

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**ΜΕΡΟΣ Β΄
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Τόμος 1ος**

**Γ' Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1 /
Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:**

**«Αναμόρφωση των προγραμμάτων
σπουδών και συγγραφή νέων
εκπαιδευτικών πακέτων»**

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος

Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ

Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

**Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων
βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού
εκπαιδευτικού υλικού με βάση το
ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»**

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου

Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου

Γεώργιος Κ. Παληός

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου

Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

**Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από
το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και**

25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ιωάννης Βανδουλάκης, *Μαθημ/κός
Χαράλαμπος Καλλιγιάς, Μαθημ/κός-
Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης
Νικηφόρος Μαρκάκης, Μαθημ/κός
Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπ/σης
Σπύρος Φερεντίνος, Σχολικός
Σύμβουλος Μαθηματικών*

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Χαράλαμπος Τσίτουρας,
Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ - Χαλκίδας
Γεώργιος Μπαραλός, Σχολικός
Σύμβουλος Μαθηματικών
Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου,
Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Κλειώ Γκιζελή, Ζωγράφος
Ιόλη Κυρούση, Γραφίστρια

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Βαρβάρα Δερνελή, Φιλολόγος
Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπ/σης

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ
ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Αθανάσιος Σκούρας,
Σύμβουλος Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ
Μανώλης Χάρος, Ζωγράφος

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

**Στη συγγραφή του πρώτου μέρους
(1/3) έλαβε μέρος και η Θεοδώρα
Αστέρη, *Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και
75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος**

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**ΜΕΡΟΣ Β΄
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Τόμος 1ος**

Βασικές Γεωμετρικές έννοιες

ΜΕΡΟΣ Β΄

1ο

Κ
Ε
Φ
Α
Λ
Α
Ι
Ο



ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ
(330 – 270 π.Χ.)

1.1. Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο

- Σχεδιάζω και συμβολίζω επίπεδα, σημεία, ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα, ημιευθείες και ημιεπίπεδα
- Διακρίνω τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από δύο σημεία και σε ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία
- Γνωρίζω ότι από δύο σημεία διέρχεται μία μοναδική ευθεία, ενώ από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες
- Γνωρίζω ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα

1.2. Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα

- Κατανοώ την έννοια της γωνίας και σχεδιάζω, συμβολίζω και διαβάζω γωνίες**
- Γνωρίζω τα είδη των γραμμών και διακρίνω τις κυρτές από τις μη κυρτές πολυγωνικές γραμμές**
- Γνωρίζω την έννοια του ευθυγράμμου σχήματος και διακρίνω το κυρτό από το μη κυρτό ευθύγραμμο σχήμα**
- Γνωρίζω ότι δύο ευθύγραμμα οχήματα είναι ίσα αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο**

1.3. Μέτρηση σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθυγράμμου τμήματος

- Γνωρίζω ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει συγκεκριμένο μήκος και το υπολογίζω**
- Γνωρίζω τις μονάδες μέτρησης μήκους στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τον συμβολισμό τους και τις μεταξύ τους σχέσεις**
- Γνωρίζω ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν ίσα μήκη και συγκρίνω ευθύγραμμα τμήματα με το χάρακα και με το διαβήτη**
- Κατασκευάζω τμήμα δοθέντος μήκους με αρχή γνωστό σημείο πάνω σε γνωστή ευθεία και να βρίσκω την απόσταση σημείων με χάρακα**

- Γνωρίζω ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο και το προσδιορίσω με τη βοήθεια του χάρακα
- Βρίσκω το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος με το χάρακα
- Γνωρίζω ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι η μικρότερη σε μήκος γραμμή από όλες τις γραμμές που συνδέουν τα σημεία A και B

1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

- Μπορώ να προσθέτω και να αφαιρώ ευθύγραμμα τμήματα

1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας

- Γνωρίζω ότι κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο, το υπολογίζω και γνωρίζω ότι αυτό εξαρτάται μόνο από το «άνοιγμα» των πλευρών της

- **Γνωρίζω τη βασική μονάδα μέτρησης γωνιών και υπολογίζω με μοιρογνωμόνιο το μέτρο τους**
- **Συγκρίνω γωνίες με διαφανές χαρτί ή με μοιρογνωμόνιο και γνωρίζω ότι δύο γωνίες είναι ίσες αν και μόνο αν έχουν το ίδιο μέτρο**
- **Σχεδιάζω γωνίες όταν γνωρίζω το μέτρο τους**
- **Γνωρίζω τι είναι η διχοτόμος μιας γωνίας, ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο και τη σχεδιάζω**

1.6. Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

- **Γνωρίζω και σχεδιάζω διάφορα είδη γωνιών (οξεία, ορθή, αμβλεία)**
- **Διαπιστώνω με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου αν μια γωνία είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία και τότε δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους**

- **Γνωρίζω ότι από ένα σημείο άγεται μία και μόνο κάθετη σε μία ευθεία και την χαράσσω με την βοήθεια του μοιρογνωμονίου ή του γνώμονα**

1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών

- **Γνωρίζω και σχεδιάζω εφεξής γωνίες και υπολογίζω το άθροισμα δύο ή και περισσότερων γωνιών**

1.8. Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες

- **Γνωρίζω τότε δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές και τότε συμπληρωματικές**

- Γνωρίζω ότι, όταν οι μη κοινές πλευρές δύο εφεξής γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες, οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και αντιστρόφως
- Γνωρίζω ότι, όταν οι μη κοινές πλευρές δύο εφεξής γωνιών είναι κάθετες ημιευθείες, οι γωνίες είναι συμπληρωματικές και αντιστρόφως
- Υπολογίζω και σχεδιάζω τη παραπληρωματική και τη συμπληρωματική μιας γωνίας
- Γνωρίζω τότε δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες και σχεδιάζω δύο κατακορυφήν γωνίες

1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

- Γνωρίζω πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες και ότι αν δύο ευθείες είναι κάθετες σε μία τρίτη, τότε θα είναι μεταξύ τους παράλληλες
- Γνωρίζω ότι από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται μία και μόνο μία ευθεία παράλληλη προς αυτήν και τη χάρασσω με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου ή του γνώμονα

1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων

- Κατανοώ τι σημαίνει απόσταση σημείου από ευθεία και την υπολογίζω με τη βοήθεια του γνώμονα και του χάρακα
- Κατανοώ τι σημαίνει απόσταση δύο παραλλήλων και την υπολογίζω με τη βοήθεια του γνώμονα και του χάρακα

1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

- *Κατανοώ την έννοια του κύκλου, αναγνωρίζω τα στοιχεία του και τον σχεδιάζω*
- *Διακρίνω τον κύκλο από τον κυκλικό δίσκο και σχεδιάζω με κανόνα και διαβήτη ένα τρίγωνο, όταν δίνονται οι τρεις πλευρές του*

1.12. Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντιστοίχου τόξου – Μέτρηση τόξου

- *Γνωρίζω ότι ως μέτρο ενός τόξου ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας και ότι στον ίδιο κύκλο (ή σε ίσους κύκλους), ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα και αντιστρόφως*

- **Κατασκευάζω, με κανόνα και διαβήτη, γωνία ίση με δεδομένη και σχεδιάζω με κανόνα και διαβήτη ένα τρίγωνο όταν δίνονται: (α) δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία και (β) μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες**

1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

- **Διακρίνω αν μία ευθεία είναι τέμνουσα ή εφαπτομένη του κύκλου και σχεδιάζω την εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του**

B.1.1. Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο

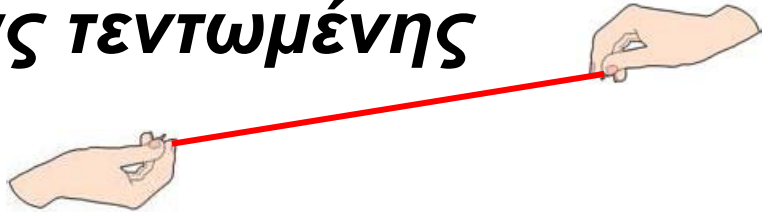
Στο Δημοτικό μάθαμε τις βασικές γεωμετρικές έννοιες όπως σημείο, ευθεία, επίπεδο και γνωρίσαμε τα απλά γεωμετρικά σχήματα όπως τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και κύκλο.

Τώρα αφού ξαναθυμηθούμε αυτές τις έννοιες και τα σχήματα, μπορούμε να αναζητήσουμε περισσότερα χαρακτηριστικά τους στοιχεία, να ανακαλύψουμε τις ιδιότητές τους και να προχωρήσουμε σε ποιο σύνθετα σχήματα. Έτσι θα ασκήσουμε περισσότερο την παρατηρητικότητά μας, θα βελτιώσουμε την αντίληψη και θα οργανώσουμε καλύτερα τις σκέψεις. Ας αρχίσουμε λοιπόν.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Πώς μπορείς να ονομάσεις το σχήμα μιας τεντωμένης κλωστής;



Το σχήμα που φαίνεται πιο κάτω αποτελείται από μερικά σημεία το ένα δίπλα στο άλλο.



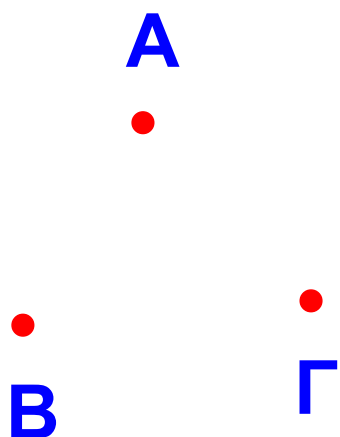
➤ **Μπορείς να το χαρακτηρίσεις με το ίδιο τρόπο; Κι αν όχι, γιατί;**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

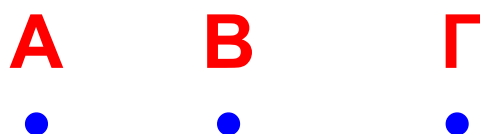
Δίνονται τρία διαφορετικά σημεία A, B και Γ. Ένωσέ τα με ευθύγραμμα τμήματα, ανά δύο, και δώσε ονομασία σε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται.

➤ **Τι παρατηρείς;**

1η περίπτωση



2η περίπτωση



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



Το σημείο

• Η άκρη του μολυβιού μας, οι κορυφές ενός σχήματος, η μύτη μιας βελόνας, μας δίνουν την έννοια του σημείου.



Το ευθύγραμμο τμήμα

• Μία τεντωμένη κλωστή με άκρα A και B μας δίνει μια εικόνα της έννοιας του ευθύγραμμου τμήματος AB.

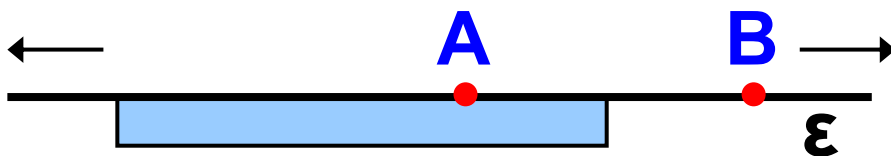


- Τα σημεία A και B είναι τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.
- Λέμε ότι τα σημεία A και B ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα AB
- ◆ Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα, συνδέοντας δύο σημεία A και B, με τη βοήθεια ενός χάρακα (“κανόνα”).



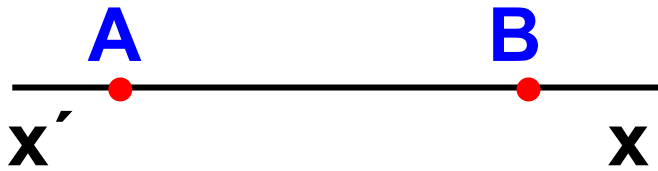
Η ευθεία

- Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB, τότε το νέο σχήμα, που δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος, λέγεται ευθεία.



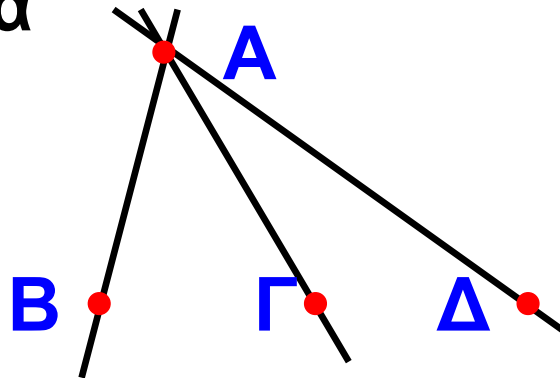
- ◆ Συμβολίζουμε μια ευθεία με ένα μικρό γράμμα από τα αρχικά του

αλφαβήτου, π.χ. (ε), ή με δύο μικρά γράμματα από τα τελευταία του αλφαβήτου π.χ. $x'x$, $y'y$.



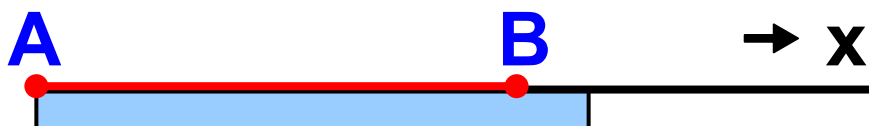
▶ Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.

▶ Από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία.



Η ημιευθεία

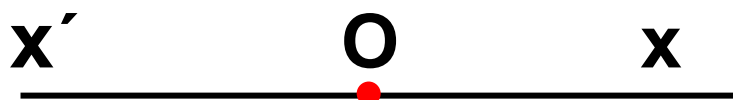
• Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το B , τότε το νέο σχήμα, που έχει αρχή το A αλλά δεν έχει τέλος, λέγεται ημιευθεία.



◆ Η ημιευθεία συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα που δηλώνει την αρχή της και ένα μικρό από τα τελευταία γράμματα, π.χ. Ax , $B\gamma$ κ.λπ.



► Εάν O είναι ένα σημείο της ευθείας $x'x$, τότε με αρχή το O ορίζονται δύο ημιευθείες Ox και Ox' , οι οποίες λέγονται αντικείμενες ημιευθείες.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Έχεις ακούσει εκφράσεις όπως:
“Στο επίπεδο του ορίζοντα φαίνεται να χάνεται ο δρόμος”. “Οι χώρες της Δύσης έχουν υψηλό επίπεδο

ανάπτυξης”. “Η επίπεδη οθόνη είναι καλύτερη από την κυρτή”. “Οι σχέσεις τους βρίσκονται σε καλό επίπεδο”. “Η επιφάνεια του εδάφους στην περιοχή αυτή είναι επίπεδη”.

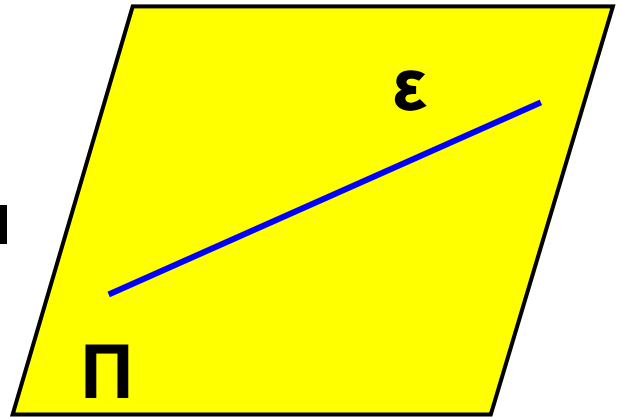


Αλλά και στον υλικό κόσμο, που βρίσκεται γύρω μας, μπορείς να δεις και να αναγνωρίσεις πολλές επίπεδες επιφάνειες. Τους τοίχους της τάξης, την οροφή του δωματίου, ένα κάδρο, την πίστα προσγείωσης, την επιφάνεια του ήρεμου νερού, τον ισημερινό της Γης.

➤ Ποιο χαρακτηριστικό ή ονομασία μπορείς να δώσεις σε μια τέτοια επιφάνεια;

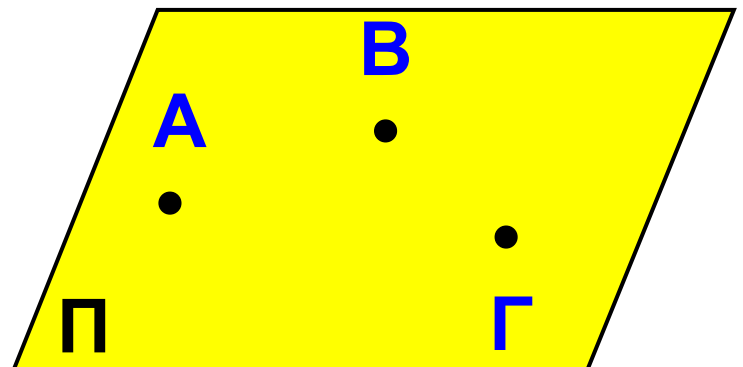
Το επίπεδο

• Επίπεδο είναι μια επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.



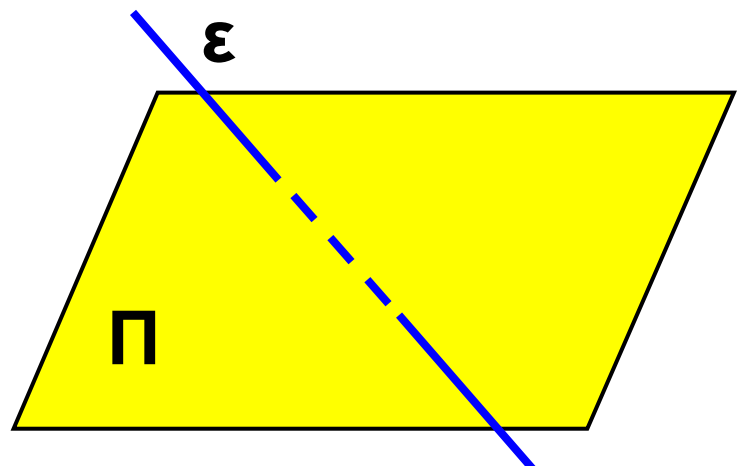
▶ Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.

▶ Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό



επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.

▶ Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη, ώστε, αν θέλουμε

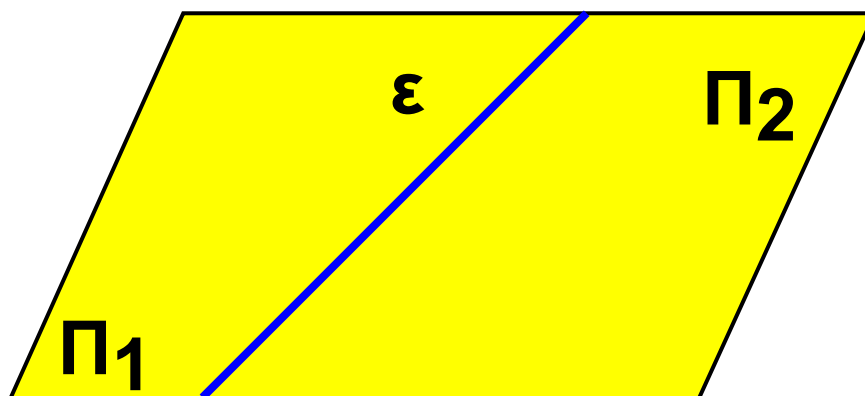


να περάσουμε από το ένα μέρος του χώρου στο άλλο, πρέπει να διαπεράσουμε το επίπεδο.

◆ Η ονομασία του επιπέδου δίνεται με ένα κεφαλαίο γράμμα του αλφάβητου π.χ. Π, Ρ, Σ κ.λπ.

Το ημιεπίπεδο

• Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο ημιεπίπεδα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

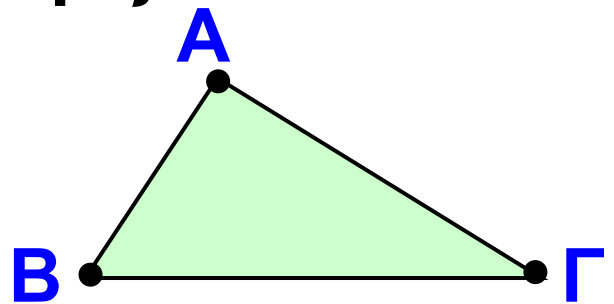
1. Ας πάρουμε από τα γνωστά μας σχήματα το τρίγωνο, με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ και το τετράπλευρο, με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και

ας δούμε, ποια ονομασία έχουν τα ευθύγραμμα τμήματα που βλέπουμε στα σχήματα αυτά.

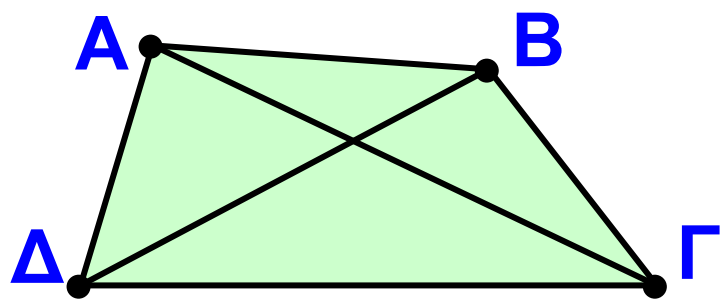


Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ που ορίζονται από δύο κορυφές, λέγονται πλευρές του τριγώνου.



Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έχει πλευρές τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ που ορίζονται από διαδοχικές κορυφές.



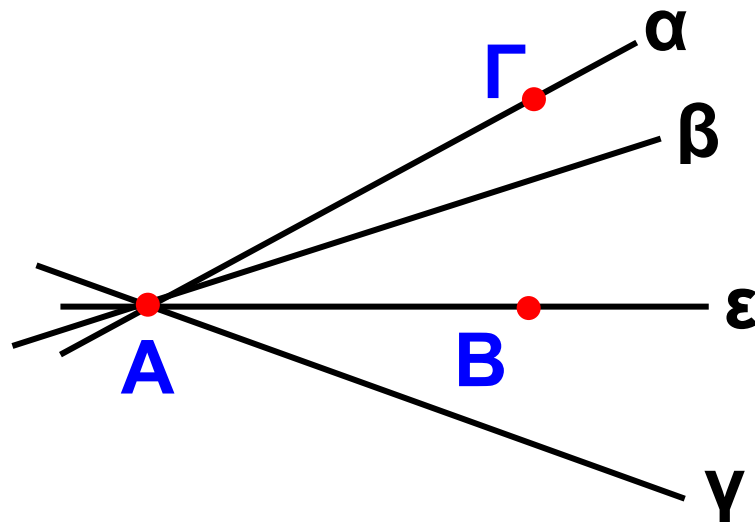
Τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ, που ορίζονται από μη διαδοχικές κορυφές, λέγονται διαγώνιες του τετραπλεύρου.

2. Έστω τρία σημεία A , B και Γ που δεν ανήκουν και τα τρία σε μια ευθεία. Πόσες ευθείες περνούν από το A ; Πόσες από τις ευθείες αυτές περνούν από το B ; Το Γ είναι σημείο της ευθείας AB ;

Λύση

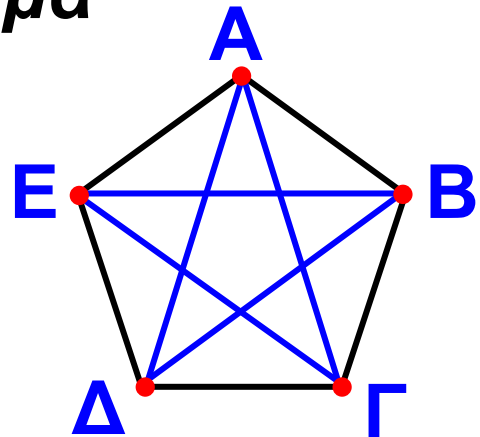
Από το A διέρχονται άπειρες ευθείες. Μια από αυτές περνάει και από το B .

Επειδή τα σημεία A , B και Γ δεν ανήκουν και τα τρία σε μια ευθεία, το σημείο Γ δεν μπορεί να είναι σημείο της ευθείας AB .



3. Στο σχήμα φαίνονται πέντε σημεία, τα A, B, Γ, Δ και E . Να χαράξετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, που έχουν άκρα τα σημεία αυτά. Πόσα διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα είναι;

Λύση



Κάθε σημείο είναι άκρο ενός από τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα, που το συνδέουν με τα υπόλοιπα τέσσερα σημεία. Επομένως:

Το σημείο A είναι άκρο των τμημάτων: $AB, A\Gamma, A\Delta, AE$

Το σημείο B είναι άκρο των τμημάτων: $BA, B\Gamma, B\Delta, BE$

Το σημείο Γ είναι άκρο των τμημάτων: $\Gamma A, \Gamma B, \Gamma\Delta, \Gamma E$

Το σημείο Δ είναι άκρο των τμημάτων: $\Delta A, \Delta B, \Delta\Gamma, \Delta E$

Το σημείο E είναι άκρο των τμημάτων: EA, EB, EG, ED

Στα παραπάνω, κάθε τμήμα εμφανίζεται δύο φορές π.χ. το AB και BA , αφού το τμήμα έχει δύο άκρα. Έτσι, στο σχήμα, δεν είναι είκοσι (20) διαφορετικά τμήματα, αλλά δέκα (10) τα: $AB, AG, AD, AE, BG, BD, BE, GD, GE, DE$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:



(α) Ένα ευθύγραμμο τμήμα αποτελείται από τα άκρα του A και B αλλά και τα σημεία που βρίσκονται ανάμεσα σ' αυτά τα δύο.

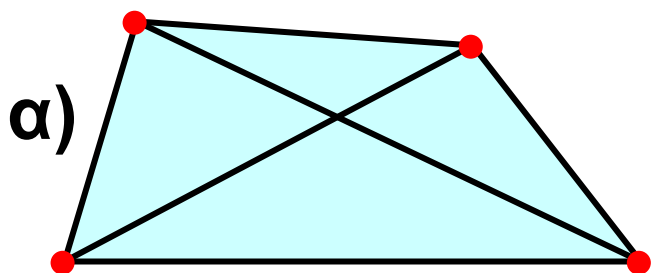
(β) Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB πέρα από τα δύο άκρα του, A και B , παίρνουμε το σχήμα που λέγεται

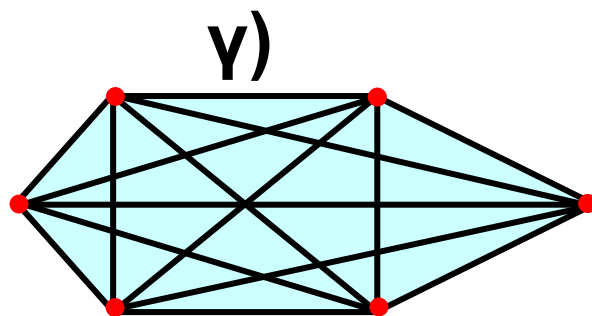
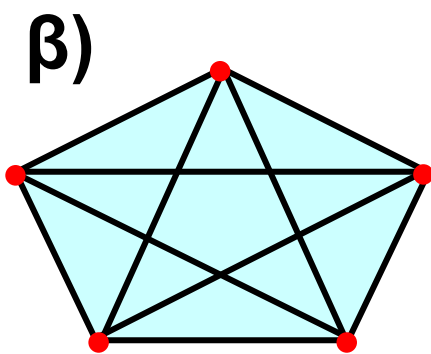
(γ) Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το B , παίρνουμε το σχήμα που λέγεται

(δ) λέγονται δύο ημιευθείες που έχουν κοινή αρχή και που οι δύο μαζί αποτελούν μία ευθεία.

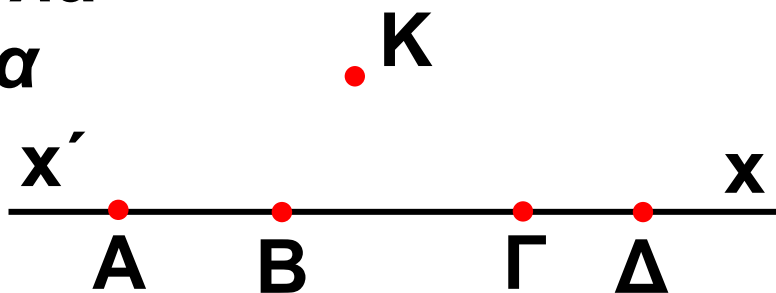
(ε) Η επιφάνεια, πάνω στην οποία η απεριόριστη ευθεία γραμμή εφαρμόζει παντού ολόκληρη είναι το

2. Να δώσεις δική σου ονομασία σε όλα (α) τα σημεία και (β) τα ευθύγραμμα τμήματα των παρακάτω ευθυγράμμων σχημάτων.

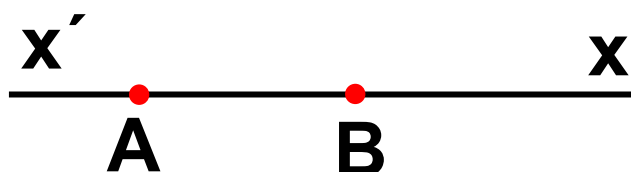




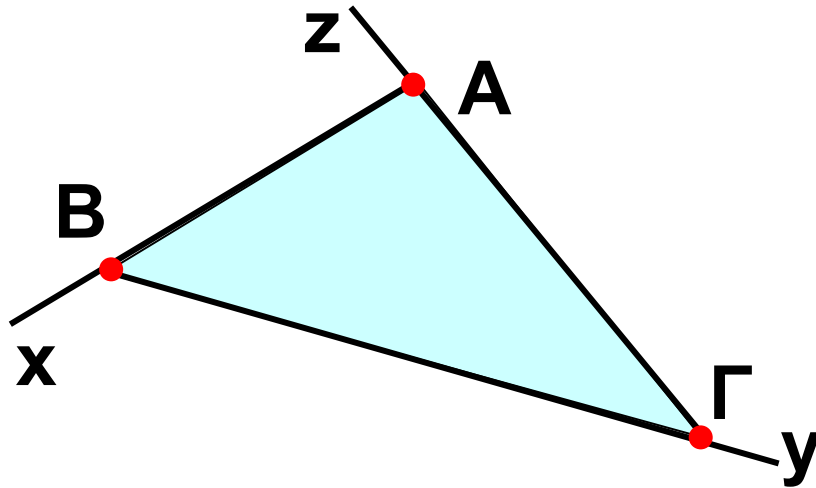
3. Πάρε τα σημεία A, B, Γ, Δ πάνω σε μια ευθεία και ένα σημείο K που δεν βρίσκεται στην παραπάνω ευθεία. Ένωσε το K με τα A, B, Γ, Δ και ονόμασε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος.



4. Πάνω σε μια ευθεία $x'x$ παίρνουμε δύο σημεία A και B . Ονόμασε τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το A και τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το B .



5. Στο παρακάτω σχήμα χάραξε τις αντικείμενες ημιευθείες των ημιευθειών ABx , $B\Gamma y$ και ΓAz .



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Σχεδίασε ένα πολύγωνο που να έχει: (α) λιγότερες διαγώνιες από πλευρές, (β) ίδιο αριθμό διαγωνίων και πλευρών, (γ) περισσότερες διαγώνιες από πλευρές.

2. Στο χάρτη της επόμενης σελίδας φαίνονται έξι (6) πόλεις της Ελλάδας, που δε βρίσκονται ανά τρεις στην ίδια ευθεία:



Α (Αλεξανδρούπολη), Ρ (Ρόδος), Η (Ηράκλειο), Χ (Χανιά), Κ (Κέρκυρα) και Θ (Θεσσαλονίκη). Μπορείς να σχεδιάσεις τις απ' ευθείας αεροπορικές συνδέσεις μεταξύ των πόλεων αυτών; Ονόμασε τις συνδέσεις αυτές χρησιμοποιώντας τα γράμματα των πόλεων. Μπορείς να βρεις πόσες τέτοιες συνδέσεις υπάρχουν, δικαιολογώντας κατάλληλα την απάντησή σου;

Β.1.2. Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

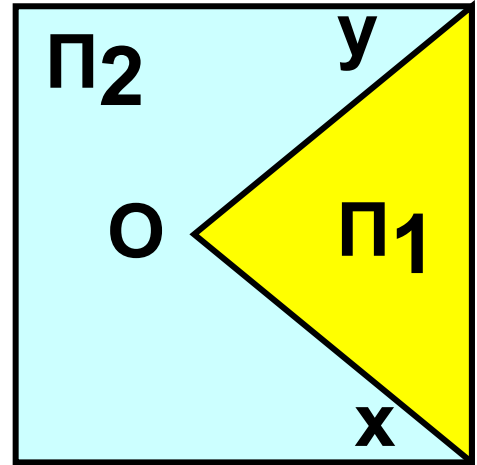
Γύρω μας υπάρχουν διαφόρων ειδών γωνίες, μερικές από τις οποίες βλέπουμε στις παρακάτω εικόνες. Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν;

Προσπάθησε να τις περιγράψεις, χωρίς να σε επηρεάζει η υλική τους υπόσταση.



Ορίζοντας την γωνία

Σχεδιάζουμε σ' ένα φύλλο χαρτί δύο ημιευθείες Ox και Oy , με κοινή αρχή το σημείο O . Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές Π_1 και Π_2 .

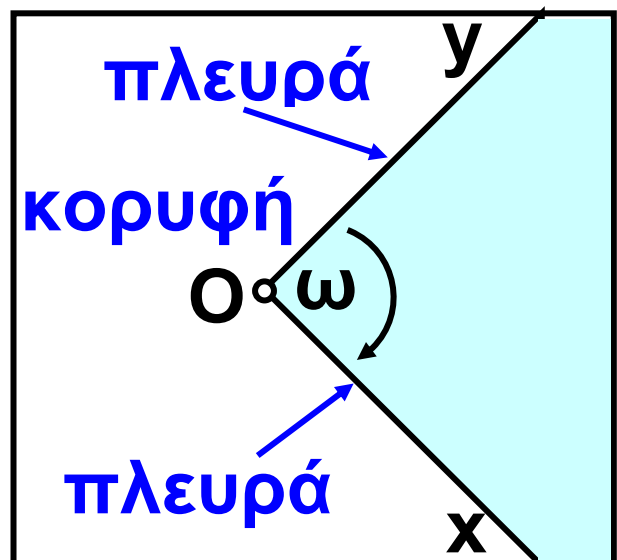


- Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες Ox και Oy ονομάζεται γωνία.



- Η “μικρότερη” (Π_1) λέγεται κυρτή και η άλλη (Π_2) μη κυρτή.

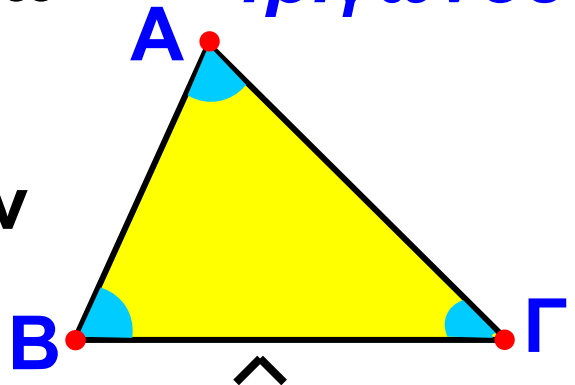
- Το σημείο O λέγεται κορυφή της γωνίας και οι ημιευθείες Ox και Oy λέγονται πλευρές της γωνίας.



Τις γωνίες που σχηματίζονται τις συμβολίζουμε \hat{xOy} ή \hat{yOx} (το γράμμα της κορυφής O γράφεται πάντα στη μέση) ή με ένα μικρό γράμμα, π.χ. " $\hat{\omega}$ ".

*Γωνίες
τριγώνου*

◆ Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει τρεις γωνίες, την \hat{A} , τη \hat{B} και τη $\hat{\Gamma}$.



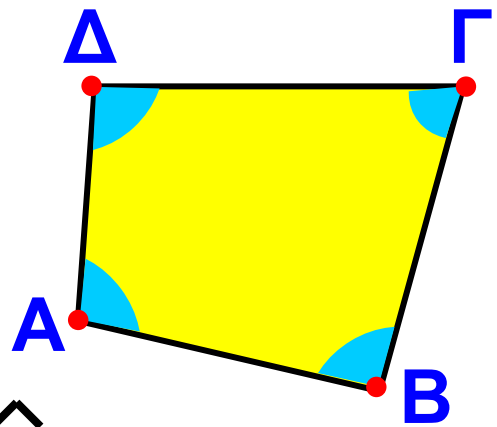
◆ Όταν λέμε, π.χ. η γωνία \hat{A} του τριγώνου $AB\Gamma$, εννοούμε τη γωνία που έχει πλευρές τις ημιευθείες AB , $A\Gamma$ και περιέχει το τρίγωνο.

◆ Η γωνία \hat{A} λέμε ότι περιέχεται μεταξύ των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου.

◆ Ακόμα λέμε ότι η πλευρά $B\Gamma$ είναι απέναντι στη γωνία \hat{A} , ενώ οι γωνίες \hat{B} και $\hat{\Gamma}$ είναι προσκειμένες της πλευράς $B\Gamma$.

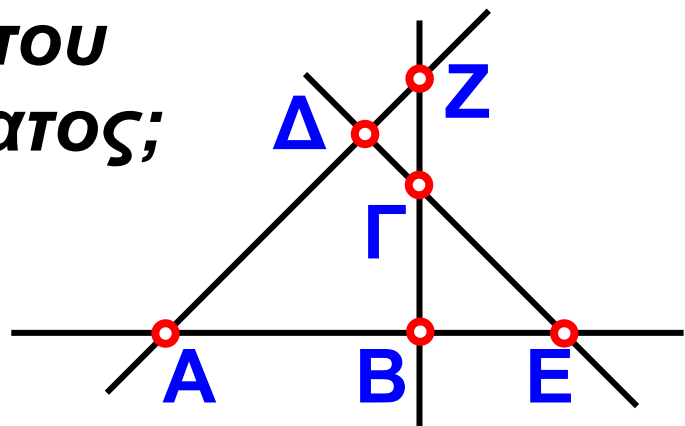
◆ Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τέσσερις γωνίες, που καθεμιά τους περιέχει το τετράπλευρο. Οι γωνίες αυτές είναι οι $\widehat{\Delta\text{ΑΒ}}$, $\widehat{\text{ΑΒΓ}}$, $\widehat{\text{ΒΓΔ}}$ και $\widehat{\text{ΓΔΑ}}$ που γράφονται απλά $\widehat{\text{Α}}$, $\widehat{\text{Β}}$, $\widehat{\text{Γ}}$ και $\widehat{\text{Δ}}$ αντίστοιχα.

Γωνίες τετραπλεύρου



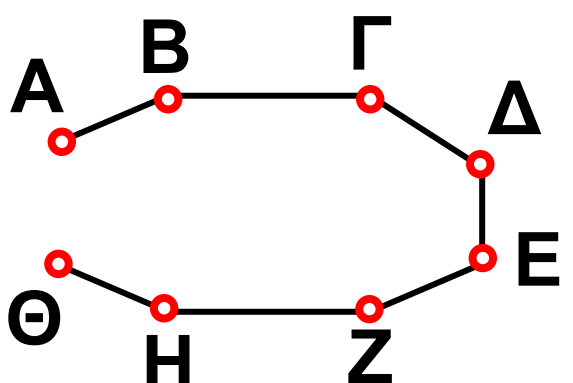
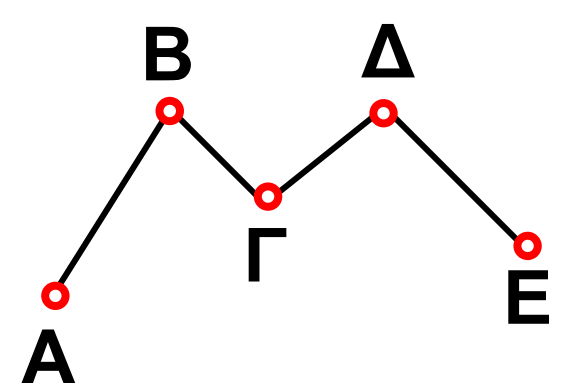
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ποιες γωνίες και ποια ευθύγραμμα σχήματα σχηματίζονται από τις ευθείες του διπλανού σχήματος;



Ευθύγραμμα σχήματα

- Τεθλασμένη γραμμή είναι μια πολυγωνική γραμμή, που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
- Ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.
- Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται κυρτή, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο. Διαφορετικά λέγεται μη κυρτή.

Τεθλασμένη γραμμή	
Κυρτή	μη κυρτή
	

Ευθύγραμμο σχήμα	
Κυρτό	μη κυρτό

Ίσα σχήματα

- Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται ίσα, αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.
- Στα ίσα σχήματα, τα στοιχεία που συμπίπτουν, δηλαδή οι κορυφές, οι πλευρές και οι γωνίες, ονομάζονται αντίστοιχα στοιχεία των σχημάτων αυτών.

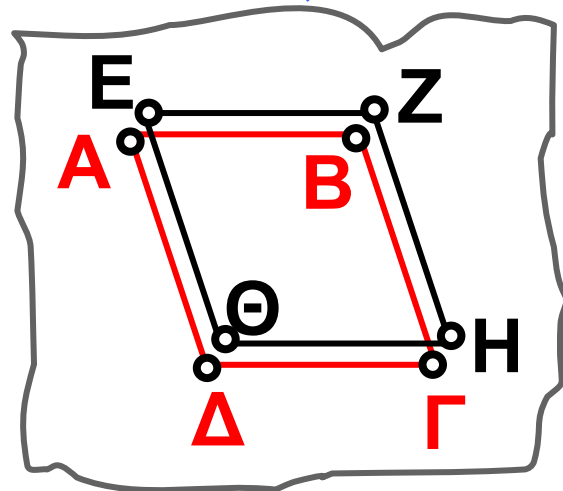
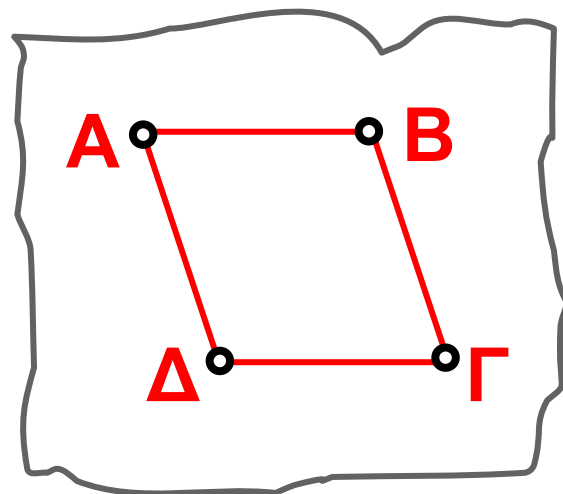
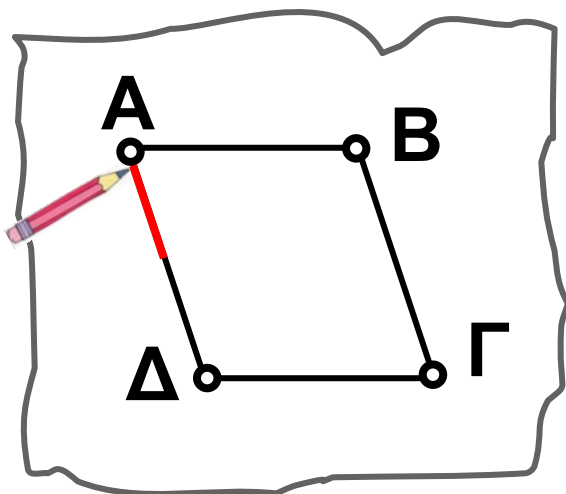
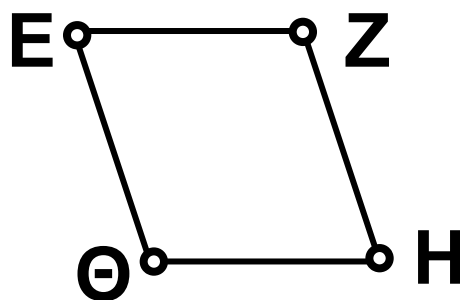
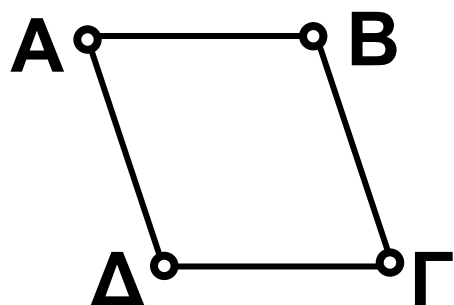


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

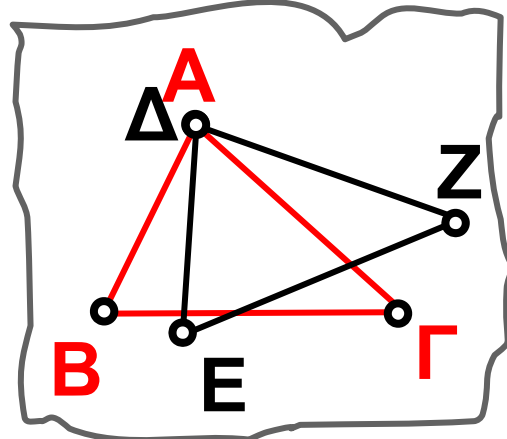
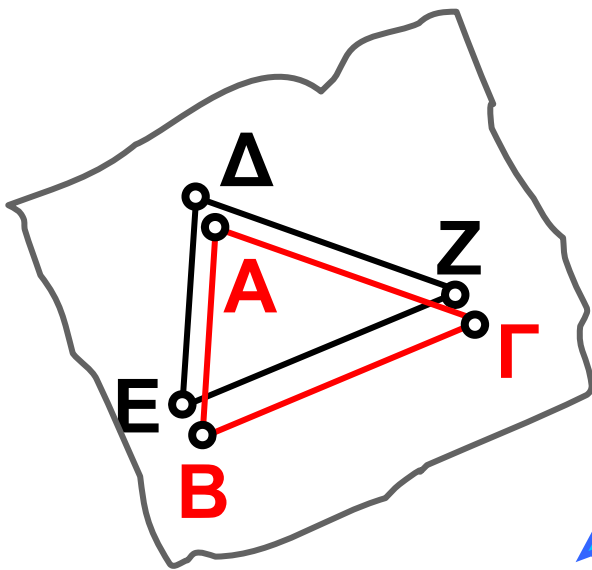
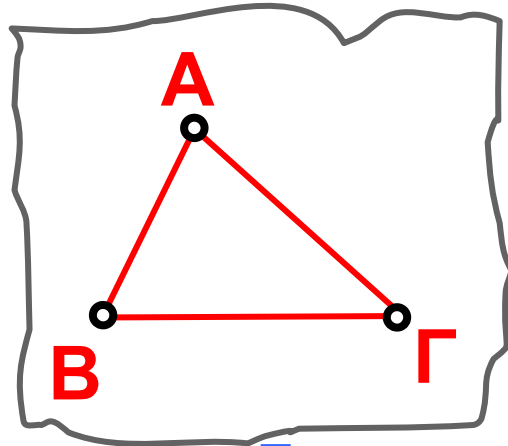
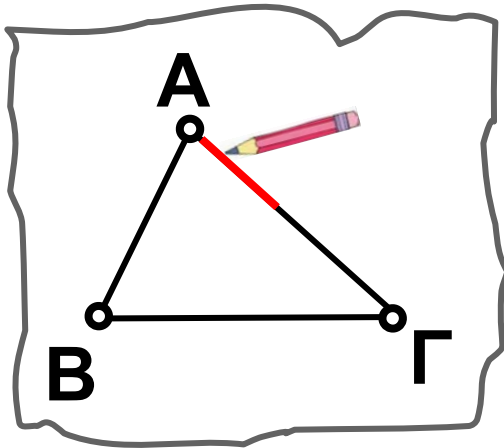
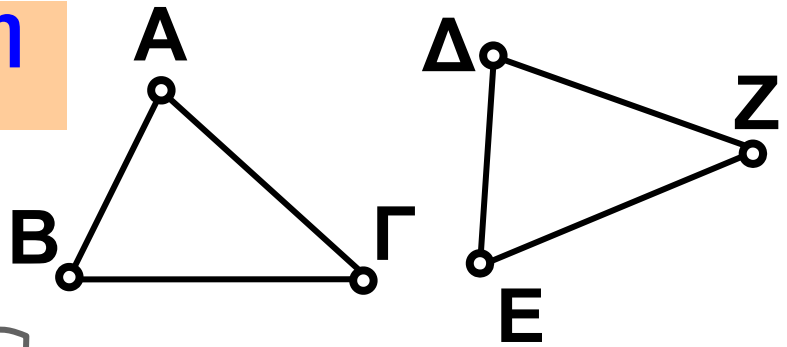
Να χρησιμοποιηθεί διαφανές χαρτί, για να διαπιστωθεί

η ισότητα των σχημάτων στις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1^η



Περίπτωση 2^η



Στρέφουμε το διαφανές χαρτί

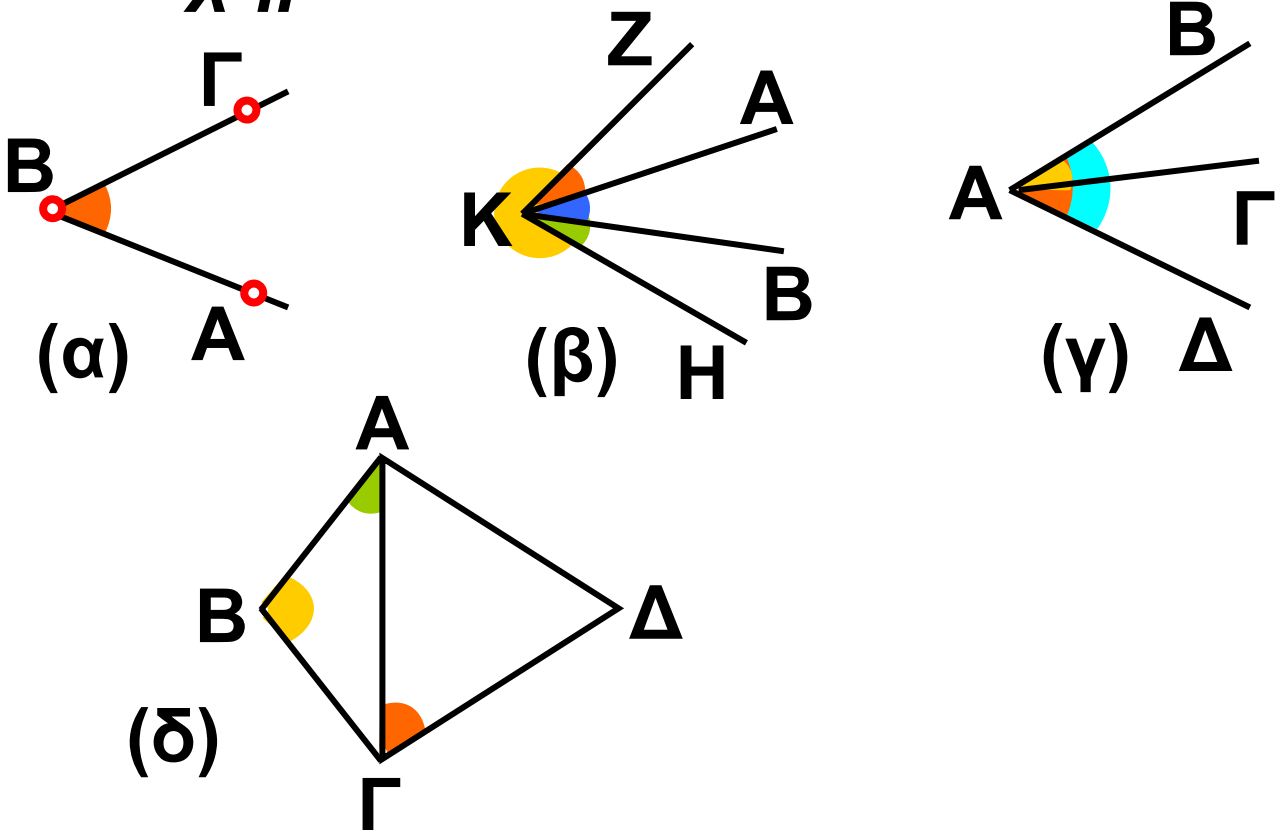
Παρατηρούμε ότι:

- ◆ Οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες των ίσων σχημάτων είναι ίσες.



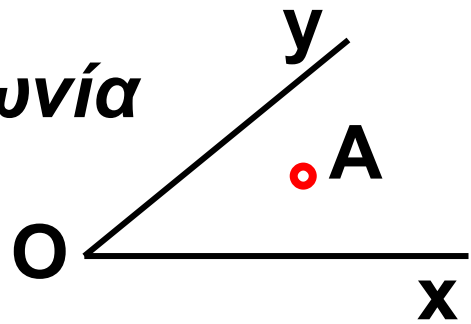
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να ονομάσεις με τρία γράμματα τις γωνίες που σημειώνονται στο σχήμα:



2. Να σχεδιάσεις ένα τρίγωνο $AB\Gamma$.
(α) Ποια γωνία του τριγώνου περιέχεται στις πλευρές AB και $B\Gamma$;
(β) Ποια πλευρά είναι απέναντι από τη γωνία $\hat{\Gamma}$;
(γ) Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά $A\Gamma$;

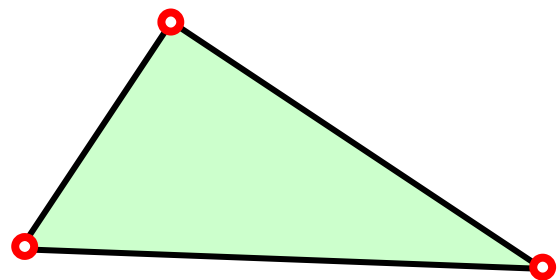
3. Να γραμμοσκιάσεις και να ονομάσεις τη γωνία στην οποία ανήκει το σημείο A .



4. Στο παρακάτω τρίγωνο να ονομάσεις \hat{A} τη γωνία που είναι απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά, $\hat{\alpha}$ τη γωνία που είναι απέναντι στη μικρότερη πλευρά και $\hat{\Gamma}$ την τρίτη γωνία.

(α) Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά $B\Gamma$;

(β) Ποια γωνία βρίσκεται απέναντι από την πλευρά AB ;



5. Τοποθέτησε ένα "X" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

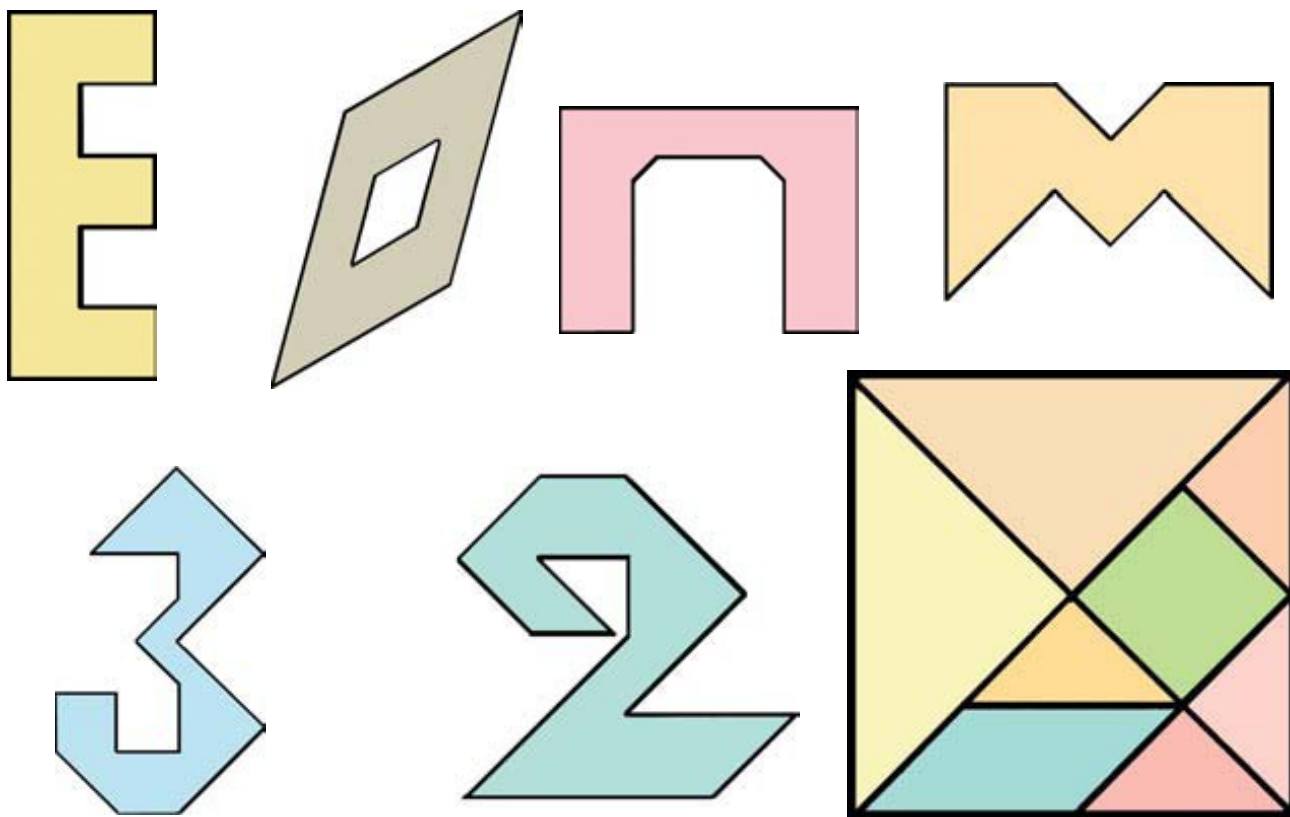
(α) ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ	ΚΟΡΥΦΕΣ					ΠΛΕΥΡΕΣ				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
ΓΩΝΙΑ										
ΤΡΙΓΩΝΟ										
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ										
ΠΕΝΤΑΠΛΕΥΡΟ										

(β) ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2															
3															
4															
5															
6															



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

**Έχεις παίξει ποτέ το TANGRAM;
Σχεδίασε σ' ένα χαρτί το διπλανό
τετράγωνο σχήμα με πλευρά 10 cm
και μετά κόψε τα οκτώ κομμάτια.
Προσπάθησε να φτιάξεις τα
παρακάτω σχήματα
χρησιμοποιώντας κατάλληλα
κομμάτια απ' αυτά.**



B.1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Στα προηγούμενα είδαμε τον τρόπο με τον οποίο διαπιστώνουμε την ισότητα δύο γεωμετρικών σχημάτων. Το απλούστερο σχήμα, του οποίου το μήκος μπορεί να μετρηθεί, είναι το ευθύγραμμο τμήμα και αποτελεί βασικό στοιχείο των άλλων ευθυγράμμων σχημάτων. Τι είναι όμως μέτρηση και μονάδες μήκους;

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



Από τα πολύ παλιά χρόνια, οι ανάγκες της ζωής, υποχρέωσαν τους ανθρώπους να μετρήσουν διάφορα μεγέθη. Για να εξυπηρετούν οι μετρήσεις αυτές έπρεπε να χρησιμοποιηθούν σταθερά υποδείγματα, τα

οποία να διαθέτει ο καθένας οποιαδήποτε στιγμή τα χρειαζόταν. Αρχικά στη μέτρηση χρησιμοποιήθηκαν τα μέλη του ανθρώπινου σώματος αλλά και ο βηματισμός, το άνοιγμα των χεριών και το ύψος. Έτσι, δημιουργήθηκαν οι μονάδες, όπως: οι “δάκτυλοι”, οι “πόδες” οι “παλάμες” κ.α. Αυτή την παλιά συνήθεια εξακολουθούμε να εφαρμόζουμε και σήμερα στις πρόχειρες μετρήσεις μας: “Το πανταλόني θέλει δυο δάκτυλα μάκρεμα”, “Το χορτάρι ψήλωσε μια πιθαμή”, “Το σκάφος έχει μήκος 40 πόδια”, “Τα δίκτυα έφτασαν στις 50 οργιές”, “Βάλε στο ποτήρι ένα δάκτυλο κρασί”, “Το πέναλτι χτυπιέται στα 11 βήματα”, κ.λπ. Οι μονάδες αυτές, αν και πολύ χρήσιμες, άρχισαν να χάνουν την αξία τους διότι δεν είναι ακριβείς, αφού όλοι οι άνθρωποι δεν έχουν

το ίδιο ύψος, την ίδια παλάμη, το ίδιο πάχος δακτύλων και το ίδιο άνοιγμα στο βήμα τους. Όσο όμως αναπτύσσονταν οι ανθρώπινες κοινωνίες τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια χρειάζονταν ορισμένες μετρήσεις, όπως π.χ. για το κτίσιμο των σπιτιών, την κατασκευή αρδευτικών έργων, την καταμέτρηση της γης, κ.λπ. Στην αρχαία Αίγυπτο, μετά από κάθε πλημμύρα του Νείλου, η λάσπη κάλυπτε τα σύνορα των κτημάτων. Υπήρχαν τότε ειδικοί υπάλληλοι, οι “αρπεδονάπτες”, οι οποίοι επόπτευαν την τήρηση του διαχωρισμού των εκτάσεων. Στις καταμετρήσεις αυτές λέγεται ότι έκαναν μ’ ένα ειδικό σχοινί με κόμπους, την “αρπεδόνη”.

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, από την εποχή του βασιλέα Σέσωστρη (κατά τον Ηρόδοτο), τηρούσαν στοιχεία



μέτρησης των εκτάσεων που καλλιεργούσαν για να τα ξαναβρίσκουν μετά τις εποχιακές

πλημμύρες του Νείλου ποταμού.

Άλλωστε Γεω - μετρία σημαίνει μέτρηση της Γης. Αλλά και οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν συγκεκριμένα υποδείγματα για να υπολογίσουν το εμβαδόν και τον όγκο σε πολλά πράγματα καθημερινής χρήσης.

Όταν αναπτύχθηκε η επικοινωνία λαών και κρατών, με τα ταξίδια και το εμπόριο, δημιουργήθηκε η ανάγκη να καθιερωθούν κοινές μονάδες μέτρησης για καλύτερη συνεννόηση και αποφυγή της ταλαιπωρίας των μετατροπών απ' τη μία μονάδα στην άλλη, όπως π.χ.

στην αρχαία Αθήνα από τον Σόλωνα.





Το 1791, αμέσως μετά την Επανάσταση, η Γαλλική Ακαδημία ανέθεσε σε μια ομάδα επιστημόνων, απ' όλες τις χώρες της Ευρώπης, να βρουν ένα απλό σύστημα μονάδων μέτρησης. Οι μονάδες που υιοθετήθηκαν τελικά πάρθηκαν από τη φύση και για παράδειγμα η μέτρηση του μήκους καθιερώθηκε να έχει μονάδα το “μέτρο”, που είναι το 1 από τα 40.000.000 ίσα κομμάτια που χωρίστηκε ο γήινος μεσημβρινός που διέρχεται από το Παρίσι. Το σύστημα των μονάδων ακολουθεί το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, δηλαδή είναι ένα δεκαδικό μετρικό σύστημα. Μετά από ένα αργό ξεκίνημα, το σύστημα αυτό καθιερώθηκε και το 1875 ιδρύθηκε στη Σεβρ (στο Παρίσι) το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών, όπου φυλάχτηκαν τα

**κατασκευασμένα από πλατίνα πρό-
τυπα “μέτρο” και “χιλιόγραμμα”.
Το σύστημα αυτό των μονάδων δεν
υιοθετήθηκε αμέσως απ’ όλους
τους λαούς, που προτίμησαν να
χρησιμοποιούν τα δικά τους
συστήματα, όπως τα είχαν
συνηθίσει, παρ’ όλο που ήταν πιο
πολύπλοκα. Στη νεώτερη Ελλάδα,
καθιερώθηκε με νόμο, το 1959, το
δεκαδικό μετρικό σύστημα και
ισχύει μέχρι σήμερα.**



**Στην Αγγλία, την Αμερική
και σε μερικές ακόμη χώ-
ρες, το σύστημα μέτρησης
είναι δωδεκαδικό και η βασική μο-
νάδα μήκους είναι η υάρδα ή γιάρ-
δα (yd). Η 1 γιάρδα (yd) διαιρείται
σε 3 πόδια (ft), και το 1 πόδι (ft) σε
12 ίντσες (in). Οι σχέσεις των
μονάδων αυτών μεταξύ τους αλλά
και με το μέτρο είναι:**

$$1 \text{ yd} = 3 \text{ ft} = 36 \text{ in}$$

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$$

$$1 \text{ yd} = 0,9144 \text{ m} = 91,44 \text{ cm}$$

$$1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m} = 30,48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ in} = 0,0254 \text{ m} = 2,54 \text{ cm}$$



**Στις ίδιες χώρες για μέτρηση
μεγάλων αποστάσεων**

χρησιμοποιούν το μίλι, που είναι:

$$1 \text{ μίλι} = 1609 \text{ m} = 1,609 \text{ Km.}$$

**Στη ναυτιλία χρησιμοποιούν για
μονάδα μήκους το ναυτικό μίλι, που
είναι: 1 ναυτικό μίλι = 1852 m.**

Μέτρηση και μονάδες μέτρησης



• Για να συγκρίνουμε μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα οδηγηθήκαμε στην ανάγκη να χρησιμοποιούμε μια κοινή μονάδα σύγκρισης. Έτσι, κάθε σύγκριση ενός μεγέθους με την αντίστοιχη μονάδα λέγεται μέτρηση.

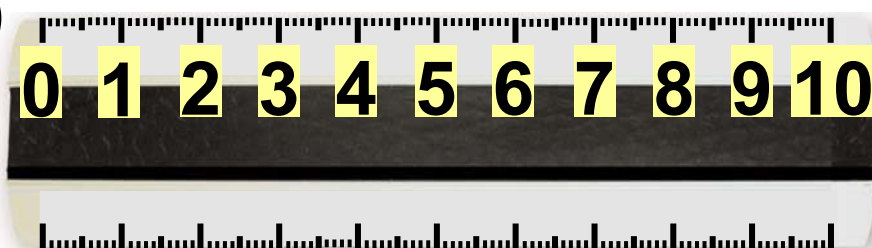
Έτσι, για το μήκος έχουμε ότι:
Μονάδα μήκους είναι το “μέτρο” (m)

▶ Για να μετρήσουμε, λοιπόν, ένα ευθύγραμμο τμήμα, χρησιμοποιούμε ένα αντίγραφο του μέτρου και κάνουμε τη σύγκριση μ’ αυτό, όπως έχουμε μάθει.

▶ Εάν όμως το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος είναι πολύ μεγαλύτερο ή πολύ μικρότερο από το μήκος του μέτρου, επιλέγουμε, για τη μέτρηση ένα πολλαπλάσιο ή μια υποδιαίρεση του μέτρου για το σκοπό αυτό.

◆ Για να μετρήσουμε σχετικά μικρά μήκη χρησιμοποιούμε, συνήθως, το υποδεκάμετρο, που είναι το ένα

δέκατο ($\frac{1}{10}$)
του μέτρου.



◆ Για μεγαλύτερα μήκη, όπως π.χ. έναν τοίχο ή τις διαστάσεις ενός οικοπέδου, χρησιμοποιούμε τη μετροταινία.



◆ Για πολύ μικρά μήκη π.χ. τη διάμετρο μιας βίδας ή το πάχος μιας λαμαρίνας, χρησιμοποιούμε το παχύμετρο ή το μικρόμετρο, αντίστοιχα.



ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ ΜΕΤΡΟΥ	
ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	Χιλιόμετρο
ΣΥΜΒΟΛΟ	Km
ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ	1 Km = 1000 m

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	ΜΕΤΡΟ
ΣΥΜΒΟΛΟ	m

ΥΠΟΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ	
ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	Δεκατόμετρο ή παλάμη
ΣΥΜΒΟΛΟ	dm
ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ	$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m} = 0,1 \text{ m}$

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	Εκατοστόμετρο ή πόντος
ΣΥΜΒΟΛΟ	cm
ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ	$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m} = 0,01 \text{ m}$

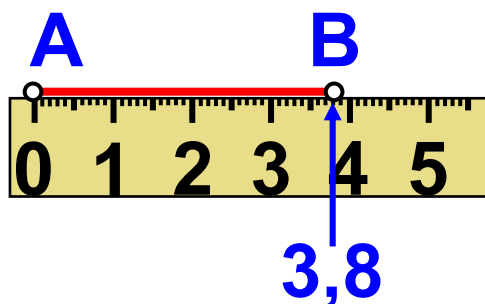
ΥΠΟΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	Χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό
ΣΥΜΒΟΛΟ	mm
ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ	$1 \text{ mm} = \frac{1}{1000} \text{ m} = 0,01 \text{ m}$

Η σχέση μεταξύ των υποδιαιρέσεων του μέτρου είναι η εξής:

1 m	= 10 dm	= 100 cm	= 1000 mm
	1 dm	= 10 cm	= 100 mm
		1 cm	= 10 mm

Η έννοια της απόστασης σημείων είναι από τις πιο συνηθισμένες γεωμετρικές έννοιες, που συναντάμε στην ζωή π.χ. απόσταση δύο πόλεων κ.λ.π. Πώς όμως ορίζεται η απόσταση δύο σημείων και πως την μετράμε;



◆ Έχουμε τα σημεία A και B. Χαράζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB και το

μετράμε με το υποδεκάμετρο. Βρίσκουμε ότι έχει μήκος 3,8 cm.

◆ Λέμε ότι η απόσταση των σημείων A και B είναι 3,8 cm και γράφουμε $AB = 3,8 \text{ cm}$.

Συνεπώς:



• Απόσταση δύο σημείων A και B λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, που τα ενώνει.

Πρέπει, όμως, να προσέξουμε κάτι σημαντικό:

◆ Με το σύμβολο AB εννοούμε ταυτόχρονα δύο διαφορετικά πράγματα: Το ευθύγραμμο τμήμα AB, αλλά και το μήκος αυτού του ευθύγραμμου τμήματος AB.

◆ Για να ξεχωρίσουμε το μήκος, συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό (AB). Αλλά στο βιβλίο αυτό, για απλούστευση, θα γράφουμε απλά: μήκος AB.

Συχνά ακούμε την φράση: «Βρισκόμαστε στο μέσο της διαδρομής» και καταλαβαίνουμε ότι απέχουμε την ίδια απόσταση από τα δύο άκρα. Τι ονομάζουμε λοιπόν μέσο του ευθυγράμμου τμήματος;

• Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζουμε το σημείο M του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του.

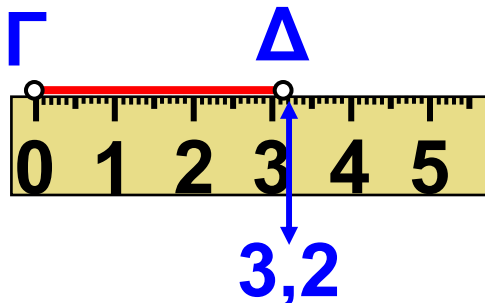
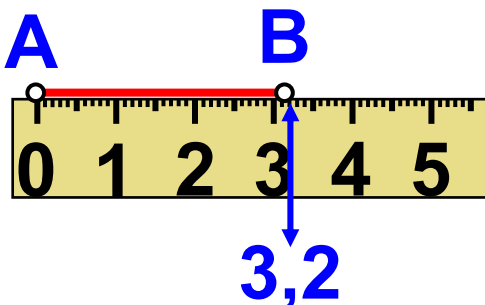




ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να σχεδιαστεί το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$, το οποίο είναι ίσο με το τμήμα AB : (α) με το υποδεκάμετρο και (β) με διαβήτη.

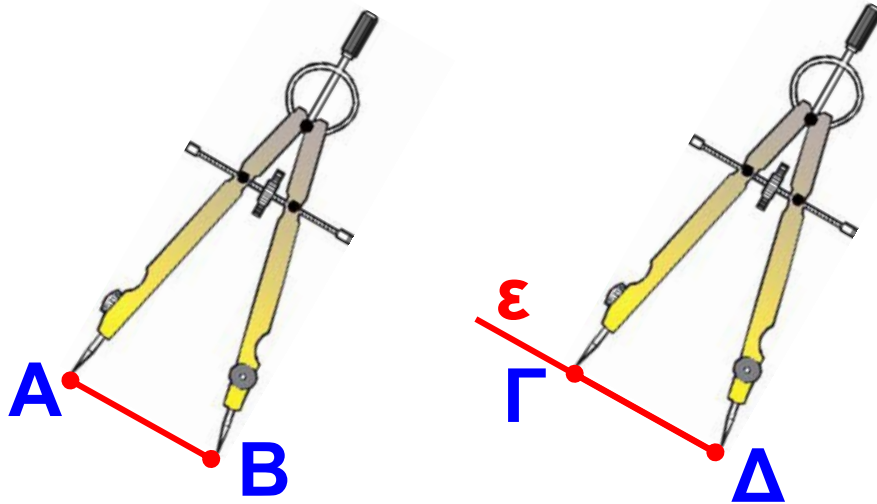
Λύση



(α) Με το υποδεκάμετρο μετράμε το ευθύγραμμο τμήμα AB και βρίσκουμε ότι $AB = 3,2 \text{ cm}$. Στη συνέχεια πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε ένα ευθύγραμμο

τμήμα $\Gamma\Delta$ με μήκος ίσο με $3,2 \text{ cm}$, όπως δείχνει το σχήμα.

(β) Ανοίγουμε το διαβήτη, ώστε η μία άκρη του να ακουμπάει στο A και η άλλη στο B . Μετακινούμε το διαβήτη, χωρίς να μεταβάλλουμε το άνοιγμα του.

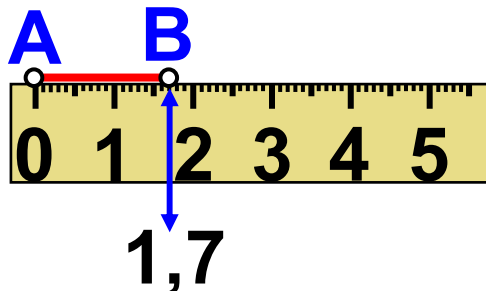


Χαράζουμε μια ευθεία ε .
Τοποθετούμε τη μία άκρη
του διαβήτη σε ένα σημείο Γ της ε
και με το άλλο άκρο, που έχει τη
γραφίδα, βρίσκουμε το σημείο Δ
της ε . Τότε το ευθύγραμμο τμήμα
 $\Gamma\Delta$ είναι ίσο με το AB

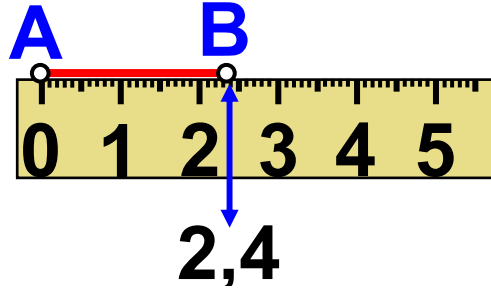
2. *Να βρεθούν κατάλληλοι τρόποι
σύγκρισης δύο ευθύγραμμων
τμημάτων και να διατυπωθούν τα
συμπεράσματα.*

**Ο 1ος τρόπος είναι να κάνουμε τη
μέτρηση με το υποδεκάμετρο.**

1η περίπτωση



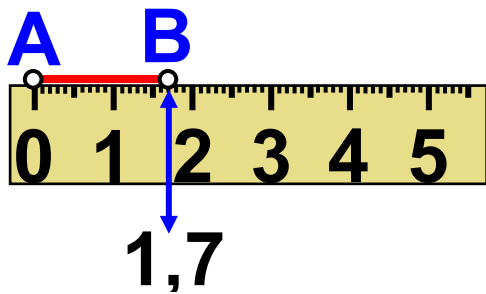
$$AB = 1,7 \text{ cm}$$



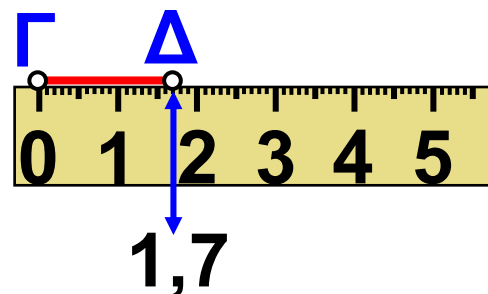
$$\Gamma\Delta = 2,4 \text{ cm}$$

$$AB < \Gamma\Delta$$

2η περίπτωση



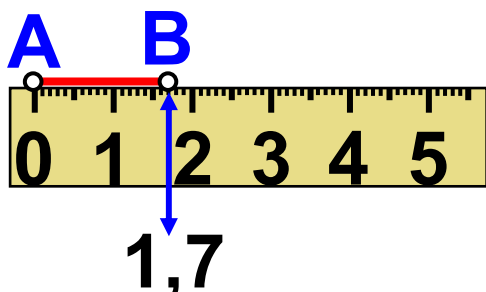
$$AB = 1,7 \text{ cm}$$



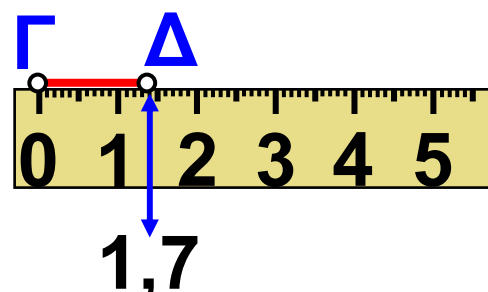
$$\Gamma\Delta = 1,7 \text{ cm}$$

$$AB = \Gamma\Delta$$

3η περίπτωση



$$AB = 1,7 \text{ cm}$$



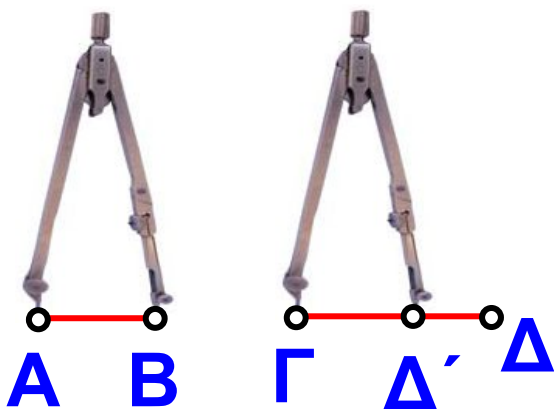
$$\Gamma\Delta = 1,4 \text{ cm}$$

$$AB > \Gamma\Delta$$

Ο 2ος τρόπος είναι να τα συγκρίνουμε χρησιμοποιώντας το διαβήτη.

Ακουμπάμε τη μία άκρη του διαβήτη στο Α και την άλλη στο Β. Μετακινούμε το διαβήτη, χωρίς να μεταβάλλουμε το άνοιγμά του και τοποθετούμε το ένα άκρο του στο σημείο Γ και το άλλο επί της ημιευθείας ΓΔ. Ονομάζουμε Δ' το σημείο στο οποίο καταλήγει το δεύτερο άκρο του διαβήτη. Τότε έχουμε τρεις περιπτώσεις.

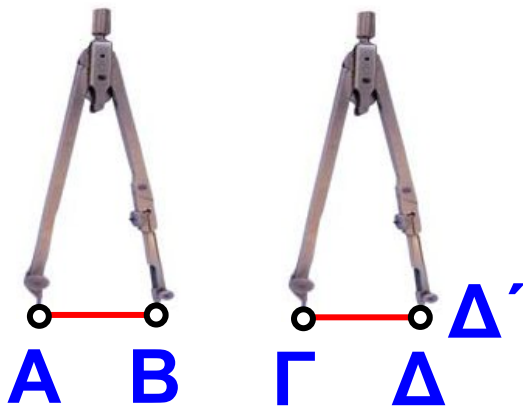
1η περίπτωση



Το Δ' βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ.

Τότε λέμε ότι το ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ και γράφουμε $AB < \Gamma\Delta$

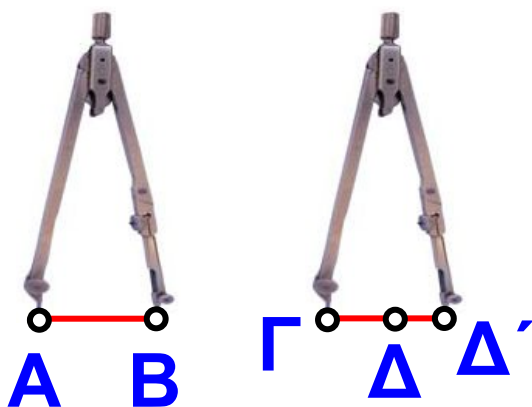
2η περίπτωση



Το Δ' συμπίπτει με το Δ .

Τότε λέμε ότι τα AB και $\Gamma\Delta$ έχουν το ίδιο μήκος και γράφουμε $AB = \Gamma\Delta$

3η περίπτωση



Το Δ' βρίσκεται στην προέκταση του $\Gamma\Delta$ προς το Δ .

Τότε λέμε ότι το AB είναι μεγαλύτερο από το $\Gamma\Delta$ και γράφουμε $AB > \Gamma\Delta$

3. Να βρεθεί το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB .

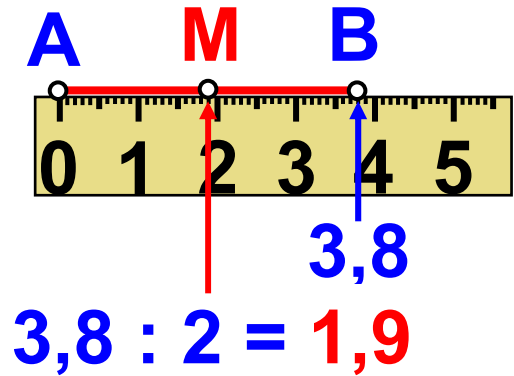
Λύση

Με το υποδεκάμετρο
βρίσκουμε ένα
σημείο M του AB ,
για το οποίο είναι:

$$AM = 3,8 : 2 = 1,9 \text{ cm.}$$

$$\text{Αλλά τότε και } MB = 3,8 : 2 = 1,9 \text{ cm.}$$

Δηλαδή: $AM = MB$.



◆ Οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα AB έχει πάντα ένα μέσο M , που είναι και μοναδικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:



(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , που ενώνει δύο σημεία A και B λέγεται

..... των σημείων.

(β) Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζουμε το σημείο του M που από τα άκρα του.

**2. Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:
Από δύο σημεία μπορούν να περάσουν Άπειρες ευθείες, Μία μόνο ευθεία, Δύο μόνο ευθείες.**

3. Ένα τόπι ύφασμα είναι 65 m. Πουλήθηκαν κομμάτια με μήκη: 3,5 m, 25 cm, 7,95 m και 3,74 m. Πόσα μέτρα ύφασμα έμεινε στο τόπι;

4. Το εμπορικό τρίγωνο μιας πόλης περικλείεται από τις οδούς Ιπποκράτους, μήκους 619 m, Κλεισθένους, μήκους 271 m και Περικλέους, μήκους 205 m. Πόσα βήματα θα κάνει ένας πεζός που κινείται περιμετρικά στο εμπορικό τρίγωνο, αν το κάθε του βήμα είναι 75 cm.

5. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει έναν αγρό σχήματος τετραγώνου και πλευράς 15,3 m. Διαθέτει συρματοπλεγμά, μήκους 60 m 3 dm 18 cm. Να βρεθεί, αν θα του φτάσει το συρματοπλεγμά ή αν πρέπει να αγοράσει και άλλο.

6. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την ακτίνα σε m και σε Km τεσσάρων πλανητών. Να συμπληρωθούν τα κενά:

Ακτίνα	σε m	σε Km
ΑΦΡΟΔΙΤΗ	6085000	
ΓΗ		6378
ΑΡΗΣ		3750
ΔΙΑΣ	71400000	

7. Οι αριθμοί που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα είναι τα μήκη των πέντε πλευρών του πολυγώνου

ΑΒΓΔΕ, εκφρασμένα με διαφορετικές μονάδες. Να συμπληρωθεί ο πίνακας και να υπολογιστεί η περίμετρος του πολυγώνου σε cm, dm και m.

	cm	dm	m
ΑΒ	517		
ΒΓ			4,2
ΓΔ			0,84
ΔΕ	1250		
ΕΑ		7,6	
Περίμετρος			

8. Πάρε ένα σημείο Α. Να βρεις τρία σημεία που το καθένα να απέχει 2,7 cm από το Α.

9. Σχεδίασε δύο αντικείμενες ημιευθείες Αχ και Αχ'. Να βρεις πάνω στην ημιευθεία Αχ δύο σημεία Β και Γ, έτσι ώστε $AB = 3 \text{ cm}$ και $AG = 3,8 \text{ cm}$.

Επίσης στην ημιευθεία Ax' να πάρεις ένα σημείο Δ έτσι, ώστε $AD = 3 \text{ cm}$. Να συγκρίνεις (α) τα ευθύγραμμα τμήματα AG και AD και (β) τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AD .

10. Σε μία ευθεία ε , πάρε στη σειρά τα σημεία A, B, Γ και Δ έτσι ώστε να είναι: $AB = 2,5 \text{ cm}$, $B\Gamma = 3 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 2,5 \text{ cm}$. Εξέτασε αν τα τμήματα AG και $B\Delta$ είναι ίσα.

11. Το μέσο O ευθύγραμμου τμήματος AB απέχει $4,2 \text{ cm}$ από το άκρο A . Πόσο είναι το μήκος του AB ;

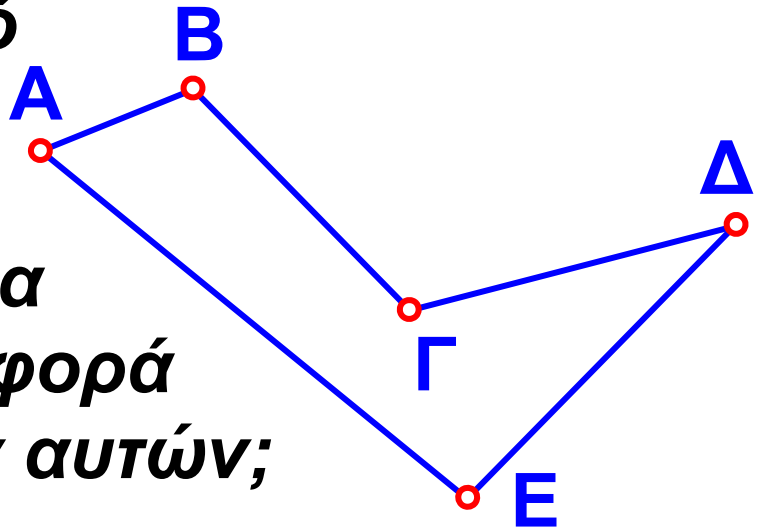
12. Σχεδίασε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB . Να βρεις ένα σημείο M , το οποίο να απέχει $3,3 \text{ cm}$ από το A και να μη βρίσκεται στην ευθεία AB . Να φέρεις την ευθεία, η οποία περνάει από το M και από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB .

B.1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο παρακάτω σχήμα, μεταξύ των διαδρομών $ΑΒΓΔ$ και $ΑΕΔ$, να βρεθεί ποια διαδρομή από τις δύο είναι ο συντομότερος δρόμος, για να πάει κανείς από την πόλη $Α$ στην πόλη $Δ$ και στη συνέχεια να βρεθεί η διαφορά των διαδρομών αυτών;



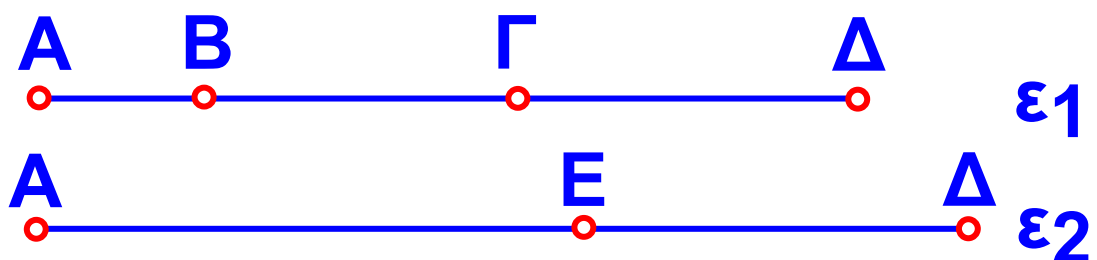
Σκεφτόμαστε

(α) Θεωρούμε τις ευθείες ϵ_1 , και ϵ_2 .

Στην ευθεία ϵ_1 παίρνουμε, με τη βοήθεια του διαβήτη, διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ίσα με τις πλευρές

της τεθλασμένης γραμμής $AB\Gamma\Delta$, δηλαδή τα AB , $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα AE και $E\Delta$ ίσα με τις πλευρές της τεθλασμένης γραμμής $AE\Delta$. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος, που προκύπτει από τη συνένωση των τμημάτων της $AB\Gamma\Delta$ αποτελεί το άθροισμα των τμημάτων της και επομένως το μήκος της γραμμής αυτής. Όμοια και για την $AE\Delta$. Συνεπώς, συγκρίνοντας τα παραπάνω μήκη, συμπεραίνουμε ότι η διαδρομή $AB\Gamma\Delta$ είναι μικρότερη από την $AE\Delta$.



(β) Για να υπολογίσουμε τη διαφορά των δύο διαδρομών τοποθετούμε

ο

σε μια άλλη ευθεία ε_3 τμήμα ΚΛ, ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ, που ανήκει στην ευθεία ε_1 και τμήμα ΚΜ, ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ, που ανήκει στην ευθεία ε_2 . Το ευθύγραμμο τμήμα ΛΜ είναι η διαφορά των δύο διαδρομών ΑΒΓΔ και ΑΕΔ.

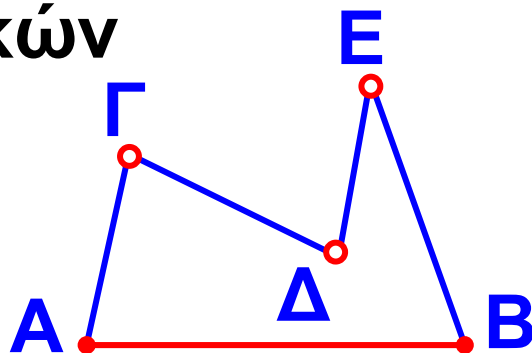


Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- ◆ Για να προσθέσουμε ευθύγραμμο τμήματα, τα τοποθετούμε διαδοχικά πάνω σε μια ευθεία. Το τμήμα που έχει άκρα την αρχή του πρώτου και το τέλος του τελευταίου είναι το άθροισμά τους.
- ◆ Για να αφαιρέσουμε δύο ευθύγραμμο τμήματα, τα τοποθετούμε με κοινή αρχή στην ίδια ημιευθεία. Το τμήμα που αρχίζει από το τέλος

του μικρότερου και καταλήγει στο τέλος του μεγαλύτερου αποτελεί τη διαφορά τους.

▶ Η τεθλασμένη γραμμή έχει μήκος το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται.



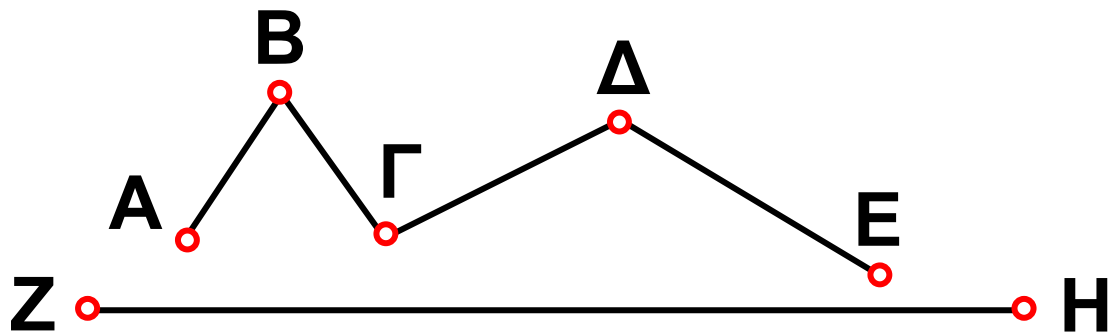
▶ Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, είναι μικρότερο από το μήκος κάθε τεθλασμένης γραμμής με τα ίδια άκρα A και B.

• Το άθροισμα των πλευρών ενός ευθύγραμμου σχήματος, θα το λέμε περίμετρο του σχήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να συγκρίνεις το μήκος της γραμμής ABΓΔΕ με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΖΗ, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.





2. Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με όλες τις πλευρές ίσες, με $2,5\text{ cm}$. Βρες στην ημιευθεία $B\Gamma$, με αρχή το σημείο B , ένα σημείο E έτσι, ώστε το μήκος BE να ισούται με την περίμετρο του τριγώνου.

3. Μια τεθλασμένη γραμμή αποτελείται από πέντε διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα. Τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE και EZ είναι αντίστοιχα 16 mm , 9 mm , 12 mm , 14 mm και 2 cm . Να βρεις το μήκος της τεθλασμένης AZ .

4. Να βρεις το μήκος μιας τεθλασμένης γραμμής $AB\Gamma\Delta E$ με

πλευρές $AB = 0,4 \text{ m}$, $B\Gamma = 3 \text{ dm}$,
 $\Gamma\Delta = 50 \text{ cm}$ και $\Delta E = 380 \text{ mm}$.

5. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία K , L , M και N έτσι, ώστε: $KL = 6 \text{ cm}$, $KM = 16 \text{ cm}$ και $KN = 20 \text{ cm}$. Να βρεις τα μήκη των τμημάτων LM , LN και MN .

6. Σε μία ημιευθεία με αρχή το σημείο O παίρνουμε τα σημεία A , B , Γ και Δ έτσι ώστε να είναι: $AB = 3 \text{ cm}$, $B\Delta = 5,5 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 4,6 \text{ cm}$. Να βρεθούν τα μήκη των τμημάτων:
(α) $A\Delta$, (β) $B\Gamma$, (γ) $A\Gamma + \Gamma\Delta$ και
(δ) $A\Delta - \Delta B$.

7. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία A , B , Γ και Δ έτσι, ώστε: $A\Delta = 6 \text{ cm}$, $AB = A\Delta/6$ και $B\Gamma = A\Delta/3$. Να βρεις το μήκος του $\Gamma\Delta$.

8. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία A, B, Γ και Δ έτσι, ώστε το $B\Gamma$ να είναι κατά 4 cm μεγαλύτερο από το AB και κατά 3 cm μικρότερο από το $\Gamma\Delta$. Αν είναι $AD = 14\text{ cm}$, να βρεις τα μήκη των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

9. Να πάρεις σε μια ευθεία τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ και E έτσι, ώστε να είναι: $AB = 2\text{ cm}$, $B\Gamma = 0,5 \cdot AB$ και $A\Delta = 2,5 \cdot AB$. Να βρεις τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων $B\Delta$ και $A\Gamma$.

10. Πάρε σε μια ευθεία τα διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ και E έτσι, ώστε να είναι: $AB = 2\text{ cm}$, $A\Gamma = 3\text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 1,5\text{ cm}$ και $AE = 6,2\text{ cm}$. Να βρεθούν τα μήκη των $A\Delta$ και ΓE .

11. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 4,5 \text{ cm}$. Πάνω στην ευθεία AB πάρει ένα σημείο K , τέτοιο ώστε $AK = 3 \text{ cm}$ και ένα άλλο σημείο L , τέτοιο, ώστε να είναι $BL = 3,5 \text{ cm}$. (α) Να βρεις το μήκος του KL , (β) Σε ποια περίπτωση συμβαίνει να είναι $KL = 11 \text{ cm}$; (γ) Να διερευνήσεις, σε ποιες περιπτώσεις το KL είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 11 cm .



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Γιατί το αεροπλάνο μπορεί να διανύσει μικρότερη απόσταση από το πλοίο, για να πάει από την Αθήνα στη Σάμο;



B.1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας πατέρας και ο γιος του γυμνάζονται και κάνουν τις ίδιες ασκήσεις.



- **Μπορείς να βρεις εάν οι γωνίες, που σχηματίζουν τα πόδια τους στην ίδια ακριβώς στάση που έχουν στο διπλανό σχήμα είναι ίσες;**
- **Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου σχετικά με τη σύγκριση του ανοίγματος των ποδιών τους.**

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



▶ Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το μοιρογνωμόνιο.

▶ Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται μέτρο της γωνίας.

▶ Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η μοίρα, που γράφεται: 1° .

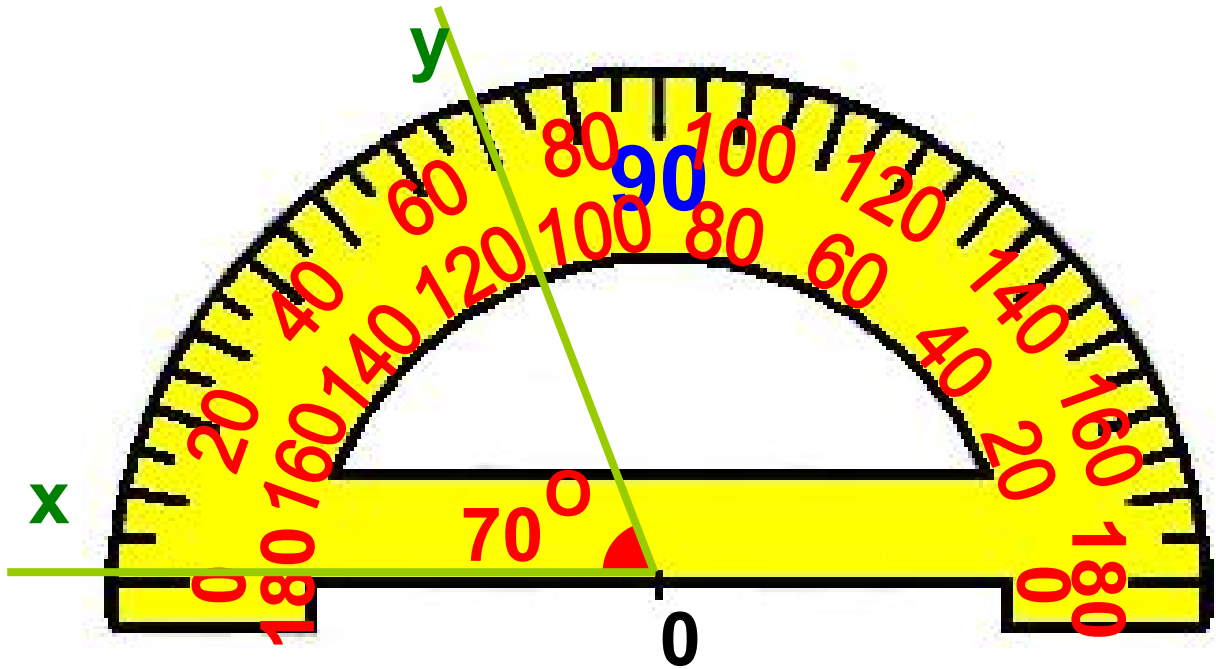
▶ Είναι: $1^{\circ} = 60'$ (πρώτα λεπτά) και $1' = 60''$ (δεύτερα λεπτά).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

- Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο που εξαρτάται μόνο από το “άνοιγμα” των πλευρών της.

- Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες.

- ◆ Στο εξής με \widehat{xOy} ή $\widehat{\omega}$ θα συμβολίζουμε τη γωνία και το μέτρο της.



ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



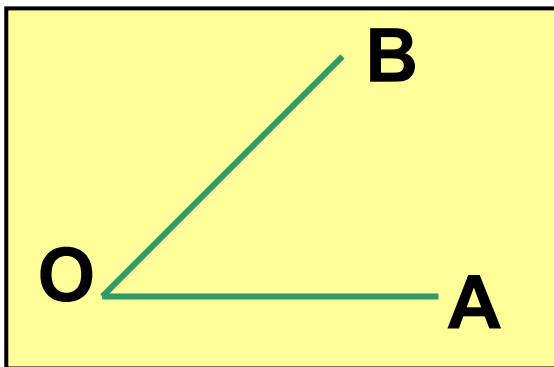
Η μοίρα ανήκει σε εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης (με βάση το 60). Αυτό προέρχεται από τους Σουμέριους και στη συνέχεια από τους Βαβυλώνιους, δηλαδή χρονολογείται πριν από το 2100 π.Χ. Ο λόγος επιλογής του συστήματος αυτού εικάζεται ότι είναι η προσπάθεια ενοποίησης των διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης, που υπήρχαν εκείνη την εποχή (με βάση το 5 και το 12). Άλλοι έχουν την άποψη ότι η βάση 60 καθιερώθηκε από την αστρονομία και άλλοι ότι έχει επιλεγεί για βάση ο αριθμός 60 επειδή έχει πολλούς διαιρέτες. Σημασία έχει ότι μέχρι σήμερα έχει επικρατήσει το εξηνταδικό σύστημα για τη μέτρηση των γωνιών, του χρόνου κ.λπ.



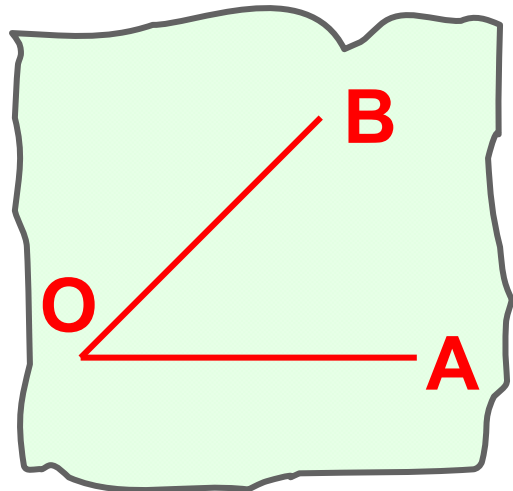
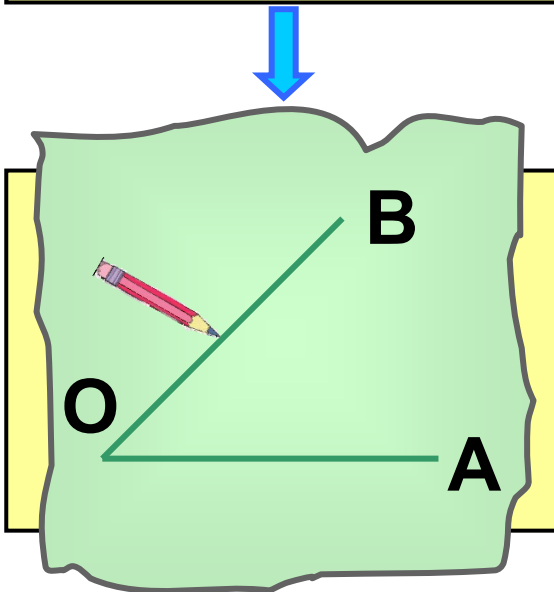
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να γίνει σύγκριση δύο γωνιών με ένα διαφανές χαρτί.

Λύση



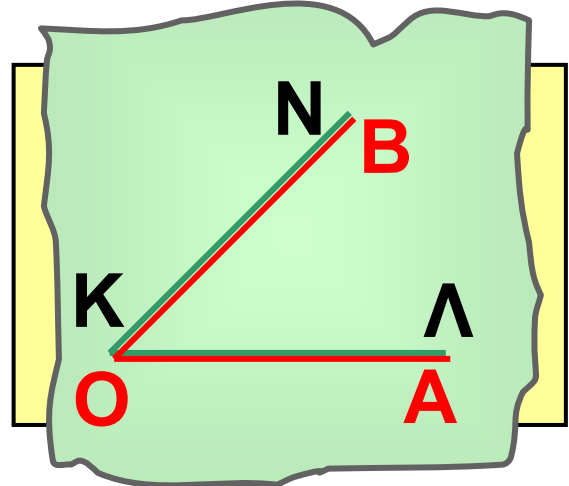
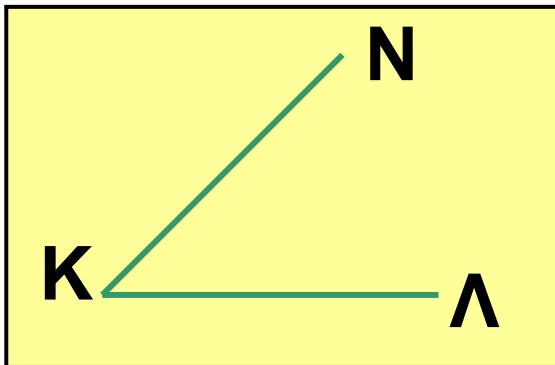
◆ Αποτυπώνουμε τη γωνία $\hat{A}OB$ στο διαφανές χαρτί.



◆ Τοποθετούμε το αποτύπωμα πάνω στη γωνία $\hat{A}OB$ έτσι, ώστε το O να ταυτιστεί με το K και η πλευρά OA με τη ΚΛ. Τότε μία μόνο από

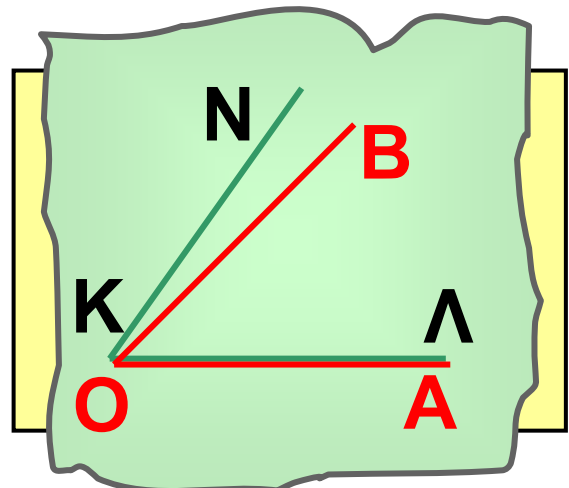
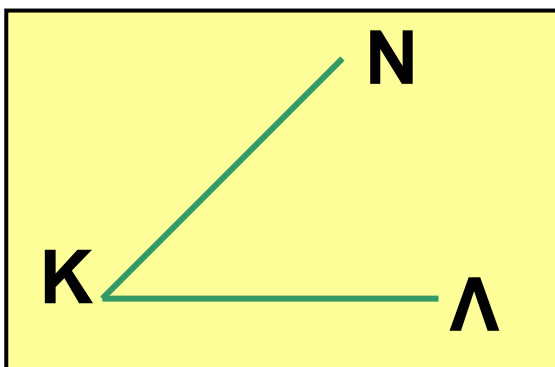
ΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΤΡΕΙΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ
ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΜΦΑΝΙΣΤΕΙ.

1η περίπτωση



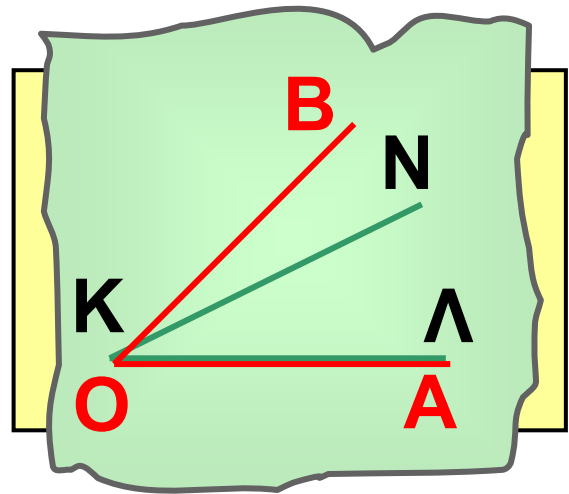
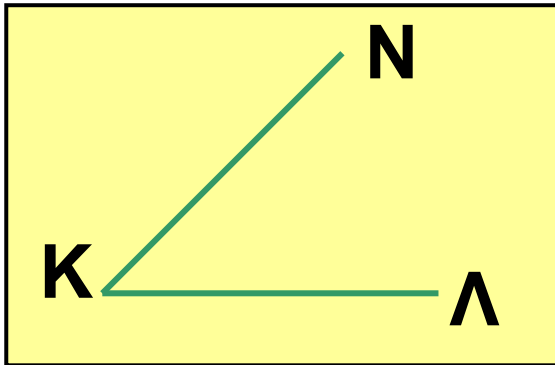
$$\hat{A}O\hat{B} = \hat{\Lambda}K\hat{N}$$

2η περίπτωση



$$\hat{A}O\hat{B} < \hat{\Lambda}K\hat{N}$$

3η περίπτωση



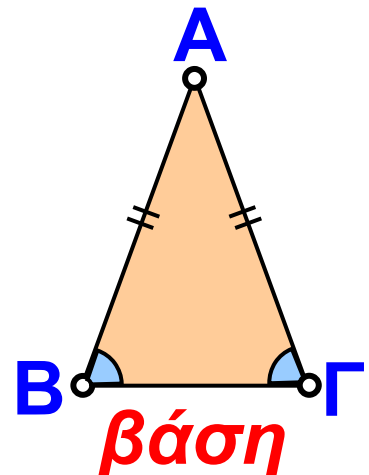
$$\hat{A}OB > \hat{\Lambda}KN$$

2. Να συγκριθούν οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου.

Λύση

Το ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές ίσες, δηλαδή $AB = AG$.

Με το διαφανές χαρτί συγκρίνουμε τις προσκείμενες στη βάση γωνίες B και Γ.



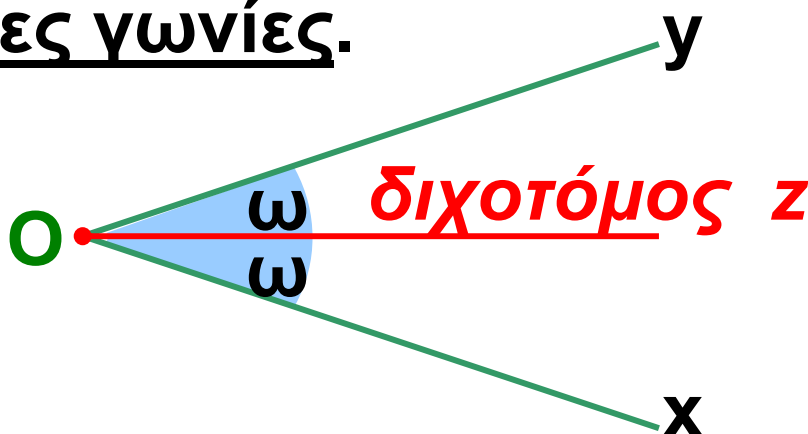
Διαπιστώνουμε ότι:

► Οι προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι ίσες.



Όπως κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα σημείο, το μέσο του, που το διαιρεί σε δύο ίσα μέρη, έτσι και κάθε γωνία έχει μία ημιευθεία στο εσωτερικό της, που τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

• Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.



3. Δίνεται μια γωνία \hat{xOy} . Να κατασκευαστεί η διχοτόμος της.

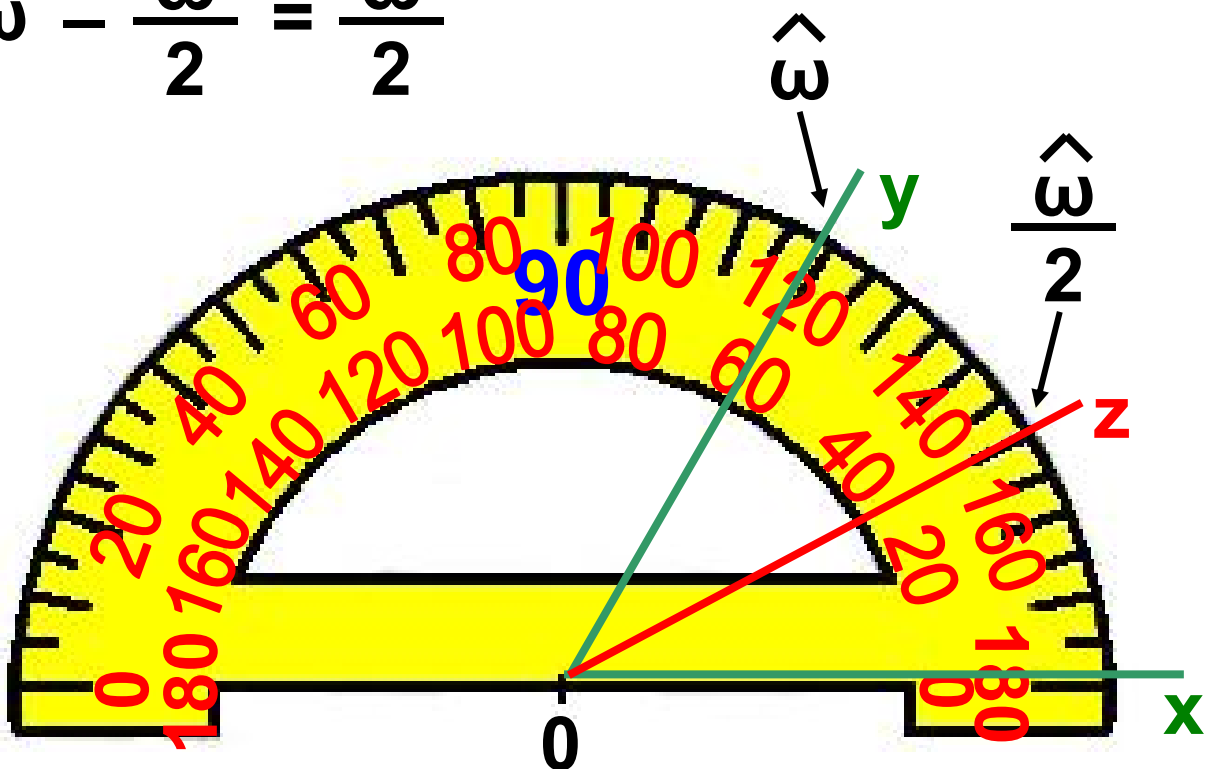
Λύση

1ος τρόπος: **Με το μοιρογνωμόνιο**

Μετράμε τη γωνία \hat{xOy} και βρίσκουμε το μέτρο της $\hat{\omega}$. Σχεδιάζουμε μια ημιευθεία Oz , μέσα στη γωνία, ώστε να προκύψει η γωνία \hat{xOz} , που έχει την ίδια κορυφή O , κοινή πλευρά Ox και μέτρο $\frac{\hat{\omega}}{2}$.

Τότε και η γωνία \hat{zOy} θα έχει μέτρο:

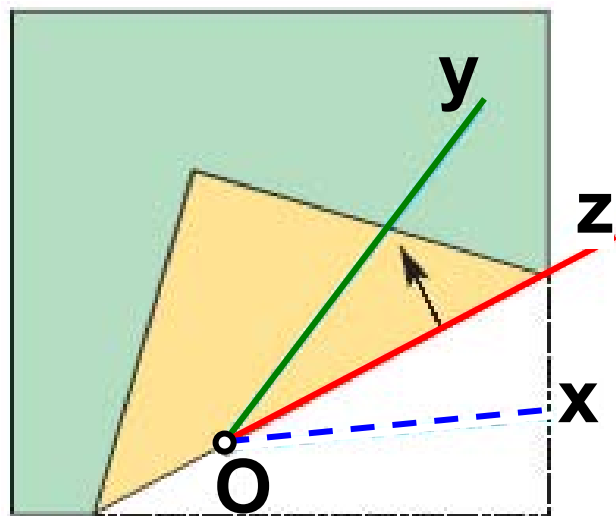
$$\hat{\omega} - \frac{\hat{\omega}}{2} = \frac{\hat{\omega}}{2}$$



◆ Άρα η ημιευθεία Oz είναι η διχοτόμος της γωνίας, διότι τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

2ος τρόπος: **Με δίπλωση χαρτιού**
Σχεδιάζουμε τη γωνία σε ένα φύλλο χαρτιού σχεδία-

σης. Το διπλώ-
νουμε με τέτοιο
τρόπο, ώστε
η ευθεία της
τσάκισης να
περάσει από



την κορυφή της γωνίας και
ταυτόχρονα η μία πλευρά της
γωνίας να συμπίπτει με την άλλη
πλευρά της. Τότε η ευθεία της
τσάκισης σχηματίζει με τις πλευρές
της γωνίας δύο ίσες γωνίες, αφού
με τη δίπλωση συνέπεσαν.

Άρα η ευθεία αυτή είναι η διχοτόμος
της γωνίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Από τι εξαρτάται το μέγεθος μιας γωνίας;

(Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση).

Από το “άνοιγμα” των πλευρών της

Από το μήκος των πλευρών

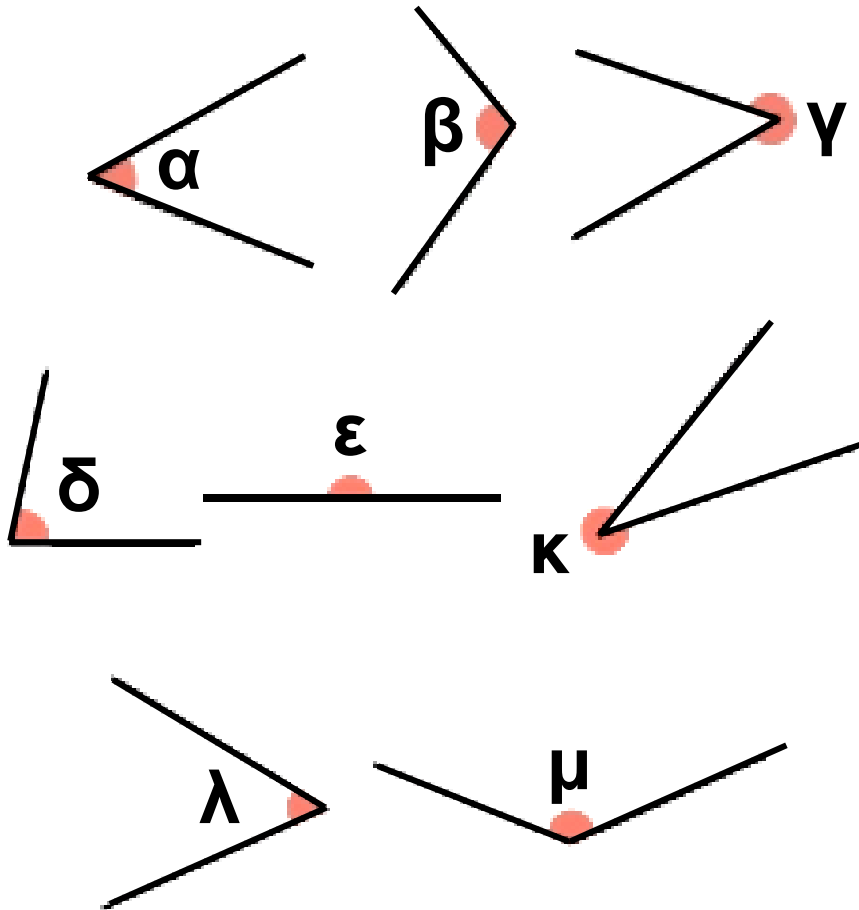
Και από τα δύο παραπάνω.

2. Σχεδίασε μια γωνία $\hat{xOy} = 76^\circ$.

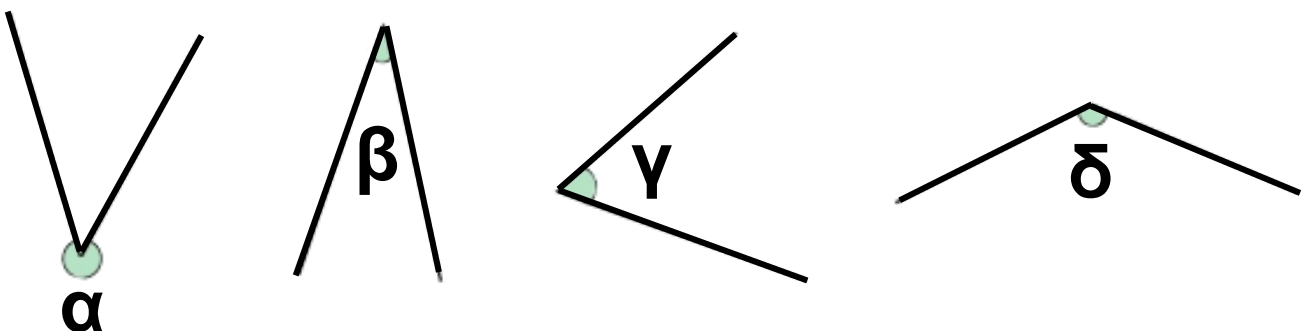
Να γράψεις μια ημιευθεία Oz που να χωρίζει τη γωνία \hat{xOy} σε δύο γωνίες, από τις οποίες η μία να είναι 56° .

3. Σχεδίασε τις γωνίες $\hat{\mu} = 48^\circ$,
 $\hat{\lambda} = 72^\circ$, $\hat{\kappa} = 17^\circ$, $\hat{\psi} = 6^\circ$, $\hat{\rho} = 90^\circ$,
 $\hat{\phi} = 170^\circ$, $\hat{\omega} = 215^\circ$ και $\hat{\theta} = 318^\circ$.

4. Να βρεις το μέτρο των παρακάτω γωνιών:

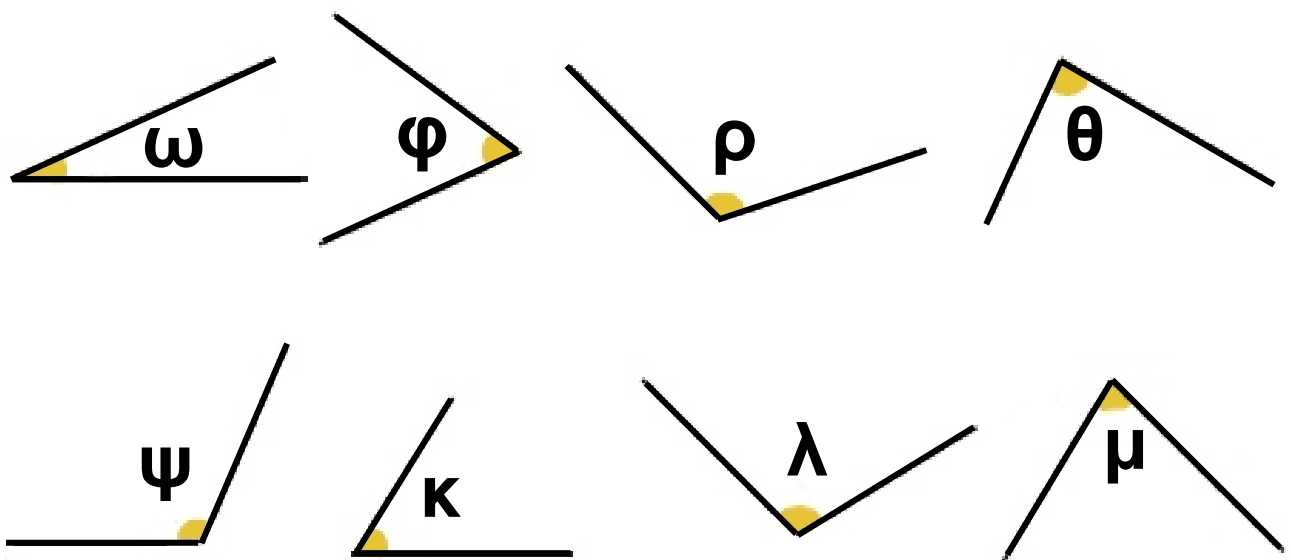


5. Να συγκρίνεις τις γωνίες και να τις γράψεις κατά σειρά από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη.



6. Με το διαφανές χαρτί να συγκρίνεις τις γωνίες:

- (α) $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$, (β) $\hat{\varphi}$ και $\hat{\rho}$,
(γ) $\hat{\omega}$ και $\hat{\rho}$, (δ) $\hat{\psi}$ και $\hat{\kappa}$,
(ε) $\hat{\psi}$ και $\hat{\lambda}$, (στ) $\hat{\psi}$ και $\hat{\mu}$,
(ζ) $\hat{\rho}$ και $\hat{\theta}$.



7. Σχημάτισε γωνίες (α) 48° ,
(β) 72° και (γ) 144° και σχεδίασε τις διχοτόμους αυτών.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

- 1. Σχεδίασε την πορεία μιας ακτίνας φωτός, η οποία προσπίπτει σε καθρέπτη και αντανακλάται.**
- 2. Σχεδίασε τη κίνηση μιας μπάλας μπιλιάρδου που κάνει μέχρι και τέσσερις ανακλάσεις στις πλευρές του μπιλιάρδου.**

B.1.6. Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε όλα τα παρακάτω αντικείμενα σχηματίζονται διάφορες γωνίες ανάλογα με τη σχετική θέση, κάθε φορά, δύο ημιευθειών που έχουν ένα κοινό σημείο, όπως π.χ. είναι οι δείκτες του ρολογιού, τα πόδια των ανθρώπων, τα φτερά του αετού κ.λπ. Η σειρά που τοποθετήθηκαν τα διάφορα σκίτσα είναι τυχαία.



➤ Μπορείς να βρεις τη σωστή αντιστοιχία;



Μηδενική Οξεία

Ορθή

Αμβλεία



Ευθεία



Μη Κυρτή



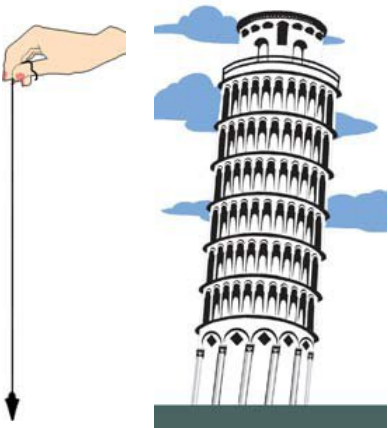
Πλήρης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Το σπίτι της διπλανής εικόνας έχει δύο καμινάδες.



- Ποια είναι η μεταξύ τους διαφορά;
- Ποια από τις δύο είναι κάθετη στη στέγη και γιατί;
- Γενικότερα, είναι δυνατό να έχουμε κάθετες ευθείες, χωρίς απαραίτητα να είναι αυτές οριζόντιες και κατακόρυφες;

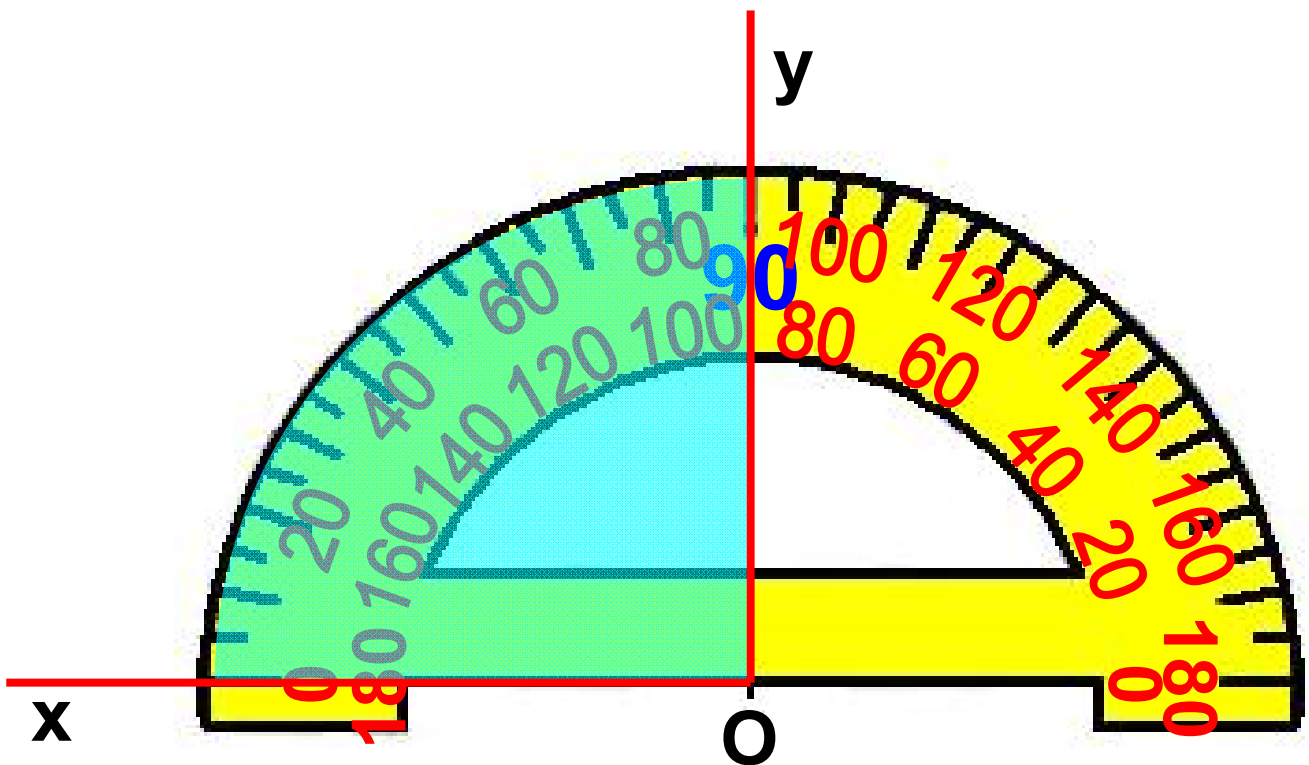


- Ξέρεις γιατί δε πέφτει ο πύργος της Πίζας;
- Πώς βρίσκουμε την κατακόρυφο σε ένα τόπο;
- Και πώς ελέγχουμε ότι ένα επίπεδο έχει οριζόντια θέση;

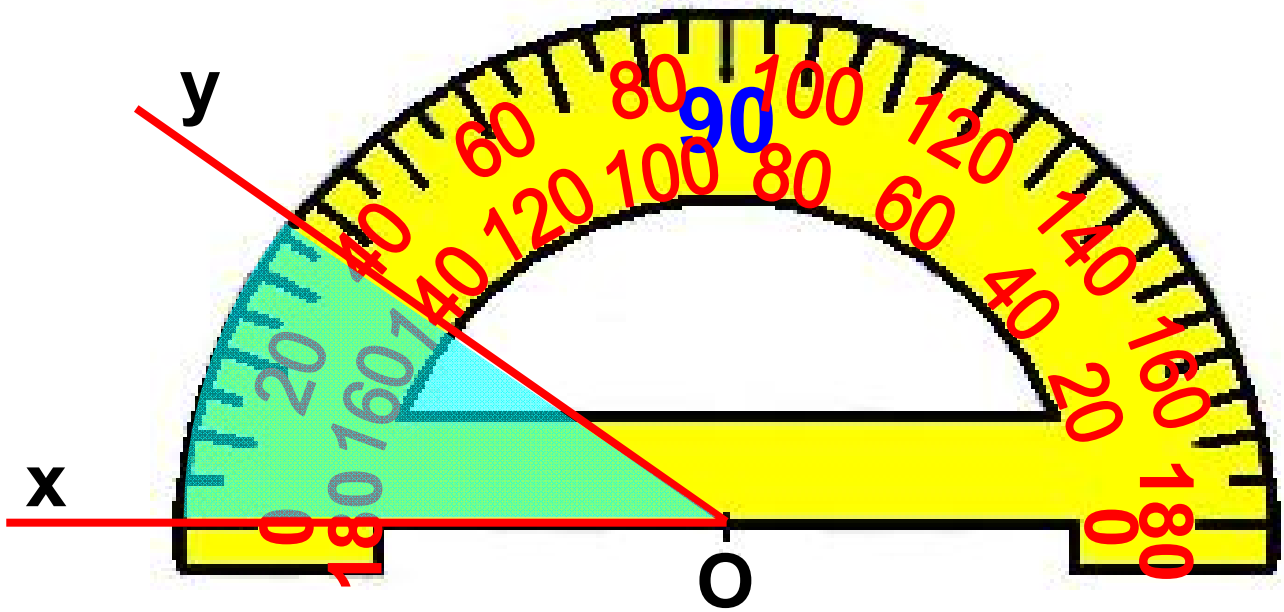
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Είδη γωνιών

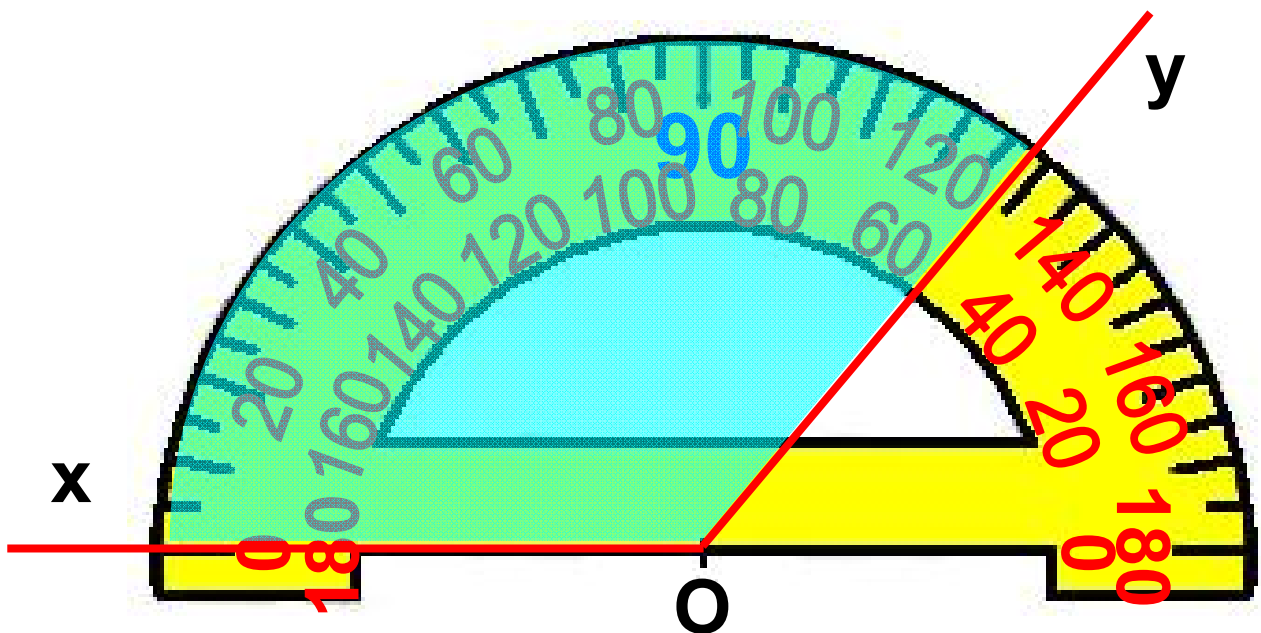
- Ορθή γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 90°
 - ▶ Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι κάθετες ημιευθείες



- Οξεία γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μικρότερο των 90°

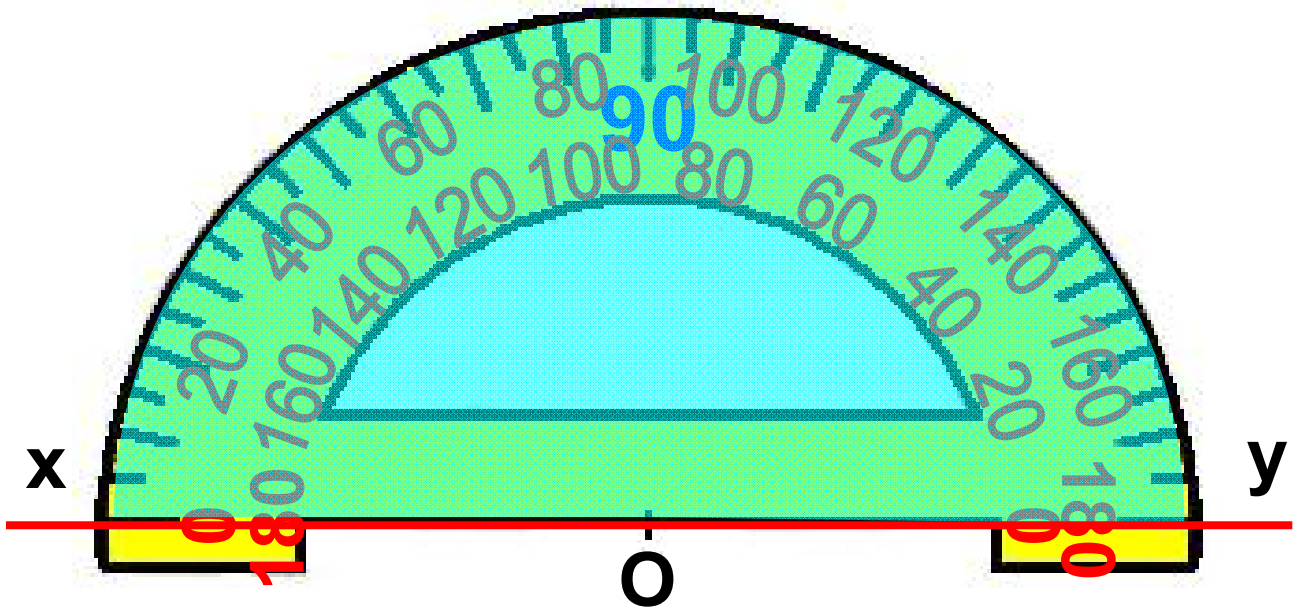


- Αμβλεία γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90° και μικρότερο των 180°

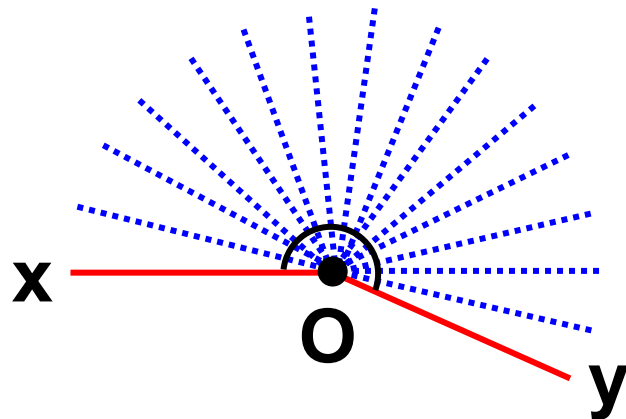


- Ευθεία γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 180°

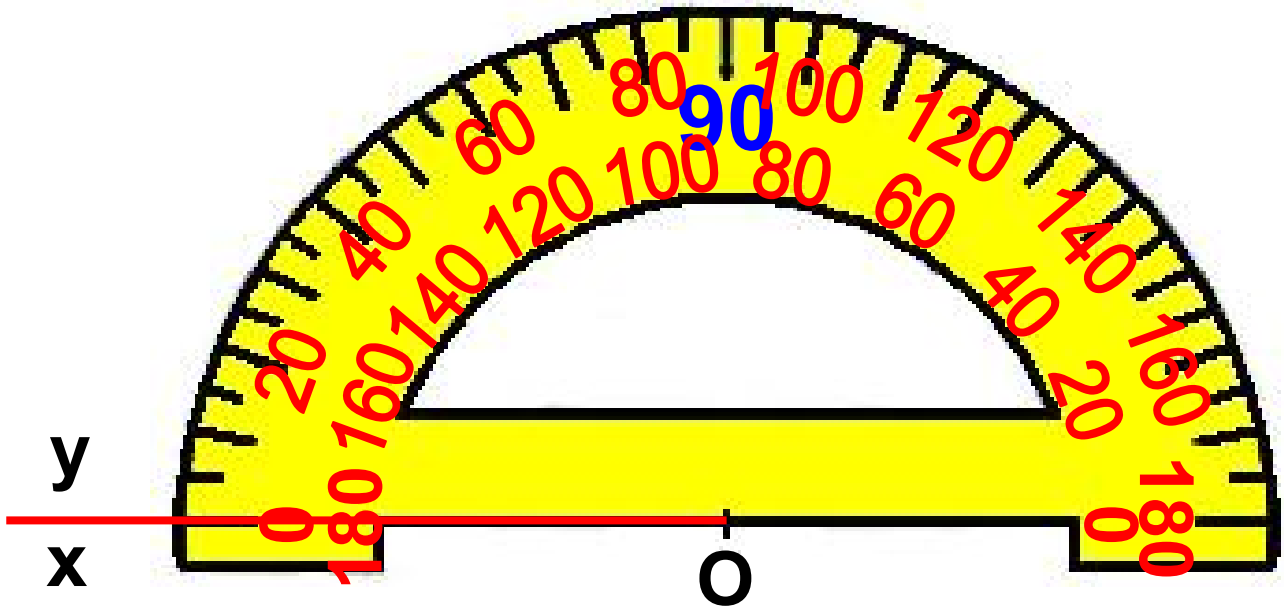
► Οι πλευρές της ευθείας γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες.



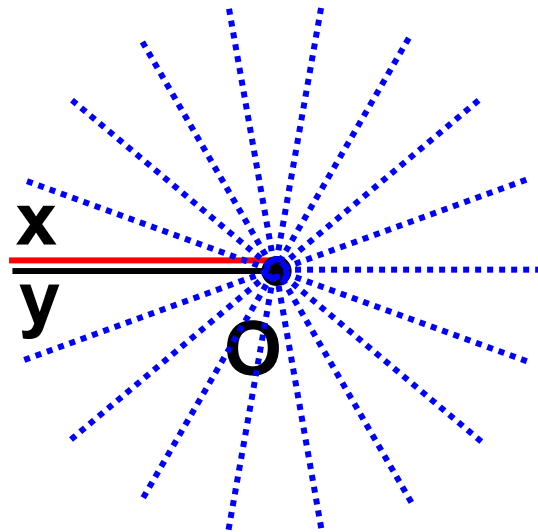
• Μη κυρτή γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 180° και μικρότερο των 360°



• Μηδενική γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 0°



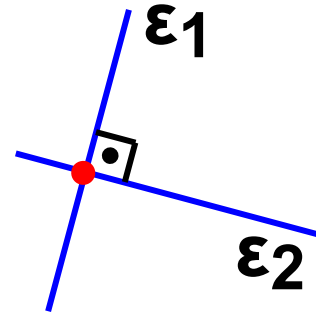
- Πλήρης γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 360°



- ◆ Η ημιευθεία της τελικής πλευράς μιας μηδενικής και μιας πλήρους γωνίας ταυτίζεται με αυτή της αρχικής πλευράς.

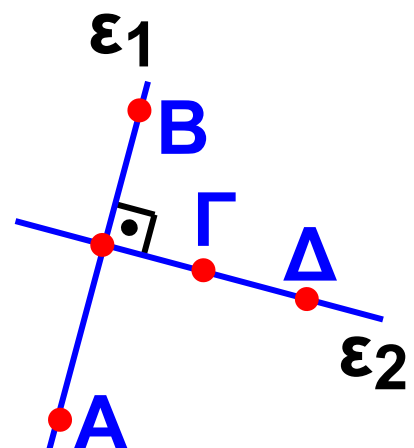
- Δύο ευθείες είναι κάθετες όταν οι γωνίες που σχηματίζουν αυτές τεμνόμενες, είναι ορθές.

Πώς συμβολίζουμε την κάθετότητα δύο ευθειών



- Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες χρησιμοποιούμε το σύμβολο « \perp » γράφουμε $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$ και διαβάζουμε «η ϵ_1 είναι κάθετη στην ϵ_2 ».

- Δύο ευθύγραμμα τμήματα (ή δύο ημιευθείες) που βρίσκονται πάνω σε δύο κάθετες ευθείες, λέγονται κάθετα ευθύγραμμα τμήματα (ή κάθετες ημιευθείες).



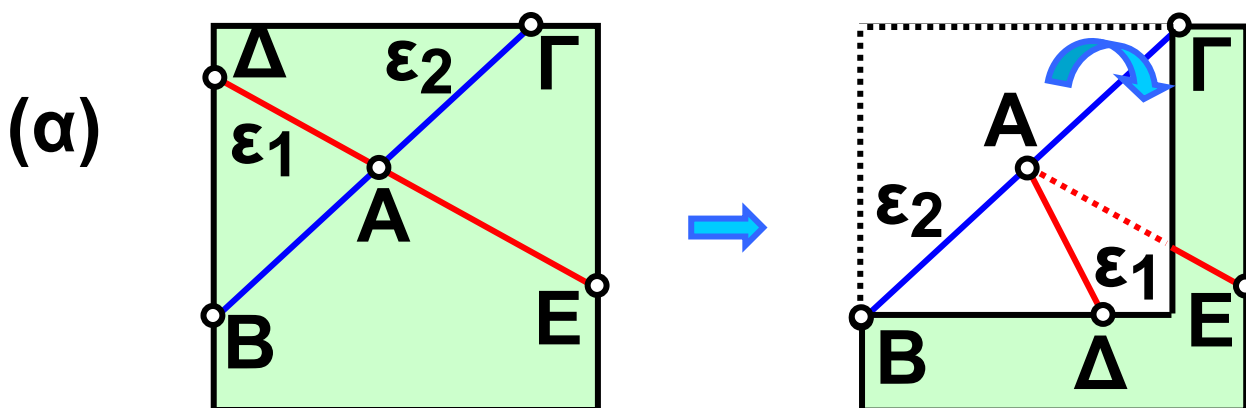
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Πως μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δύο τεμνόμενες ευθείες είναι κάθετες;



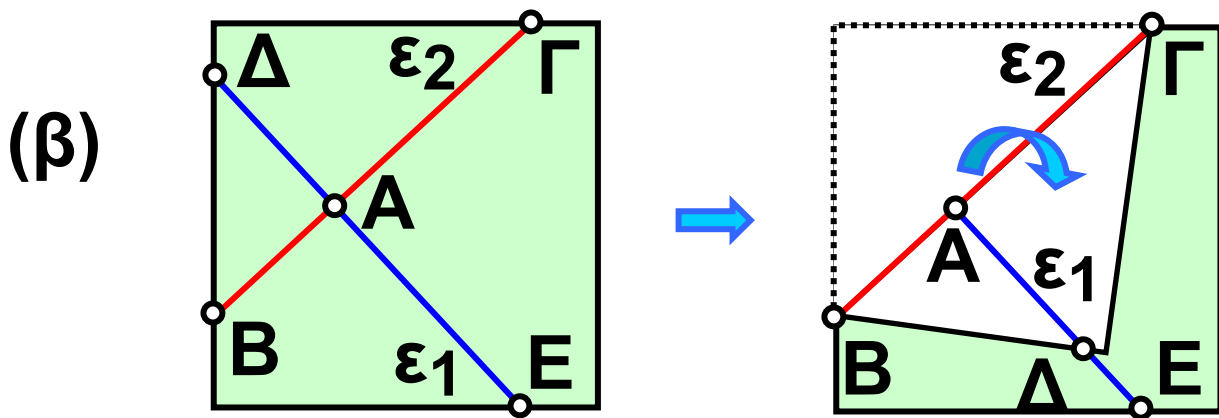
Λύση

Σχεδιάζουμε δύο τεμνόμενες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 σε ένα φύλλο χαρτί. Διπλώνουμε το χαρτί κατά μήκος της ευθείας ϵ_2 και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:



Οι ημιευθείες $A\Delta$ και AE δεν συμπίπτουν.

Επομένως οι τεμνόμενες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 δεν είναι κάθετες.

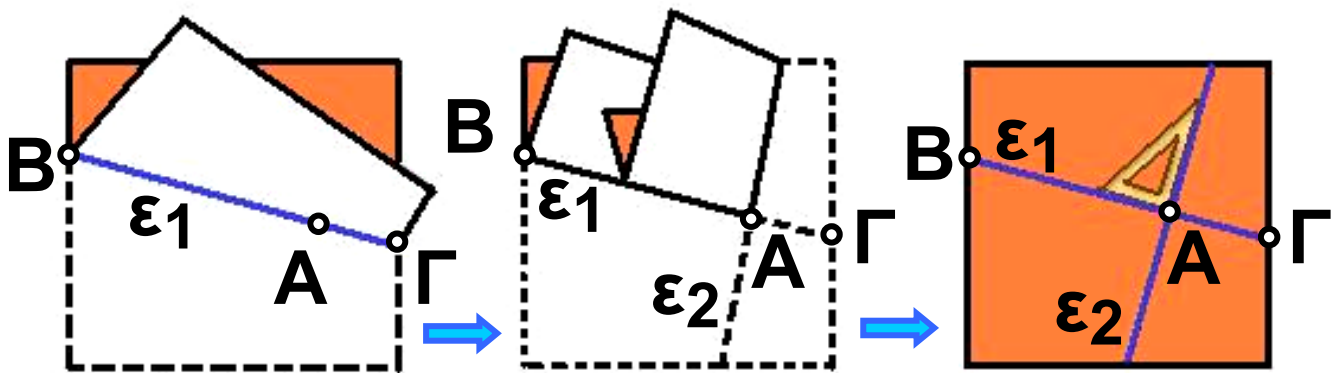


Οι ημιευθείες ΑΔ και ΑΕ συμπίπτουν. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες ($\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$).

2. Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο κάθετες ευθείες;

Λύση

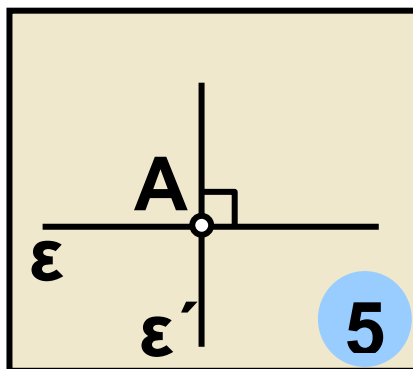
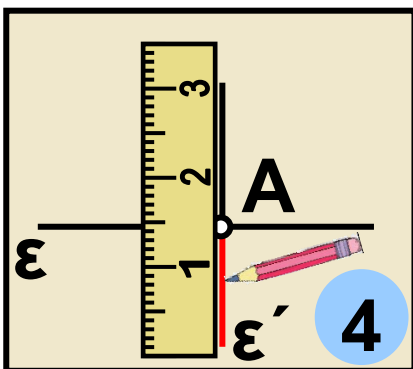
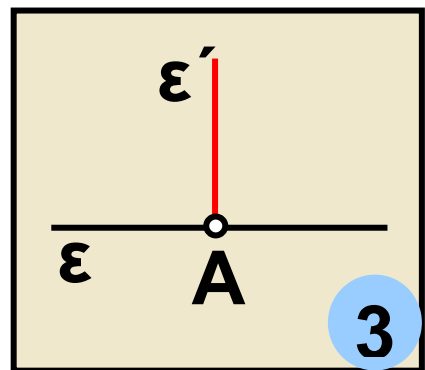
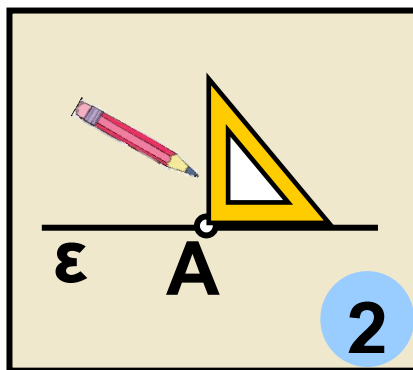
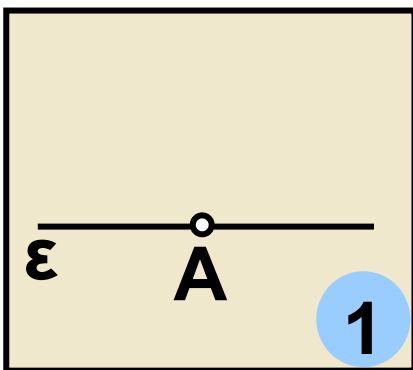
Αν διπλώσουμε το φύλλο χαρτί δύο φορές, με τον τρόπο που φαίνεται στα παρακάτω σχήματα και μετά το ανοίξουμε, παρατηρούμε ότι τα τσακίσματα, που έγιναν πάνω στο χαρτί, παριστάνουν δύο κάθετες ευθείες ε_1 , και ε_2 .



3. Να σχεδιαστεί ευθεία ϵ' , που διέρχεται από σημείο A και είναι κάθετη σε ευθεία ϵ .

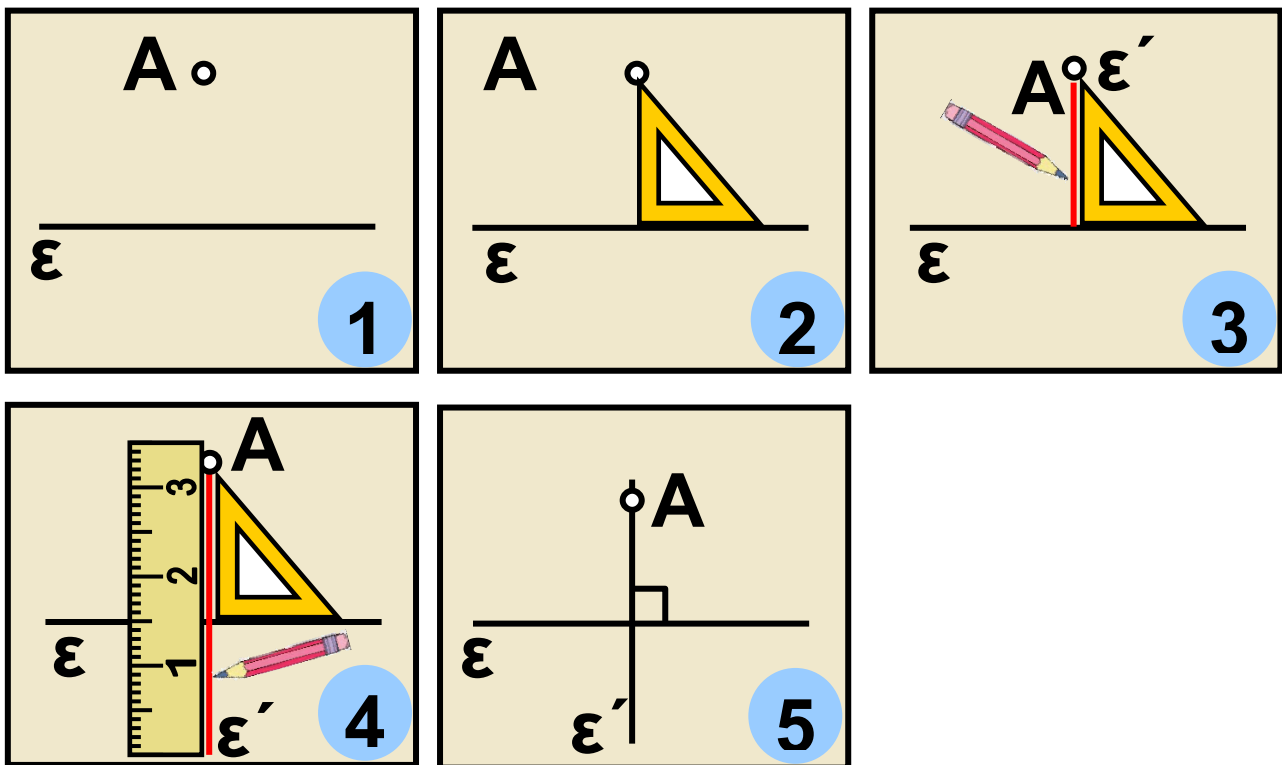
1η περίπτωση:

Το σημείο A ανήκει στην ϵ



2η περίπτωση:

Το σημείο A δεν ανήκει στην ε

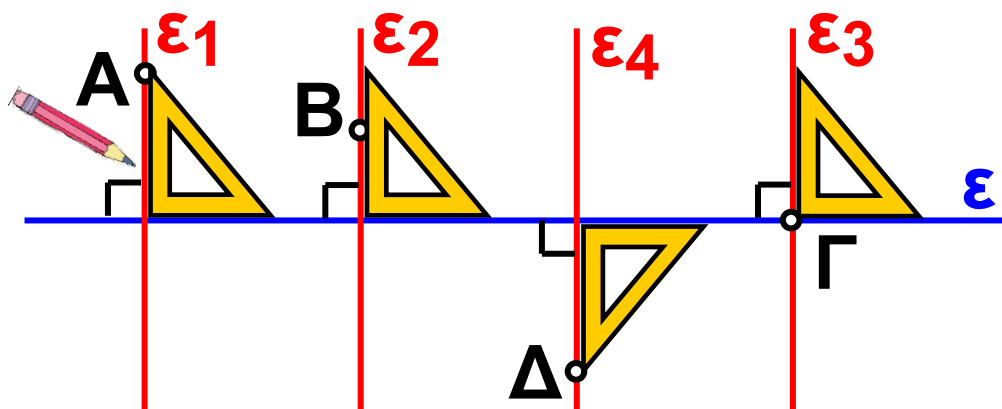


4. Δίνεται η ευθεία ε και τα σημεία A, B, Γ και Δ . Να σχεδιαστούν ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4 , που διέρχονται από αυτά τα σημεία αντίστοιχα, κάθετες στην ε .

Λύση

Τοποθετούμε τον γνώμονα πάνω στην ευθεία ε έτσι, ώστε η μία από τις δύο κάθετες πλευρές του να

συμπίπτει με την ευθεία ϵ . Σύρουμε τον γνώνιμο στην ευθεία ϵ , έως ότου η άλλη κάθετη πλευρά του να έρθει σε επαφή με ένα από τα δοσμένα σημεία. Από το σημείο αυτό χαράζουμε την ευθεία που είναι κάθετη στην ϵ . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή, για κάθε σημείο A, B, Γ και Δ και κατασκευάζουμε τις ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ και ϵ_4 αντίστοιχα, που είναι κάθετες στην ευθεία ϵ .



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(α) Αν οι πλευρές μιας γωνίας είναι ημιευθείες κάθετες μεταξύ τους, τότε η γωνία λέγεται:

Οξεία **Ορθή** **Αμβλεία.**

(β) Αν σε μια γωνία η τελική πλευρά της ταυτίζεται με την αρχική, αφού κάνει μια πλήρη στροφή, τότε η γωνία λέγεται:

Μηδενική γωνία

Ευθεία γωνία **Πλήρης γωνία.**

2. Σχεδίασε ημιευθεία Ox και χάραξε ευθεία που να διέρχεται από το O κάθετη στην Ox

3. Σχεδίασε δύο ευθείες που να διέρχονται από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος και να είναι κάθετες σ' αυτό.

4. Σχεδίασε δύο ημιευθείες Ox και Oy που να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία. Σημείωσε στην Ox τρία σημεία A , B και Γ . Από κάθε σημείο από αυτά σχεδίασε ευθεία κάθετη προς την Oy .

5. Σχεδίασε δύο ημιευθείες Ox και Oy που να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία. Στο σημείο O να φέρεις τις κάθετες ευθείες προς τις Ox και Oy . Τι παρατηρείς;

6. Σχεδίασε ένα τρίγωνο και φέρε από κάθε κορυφή του την κάθετη προς την απέναντι πλευρά του.

7. Σχεδίασε μια ευθεία ϵ και δύο σημεία A και B που δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή. Φέρε από τα A και B ευθείες κάθετες προς την ϵ και

εξέτασε σε ποια περίπτωση οι δύο αυτές κάθετες συμπίπτουν.

8. Τοποθέτησε τις παρακάτω ονομασίες γωνιών, με σειρά μεγέθους του μέτρου τους: Ορθή - Ευθεία - Πλήρης - Αμβλεία - Μηδενική - Μη κυρτή - Οξεία.

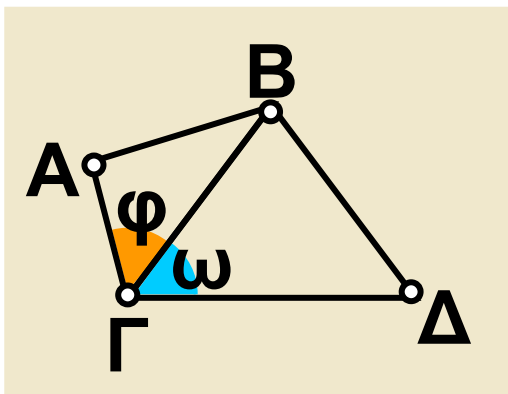
B.1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών



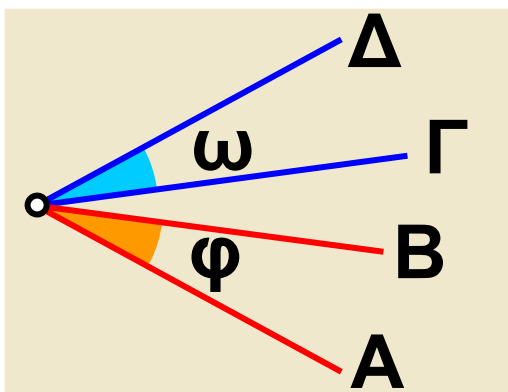
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε καθένα από τα παρακάτω τρία σχήματα υπάρχουν δύο γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$.

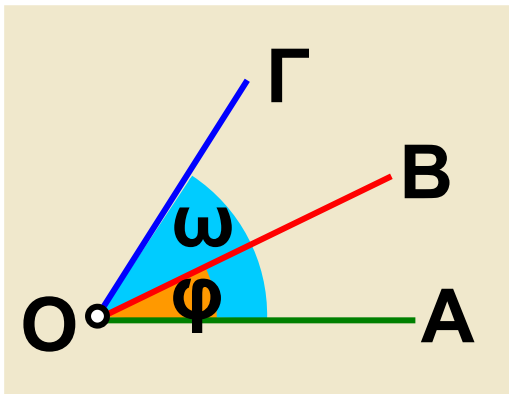
➤ Συμπλήρωσε τα κενά στην πρόταση που αντιστοιχεί σε καθένα από τα τρία σχήματα και δικαιολόγησε την απάντησή σου.



Έχουν κοινή την
..... και την
..... και κανένα
άλλο κοινό σημείο



Έχουν μόνο κοινή
..... και κανένα
άλλο κοινό σημείο



Έχουν κοινή την

..... μία

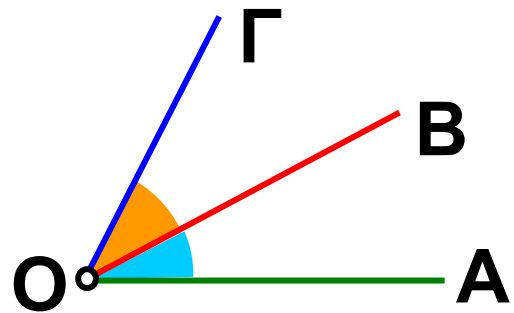
.....

και

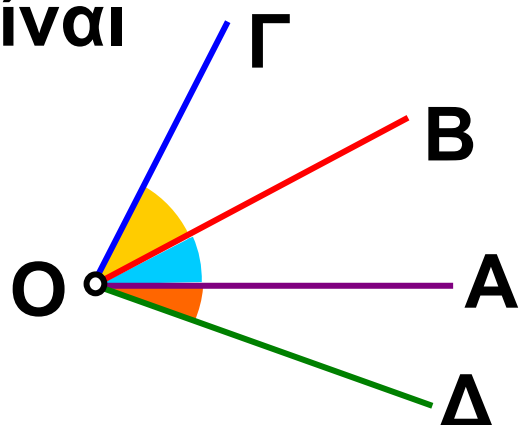
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



• Εφεξής γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.



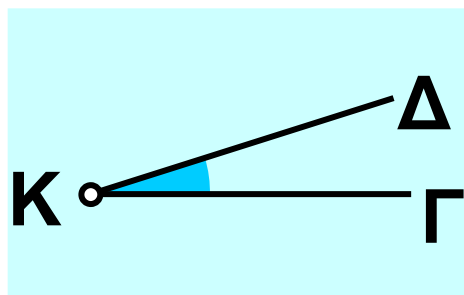
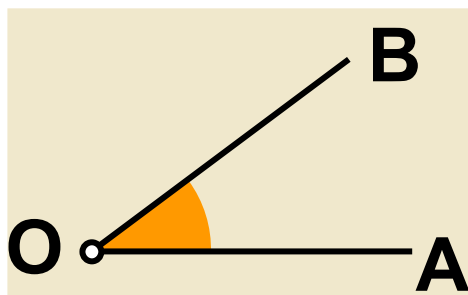
• Διαδοχικές γωνίες λέγονται περισσότερες από δύο γωνίες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενη της.



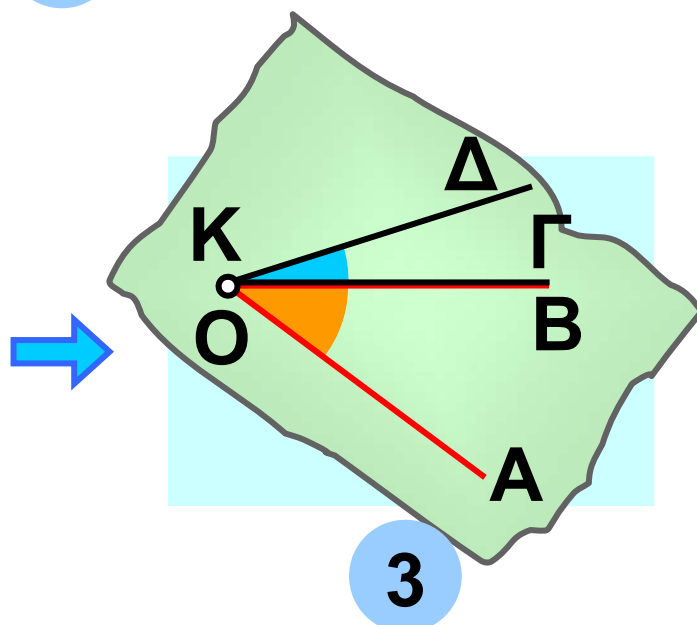
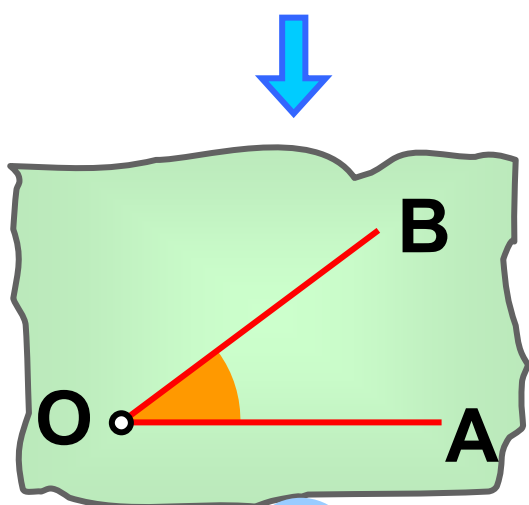
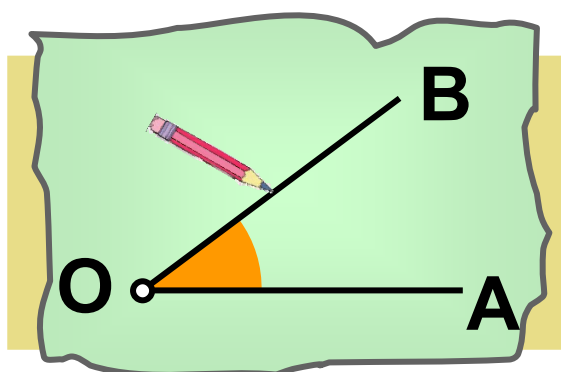
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Υπάρχει τρόπος για να γίνουν δύο γωνίες εφεξής;

Λύση



Αποτυπώνουμε τη μία γωνία σε διαφανές χαρτί και τη μεταφέρουμε κατάλληλα έτσι, ώστε να γίνει εφεξής με την άλλη.

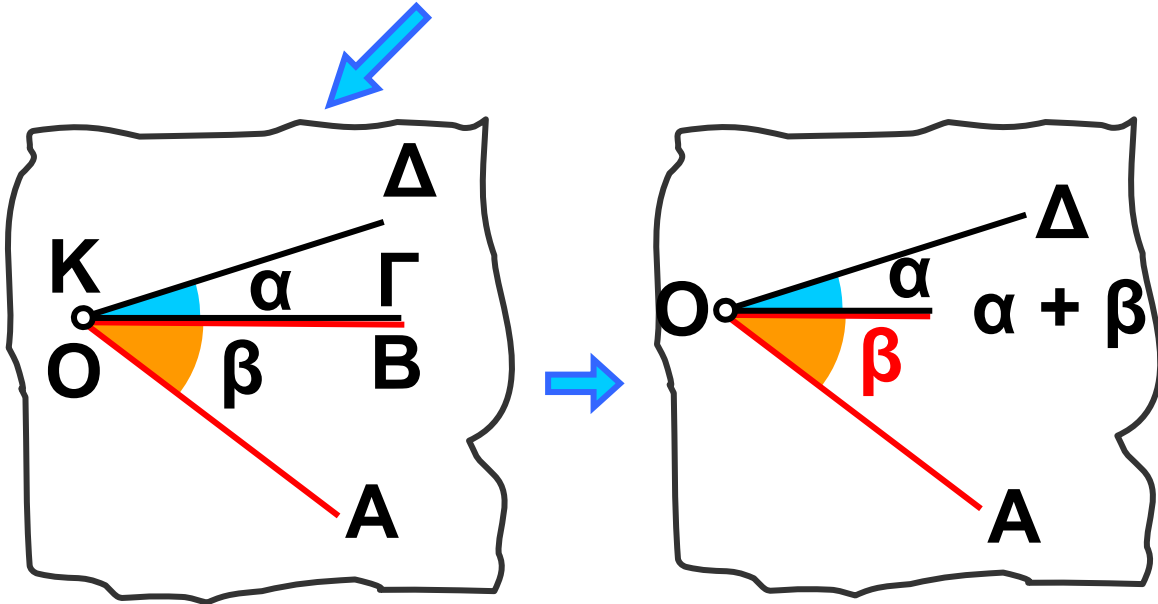
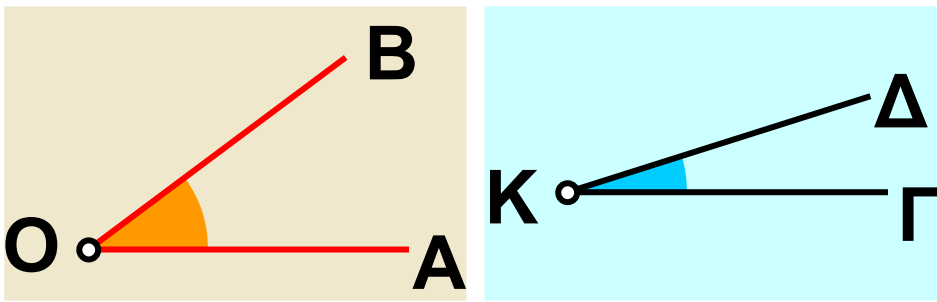


Σε αρκετές περιπτώσεις χρειάζεται να προσθέσουμε δύο γωνίες, δηλαδή να βρούμε μια τρίτη γωνία, που να είναι το άθροισμά τους. Ας δούμε πως γίνεται αυτό.

2. Να βρεθεί η γωνία, που είναι άθροισμα δύο γωνιών.

Λύση

Με το διαφανές χαρτί, όπως κάναμε και προηγουμένως, φέρνουμε τις δύο γωνίες $\hat{A}O\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}K\hat{\Delta}$ σε θέση τέτοια, ώστε να γίνουν εφεξής. Τότε οι μη κοινές πλευρές OA και OD σχηματίζουν μια νέα γωνία την $\hat{A}O\hat{D}$, για την οποία διαπιστώνουμε, με το μοιρογνωμόνιο, ότι έχει μέτρο $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$, δηλαδή είναι το άθροισμα των μέτρων ($\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$) των δύο γωνιών.



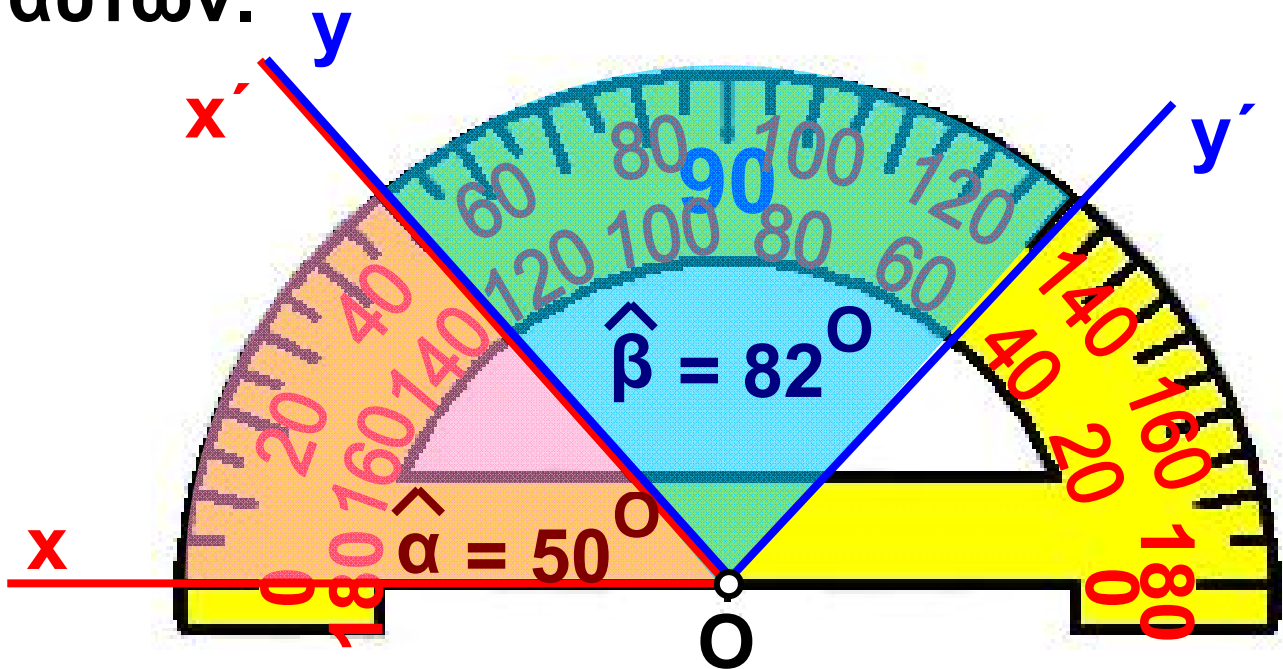
3. Να βρεθεί το άθροισμα δύο γωνιών με μέτρα 50° και 82° .

Λύση

Έστω οι γωνίες $\hat{xOx'}$ και $\hat{yOy'}$ με μέτρα $\hat{\alpha} = 50^{\circ}$ και $\hat{\beta} = 82^{\circ}$ αντίστοιχα. Η γωνία $\hat{xOy'}$ που έχει άνοιγμα:

$$\hat{xOy'} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 50^{\circ} + 82^{\circ} = 132^{\circ},$$

είναι το άθροισμα των γωνιών αυτών.



4. Δίνεται ευθεία $x'x$. Από ένα σημείο O της ευθείας φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της, δυο ημιευθείες Oy και Oz . Να βρεθεί το άθροισμα των τριών γωνιών, που σχηματίζονται, όπως φαίνεται στο σχήμα στην επόμενη σελίδα.

Λύση

Όπως παρατηρούμε, η γωνία $x\hat{O}x'$ είναι το άθροισμα των διαδοχικών

γωνιών $\hat{yOx'}$, \hat{yOz} και \hat{zOy} . Άρα το μέτρο της $\hat{\delta}$ είναι το άθροισμα των αντίστοιχων μέτρων $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ των γωνιών

αυτών, δηλαδή

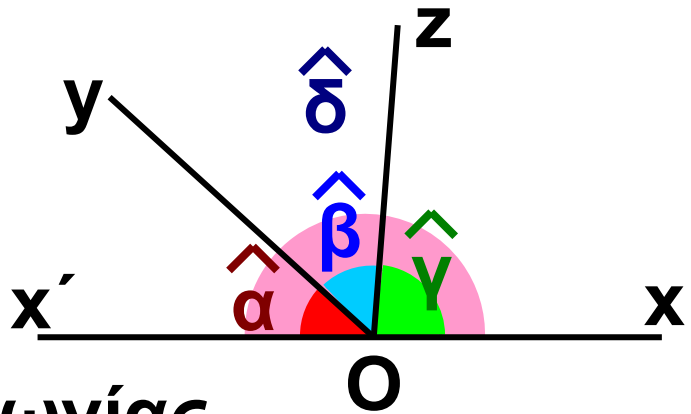
$$\hat{\delta} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}.$$

Επειδή όμως

οι πλευρές της γωνίας

$\hat{xOx'}$ είναι αντικείμενες ημιευθείες, η γωνία αυτή έχει μέτρο $\hat{\delta} = 180^\circ$

Άρα, $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180^\circ$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

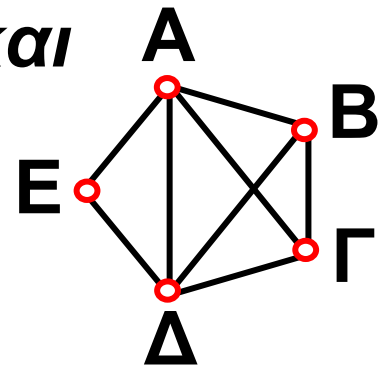


1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

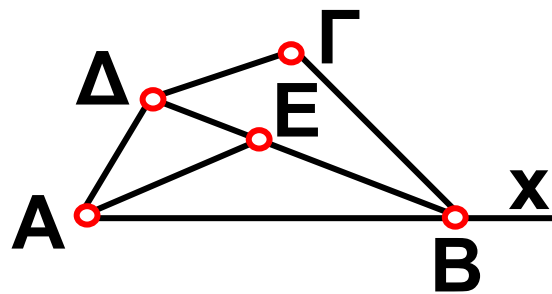
(α) Δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μια κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο ονομάζονται

(β) Τρεις ή περισσότερες γωνίες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενη της λέγονται

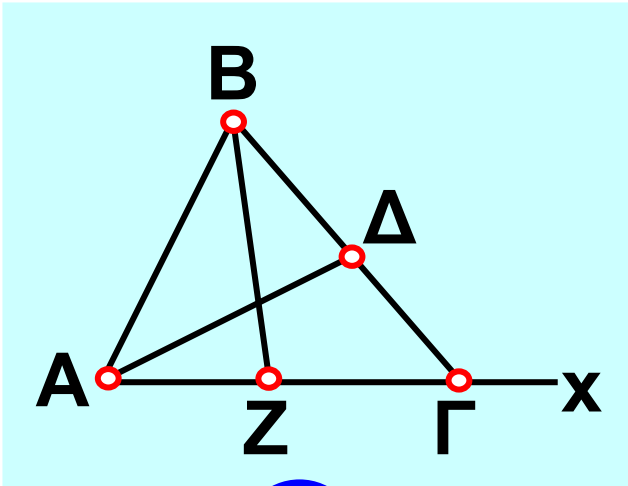
2. Να βρεις στο σχήμα και να ονομάσεις όλες τις εφεξής και όλες τις διαδοχικές γωνίες.



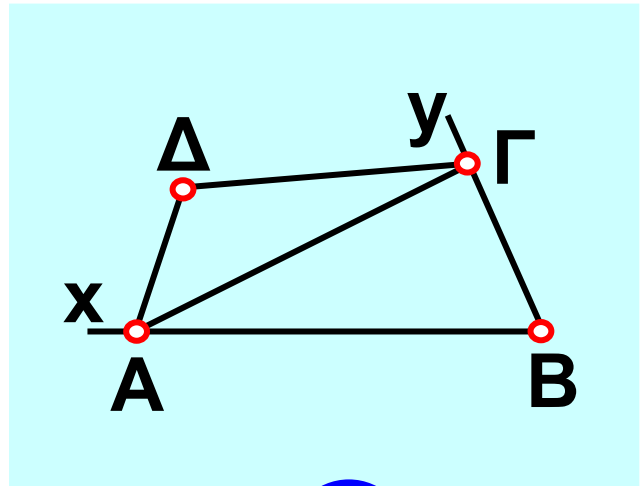
3. Να βρεις τα ζεύγη των εφεξής γωνιών στο σχήμα.



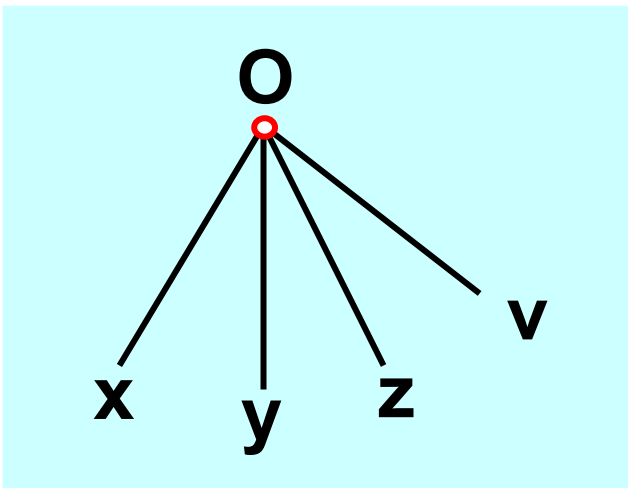
4. Να γράψεις τις εφεξής και τις διαδοχικές γωνίες που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα.



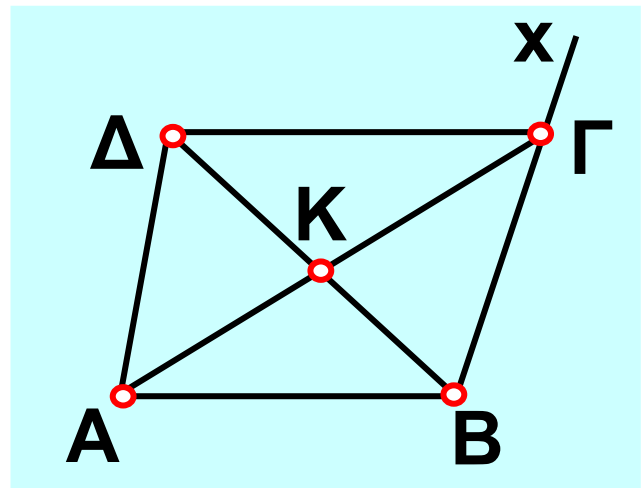
1



2



3



4

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Β΄ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο –

Βασικές γεωμετρικές έννοιες ...7

- 1.1. Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα
– Ευθεία – Ημιευθεία –
Επίπεδο – Ημιεπίπεδο18
- 1.2. Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα
σχήματα – Ευθύγραμμα
σχήματα – Ίσα σχήματα35
- 1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισό-
τητα ευθύγραμμων τμημάτων
– Απόσταση σημείων – Μέσο
ευθύγραμμου τμήματος47
- 1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση
ευθύγραμμων τμημάτων70
- 1.5. Μέτρηση, σύγκριση και
ισότητα γωνιών – Διχοτόμος
γωνίας78

1.6. Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες	92
1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών ..	108

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.