια μου»

«Με πόσο πάθος και αρετή πολέμησαν για λίγη ελευθερία!»
«Οι πολιορκητές απείχαν από το Μεσολόγγι 200 μέτρα»
«Οι πολιορκούμενοι είχαν τεράστια αποθέματα ανδρείας και θάρρους»
«Σαράντα πέντε άλογα και χίλιοι πεζοπόροι»
«Ταλαιπωρημένα άλογα και κουρασμένοι πεζοπόροι»

- **Ποιες από τις φράσεις των παιδιών εκφράζουν ποσά (μπορούν να μετρηθούν);**
- **Τι παρατηρείς για τα άλογα και τους πεζοπόρους στις δύο τελευταίες φράσεις;**
- **Σκεφτείτε στην ομάδα σας και παρουσιάστε τρεις φράσεις που εκφράζουν ποσά και τρεις που δεν εκφράζουν ποσά.**

Δραστηριότητα 2η

Όπως οι άνθρωποι, έτσι και τα ποσά έχουν όνομα κι επίθετο! Κάποιοι άνθρωποι είναι τόσο γνωστοί που δεν χρειάζεται να πούμε το όνομα και το επίθετό τους για να καταλάβουμε σε ποιον αναφερόμαστε. Λέμε για παράδειγμα, ο Μπετόβεν, ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης.
Με τον ίδιο τρόπο κάποια ποσά, όπως το βάρος, το μήκος, το πλάτος, το πλήθος, η θερμοκρασία κ.ά. είναι τόσο γνωστά ώστε δεν αναφέρονται αλλά εννοούνται.
Έτσι, όταν λέμε «χίλιοι πεζοπόροι» εννοούμε «το πλήθος των πεζοπόρων ήταν χίλιοι».

Στην επόμενη σελίδα, αντιστοίχισε τη φράση με το ποσό στα δεξιά και συμπλήρωσε την τιμή του.

ΦΡΑΣΗ
Σαράντα πέντε άλογα
Το θερμόμετρο δείχνει 9 βαθμούς
Ο Γιάννης είναι 1,55 μ.
Τα κύματα ήταν ένα μέτρο
Ένα κιλό ψωμί
Άνεμος 7 μποφόρ
Τρία μήλα
Τρία κιλά μήλα

ΠΟΣΟ	ΤΙΜΗ
Το ύψος του Γιάννη	
Το ύψος των κυμάτων	
Η θερμοκρασία	
Το πλήθος των αλόγων	
Η ένταση του ανέμου	
Το βάρος του ψωμιού	
Το βάρος των μήλων	
Το πλήθος των μήλων	

Διαβάστε τη φράση «Πάχυνα! Η ζυγαριά δείχνει πενήντα κιλά!» και βρείτε ποιο είναι το ποσό και ποια η τιμή του.
Ποσό ……………………………….
Τιμή ……………………………….

Στην καθημερινή μας ζωή συναντάμε έννοιες που δεν είναι δυνατό να μετρηθούν και τις αντιλαμβανόμαστε υποκειμενικά - διαισθητικά (π.χ. καλό / κακό, γλυκό / πικρό, θαρραλέος / φοβητσιάρης κ.ά.). Συναντάμε όμως και έννοιες που μπορούν να μετρηθούν.

Ποσά

Οι έννοιες που μπορούν να μετρηθούν και επομένως να εκφραστούν με συγκεκριμένο αριθμό λέγονται ποσά.

Παραδείγματα

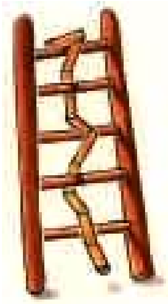
Η αίθουσα μας είναι 55 τετραγωνικά μέτρα. (το ποσό είναι το εμβαδό της αίθουσας)
Δουλεύω 8 ώρες την ημέρα. (χρονική διάρκεια)

Υπάρχουν ποσά σταθερά, δηλαδή έχουν πάντοτε την ίδια τιμή και ποσά μεταβλητά, τα οποία μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές.

Η απόσταση Αθήνας – Θεσσαλονίκης είναι σταθερό ποσό.
Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο σε 1 ώρα είναι μεταβλητό ποσό (εξαρτάται από την ταχύτητά του).

Εφαρμογή

Διακρίνω τα σταθερά από τα μεταβλητά ποσά



→ Σκεφτείτε στην ομάδα και παρουσιάστε ποσά μεταβλητά και ποσά που παραμένουν σταθερά.

→ Συζητήστε πώς μεταβάλλεται ένα ποσό (τι το επηρεάζει;).

Παράδειγμα απάντησης:

Στον πίνακα που ακολουθεί, σημειώνω στη στήλη ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ την τιμή για τα ποσά που παραμένουν σταθερά και για τα ποσά που μεταβάλλονται σημειώνω τον παράγοντα που τα επηρεάζει στη στήλη ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ…

ΠΟΣΑ	ΣΤΑΘΕΡΟ / ΜΕΤΑ-ΒΛΗΤΟ	ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΤΑΒΑΛΛΕ-ΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ…
Η θερμοκρασία που παγώνει το καθαρό νερό	Σταθερό	… βαθμοί	—
Το ύψος των κυμάτων της θάλασσας.	Μεταβλητό	—	την ένταση του ανέμου
Το ύψος του Ολύμπου.	Σταθερό	2.917 μ.	—
Το άθροισμα των γωνιών τετραγώνου.	Σταθερό	……°	—

ΠΟΣΑ	ΣΤΑΘΕΡΟ / ΜΕΤΑ-ΒΛΗΤΟ	ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΤΑΒΑΛΛΕ-ΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ…
Η κατανάλωση ενός αυτοκινήτου.	Μεταβλητό	—	την ταχύτητά του
Τα έσοδα του κυλικείου του σχολείου.	Μεταβλητό	—	τις πωλήσεις του
Ο λογαριασμός του τηλεφώνου.	Μεταβλητό	—	τις μονάδες που έγιναν
Το κόστος της τηλεφωνικής μονάδας	Μεταβλητό	—	την τιμή της μονάδας

ΠΟΣΑ	ΣΤΑΘΕΡΟ / ΜΕΤΑ-ΒΛΗΤΟ	ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΤΑΒΑΛΛΕ-ΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ…
Η θερμοκρασία σήμερα.	Μεταβλητό	—	την ώρα, τον άνεμο κ.ά.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τις έννοιες **ποσό** και **τιμή**. Μπορείς να τις εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα; Δώσε παραδείγματα σταθερών και μεταβλητών ποσών.

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Η Στ΄ τάξη έχει 18 μαθητές. Οι μαθητές είναι το ποσό.** ☐
- **Ο Λευτέρης είναι άριστος μαθητής (εκφράζει ποσό).** ☐
- **Ο Λευτέρης είναι 12 ετών (εκφράζει ποσό).** ☐
- **Σταθερά είναι τα ποσά που εκφράζονται με διάφορες τιμές.** ☐

Κεφάλαιο 34ο

Ανάλογα ποσά

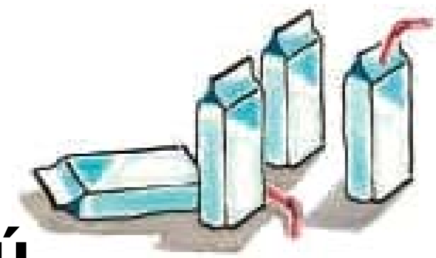
Όταν ανεβαίνω… ανεβαίνεις

→ Μελετώ την έννοια των ανάλογων ποσών.

→ Συγκρίνω ποσά.

→ Αναγνωρίζω τα ανάλογα ποσά.

Δραστηριότητα 1η



Για τις ανάγκες του σχολικού συνεταιρισμού τα παιδιά της Στ΄ τάξης θέλησαν να κάνουν πίνακα με τις ποσότητες και τις τιμές για τους χυμούς του κυλικείου του συνεταιρισμού.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ				
Ποσότητα χυμού (κουτιά)	1	2	4	8	16
Αξία σε €	2	4	8	16	32

- **Από τι εξαρτάται η αξία των χυμών σε κάθε περίπτωση;**
- **Πώς προκύπτει η αξία για κάθε ποσότητα;**
- **Σύγκρινε τους λόγους που σχηματίζονται. Τι παρατηρείς;**

Δραστηριότητα 2η

Το τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα 80 χιλιόμετρα την ώρα.

Μπορείς να υπολογίσεις τα χιλιόμετρα που θα καλύψει σε 2, 3, 4, 5, 6 ... ώρες και να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί;

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ						
Χρόνος σε ώρες	1	2	3	4	5	6	7
Απόσταση σε χιλιόμετρα	80						

- **Πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης γραμμής;**

...

- **Σύγκρινε τον πρώτο αριθμό κάθε γραμμής με κάποιον από τους αριθμούς που ακολουθούν.**
Πώς προκύπτει εκείνος από τον πρώτο; ....

...

- **Σύγκρινε και τους αντίστοιχους λόγους** $\dfrac{\text{χρόνος}}{\text{απόσταση}}$ **......................**

...

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές, όταν ένα ποσό μεταβάλλεται, προκαλεί μεταβολή σε ένα άλλο ποσό.

Ανάλογα ποσά

Δύο **ποσά** είναι **ανάλογα**, όταν οι τιμές του ενός προκύπτουν από τις τιμές του άλλου πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά με έναν σταθερό αριθμό.

Στα ανάλογα ποσά ο λόγος των τιμών τους διατηρείται σταθερός.

Παράδειγμα

Η αξία ενός υφάσματος είναι ανάλογη προς το μήκος του.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	1	2	3	4
Αξία υφάσματος σε €	5	10	15	20

Οι λόγοι τους είναι ίσοι:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = 0,2$$

Κάποια ποσά, ενώ φαίνεται ότι εξαρτώνται το ένα από το άλλο, γιατί αυξάνονται ταυτόχρονα, δεν είναι ανάλογα. Τέτοια ποσά είναι η ηλικία και το ύψος ενός ανθρώπου ή η ηλικία και το βάρος του (ευτυχώς!). Μπορείτε να σκεφτείτε κι εσείς άλλα τέτοια ζευγάρια ποσών;

Εφαρμογή 1η

Διακρίνω τα σταθερά από τα μεταβλητά ποσά

Από τα παρακάτω ζευγάρια ποσών, υπογραμμίζω αυτά που είναι ανάλογα:

Η πλευρά ενός τετραγώνου και η περίμετρος του.
Τα χρήματα που κερδίζουμε και τα χρήματα που ξοδεύουμε.
Η ποσότητα ενός προϊόντος και η χρηματική αξία του.
Η ώρα της ημέρας και η θερμοκρασία.

Λύση:

Η πλευρά ενός τετραγώνου και η περίμετρός του (είναι ανάλογα γιατί η τιμή της περιμέτρου προκύπτει πάντα ....
....)

Η ποσότητα ενός προϊόντος και η χρηματική αξία του (είναι ανάλογα γιατί η χρηματική αξία των προϊόντων προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε ....
....)

(Στην πραγματικότητα βέβαια, αν αγοράσω μεγάλη ποσότητα μπορεί να έχω έκπτωση!)

Εφαρμογή 2η

Η Ελένη για να διαβάσει 3 σελίδες κάνει 5 λεπτά. Μπορείς να βρεις πόσο θα κάνει για να διαβάσει 15 σελίδες, 30 σελίδες, 180 σελίδες αν κρατήσει τον ίδιο ρυθμό ανάγνωσης;

Λύση - Απάντηση:

Εξετάζω τα ποσά. Παρατηρώ ότι είναι ανάλογα (επειδή όταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται... η τιμή του ενός, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται... και η τιμή του άλλου).

Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός σελίδων	3	15	30	180
Χρόνος σε λεπτά	5	25	…..	……

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο: ανάλογα ποσά. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Το βάρος του τυριού και το βάρος του γάλακτος από το οποίο γίνεται είναι ποσά ανάλογα.** ☐
- **Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των τιμών τους είναι πάντα ίσοι.** ☐

Κεφάλαιο 35ο

Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά

Η εύκολη λύση!

➜ Διακρίνω αν δύο ποσά είναι μεταξύ τους ανάλογα.

➜ Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.

➜ Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναλογίας.

Δραστηριότητα 1η

Η σχολική ομάδα μπάσκετ θέλει να προμηθευτεί αθλητικά μπλουζάκια. Βρήκαν ότι σε προσφορά τα 2 μπλουζάκια κοστίζουν 12 €. Πόσο θα κοστίσουν τα μπλουζάκια για όλη την ομάδα που αποτελείται από 8 παίκτες;

- Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος μπορώ εύκολα να υπολογίσω πόσο κάνουν τα 8 μπλουζάκια;
- Ξέροντας όμως την τιμή των 2 (πολλών) τι μπορώ να βρω;
- Πώς μπορώ μετά να βρω την τιμή των 8;
- Κάνε τις πράξεις στις κενές σειρές που ακολουθούν:
- ....
- ....
- ....

Δραστηριότητα 2η

Στο ίδιο πρόβλημα μπορούμε να εργαστούμε και με άλλο τρόπο:

• Φτιάχνουμε έναν πίνακα για να καταγράψουμε τα δεδομένα του προβλήματος.

• Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε εσύ τα ποσά και τις αντίστοιχες τιμές που μας δίνει το πρόβλημα.

• Την άγνωστη τιμή μπορείς να την ονομάσεις Χ.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	

• Σκέφτομαι τη σχέση ανάμεσα στα δύο ποσά. (Για διπλάσια μπλουζάκια, χρειάζομαι διπλάσια χρήματα ή όχι;)

Τα ποσά .... και .... είναι ....

Οι λόγοι τους ……………………………

Δηλαδή: —— = ——

- Με ποια μέθοδο μπορείς να βρεις τον άγνωστο όρο σ’ αυτή την αναλογία;

……………………………………………………

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να βρούμε την άγνωστη τιμή σε ένα πρόβλημα ανάλογων ποσών με διάφορους τρόπους:

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα με ποσά ανάλογα βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με διαίρεση) και στη συνέχεια βρίσκω την άγνωστη τιμή (με πολλαπλασιασμό) λέγεται αναγωγή στη μονάδα.

Παράδειγμα

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30 €. Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα ύφασμα;

Λύση

Τα 5 μέτρα κοστίζουν 30 €
Το 1 μέτρο κοστίζει 30 : 5 = 6 €
Τα 12 μέτρα κοστίζουν
12 · 6 = 72 €

β) Σχηματίζοντας την αναλογία

Εργάζομαι ως εξής:

- **Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.**
- **Εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα.**
- **Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.**
- **Σχηματίζω την αναλογία.**

→ **Βρίσκω τον άγνωστο όρο της αναλογίας λύνοντας την εξίσωση.**

Παράδειγμα

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30 €. Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα;

Λύση

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	5	12
Αξία σε €	30	Χ

**Τα ποσά μήκος υφάσματος και αξία είναι ανάλογα ποσά (το διπλάσιο μήκος έχει διπλάσια αξία).
Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των τιμών τους είναι ίσοι.
Σχηματίζω την αναλογία και βρίσκω τον άγνωστο όρο.**

$$\frac{5}{30} = \frac{12}{x}$$

Άρα 5 • x = 30 • 12

επομένως $5 \cdot x = 360$
Άρα $x = 360 : 5$ $x = 72$

Εφαρμογή

Ένας αμπελουργός έκανε 600 κιλά κρασί από 1.800 κιλά σταφύλια. Την επόμενη χρονιά έκανε 800 κιλά κρασί. Πόσα κιλά σταφύλια είχε τη δεύτερη χρονιά;

Λύση

α) Με αναγωγή στη μονάδα:
Τα 600 κιλά κρασί γίνονται από ………. κιλά σταφύλια
Το 1 κιλό κρασί γίνεται από 1.800 : 600 = …… κιλά σταφύλια
Τα 800 κιλά κρασί γίνονται από 800 • …… = …… κιλά σταφύλια

β) Με αναλογία:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Βάρος κρασιού σε κιλά	600	800
Βάρος σταφυλιών σε κιλά	1.800	x

Σχηματίζω την αναλογία και εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα:

$$\frac{600}{1.800} = \frac{800}{x}$$

Σχηματίζω την εξίσωση:

600 • x = 1.800 • 800

Και τη λύνω 600 • x = 1.440.000

x = ………… Άρα x = …………

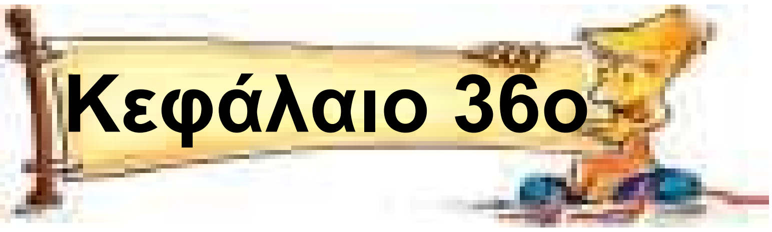
Απάντηση: Τη δεύτερη χρονιά είχε ……… κιλά σταφύλια.

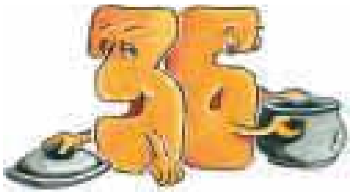
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο: **αναγωγή στη μονάδα**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε **Σ** αν είναι σωστές ή **Λ** αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- Αναγωγή στη μονάδα σημαίνει «βρίσκω την τιμή των πολλών». ☐
- Στην αναλογία τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα. ☐
- Τα ανάλογα ποσά δεν έχουν πάντα ίσους λόγους. ☐





Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά

Μαζί δεν κάνουμε
και χώρια δεν μπορούμε!

➔ Μελετώ την έννοια των αντίστροφων ποσών.

➔ Συγκρίνω ποσά.

➔ Αναγνωρίζω τα αντίστροφα ποσά.

Δραστηριότητα 1η

Τα παιδιά της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου Ν. Καλλικράτειας συγκέντρωσαν στο ταμείο τους 90 €. Με τα χρήματα αυτά θέλησαν να εμπλουτίσουν τη βιβλιοθήκη της τάξης τους. Στο τοπικό βιβλιοπωλείο υπήρχαν βιβλία με διάφορες τιμές. Γύρισαν στο σχολείο και έφτιαξαν έναν πίνακα με τις τιμές των βιβλίων και τις ποσότητες που θα μπορούσαν να αγοράσουν με τα 90 € που είχαν.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ				
Τιμή βιβλίου σε €	3	6	9	15	
Αριθμός βιβλίων	30				

- Μπορείς με την ομάδα σου να συμπληρώσεις τον πίνακα;
- Παρατηρήστε στον πίνακα τη σχέση του αριθμού των βιβλίων με την τιμή.
- Όταν η τιμή του βιβλίου γίνει διπλάσια, μπορώ να αγοράσω τον ίδιο αριθμό βιβλίων;
- Συζητήστε: Τι νομίζετε ότι ενδιαφέρει τα παιδιά για τη σχολική

βιβλιοθήκη: η ποσότητα ή οι ακριβές εκδόσεις;

Δραστηριότητα 2η

Ο Διευθυντής, κάθε καλοκαίρι, για να ετοιμάσει το Σχολείο για την καινούρια σχολική χρονιά φροντίζει για το βάψιμό του. Για να βαφεί όλο το Σχολείο χρειάζονται 12 μέρες δουλειά. Πέρυσι ο ελαιοχρωματιστής ήταν μόνος και πήρε 12 μεροκάματα. Επειδή όμως οι εργασίες πρέπει να έχουν τελειώσει πριν αρχίσουν τα μαθήματα, φέτος ο Διευθυντής ζήτησε από άλλα 3 συνεργεία (με περισσότερους εργάτες) μια εκτίμηση για τις μέρες που θα χρειαστούν για το βάψιμο. Τις απαντήσεις τους τις κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός εργατών του συνεργείου	1	2	3	4
Ημέρες εργασίας	12	6	4	3

- Παρατήρησε τη σχέση αριθμού των εργατών προς τις ημέρες που θα εργάζονται για το βάψιμο.
- Προσπάθησε να βρεις τα μεροκάματα που θα χρειαστούν σε κάθε περίπτωση.

Μεροκάματα για κάθε συνεργείο	$1 \cdot 12 = 12$			

- Τι παρατηρείς; ....
....
....

- Συζητήστε: **Αν έπρεπε να διαλέξετε εσείς, ποιο συνεργείο θα διαλέγατε;**

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές, όταν ένα ποσό αλλάζει, προκαλεί αντίστροφη αλλαγή σε ένα άλλο ποσό.

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Αντιστρόφως ανάλογα ή **αντίστροφα** λέγονται δύο ποσά, στα οποία, όταν πολλαπλασιάζεται η τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, η αντίστοιχη τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό.
Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα με έναν σταθερό αριθμό.

Παράδειγμα

Ο αριθμός των εργατών είναι αντιστρόφως ανάλογος προς τις ημέρες εργασίας για ένα συγκεκριμένο έργο.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός εργατών	1	2	3	4
Ημέρες εργασίας	12	6	4	3

Τα αντίστοιχα γινόμενά τους είναι ίσα: $1 \cdot 12 = 12$, $2 \cdot 6 = 12$, $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 3 = 12$

Εφαρμογή 1η

Εξετάσετε τα παρακάτω ζευγάρια ποσών, και υπογραμμίστε τα αντιστρόφως ανάλογα:

Αριθμός εργατών και χρόνος εκτέλεσης ενός έργου.

Ταχύτητα αυτοκινήτου και ώρες που ταξιδεύει για μια διαδρομή.

Άτομα και ποσότητα φαγητού που καταναλώνουν.
Κιλά και αξία σε οποιοδήποτε προϊόν.

Λύση:

Αριθμός εργατών και χρόνος εκτέλεσης ενός έργου. (Είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί με διπλάσιο αριθμό εργατών ο χρόνος εκτέλεσης ενός έργου μειώνεται στο μισό.)
Ταχύτητα αυτοκινήτου και ώρες που ταξιδεύει για μια διαδρομή. (Είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί με διπλάσια ταχύτητα οι ώρες που θα ταξιδεύει για να καλύψει μια διαδρομή μειώνονται στο μισό.)

Εφαρμογή 2η

Το ποσό που θα μοιράσει η ΛΟΤΤΑ-ΡΙΑ σ' αυτή την κλήρωση στους νικητές είναι 60.000 €. Πόσα θα είναι τα κέρδη του νικητή, αν είναι ένας; Πόσα θα είναι τα κέρδη του καθε-νός, αν οι νικητές είναι δύο; Αν είναι τρεις ή τέσσερις;

Λύση:

α. Τα ποσά στο πρόβλημα είναι: <u>Αριθμός νικητών</u>, <u>Κέρδη σε ΕΥΡΩ</u>.

β. Εξετάζω τη σχέση των ποσών μεταξύ τους (τι συμβαίνει στα κέρδη όσο αυξάνεται ο αριθμός των νικητών;).

γ. Παρατηρώ ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα

δ. Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών και συμπληρώνω τις τιμές.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός νικητών	1	2
Κέρδη σε €	60.000	…………

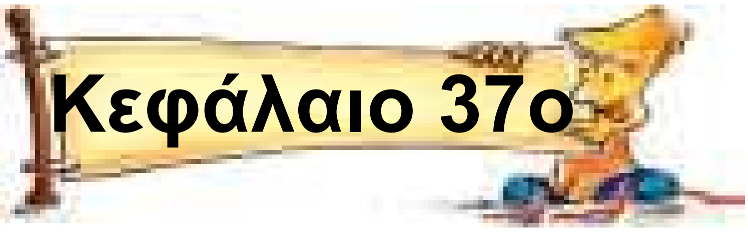
ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός νικητών	3	4
Κέρδη σε €	20.000	…………

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αντιστρόφως ανάλογα** ή **αντίστροφα ποσά.** Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Δύο ποσά που αυξάνονται ταυτόχρονα είναι αντιστρόφως ανάλογα.** ☐
- **Στα αντίστροφα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσα.** ☐



Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Παίρνοντας αποφάσεις!

→ Διακρίνω αν δύο ποσά είναι μεταξύ τους αντιστρόφως ανάλογα.

→ Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.

→ Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο των ίσων γινομένων.

Δραστηριότητα 1η

Το πρόγραμμα της παιδικής κατα-σκήνωσης προβλέπει ότι τα παιδιά θα τρώνε ένα παγωτό την ημέρα. Ο υπεύθυνος για το πρόγραμμα διατροφής της κατασκήνωσης, προμηθεύτηκε τόσα παγωτά, ώστε να επαρκέσουν για 20 ημέρες για τους 15 μαθητές που θα φιλοξενούσε η κατασκήνωση. Αν έρθουν 25 μαθητές για πόσες ημέρες θα έχουν παγωτό;

- Μπορώ να βρω εύκολα για πόσες ημέρες θα έχουν παγωτό τα 25 παιδιά;
- Αν στην κατασκήνωση, αντί για 15 παιδιά, πήγαινε **μόνο 1 παιδί**, μπορώ να υπολογίσω για πόσες μέρες θα είχε παγωτά (αν έτρωγε ένα την ημέρα);
- Με τον τρόπο αυτό βρίσκω πόσα είναι τα παγωτά. Στη συνέχεια μπορώ να βρω για πόσες ημέρες θα επαρκέσουν για τους 25 μαθητές.

• **Κάνω τις πράξεις: Αφού προβλεπόταν 15 παιδιά να έχουν παγωτά για 20 μέρες, 1 παιδί θα έχει παγωτά για ....**
Άρα τα παγωτά είναι ....
Όμως τα παιδιά είναι 25 και θα μοιραστούν τα παγωτά.
Έτσι θα έχουν παγωτά για ....
..

Δραστηριότητα 2η

• **Στο ίδιο πρόβλημα εργάζομαι με άλλο τρόπο:**

• **Βρίσκω τα ποσά. Μπορείς να τα ονομάσεις;**

• **Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε τα ποσά και τις αντίστοιχες τιμές που μας δίνει το πρόβλημα. Την άγνωστη τιμή τη συμβολίζω με x.**

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	

Εξετάζω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά αριθμός μαθητών και αριθμός ημερών… (δηλαδή όταν οι μαθητές γίνουν περισσότεροι, τα παγωτά επαρκούν για περισσότερες ή για λιγότερες ημέρες;) Διακρίνω, ότι τα ποσά αριθμός μαθητών και αριθμός ημερών είναι μεταξύ τους ………….

……………………………………………

Τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι ……………………………

Δηλαδή: …… • …… = …… • …..

- **Μπορείς τώρα να βρεις τον άγνωστο όρο αυτής της ισότητας;**

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να βρούμε την άγνωστη τιμή σε ένα πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά με δύο τρόπους:

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα με ποσά αντιστρόφως ανάλογα, βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με πολλαπλασιασμό) και στη συνέχεια διαιρώντας βρίσκω την άγνωστη τιμή, λέγεται αναγωγή στη μονάδα.

Παράδειγμα

Οι 3 εργάτες τελειώνουν ένα έργο σε 20 ημέρες. Σε πόσες ημέρες τελειώνουν το ίδιο έργο οι 10 εργάτες;

Λύση

Οι 3 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 20 ημέρες.

Ο 1 εργάτης τελειώνει το έργο σε $20 \cdot 3 = 60$ ημέρες

Οι 10 εργάτες τελειώνουν το έργο σε $60 : 10 = 6$ ημέρες

β) Σχηματίζοντας πίνακα ποσών και τιμών

Εργάζομαι ως εξής:

→ Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.

→ Εξετάζω αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

→ Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή. Σχηματίζω την εξίσωση που δημιουργείται από τα ίσα γινόμενα των τιμών.

→ Βρίσκω τον άγνωστο όρο, λύνοντας την εξίσωση.

Παράδειγμα

Στο προηγούμενο παράδειγμα εργαζόμαστε με πίνακα.
Φτιάχνουμε τον πίνακα ποσών και τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός εργατών	3	10
Ημέρες εργασίας	20	x

Τα ποσά αριθμός εργατών και ημέρες εργασίας είναι **αντιστρόφως ανάλογα** (ο διπλάσιος αριθμός εργατών τελειώνει το έργο στις μισές μέρες).
Άρα τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα.
Σχηματίζω τα γινόμενα και βρίσκω τον άγνωστο όρο.

$10 \cdot x = 20 \cdot 3$

$10 \cdot x = 60$ επομένως

$X = 60 : 10$ **Άρα x = 6 ημέρες**

Εφαρμογή

Τα 12 λεωφορεία για τη μεταφορά των μαθητών κάνουν 2 δρομολόγια. Τα 4 λεωφορεία χάλασαν. Πόσα δρομολόγια θα κάνουν τα 8 λεωφορεία που έμειναν;

Λύση:

α) με αναγωγή στη μονάδα:

Τα 12 λεωφορεία κάνουν 2 δρομολόγια

Το 1 λεωφορείο θα έκανε $12 \cdot 2 = 24$ δρομολόγια

Τα 8 λεωφορεία θα κάνουν $24 : 8 = 3$ δρομολόγια

β) με πίνακα τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός λεωφορείων	3	10
Δρομολόγια	20	x

Σχηματίζω την εξίσωση των ίσων γινόμενων: $8 \cdot x = 12 \cdot 2$
και τη λύνω $8 \cdot x = 24$
επομένως x = …… Άρα x = …..

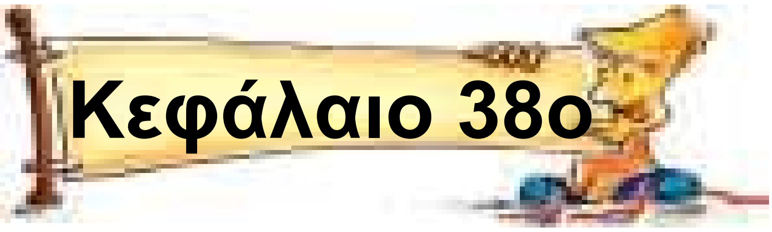
Απάντηση: Τα 8 λεωφορεία θα **κάνουν …… δρομολόγια.**

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο αναγωγή στη μονάδα σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- Αναγωγή στη μονάδα σημαίνει: βρίσκω την τιμή του ενός. ☐
- Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα. ☐
- Τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά έχουν πάντα ίσους λόγους. ☐



Η απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά

Η απλή μέθοδος των τριών!

Λύνω τα προβλήματα των ανάλογων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.

Δραστηριότητα

Τα παιδιά της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου της Αντιμάχειας στα πλαίσια ενός ευρωπαϊκού προγράμματος απέκτησαν φίλους σε ένα σχολείο στη Σκοτία. Αποφάσισαν να τους στείλουν 12 μουσικά CD με ελληνική μουσική. Στα μαγαζιά του νησιού τα 5 μουσικά CD κοστίζουν 30 €. Πόσα χρήματα θα χρειαστούν;

- **Ποια είναι τα ποσά;**

……………………………………………

- **Πως μεταβάλλονται;**

……………………………………………

- **Είναι τα ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα;**

……………………………………………

- **Αφού διακρίνω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά, προχωρώ στη λύση.**

Ξέρω να λύνω πρόβλημα ανάλογων ποσών σχηματίζοντας την αναλογία:

1ο βήμα: Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός CD	3	10
Αξία σε €	20	x

2ο βήμα: Σχηματίζω την αναλογία:

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{x}$$

3ο βήμα: Εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: ………………………………

4ο βήμα: Λύνω την εξίσωση:
x = ……………………………………
……………………………………………

Παρατηρώ την εξίσωση που σχημάτισα προηγουμένως

$x = 12 \cdot 30 : 5$ (ή $x = 12 \cdot \frac{30}{5}$)

και τη θέση των αριθμών στον πίνακα ποσών και τιμών. Διαπιστώνω ότι το άγνωστο ποσό (x) είναι ίσο με τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα που σχηματίζουν οι αριθμοί δίπλα του αλλά αντεστραμμένο:

$x = 12 \cdot \frac{30}{5}$

Στην παρατήρηση αυτή στηρίχθηκε

μια άλλη μέθοδος για να λύνουμε προβλήματα ποσών, όπου γνωρίζουμε τρεις τιμές και ψάχνουμε την τέταρτη. Η μέθοδος αυτή ονομάστηκε **απλή μέθοδος των τριών**.

Λύνω το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών:

1ο βήμα: Κάνω **κατάταξη** (τακτοποιώ τα ποσά, προσέχοντας τώρα να βάλω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

τα 5 CD κοστίζουν 30 €
τα 12 CD κοστίζουν x;

2ο βήμα: Ελέγχω ότι τα ποσά είναι ανάλογα

3ο βήμα: Εφαρμόζω και λύνω

$$x = 30 \cdot \frac{12}{5} \quad \text{δηλαδή } x = \frac{30 \cdot 12}{5}$$

$$\text{άρα } x = \frac{360}{5} \qquad \text{Άρα } x = 72\ €$$

Από την παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώνουμε ότι, για να λύσουμε προβλήματα ανάλογων ποσών, υπάρχει και μια τρίτη μέθοδος (εκτός από την αναγωγή στη μονά-δα και την αναλογία), η απλή μέθοδος των τριών.

Απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά

Για να βρω την άγνωστη τιμή σε προβλήματα ανάλογων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών, ακολουθώ τρία βήματα:

1ο βήμα: Κατάταξη (βάζω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

2ο βήμα: Σύγκριση ποσών (εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα)
3ο βήμα: Λύση (πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το x επί το κλάσμα των άλλων δύο αριθμών αντεστραμμένο)

Παραδείγματα

τα 3 τετράδια κοστίζουν 2 €
τα 27 τετράδια κοστίζουν x €;

$x = 2 \cdot \frac{27}{3}$ δηλαδή $x = \frac{2 \cdot 27}{3}$

άρα $x = \frac{54}{3}$ άρα $x = 18$ €

Εφαρμογή

Ο καυστήρας της κεντρικής θέρμανσης του σχολείου καταναλώνει 54 λίτρα πετρέλαιο σε 3 ώρες. Πόσες ώρες θα λειτουργεί το καλοριφέρ αν στη δεξαμενή υπάρχουν ακόμη 378 λίτρα πετρελαίου;

Λύση:

1ο βήμα: Κάνω την κατάταξη.

Σε 3 ώρες καίει 54 λίτρα
<u>Σε x ώρες καίει 378 λίτρα;</u>

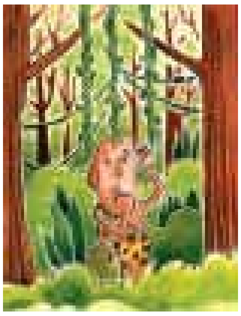
2ο βήμα: Εξετάζω τα ποσά. Είναι ανάλογα.

3ο βήμα: Λύνω το πρόβλημα.

$x = 3 \cdot \frac{378}{54}$ δηλαδή $x = \frac{3 \cdot 378}{54}$

άρα x = ——— άρα x = ….. ώρες

Απάντηση: Θα λειτουργεί για ……… ώρες.

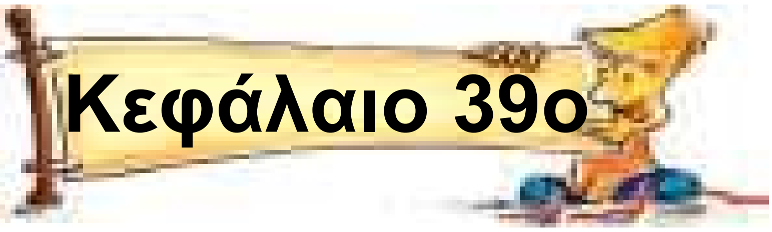


Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε την απλή μέθοδο των τριών σε ποσά ανάλογα. Μπορείς να την εξηγήσεις με δικά σου λόγια;

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- Τα προβλήματα των ανάλογων ποσών λύνονται μόνο με την «απλή μέθοδο». ☐
- Με όποια μέθοδο κι αν λύσω το πρόβλημα το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο. ☐
- Στην κατάταξη στην απλή μέθοδο των τριών προσέχω τα ποσά του ίδιου είδους να είναι σε στήλες. ☐



Η απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά

Είναι απλό όταν ξέρω τις τρεις τιμές!

Λύνω τα προβλήματα των αντίστροφων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.

Δραστηριότητα

Για να υδροδοτήσουν ένα νέο οικισμό, οι μηχανικοί της εταιρείας ύδρευσης υπολόγισαν ότι θα χρειαστούν 180 σωλήνες των 5 μέτρων. Στην αποθήκη της εταιρείας υπάρχουν μόνο σωλήνες των 3 μέτρων. Πόσους τέτοιους σωλήνες θα χρειαστούν;

• Για να καλύψουμε την ίδια απόσταση με μικρότερους σωλήνες θα χρειαστούμε περισσότερους ή λιγότερους; ....

• Είναι τα ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα;

• Αφού διερευνήσω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά, προχωρώ στη λύση.

Ξέρω να λύνω πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά σχηματίζοντας τον πίνακα τιμών και εφαρμόζοντας τα ίσα γινόμενα:

• Στον πίνακα ποσών και τιμών συμπληρώνω τις τιμές:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μήκος σωλήνα		
Ποσότητα σωλήνων		x

- **Εξετάζω τα γινόμενα των τιμών.**

Αυτά είναι: ………………………………….

- **Εφαρμόζω τα ίσα γινόμενα:**

…… **• x =** ……

- **Λύνω την εξίσωση: x =** ……………

………………………………………………

Λύνω το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών:

Όπως στα ανάλογα ποσά, έτσι και στα αντιστρόφως ανάλογα γνωρίζουμε τρεις τιμές και ψάχνουμε την τέταρτη. Η απλή μέθοδος των τριών που εφαρμόζεται στα προβλήματα με ανάλογα ποσά μπορεί να εφαρμοστεί και στα αντιστρόφως ανάλογα μετά την κατάταξη των ποσών του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο.

Με μια διαφορά:

Το άγνωστο ποσό το βρίσκουμε

πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα που σχηματίζουν οι αριθμοί δίπλα του όπως είναι (όχι αντεστραμμένο)

1ο βήμα: Κάνω κατάταξη (τακτο-ποιώ τα ποσά, προσέχοντας τώρα να βάλω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

όταν το μήκος του σωλήνα είναι:

5 μέτρα χρειάζονται 180 σωλήνες
3 μέτρα χρειάζονται x σωλήνες;

2ο βήμα: Ελέγχω τα ποσά και διακρίνω ότι είναι αντιστρόφως ανάλογα

3ο βήμα: Λύνω $x = 180 \cdot \frac{5}{3}$

δηλαδή $x = \frac{180 \cdot 5}{3}$ άρα $x = \frac{900}{3}$

άρα $x = 300$

Από την παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώνουμε ότι, για να λύσουμε προβλήματα αντίστροφων ποσών, υπάρχει και μια τρίτη μέθοδος (εκτός από την αναγωγή στη μονάδα και τον πίνακα ποσών και τιμών), η απλή μέθοδος των τριών.

Απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά

Για να βρω την άγνωστη τιμή σε προβλήματα αντιστρόφως ανά-λογων ποσών με την **απλή μέθοδο των τριών**, ακολουθώ τρία βήματα:

1ο βήμα: Κατάταξη (βάζω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)
2ο βήμα: Σύγκριση ποσών (εξετά-ζω αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα)

3ο βήμα: Λύση (πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το x επί το κλάσμα των άλλων δύο αριθμών)

Παραδείγματα

οι 3 εργάτες τελειώνουν σε 6 ημ.
οι 9 εργάτες τελειώνουν σε x ημ.;

$x = 6 \cdot \frac{3}{9}$ δηλαδή $x = \frac{6 \cdot 3}{9}$

άρα $x = \frac{18}{9}$ άρα $x = 2$ ημέρες

Δεν πρέπει να ξεχνώ στο τέλος να ελέγχω την απάντηση. Αφού τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, οι περισσότεροι εργάτες χρειάζονται λιγότερες μέρες. Αυτό που βρήκα είναι λογικό;

Εφαρμογή

Για να καλύψουν το πάτωμα του γυμναστηρίου με σανίδες, οι τεχνίτες υπολόγισαν ότι θα χρειαστούν 180 σανίδες μήκους 2,5 μέτρων. Τι ποσότητα θα πρέπει να αγοράσουν, αν χρησιμοποιήσουν σανίδες μήκους 2 μέτρων (και ίδιου πλάτους);

Λύση:

1ο βήμα: Κάνω την κατάταξη

όταν το μήκος των σανίδων

είναι …… χρειάζονται ……………..

<u>είναι …… χρειάζονται x σανίδες;</u>

2ο βήμα: Εξετάζω τα ποσά:

……………………………………………

……………………………………………

3ο βήμα: Λύνω το πρόβλημα
x = ...
....
....

Ελέγχω: Με μικρότερες σανίδες θα χρειαστούν περισσότερες από 180 ή λιγότερες;

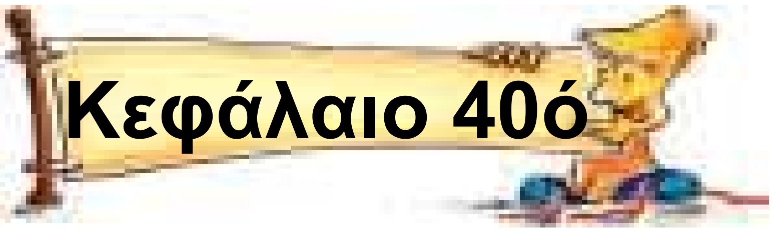
Απάντηση: Θα χρειαστούν …… σανίδες.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε την **απλή μέθοδο των τριών σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα**. Μπορείς να την εξηγήσεις με δικά σου λόγια;

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Τα προβλήματα των αντί-στροφων ποσών λύνονται με τρεις τρόπους.** ☐
- **Στα αντίστροφα ποσά, για να βρω το Χ πολλαπλασιάζω τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα των άλλων δύο αντεστραμμένο.** ☐
- **Στην κατάταξη προσέχω τα ποσά του ίδιου είδους να είναι σε στήλες.** ☐



Εκτιμώ το ποσοστό

Συγκρίνω (πο)σωστά %

→ Κατανοώ ότι ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτού.

→ Μετατρέπω τα κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100.

→ Αντιλαμβάνομαι το σύνολο ως το 100% και εκτιμώ το ποσοστό.

Δραστηριότητα 1η

Η Ε΄ και η Στ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου Θυμιανών συμμετείχαν στη δενδροφύτευση που οργά νωσε ο δήμος Χίου με σκοπό να αναδασώσει τις καμένες εκτάσεις στο νησί. Τα παιδιά της Ε΄ τάξης φύτεψαν 25 δεντράκια, από τα οποία φύτρωσαν τα 20. Τα παιδιά της Στ΄ τάξης φύτεψαν 50 δέντρα, από τα οποία φύτρωσαν τα 30. Ποια τάξη είχε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας στη δενδροφύτευση;

- Για να απαντήσουμε στην ερώτηση τι πρέπει να λάβουμε υπόψη;
- Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας είχε η τάξη της οποίας φύτρωσαν περισσότερα δέντρα; Εξηγήστε γιατί.

Δραστηριότητα 2η

Στον αγώνα μπάσκετ της Στ΄ τάξης μεταξύ του 21ου και του 109ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, το τελικό σκορ ήταν 57 – 61. Οι δυο καλύτεροι παίκτες των δύο ομάδων ήταν ο Αχιλλέας Ι. κι ο Σωτήρης Κ. Ο Αχιλλέας πέτυχε 17 καλάθια στις 25 προσπάθειες ενώ ο Σωτήρης πέτυχε 16 καλάθια στα 20. Ποιος είχε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

- Μπορείς εύκολα συγκρίνοντας τις επιτυχημένες βολές των δύο παικτών να αποφασίσεις ποιος ήταν καλύτερος παίκτης;

……………………………………………

……………………………………………

- Σχημάτισε τους λόγους επιτυχιών προς προσπάθειες για κάθε παίκτη.

$$\text{Αχιλλέας} = \frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}} = \frac{\quad}{\quad} \quad \text{και}$$

$$\text{Σωτήρης} = \frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}} = \frac{\quad}{\quad}$$

- **Γιατί δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τους παραπάνω λόγους εύκολα;**

……………………………………………

- **Προσπάθησε να κάνεις τους λόγους ομώνυμα κλάσματα:**

——— , ———

- **Είναι εύκολο να συμπεράνεις τώρα ποιος είχε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;**

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ένας εύκολος και κοινός τρόπος σύγκρισης του μέρους προς το σύνολο είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα κλάσμα με παρονομαστή το 100.

Ποσοστά

Ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτού (ο λόγος του μέρους προς όλο το ποσό).

Παράδειγμα

Το τεστ στα Αγγλικά είχε 20 ερωτήσεις.
Μαργαρίτα: Είχα ποσοστό επιτυχίας 19 στα 20 (19/20)
Βασίλης: Είχα ποσοστό επιτυχίας 17 στα 20 (17/20)

Όταν το μέρος ενός ποσού το μετατρέψουμε σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 100, τότε λέμε ότι έχουμε ποσοστό στα 100.
Το ποσοστό $\frac{α}{100}$ το συμβολίζουμε α %.

Παράδειγμα

Η δασκάλα τους ανακοινώνει τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στα 100:

- Μαργαρίτα, είχες 95%.

- Βασίλη, εσύ είχες 85%.

Για μικρό μέρος μεγάλου ποσού χρησιμοποιούμε κλάσμα με παρονομαστή το 1.000 και το λέμε ποσοστό στα χίλια (‰).

Εφαρμογή 1η

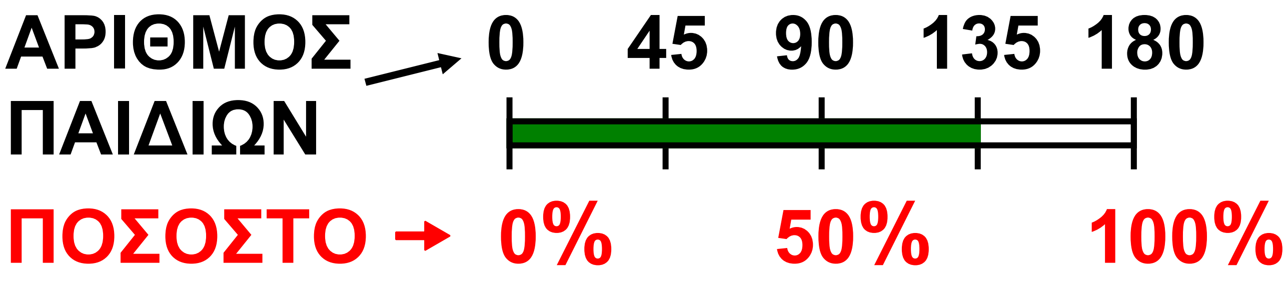
Υπολογισμός ποσοστού με το νου

Μετά την επίσκεψη του σχολείου στον κινηματογράφο τα παιδιά έκαναν μια μικρή έρευνα για το αν άρεσε η ταινία. Από τα 180 παιδιά τα 135 απάντησαν ότι τους άρεσε. Πόσο ήταν το ποσοστό στα 100 (%)

των παιδιών στα οποία άρεσε η ταινία;

Λύση - Απάντηση:

Σκέφτομαι ότι τα 180 παιδιά είναι το 100% αυτών που ρωτήθηκαν. Υπολογίζω με το νου ότι τα μισά, δηλαδή τα 90, είναι το 50% και τα μισά από αυτά, δηλαδή τα 45, είναι το 25%. Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να χρωματίσουμε μέχρι τον αριθμό 135 και να συμπληρώσουμε το αντίστοιχο ποσοστό.



Εφαρμογή 2η

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται η αρχική τιμή ενός προϊόντος, που είναι 400 € και 3 τελικές τιμές από τις οποίες καθεμία προκύπτει μετά την έκπτωση. Μπορείς να υπολογίσεις με το νου πόσο στα 100 (%) είναι η έκπτωση σε κάθε περίπτωση;

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΚΠΤΩΣΗΣ (%)	ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ
400		200
400		300
400		350

Λύση: Τα 400 € είναι το 100% της τιμής. Τα μισά (200 €) είναι το 50% της τιμής. Άρα, όταν η τελική τιμή είναι 200 €, το ποσοστό της έκπτωσης είναι 50%. Τα 100 €

αντιστοιχούν στο $\frac{1}{4}$ των 400 €, δηλαδή στο 25%.

Στη β΄ περίπτωση πληρώνουμε 100 € λιγότερα από την αρχική τιμή. Άρα το ποσοστό της έκπτωσης είναι 25%.

Με την ίδια λογική στη γ΄ περίπτωση τα 50 € λιγότερα που πληρώνουμε είναι το $\frac{1}{8}$ των 400 € (το μισό του 25%). Άρα το ποσοστό της έκπτωσης είναι 12,5%.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο ποσοστό. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- **Το ποσοστό είναι ένας λόγος.** ☐
- **Τα ποσοστά τα χρησιμοποιούμε μόνο για εκπτώσεις.** ☐

Περιεχόμενα του 3ου τόμου

2η Θεματική Ενότητα

(συνέχεια από τον 2ο τόμο)

3η Θεματική Ενότητα