Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Τόμος 2ος

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ιωάννης Βανδουλάκης, ***Μαθημ/κός***
Χαράλαμπος Καλλιγάς, ***Μαθημ/κός-Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης***
Νικηφόρος Μαρκάκης, ***Μαθημ/κός Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπ/σης***
Σπύρος Φερεντίνος, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Χαράλαμπος Τσίτουρας,
Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ - Χαλκίδας
Γεώργιος Μπαραλός, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***
Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου, ***Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Κλειώ Γκιζελή, ***Ζωγράφος***
Ιόλη Κυρούση, ***Γραφίστρια***

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Βαρβάρα Δερνελή, ***Φιλόλογος Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπ/σης***

<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ</u>

Αθανάσιος Σκούρας,
Σύμβουλος Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

<u>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</u>

Μανώλης Χάρος, *Ζωγράφος*

<u>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</u>

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Στη συγγραφή του πρώτου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και η Θεοδώρα Αστέρη, *Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Τόμος 2ος

Β.1.8. Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατά κορυφήν γωνίες

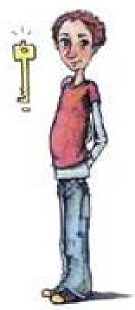
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δύο γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ είναι εφεξής.
Οι μη κοινές πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.

- ***Μπορείς να βρεις το άθροισμά τους;***

Δύο γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ είναι εφεξής. Οι μη κοινές πλευρές τους είναι κάθετες ημιευθείες.

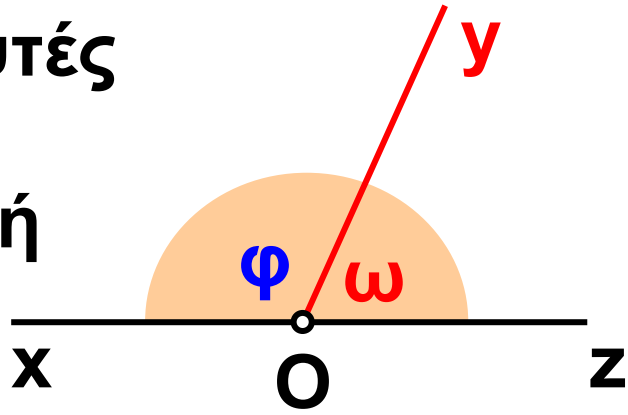
- ***Μπορείς να βρεις το άθροισμά τους;***



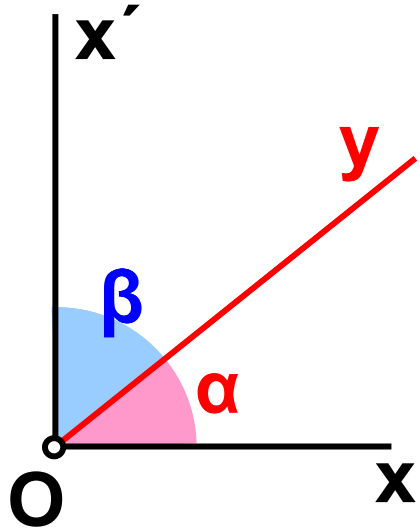
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **<u>Παραπληρωματικές γωνίες</u> ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν <u>άθροισμα 180^{o}.</u>**

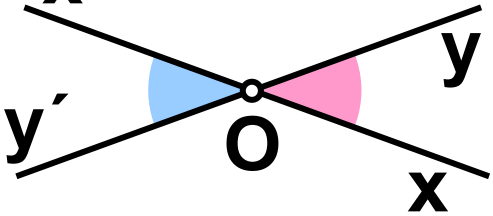
Η κάθε μία από αυτές λέγεται παραπληρωματική της άλλης.



• Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90^{o}. Η κάθε μία από αυτές λέγεται συμπληρωματική της άλλης.



• Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται η γωνία $x\hat{O}y$ με μέτρο $\hat{\alpha} = 72^o$. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η παραπληρωματική της.

Λύση

Έστω ότι η παραπληρωματική της $\hat{\alpha}$ έχει μέτρο $\hat{\beta}$. Θα είναι τότε:

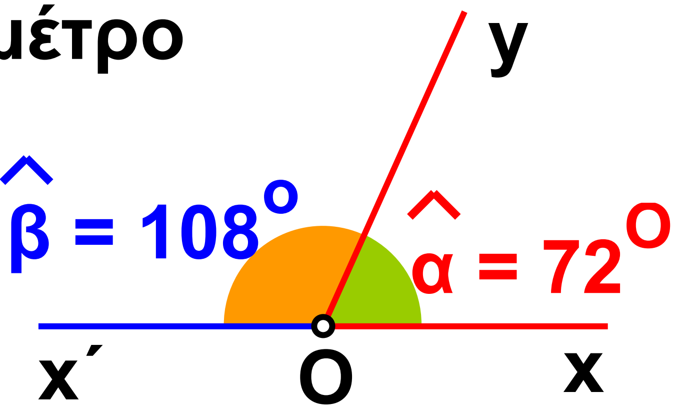
$\hat{\beta} = 180^o - \hat{\alpha}$, δηλαδή θα είναι:

$\hat{\beta} = 180^o - 72^o = 108^o$

Για να σχεδιάσουμε την παραπληρωματική μιας γωνίας $x\hat{O}y$, προεκτείνουμε την πλευρά αυτής Οx προς το μέρος του Ο, οπότε έχουμε την ημιευθεία Οx΄, αντικείμενη της Οx. Έτσι σχηματίζεται η γωνία $y\hat{O}x΄$, που είναι παραπληρωματική

της $x\widehat{O}y$ και έχει μέτρο το $\widehat{\beta}$, ώστε να είναι:

$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 180^o$.



2. ***Δίνεται η γωνία $x\widehat{O}y$ με μέτρο $\widehat{\alpha} = 33^o$. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η συμπληρωματική της.***

Λύση

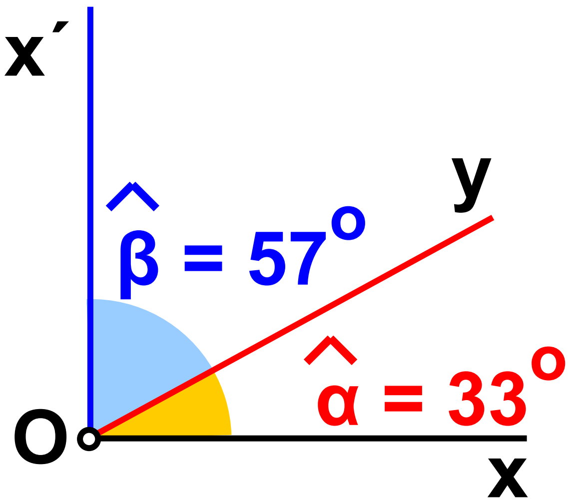
Έστω ότι η συμπληρωματική της $\widehat{\alpha}$ έχει μέτρο $\widehat{\beta}$.

Θα είναι τότε $\widehat{\beta} = 90^o - \widehat{\alpha}$, δηλαδή θα είναι: $\widehat{\beta} = 90^o - 33^o = 57^o$.

Για να σχεδιάσουμε τη συμπληρωματική μιας γωνίας $x\widehat{O}y$ φέρνουμε την ημιευθεία $Ox´ \perp Ox$ προς το μέρος του ημιεπιπέδου που βρίσκεται η Oy.

Έτσι σχηματίζεται η γωνία $y\hat{O}x'$, που είναι συμπληρωματική της $x\hat{O}y$ και έχει μέτρο το $\hat{\beta}$, ώστε να είναι:

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^o$.

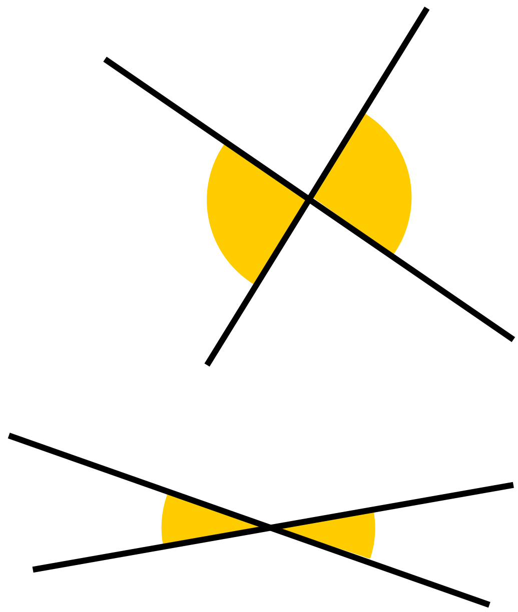


3. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις οι γωνίες είναι κατακορυφήν και γιατί;

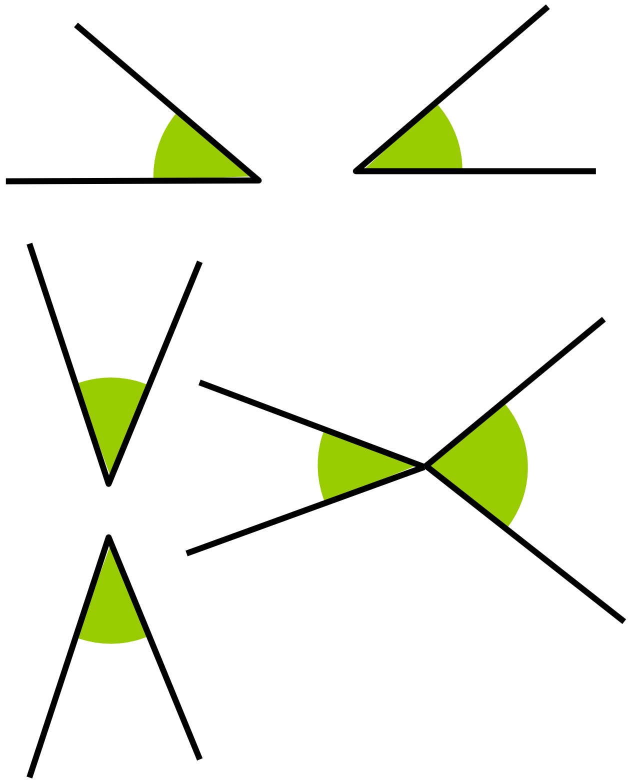
Λύση

Είναι κατακορυφήν

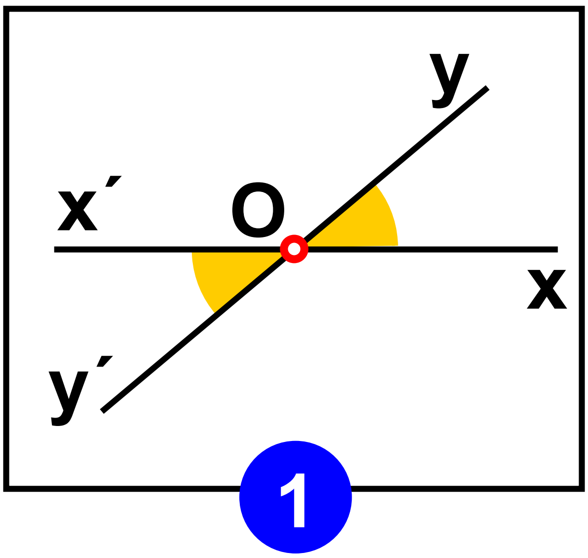
Διότι έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.

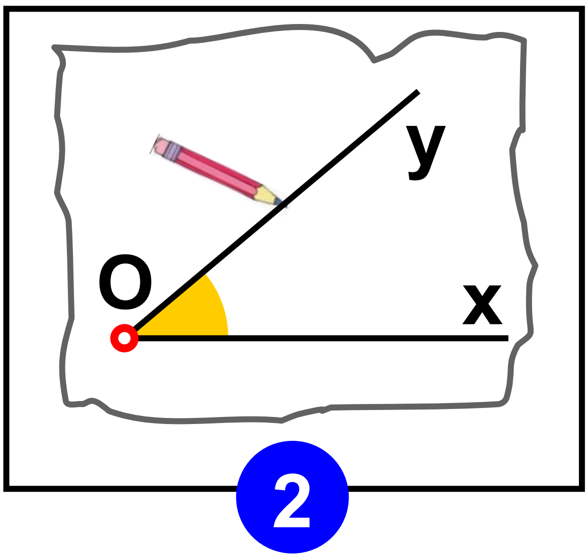


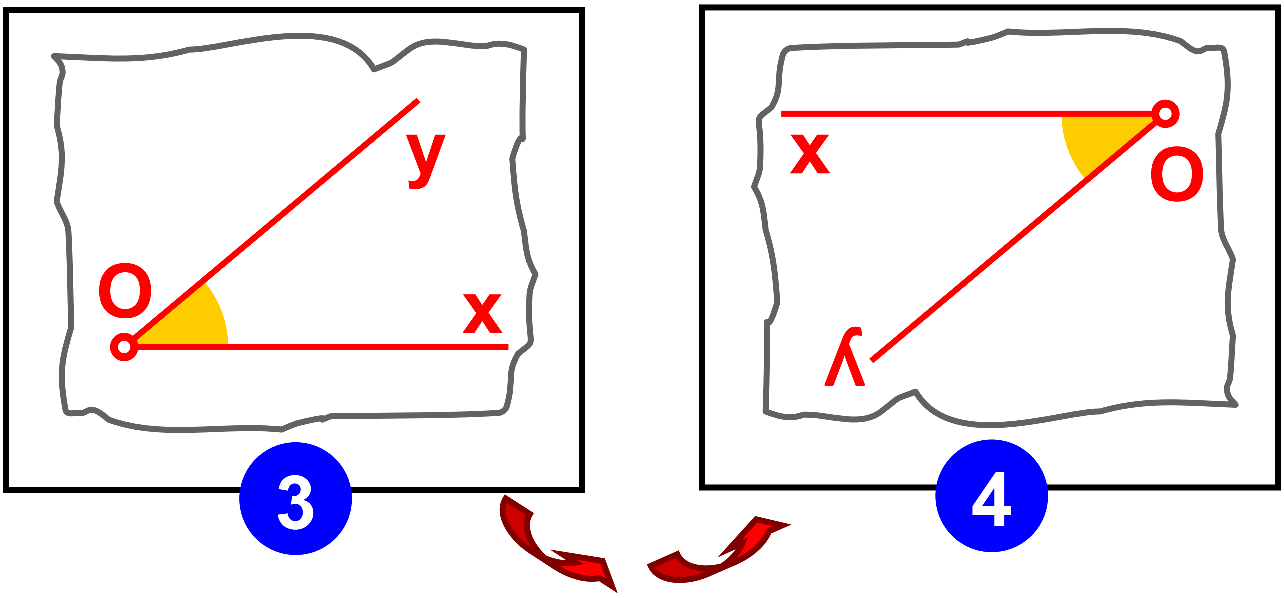
Δεν είναι κατακορυφήν
Διότι ή δεν έχουν κοινή κορυφή ή οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.



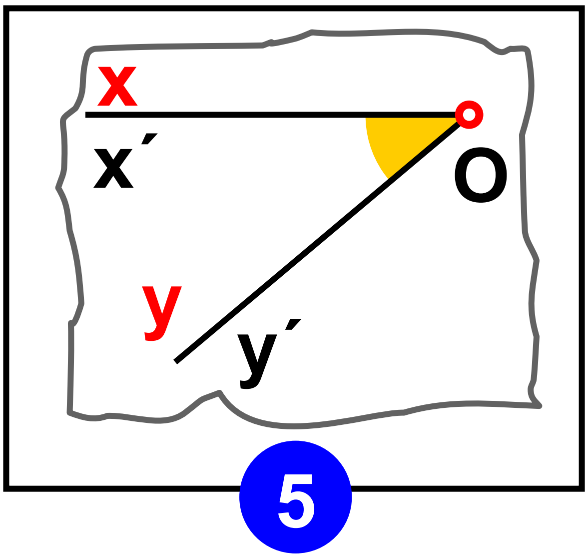
4. Να εξεταστεί με διαφανές χαρτί η σχέση δύο κατακορυφήν γωνιών.







Αναποδογυρίζουμε το διαφανές χαρτί.



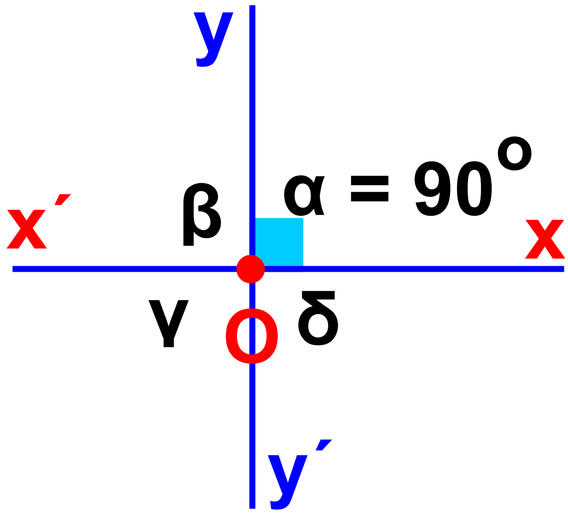
Διαπιστώνουμε, λοιπόν ότι:

- **Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.**

5. Να δικαιολογηθεί γιατί δύο κάθετες ευθείες σχηματίζουν τέσσερις ορθές γωνίες.

Λύση

Σχεδιάζουμε μια ορθή γωνία $x\hat{O}y$ (με μέτρο $\hat{\alpha} = 90^o$) και προεκτείνουμε τις πλευρές της προς το μέρος



της κορυφής της, οπότε έχουμε δύο κάθετες ευθείες x´x και y´y.

Επειδή οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν, θα είναι ίσες,

δηλαδή $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 90^o$.

Οι γωνίες, όμως, $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι:

$\hat{\beta} = 180^o - 90^o = 90^o$

Αλλά οι γωνίες $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y'$ είναι

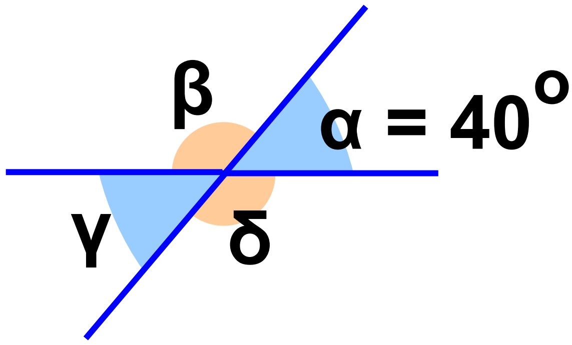
κατακορυφήν, οπότε: $\hat{\delta} = \hat{\beta} = 90^o$

Επομένως βλέπουμε ότι:

$\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = \hat{\delta} = 90^o$.

6. Να υπολογιστούν οι γωνίες του σχήματος, εάν είναι $\hat{\alpha} = 40^o$.

Λύση



Επειδή οι γωνίες με μέτρα $\hat{\gamma}$ και $\hat{\alpha}$ είναι κατακορυφήν, επομένως θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 40^o$.

Οι γωνίες, όμως, με μέτρα $\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι: $\hat{\beta} = 180^o - 40^o = 140^o$.

Αλλά οι γωνίες με μέτρα $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ είναι κατακορυφήν, οπότε:

$\hat{\delta} = \hat{\beta} = 140^o$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν δύο γωνίες έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε λέγονται:

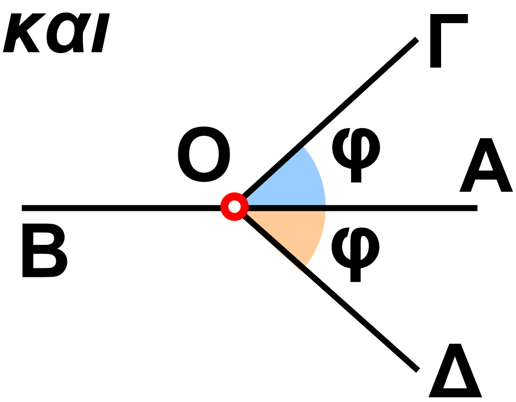
- ☐ ***Εφεξής γωνίες***
- ☐ ***Διαδοχικές γωνίες***
- ☐ ***Παραπληρωματικές γωνίες***
- ☐ ***Συμπληρωματικές γωνίες***
- ☐ ***Κατακορυφήν γωνίες.***

2. ***Να σχεδιάσεις μία γωνία 125^o και μετά να βρεις και να σχηματίσεις την παραπληρωματική της.***

3. ***Να βρεις τι είδους γωνία είναι η παραπληρωματική (α) μιας αμβλείας, (β) μιας ορθής και (γ) μιας οξείας γωνίας.***

4. Να σχεδιάσεις μια γωνία 35^o και μετά να βρεις και να σχηματίσεις τη συμπληρωματική της.

5. Στο διπλανό σχήμα είναι $\Gamma\hat{O}A = \Delta\hat{O}A = \hat{\varphi}$. Να συγκρίνεις τις γωνίες $\Gamma\hat{O}B$, $\Delta\hat{O}B$ και να δικαιολογήσεις το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

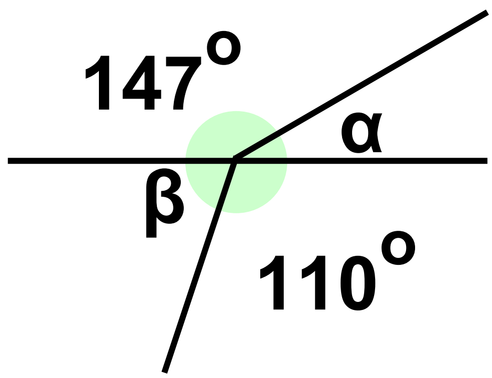


6. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, είναι παραπληρωματικές. Η $\hat{\alpha}$ είναι γνωστή και το μέτρο της δίνεται στον παρακάτω πίνακα. (α) Να σχεδιάσεις την $\hat{\alpha}$, (β) να σχεδιάσεις και να μετρήσεις τη $\hat{\beta}$, με το μοιρογνωμόνιο, (γ) να υπολογίσεις την $\hat{\beta}$. Μετά να αντιγράψεις στο τετράδιο σου

τον πίνακα και να τον συμπληρώσεις.

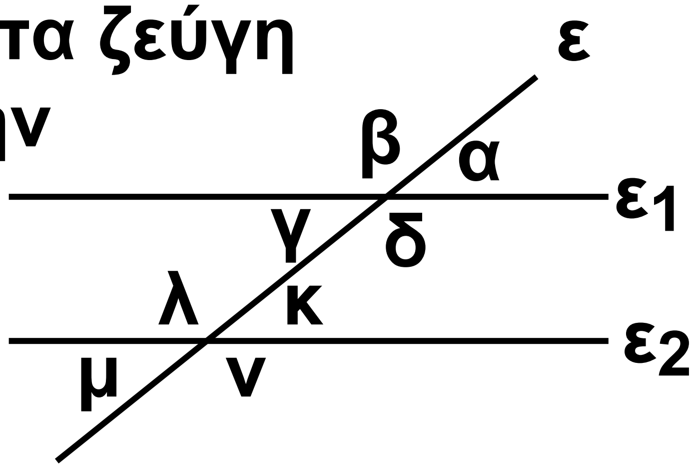
$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$ *από μέτρηση*	$\hat{\beta}$ *από υπολογισμό*
15^{o}		
18^{o}		
43^{o}		
77^{o}		
90^{o}		
116^{o}		
$169^{o}\ 10'$		

7. Υπολόγισε τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$, του σχήματος.



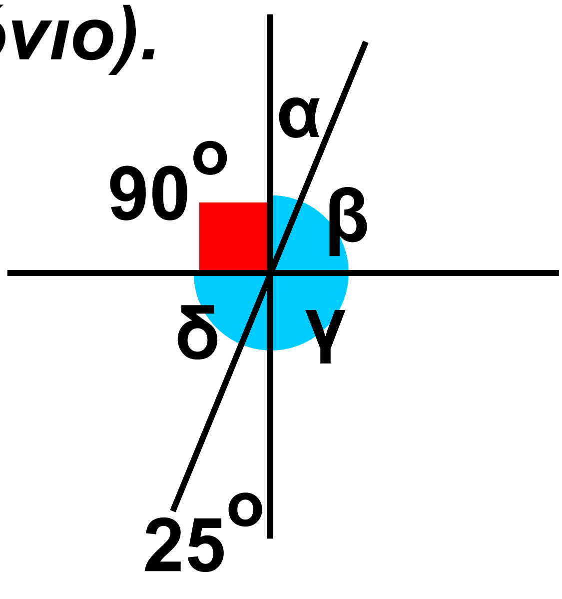
8. Σχεδίασε μια γωνία 37° και μετά σχεδίασε την κατακορυφήν της.

9. **Να βρεις όλα τα ζεύγη των κατακορυφήν γωνιών του διπλανού σχήματος.**



10. ***Εάν γνωρίζεις ότι η μία γωνία από τις τέσσερις, που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι 57^o υπολόγισε τις υπόλοιπες γωνίες.***

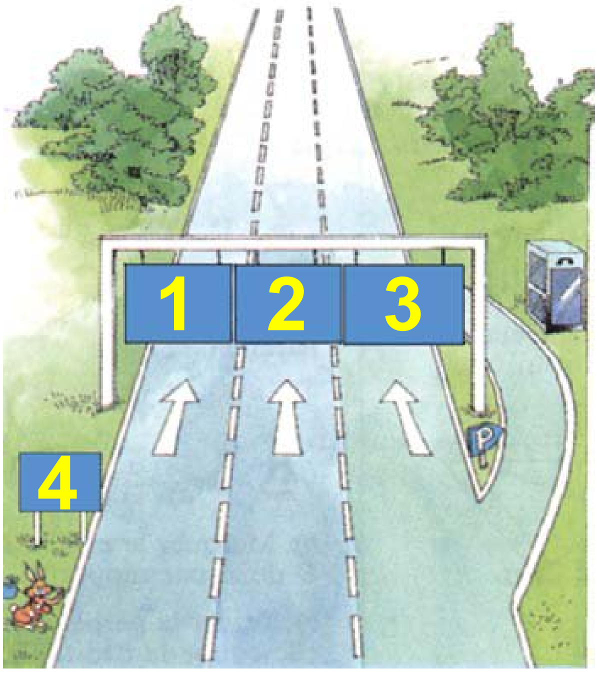
11. ***Να υπολογίσεις τις γωνίες του παρακάτω σχήματος (χωρίς μοιρογνωμόνιο).***



Β.1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

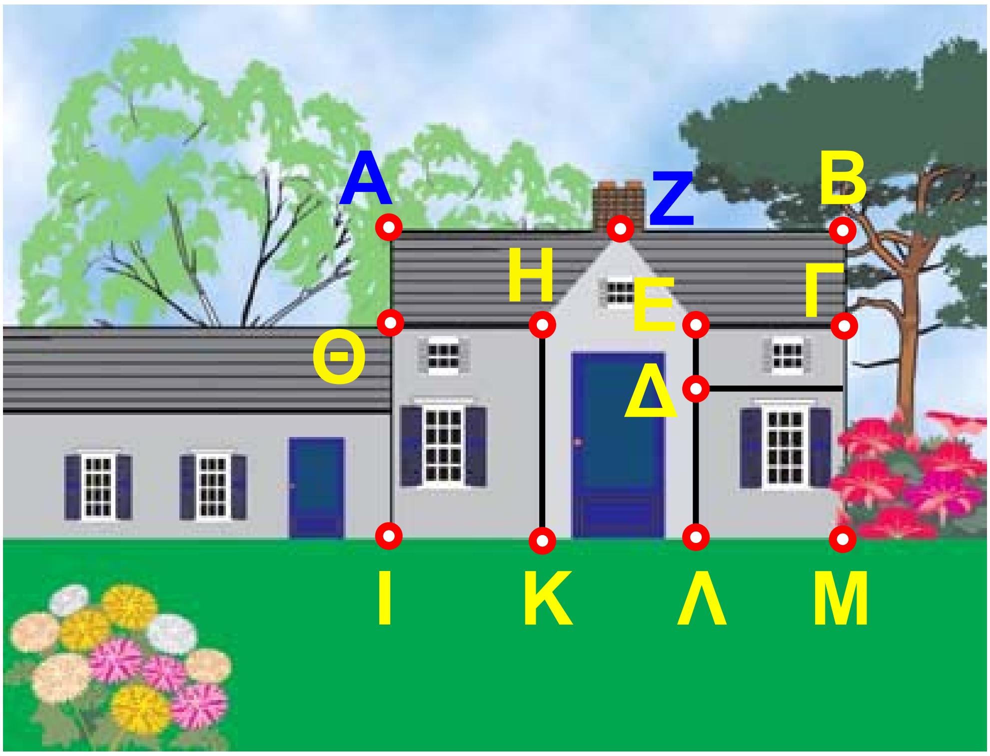
Οι διαγραμμίσεις του αυτοκινητόδρομου στη διπλανή εικόνα συναντώνται (τέμνονται) κάπου; Μπορείς να δικαιολογήσεις την απάντησή σου;



1. ΦΑΡΣΑΛΑ
ΠΟΡΕΙΑ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ
2. ΛΑΡΙΣΑ
ΠΟΡΕΙΑ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ
3. ΒΟΛΟΣ
ΠΟΡΕΙΑ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ
4. ΕΞΟΔΟΣ 500 m

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στην παρακάτω εικόνα προσπάθησε να βρεις τη σχετική θέση των ευθειών:
(α) ΑΒ και ΗΕ, (β) ΑΒ και ΒΓ,
(γ) ΗΕ και ΚΛ, (δ) ΗΖ και ΖΕ,
(ε) ΑΘ και ΒΓ.
(Δικαιολόγησε την απάντησή σου).



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου λέγονται <u>παράλληλες</u>, αν**

δεν έχουν κοινό σημείο όσο κι αν προεκταθούν.

● **Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο ονομάζονται <u>τεμνόμενες</u> και το κοινό τους σημείο λέγεται <u>σημείο τομής</u> των δύο ευθειών.**

Επομένως:

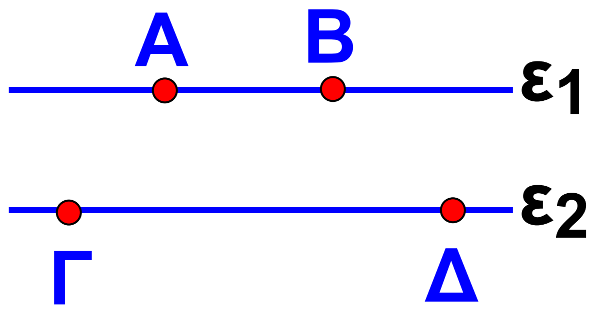
► **Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή θα τέμνονται.**

Πως συμβολίζουμε την παραλληλία δύο ευθειών

◆ **Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες ε_1, και ε_2 είναι παράλληλες, χρησιμοποιούμε το σύμβολο "//" και *γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.***

Για τα τμήματα των ευθειών και τις ημιευθείες, μπορούμε να πούμε ότι:

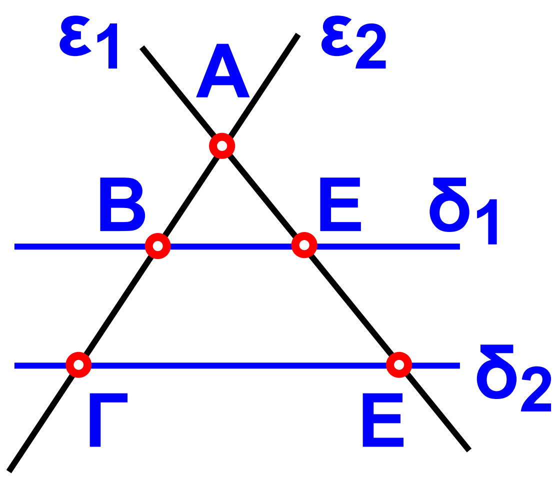
- **Δύο ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες, θα λέγονται <u>παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα</u> και γράφουμε ΑΒ//ΓΔ.**



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν ποιες από τις ευθείες του σχήματος είναι παράλληλες και ποιες τεμνόμενες.

Λύση



<u>Παράλληλες</u> είναι οι ευθείες δ_1, και δ_2 ($\delta_1 // \delta_2$).

Τεμνόμενες είναι οι ευθείες:

(α) $ε_1$ και $ε_2$ στο σημείο Α,

(β) $ε_1$ και $δ_1$ στο σημείο Δ,

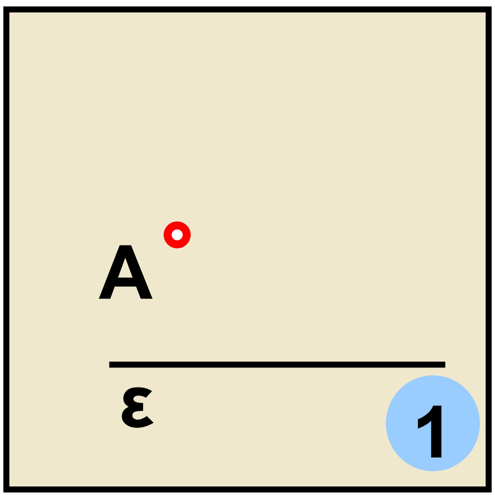
(γ) $ε_1$ και $δ_2$ στο σημείο Ε,

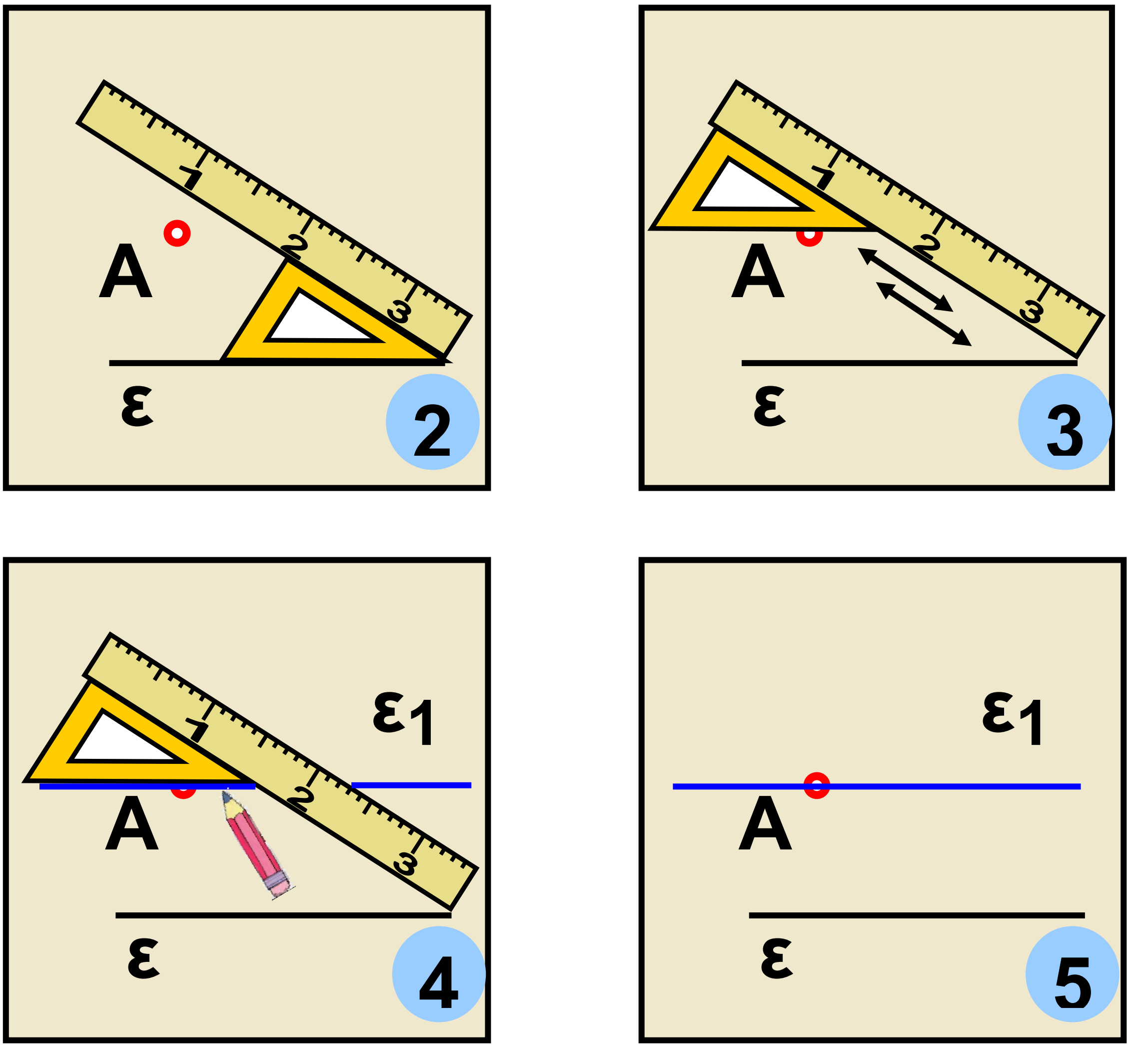
(δ) $ε_2$ και $δ_1$ στο σημείο Β και

(ε) $ε_2$ και $δ_2$ στο σημείο Γ.

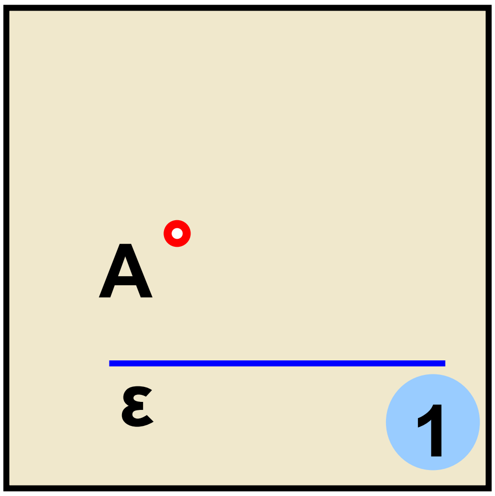
2. Να σχεδιαστεί ευθεία $ε_1$ που να είναι παράλληλη προς μια ευθεία ε και να διέρχεται από σημείο Α, το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία ε.

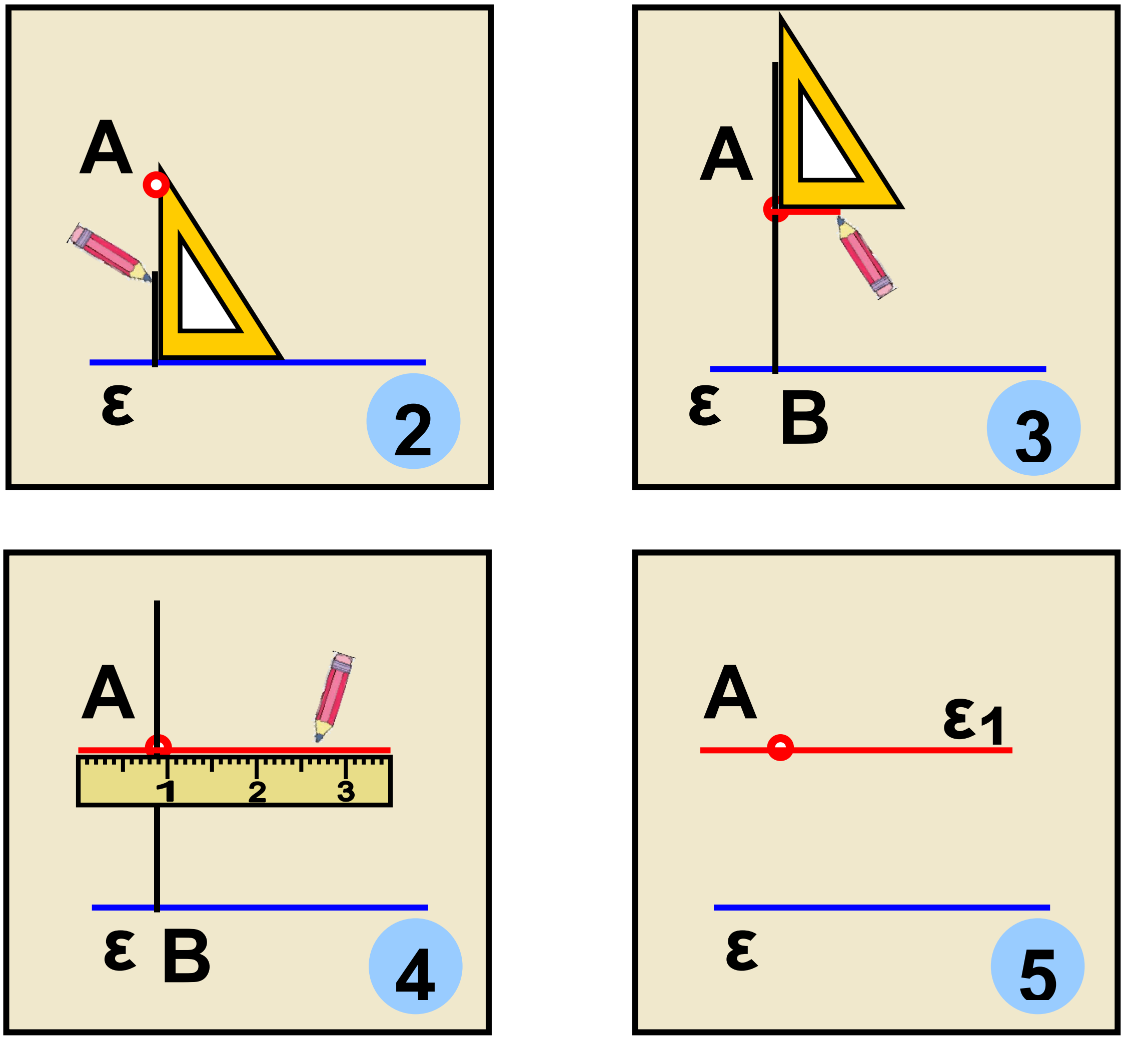
1ος τρόπος: Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να σχεδιάσουμε με τον κανόνα και τον γνώμονα την ευθεία $ε_1$ που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την ε.





2ος τρόπος: **Χρησιμοποιούμε τον γνώμονα για να φέρουμε κάθετο ΑΒ από το σημείο Α στην ευθεία ε. Στη συνέχεια φέρνουμε την $ε_1$ κάθετη από το Α στην ΑΒ η οποία είναι η ζητούμενη παράλληλη της ε.**



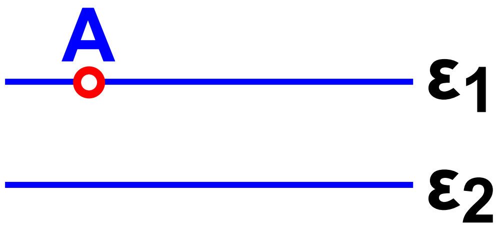


- **Δύο ευθείες του επιπέδου κάθετες σε μια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.**

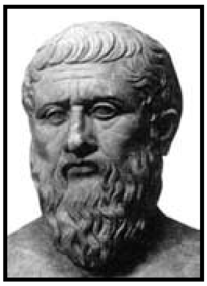
Μπορούμε άραγε να φέρουμε κι άλλη (διαφορετική) παράλληλη ευθεία από το Α προς την ε;

Δεχόμαστε ότι ισχύει η πρόταση:

► **Από ένα σημείο Α, εκτός ευθείας ε, διέρχεται μία και μοναδική ευθεία $ε_1$ παράλληλη στην ε.**



ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

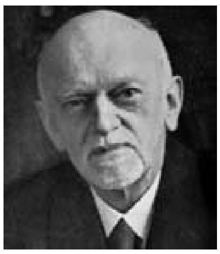


Ο Πλάτωνας έγραψε στην είσοδο της Ακαδημίας το ρητό: «ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ», δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στη σπουδή και τη γνώση της Γεωμετρίας. Το σημαντικότερο έργο Γεωμετρίας στην αρχαιότητα ήταν τα "Στοιχεία" (13 βιβλία) του Ευκλείδη (330 - 270 π.Χ.), που απετέλεσε σταθμό στη Γεωμετρία και αναδείχτηκε σε πρότυπο μαθηματικής σκέψης. Είναι

σημαντικό να γνωρίζουμε ότι τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη αναγνωρίζονται διεθνώς ως ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρωπίνου πνεύματος. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι μαζί με τη Βίβλο είναι από τα συγγράμματα που είχαν τις περισσότερες εκδόσεις. Ο διάσημος Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonne, έγραψε για τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη, ότι: “Η Γεωμετρία των Αρχαίων Ελλήνων είναι ίσως το πιο εκπληκτικό πνευματικό δημιούργημα του ανθρώπου. Χάρη στους Έλληνες μπορέσαμε να οικοδομήσουμε τη σύγχρονη επιστήμη”.

Ο <u>Ευκλείδης</u> *στα “*<u>Στοιχεία</u>*” του ορίζει ως παράλληλες:* **“ΤΙΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΕΚΕΙΝΕΣ ΠΟΥ ΕΥΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΙΔΙΟ**

ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΠΡΟΕΚΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ ΚΙ ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ ΜΕΡΗ ΔΕ ΣΥΝΑΝΤΩΝΤΑΙ ΣΕ ΚΑΝΕΝΑ ΑΠ ΑΥΤΑ"*(Ορισμός 23) και αμέσως μετά διατυπώνει το διάσημο «5ο Αίτημα», δηλαδή την πρόταση ότι:*** **"ΕΑΝ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΠΟΥ ΤΕΜΝΕΙ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΤΙΣ ΕΝΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ ΜΕΡΗ ΓΩΝΙΕΣ ΜΙΚΡΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΟΡΘΕΣ, ΤΟΤΕ ΟΙ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΡΟΕΚΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ ΣΥΝΑΝΤΩΝΤΑΙ ΣΤΟ ΜΕΡΟΣ ΠΟΥ ΟΙ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΟΡΘΕΣ"**



Σήμερα το 5ο αίτημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διατυπώνεται με την εξής μορφή: **"<u>Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται προς αυτήν μία μόνο παράλληλη</u>"*. Στη διατύπωση αυτή***

συνέβαλε σημαντικά το 1899 ο Γερμανός μαθηματικός David Hilbert*.*

Η αλήθεια της πρότασης αυτής φαίνεται να προκύπτει αβίαστα από την καθημερινή μας εμπειρία. Όμως, από την αρχαιότητα μέχρι τις αρχές του περασμένου αιώνα, έγιναν πολλές αποτυχημένες προσπάθειες να αποδειχθεί με βάση τις άλλες ισχύουσες προτάσεις της Γεωμετρίας. Η πλήρης αποτυχία των προσπαθειών, όμως, δεν πήγε χαμένη. Αποδείχθηκε ότι εκείνο που έφταιγε ήταν το πλαίσιο μέσα στο οποίο γινόντουσαν οι προσπάθειες αυτές, δηλαδή η συγκεκριμένη "Ευκλείδεια" Γεωμετρία. Έτσι αναπτύχθηκαν και άλλες γεωμετρίες στις οποίες δεν ισχύει το αίτημα αυτό.

Συγκεκριμένα ο Ρώσος μαθηματικός* <u>Nikolai Lobatchevsky</u> *(1792-1856) προτείνει μία διαφορετικού τύπου Γεωμετρία, την "Υπερβολική", στην οποία το 5ο αίτημα αντικαθίσταται από την πρόταση ότι:
"<u>από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν περισσότερες από δύο παράλληλες προς αυτήν</u>". ***Η Γεωμετρία αυτή περιγράφει χώρους που έχουν παράξενες ιδιότητες, όπως ότι το*** **<u>άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές</u>** ***κ.α. Ένας τέτοιος χώρος είναι π.χ. το εσωτερικό του κύκλου στον παράπλευρο πίνακα του Ολλανδού ζωγράφου*** **<u>Escher</u>.**

Επίσης, ο **Bernhard Riemann** *(1826-1866) θεμελίωσε την λεγόμενη "Ελλειπτική" Γεωμετρία, στην οποία ισχύει ότι:* **"από ένα σημείο εκτός ευθείας δεν υπάρχει καμία παράλληλη προς αυτήν"** *και στην οποία στηρίχθηκε ο* **Albert Einstein** *για να διατυπώσει την περίφημη θεωρία του, της* **Σχετικότητας**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Τοποθέτησε ένα "Χ" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

(α) Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο λέγονται:

☐ *Παράλληλες*
☐ *Τεμνόμενες*
☐ *Κάθετες*

(β) Από ένα σημείο Α, εκτός ευθείας ε, διέρχεται:

☐ ***Μία και μοναδική κάθετη ευθεία στην ε.***
☐ ***Δύο διαφορετικές κάθετες ευθείες στην ε.***
☐ ***Καμία κάθετη ευθεία στην ε.***

(γ) Αν δύο ευθείες του επιπέδου είναι κάθετες σε μια ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους:

☐ **Κάθετες**
☐ **Παράλληλες**
☐ **Τεμνόμενες**

2. ***Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:***

(α) Από ένα σημείο μπορούν να περάσουν .... ευθείες.
(β) Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή ....

(γ) Δύο ευθείες του επιπέδου κάθετες σε μια ευθεία είναι μεταξύ τους ....

(δ) Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου, που δεν έχουν κοινό σημείο είναι

....

(ε) Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο λέγονται .... και το κοινό τους σημείο λέγεται σημείο .... των δύο ευθειών.

3. Να χαράξεις τρεις ευθείες ε_1 ε_2 και ε_3, ώστε: (α) οι ευθείες αυτές να μην τέμνονται, (β) η μία να τέμνει τις άλλες δύο, (γ) να τέμνονται ανά δύο και (δ) να έχουν κοινό σημείο.

4. Να σχεδιάσεις δύο ευθείες που να διέρχονται από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος και να είναι κάθετες σ' αυτό.

5. Να σχεδιάσεις δύο ημιευθείες Οχ και Ογ, οι οποίες να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία Να σημειώσεις στην Οχ τρία σημεία Α, Β και Γ. Από κάθε σημείο από αυτά να σχεδιάσεις ευθεία παράλληλη προς την Ογ.

6. Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε και δύο σημεία Α και Β που δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή. Να φέρεις από τα Α και Β ευθείες παράλληλες προς την ε και να εξετάσεις σε ποια περίπτωση οι δύο αυτές παράλληλες συμπίπτουν.

Β.1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων

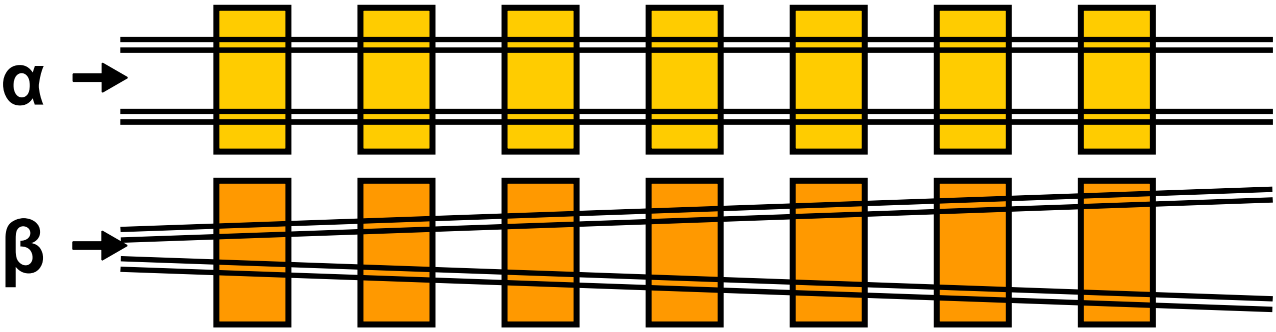
Στη Γεωμετρία, χρησιμοποιούμε την έννοια της απόστασης στις εξής περιπτώσεις:
– Απόσταση σημείου από σημείο, που είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος το οποίο τα ενώνει.
– Απόσταση σημείου από ευθεία.
– Απόσταση παραλλήλων ευθειών.
Ας αναζητήσουμε αυτή την έννοια στις παρακάτω δραστηριότητες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Να βρεις σε ποιο σημείο του δημόσιου αγωγού νερού, στο παρακάτω σχεδιάγραμμα, πρέπει να γίνει η σύνδεση με το σημείο Α του σπιτιού, ώστε ο σωλήνας να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

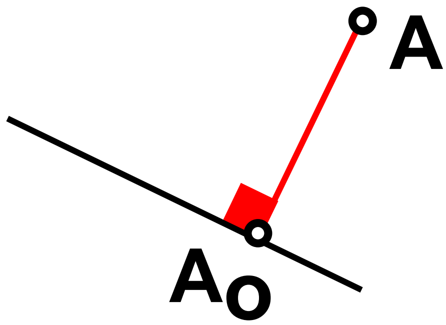
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Σε ποια από τις δύο σιδηροτροχιές (α και β) μπορεί να κινηθεί το τραίνο, χωρίς να εκτροχιαστεί; Μπορείς να δικαιολογήσεις την απάντησή σου;

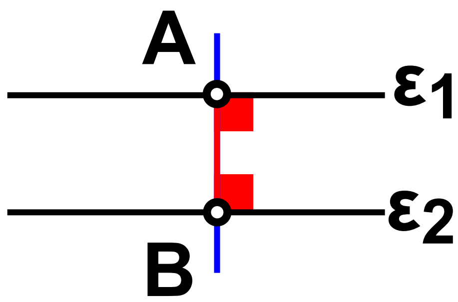


Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

- **Απόσταση** του σημείου Α από την ευθεία ε ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος $ΑΑ_Ο$ από το σημείο Α προς την ευθεία ε.



• <u>Απόσταση</u> δύο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ’ αυτές, π.χ. το ΑΒ.

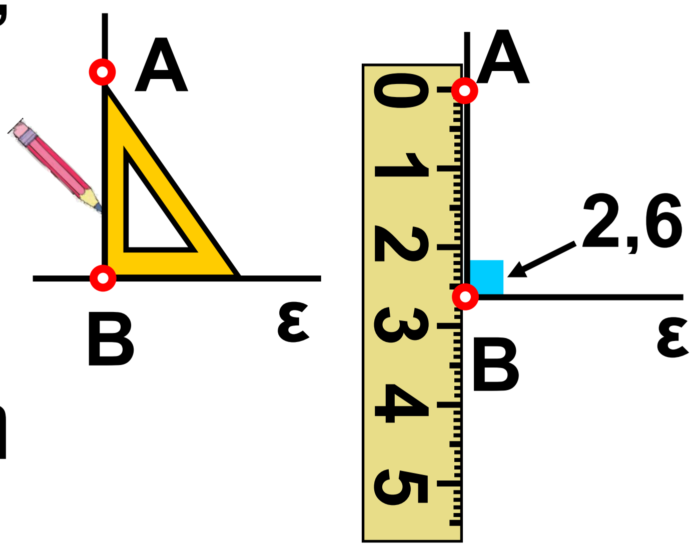


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

***1.** Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.*

Λύση

Με τη βοήθεια του γνώμονα σχεδιάζουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς την ευθεία ε. Με το υποδεκάμετρο μετράμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το βρίσκουμε π.χ. 2,6 cm. Άρα, η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε είναι, στην περίπτωση αυτή, 2,6 cm.



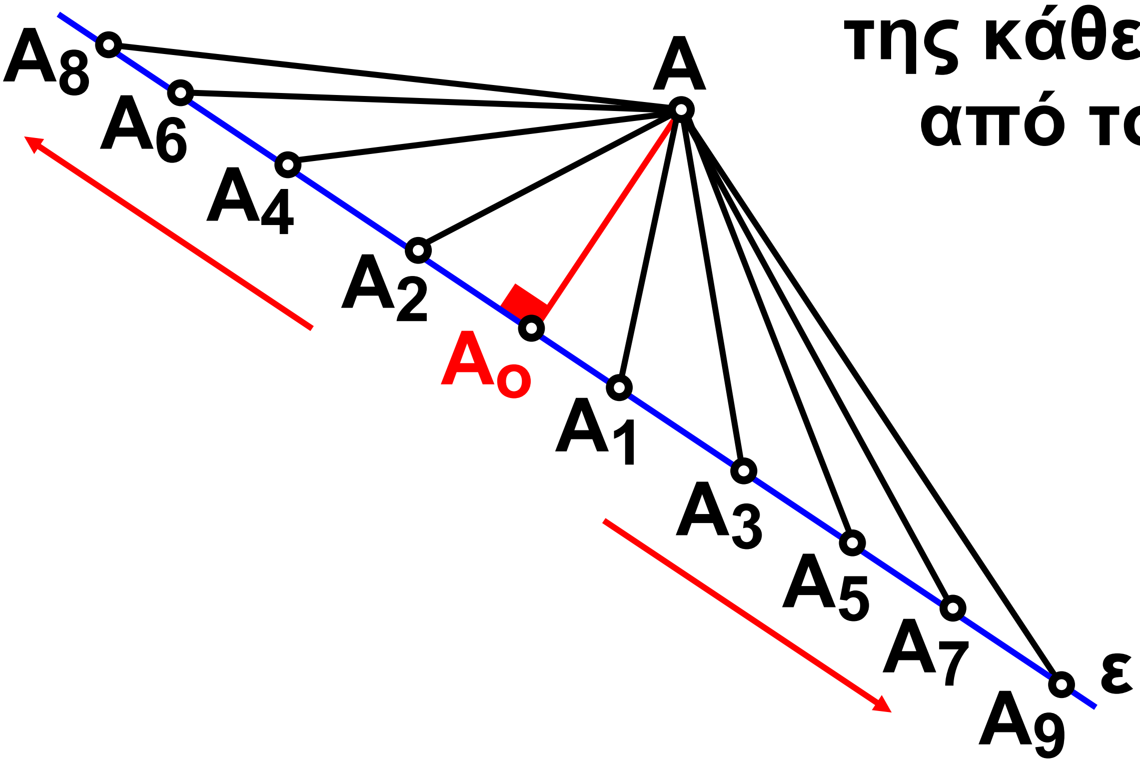
2. ***Να βρεθεί σημείο της ευθείας ε, η απόσταση του οποίου από ένα σημείο Α εκτός αυτής να είναι η ελάχιστη.***

Λύση

Από το σημείο Α φέρνουμε το κάθετο τμήμα ΑΑ$_o$ στην ευθεία ε και συνδέουμε το σημείο Α με διάφορα σημεία Α$_1$, Α$_2$, Α$_3$, Α$_4$, Α$_5$, Α$_6$, Α$_7$, Α$_8$ και Α$_9$ της ε.

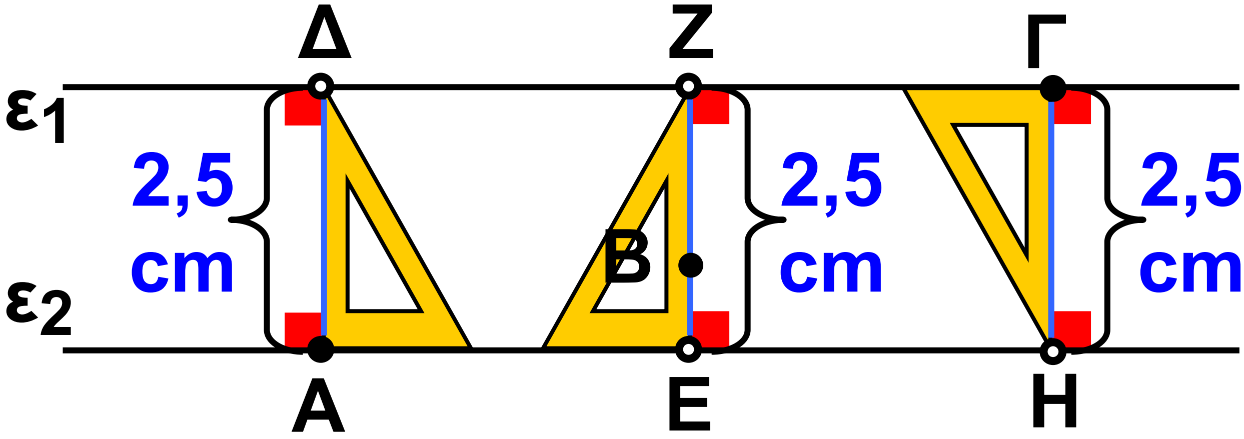
Μετράμε τις αποστάσεις του Α από αυτά και παρατηρούμε ότι αυτές μεγαλώνουν συνεχώς όσο απομακρυνόμαστε αριστερά και δεξιά από το A_o, άρα η ελάχιστη απόσταση είναι το ευθύγραμμο τμήμα AA_o.

Επομένως το A_o, είναι το ζητούμενο σημείο και ονομάζεται ίχνος της κάθετης από το Α.



3. Να σχεδιαστούν και να συγκριθούν τα ευθύγραμμα τμήματα που διέρχονται από τα σημεία Α, Β και Γ

και εκφράζουν τις αποστάσεις των παραλλήλων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$.

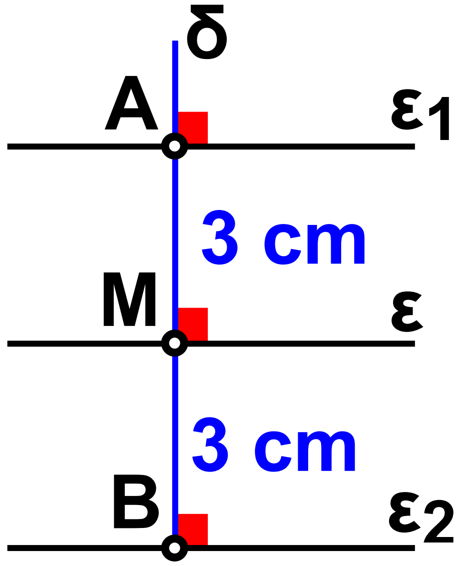


Λύση

Φέρνουμε τις κάθετες ΑΔ, ΕΒΖ και ΗΓ από τα σημεία Α, Β και Γ στις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. Μετράμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΕΖ και ΗΓ και βρίσκουμε ότι είναι όλα μεταξύ τους ίσα. Άρα η απόσταση των παραλλήλων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ είναι σταθερή και ίση με 2,5 cm.

4. Να σχεδιαστούν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ παράλληλες προς μια ευθεία ε, που να απέχουν από αυτή 3 cm.

Λύση



Σε τυχαίο σημείο Μ της ε σχεδιάζουμε ευθεία δ κάθετη στην ε. Πάνω στην ευθεία δ βρίσκουμε με το υποδεκάμετρο δύο σημεία Α και Β έτσι, ώστε να είναι: ΜΑ = ΜΒ = 3 cm. Από τα Α και Β, με τον γνώμονα, σχεδιάζουμε ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ κάθετες στην ε. Οι ευθείες αυτές είναι οι ζητούμενες, γιατί η απόσταση τους από την ε είναι 3 cm.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Το μήκος του καθέτου ευθυγράμμου τμήματος $ΑΑ_ο$ από το σημείο Α

προς την ευθεία ε ονομάζεται .... του σημείου Α από την ευθεία.

(β) Το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος, που είναι κάθετο σε δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ' αυτές λέγεται .... των δύο παραλλήλων ευθειών.

2. ***Σημείωσε, πάνω σε μια ευθεία ε, με τη σειρά, τα σημεία Γ, Β και Δ, έτσι ώστε να είναι ΓΒ = ΒΔ = 3 cm. Χάραξε μια ευθεία, που να διέρχεται από το Β κάθετη στην ε. Πάνω στην κάθετη αυτή να σημειώσεις ένα σημείο Α, που να απέχει από το Β απόσταση ΑΒ = 4 cm. Να συγκρίνεις μετρώντας με το υποδεκάμετρο τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΑΔ.***

***3.** Να επαναλάβεις την προηγούμενη άσκηση, εάν είναι: ΓΒ = 6 cm, ΒΔ = 15 cm, ΑΒ = 8 cm.*

***4.** Να σχεδιάσεις δύο μη αντικείμενες ημιευθείες Οx και Οy. Να πάρεις στην Οx, τα σημεία Α, Β και Γ, τέτοια ώστε να είναι: ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ = 2 cm. Να ορίσεις στην Οy ένα σημείο Α΄, ώστε να είναι ΟΑ΄ = 1,6 cm και να σχεδιάσεις την ευθεία ΑΑ΄. Στη συνέχεια να φέρεις από τα Β και Γ παράλληλες προς την ΑΑ΄ και να ονομάσεις Β΄ και Γ τα σημεία στα οποία αυτές τέμνουν αντίστοιχα την Οy. Να μετρήσεις με το υποδεκάμετρο τα μήκη των τμημάτων Α΄ Β΄ και Β΄Γ΄. Τι παρατηρείς;*

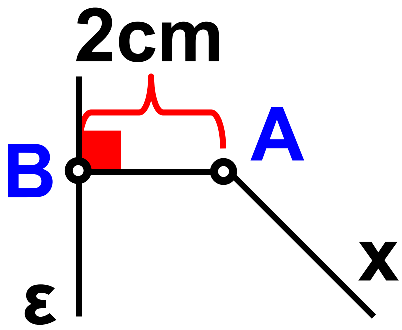
***5.** Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε και τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ, τα οποία να βρίσκονται στο ένα από τα*

ημιεπίπεδα που χωρίζει η ε το επί-πεδο, και το καθένα ν' απέχει απ' αυτή 3,2 cm. Να φέρεις από καθένα απ' αυτά τα σημεία ευθεία παράλληλη προς την ε. Πόσες παράλληλες ευθείες υπάρχουν στο σχήμα σου;

6. Να σχεδιάσεις δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$, και $ε_2$ των οποίων η απόσταση να είναι 35 mm. Να βρεις πέντε σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε, που να ισαπέχουν από τις $ε_1$, και $ε_2$. Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε από το Α παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$. Τα σημεία Β, Γ, Δ και Ε ανήκουν ή όχι στην ε;

7. Να αντιγράψεις σε τετραγωνι-σμένο χαρτί το παρακάτω σχήμα και να βρεις ένα σημείο Γ της

ημιευθείας Αx, που ν' απέχει 3 cm από την ευθεία ε.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ένα πλοίο ακολουθεί ευθεία πορεία ΑΒ, που είναι συνολικά 21Km. Όταν βρίσκεται στη θέση Α απέχει 10 Km από ένα φάρο Φ και όταν βρίσκεται στη θέση Β απέχει 17 Km από τον ίδιο φάρο. Να σχεδιάσεις το σχήμα ΦΑΒ παίρνοντας 1 cm για απόσταση ίση με 1 Km και να υπολογίσεις πόσο κοντά από το φάρο πέρασε το πλοίο.

B.1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

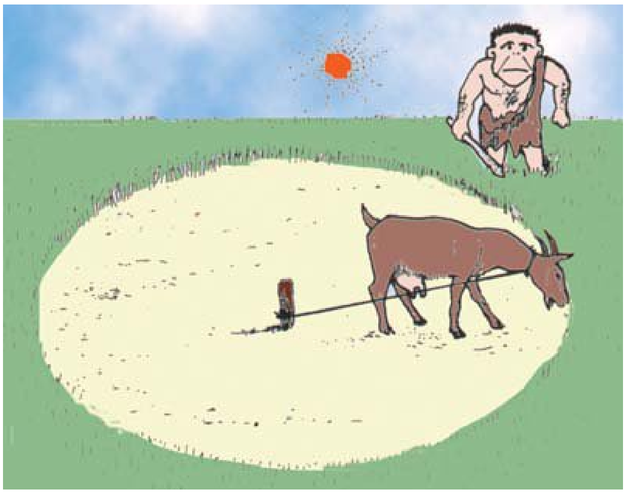
Στην Τρίπολη της Αρκαδίας γίνεται μια γιορτή, στην οποία είναι καλεσμένοι οι κάτοικοι, που κατοικούν σε απόσταση μικρότερη των 6 Km. Ποιων χωριών οι κάτοικοι θα παρευρεθούν στη γιορτή;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ο πρωτόγονος άνθρωπος για να μη χάσει την κατσίκα του την έδεσε με

ένα σχοινί, σ' ένα ξύλινο πάσσαλο, μέσα στο λιβάδι.

Όταν γύρισε να την πάρει είδε ότι η κατσίκα είχε βοσκήσει εκείνο το μέρος του λιβαδιού που της επέτρεπε το μήκος του σχοινιού να φθάσει. Έτσι, όλα τα χόρτα που απείχαν μικρότερη ή ίση απόσταση από το σχοινί, που ήταν δεμένη, είχαν φαγωθεί.

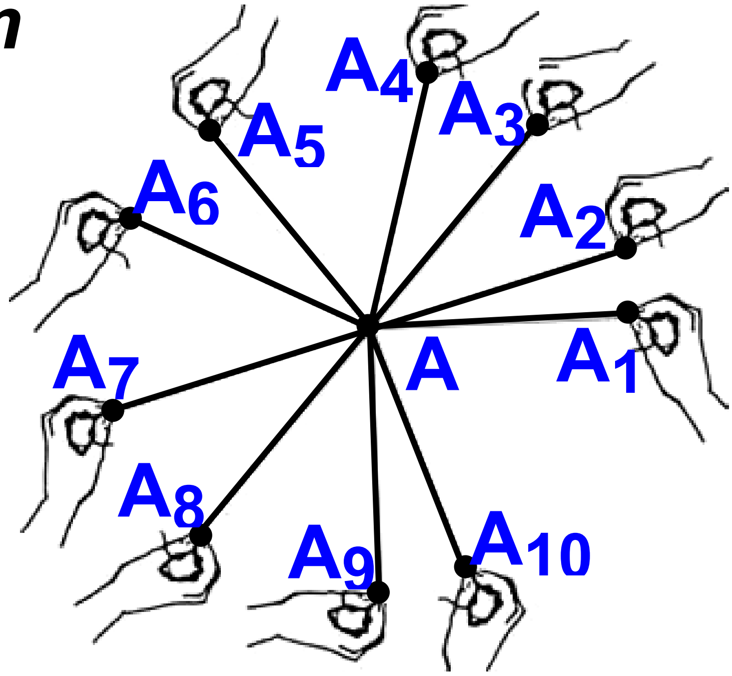


- *Ποια γεωμετρική έννοια χαρακτηρίζει την περιοχή της οποίας το χορτάρι φαγώθηκε;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Να βρεθούν δέκα διαφορετικά σημεία, που ν' απέχουν όλα 2 cm από ένα σημείο Α.

Με τη βοήθεια ενός υποδεκάμετρου μετράμε και βρίσκουμε το ακριβές μήκος των 2 cm σε ένα σχοινί. Μετά, κρατώντας με το ένα χέρι τη μία άκρη αυτού του σχοινιού στο σημείο Α



και έχοντας πάντα τεντωμένο το σχοινί, κινούμε με το άλλο χέρι την άλλη άκρη του μήκους αυτού, των 2 cm, σε δέκα διαφορετικές θέσεις A_1 A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 και A_{10}, που επιλέγουμε στην τύχη, βρίσκοντας τα αντίστοιχα δέκα ζητούμενα διαφορετικά σημεία. Βλέπουμε ότι τα σημεία, που απέχουν μια συγκεκριμένη απόσταση από σταθερό σημείο, είναι πάρα πολλά.

➢ ***Τι σχήμα φτιάχνουν, λοιπόν, όλα αυτά τα σημεία με την κοινή αυτή ιδιότητα;***

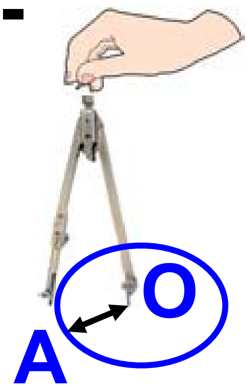
Μέσα από την καθημερινή ζωή μπορούμε να βρούμε αρκετά παραδείγματα καμπυλών. Όπως π.χ. ο ήλιος στη δύση του, ο τροχός ενός ποδηλά-του η στεφάνη της μπασκέτας, ένα μεταλλικό νόμισμα, το ρολόι μας, μια τούρτα γενεθλίων, ένας δίσκος μουσικής κλ.π

Το πρώτο σχήμα που μπορούσε να επινοήσει ή να ανακαλύψει στη γη ο άνθρωπος είναι φυσικά, ο κύκλος. Ο ήλιος και το φεγγάρι αρκούν για να δώσουν στο μάτι το σχήμα και στην ψυχή την ομορφιά της τελειότητας. Και όταν φθάσει η ώρα της σκέψης, τότε η Γεωμετρία αποκτά το πιο πολύτιμο σχήμα της.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

● **Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο.**

● **Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με ρ και λέγεται ακτίνα του κύκλου. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο του κύκλου.**

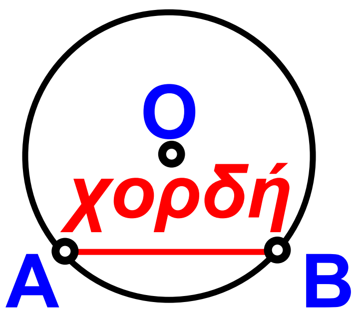


◆ **Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ, συμβολίζεται με συντομία (Ο, ρ).**

◆ **Για να σχεδιάσουμε ένα κύκλο χρησιμοποιούμε το <u>διαβήτη</u>.**

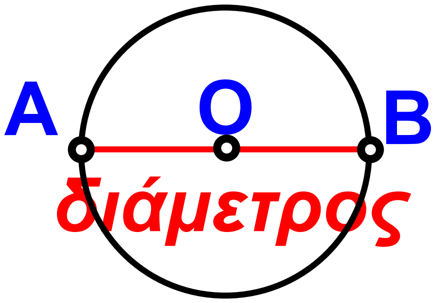
► **Δύο κύκλοι με ακτίνες ίσες είναι ίσοι.**

Επίσης:

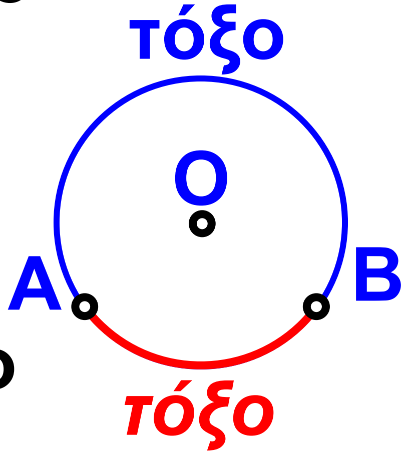


● **Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συνδέει δύο σημεία Α και Β του κύκλου, λέγεται <u>χορδή</u> του κύκλου.**

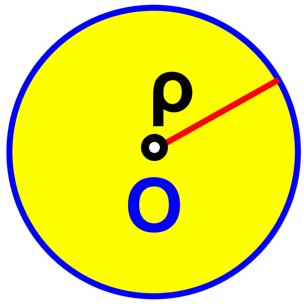
• Ειδικά η χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου λέγεται <u>διάμετρος</u> του κύκλου.



► Η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου, είναι διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου και χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη (ημικύκλια).



• Δύο σημεία Α και Β του κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη που το καθένα λέγεται τόξο του κύκλου με άκρα τα Α και Β.

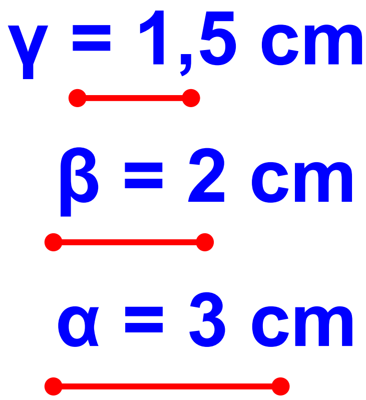


• Κυκλικός δίσκος (Ο, ρ) είναι ο κύκλος (Ο, ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.

► Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο Ο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ.

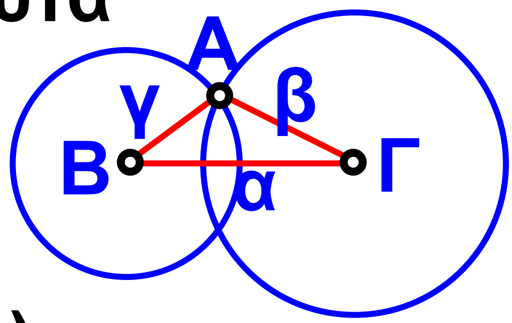
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να σχεδιαστεί ένα τρίγωνο, αν γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών του.



Λύση

Ας υποθέσουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α = 3 cm, β = 2 cm και γ = 1,5 cm είναι οι πλευρές του τριγώνου που πρέπει να σχεδιάσουμε. Ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Παίρνουμε ένα από αυτά και το ονομάζουμε πλευρά ΒΓ = α.



Μετά χαράζουμε τους κύκλους (Β,γ = 1,5 cm) (Γ,β = 2 cm). Οι δύο αυτοί κύκλοι τέμνονται στο σημείο Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο διότι έχει πλευρές: ΒΓ = 3 cm, ΑΒ = 1,5 cm,

ως ακτίνα του κύκλου (Β,1,5 cm) και ΑΓ = 2 cm, ως ακτίνα του κύκλου (Γ,2 cm), αφού το Α ανήκει και στους δύο κύκλους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Με κέντρο ένα σημείο Μ να σχεδιάσεις κύκλους με ακτίνες 2,4 cm, 2 cm και 15 mm.*

***2.** Να σχεδιάσεις τον κύκλο που έχει διάμετρο ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 3,8 cm.*

***3.** Να σχεδιάσεις ομόκεντρους κύκλους με κέντρο σημείο Μ και διαμέτρους 4 cm, 5 cm και 48 mm. (Δύο κύκλοι λέγονται ομόκεντροι, αν έχουν το ίδιο κέντρο και διαφορετικές ακτίνες)*

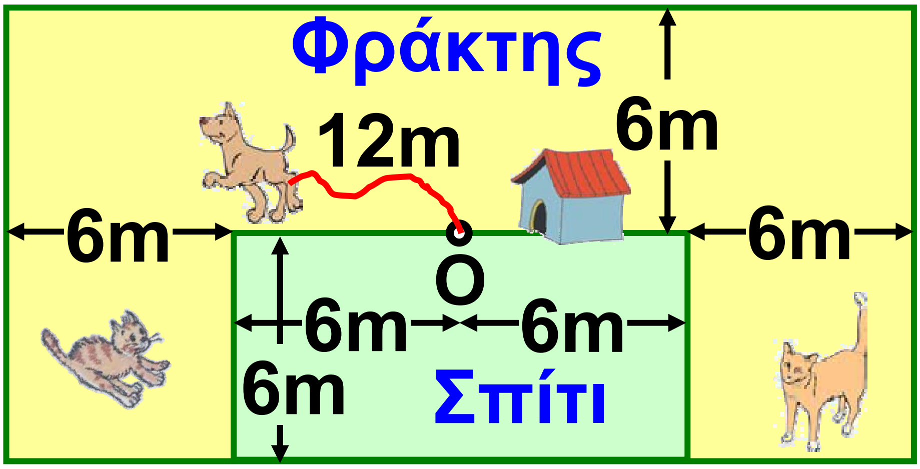
4. Να σχεδιάσεις έναν κύκλο με κέντρο σημείο Κ και ακτίνα 3,4 cm. Να πάρεις ένα σημείο Μ του κύκλου αυτού και να χαράξεις δύο χορδές του: ΜΑ = 2,4 cm και ΜΒ = 4,1 cm.

5. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4 cm. (α) Να βρεις τα σημεία του επιπέδου που απέχουν: 3 cm από το Α και 2 cm από το Β. (β) Ποια σημεία απέχουν ταυτόχρονα 3 cm από το Α και 2 cm από το Β;

6. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 3,2 cm. Να σχεδιάσεις τους κύκλους (Α, ΑΒ) και (Β, ΑΒ) και να ονομάσεις Μ και Ν τα σημεία στα οποία τέμνονται οι κύκλοι αυτοί Να βρεις τις αποστάσεις του Μ από τα άκρα Α και Β καθώς και τις αποστάσεις του Ν από τα Α και Β.

Στη συνέχεια να συγκρίνεις τις αποστάσεις αυτές.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ



1. Ένας σκύλος είναι δεμένος με μια αλυσίδα μήκους 12 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να μεταφέρεις το παραπάνω σχήμα στο τετράδιό σου και να βρεις, χρωματίζοντας την περιοχή την οποία μπορεί να κινηθεί ο σκύλος. Επίσης, να βρεις σε ποιες περιοχές της αυλής του σπιτιού μπορούν να σταθούν οι γάτες, χωρίς να κινδυνεύουν από το σκύλο;

2. Προσπάθησε να σχεδιάσεις τρίγωνο με πλευρές που είναι:

α) α = 10 cm, β = 6 cm και γ = 3 cm,

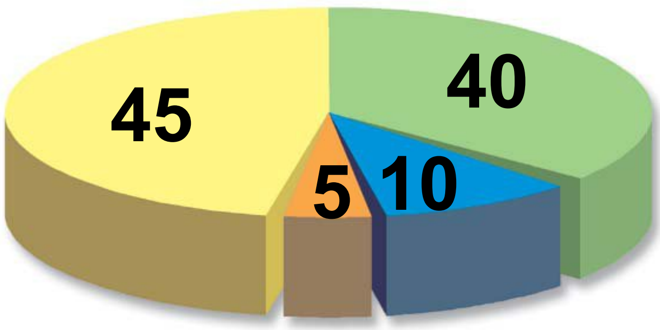
β) α = 12 cm, β = 5 cm και γ = 7 cm.

Τι παρατηρείς;

Β.1.12. Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου – Μέτρηση τόξου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

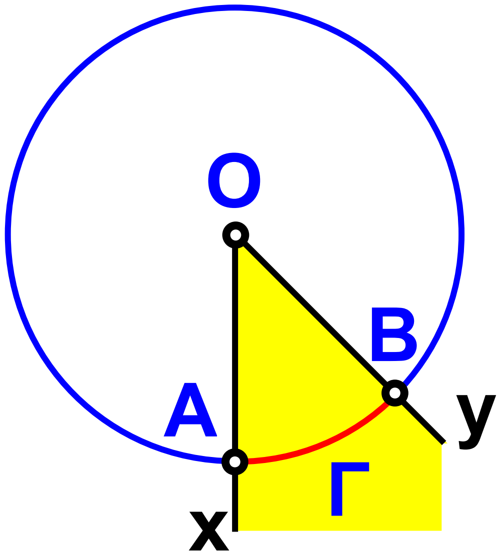
Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα ποσοστά που πήραν τέσσερα κόμματα στις εκλογές. Μπορείς να βρεις σε πόσες μοίρες αντιστοιχεί κάθε φέτα της πίτας;



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

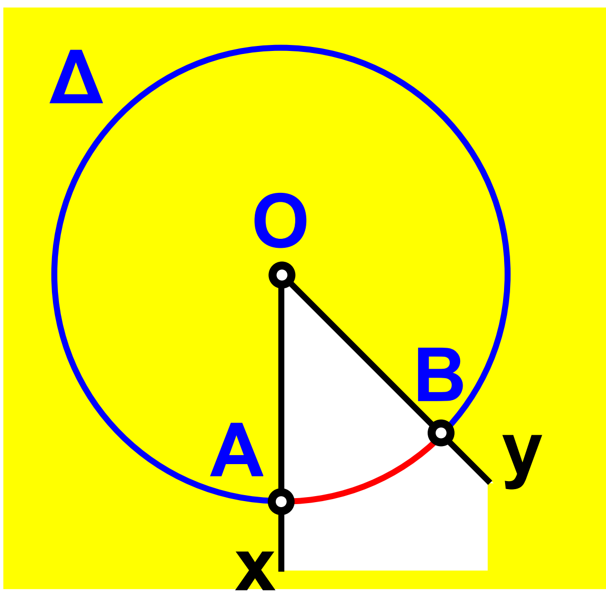
- **Κατασκευάζουμε έναν κύκλο (Ο, ρ) και μια γωνία, $x\hat{O}y$ της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο Ο του κύκλου. Η γωνία αυτή λέγεται <u>επίκεντρη γωνία</u>.**

Αν η πλευρά Οx της γωνίας $x\hat{O}y$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α και η πλευρά Οy στο σημείο Β, τότε:



- Το τόξο $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται <u>αντίστοιχο τόξο</u> της επίκεντρης γωνίας $x\hat{O}y$.

- Το τόξο $\overset{\frown}{ΑΔΒ}$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της μη κυρτής γωνίας $x\hat{O}y$ είναι κι αυτό αντίστοιχο τόξο της μη κυρτής επίκεντρης γωνίας $x\hat{O}y$.

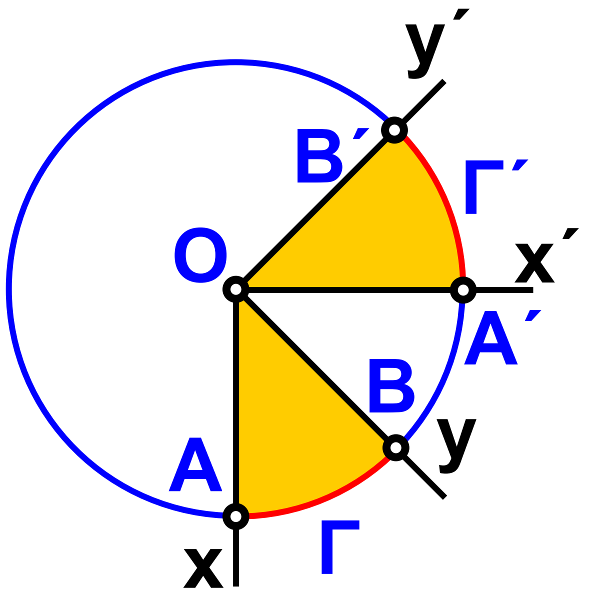


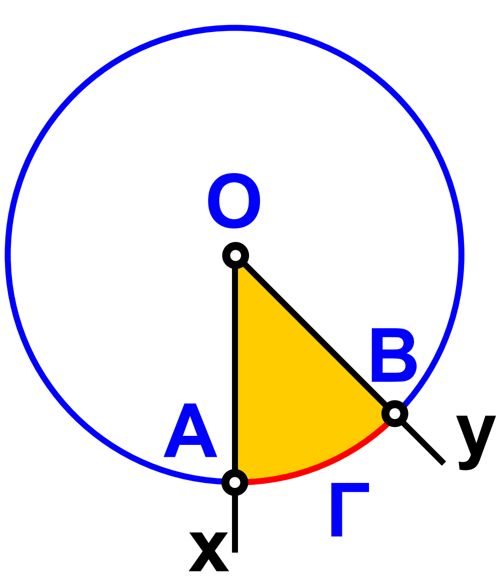
● **Ως μέτρο ενός τόξου ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, δηλαδή το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε μοίρες.**

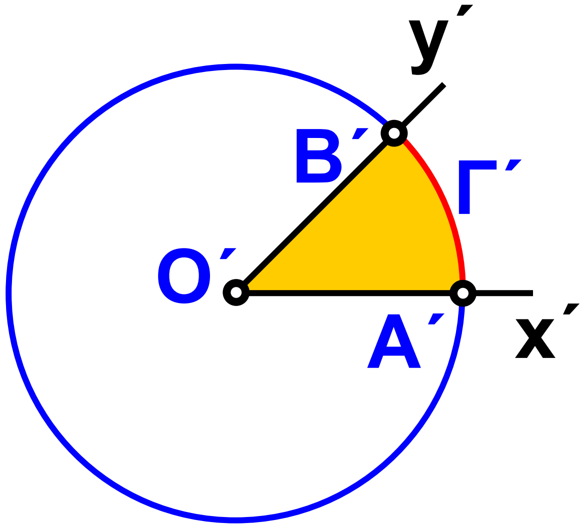
► **Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους, δυο ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα.**

Και αντίστροφα

► **Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους, δυο ίσα τόξα έχουν ίσες τις επίκεντρες γωνίες.**

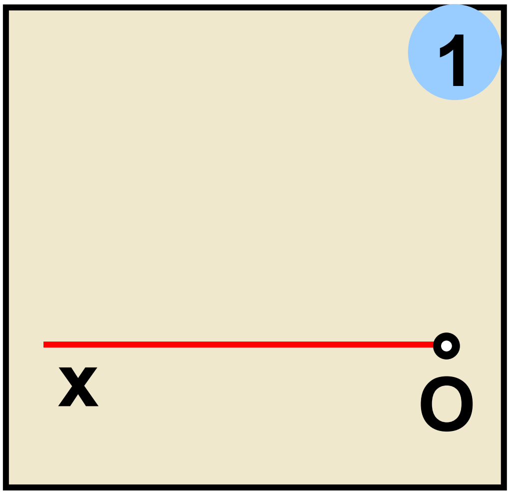




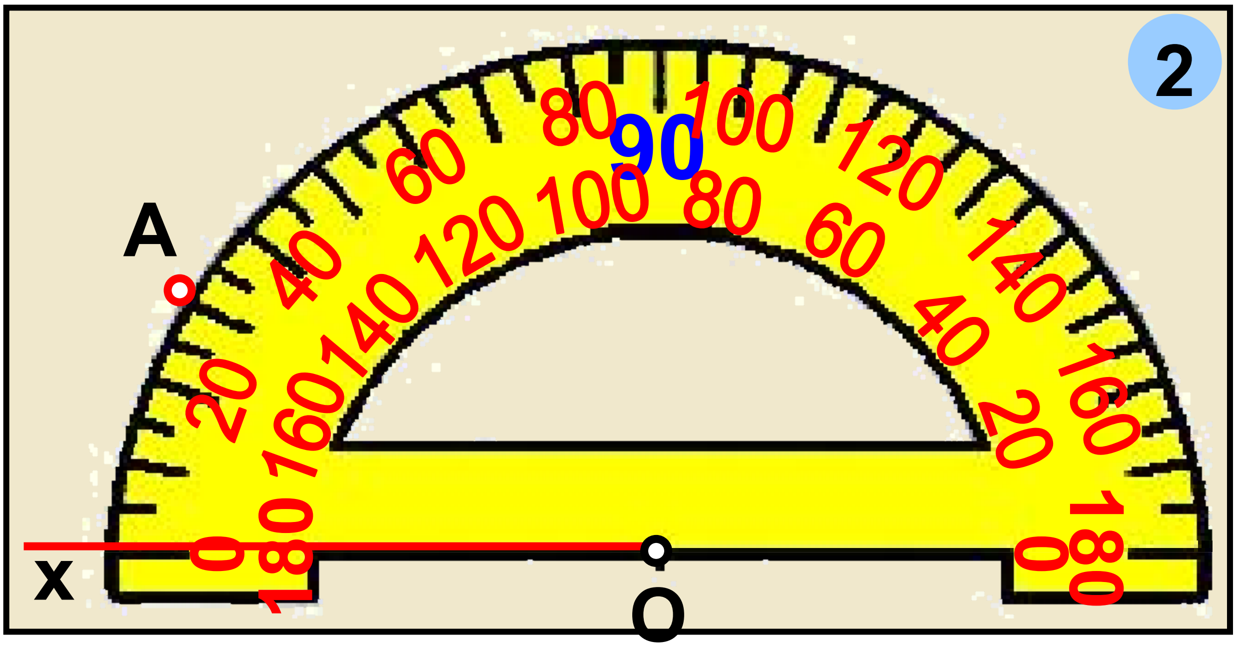


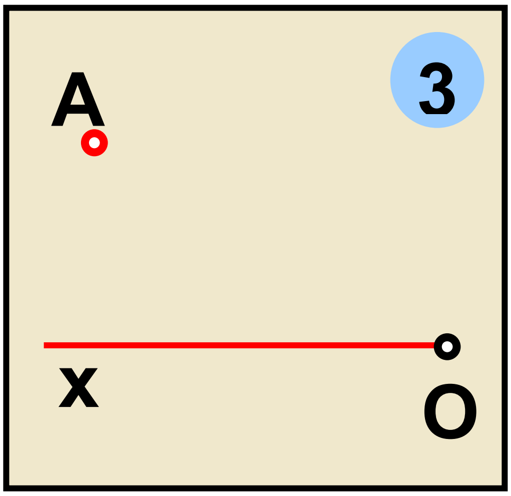
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

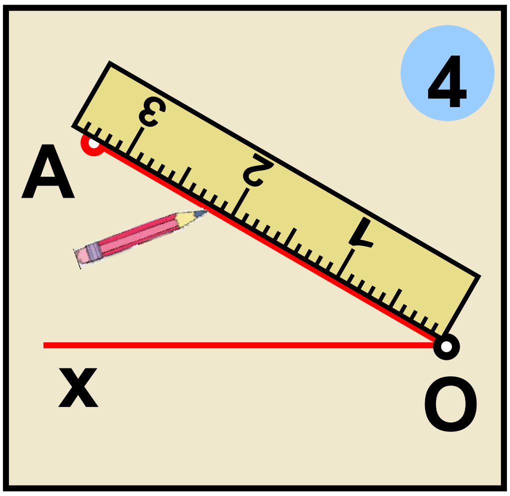
1. Να κατασκευαστεί γωνία ίση με 30^{o}.

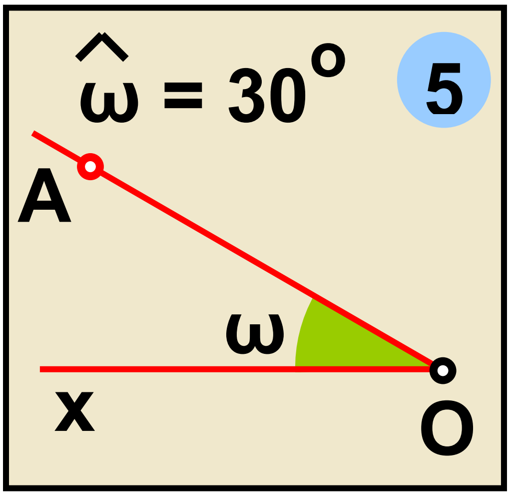


Λύση



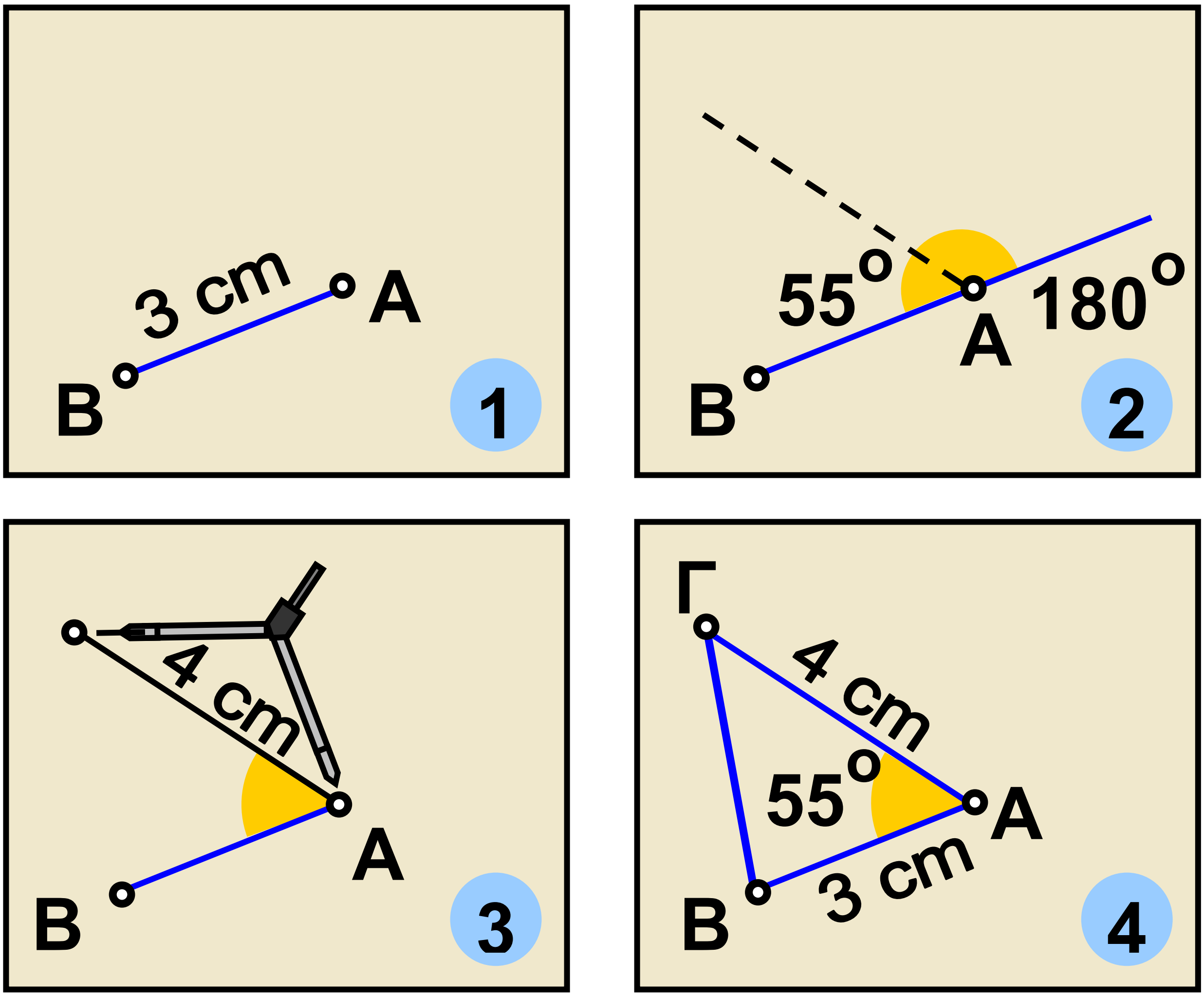




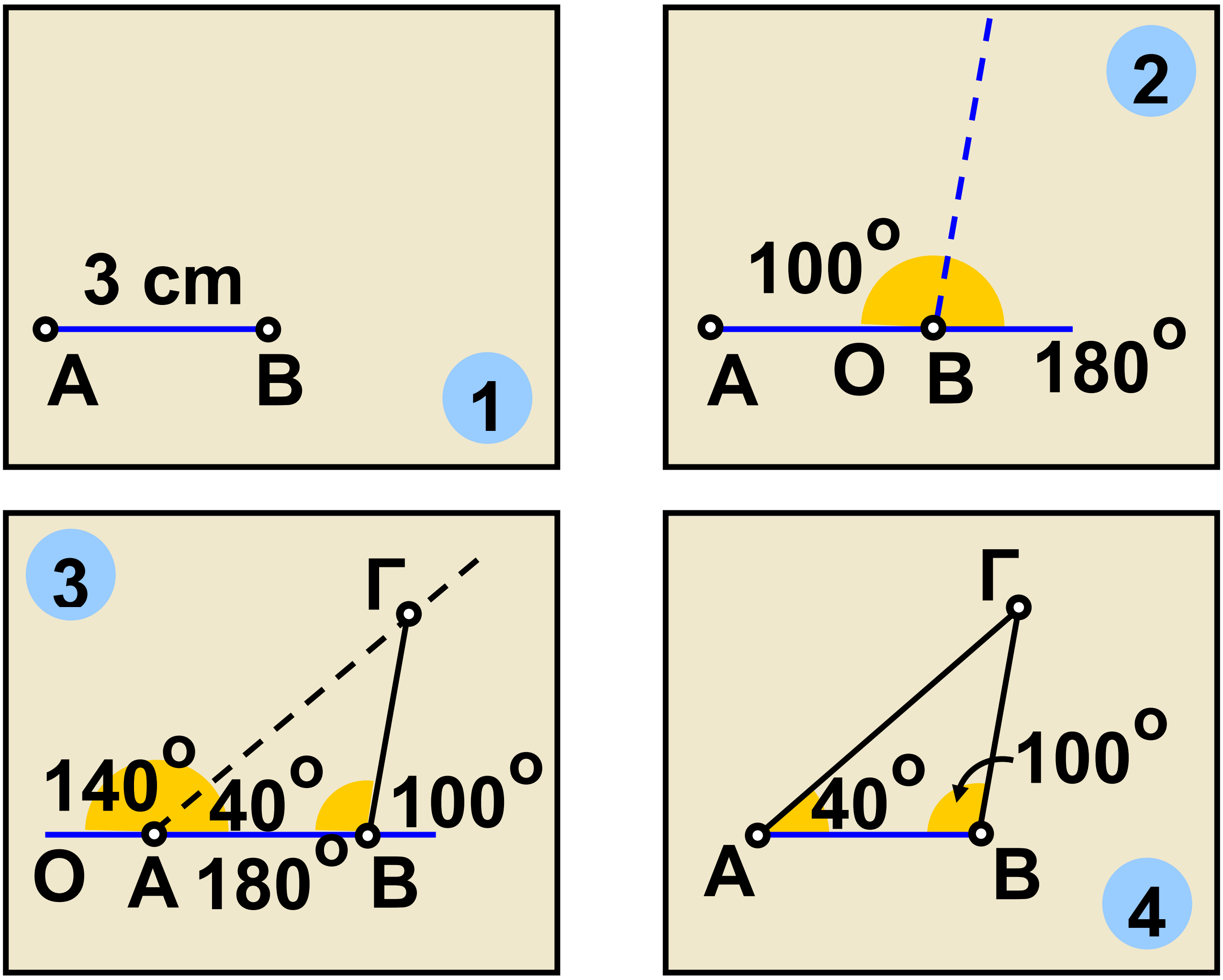


Για να κατασκευά-- σουμε μία γωνία χρησιμοποιούμε το μοιρογνωμόνιο. Το μοιρογνωμόνιο είναι ένα όργανο με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε το μέτρο ενός τόξου ή μιας γωνίας. Κάθε μοιρογνωμόνιο αντιστοιχεί σε ημικύκλιο που έχει βαθμολογηθεί έτσι, ώστε να δείχνει τα μέτρα των τόξων από 0^o έως 180^o. Ο τρόπος που μπορούμε να κατασκευάσουμε τη ζητούμενη γωνία 30^o φαίνεται στα διαδοχικά παραπάνω σχήματα.

2. Να κατασκευαστεί τρίγωνο, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει δύο πλευρές 3 cm και 4 cm και των οποίων η περιεχόμενη γωνία είναι 55^o.



3. Να κατασκευαστεί τρίγωνο, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει μία πλευρά 3 cm και τις προσκείμενες γωνίες 40^o και 100^o.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρεις πόσες μοίρες έχει:
α) ένας κύκλος, β) ένα ημικύκλιο και γ) καθένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος από δύο κάθετες διαμέτρους.

2. Δύο διάμετροι ενός κύκλου σχηματίζουν γωνία 60^o. Να βρεις πόσες μοίρες είναι κάθε ένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από αυτές τις διαμέτρους του.

3. Σχεδίασε δύο κύκλους (Ο, 3 cm) και (Ο΄ , 4 cm). Να ορίσεις στον κάθε κύκλο από ένα τόξο 45^o και να εξετάσεις εάν τα τόξα αυτά είναι ίσα. Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

4. Τρεις διάμετροι χωρίζουν έναν κύκλο σε έξι ίσα τόξα. Πόσων μοιρών είναι καθεμιά από τις έξι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν στα τόξα αυτά;

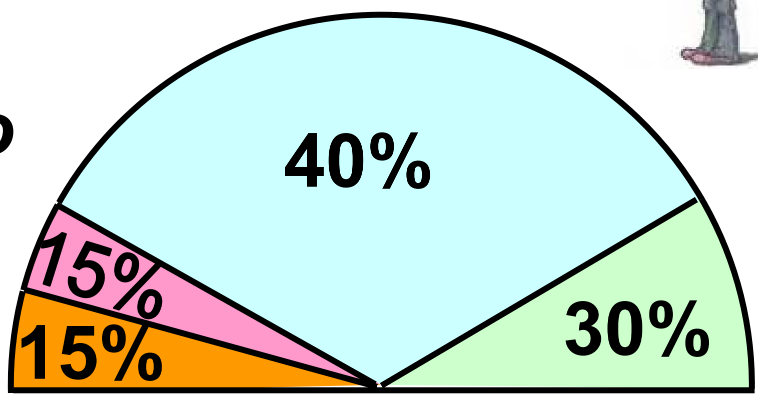
5. Σ' έναν κύκλο (Ο, ρ) να χαράξεις μία χορδή ΑΒ ίση με την ακτίνα του

κύκλου. Να υπολογίσεις σε μοίρες την επίκεντρη γωνία ΑΟΒ και να βρεις σε ποιο κλάσμα του κύκλου αντιστοιχεί το τόξο ΑΒ.

7. Να σχεδιάσεις ένα τμήμα ΑΒ = 2,8 cm και τους κύκλους (Α, 4 cm) και (Β, 4 cm). Να ονομάσεις Γ το ένα από τα δύο σημεία στα οποία τέμνονται οι κύκλοι και να μετρήσεις τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Το παρακάτω ημικυκλικό διάγραμμα έχει κάποιο λάθος! Γιατί;
Μπορείς να το διορθώσεις;

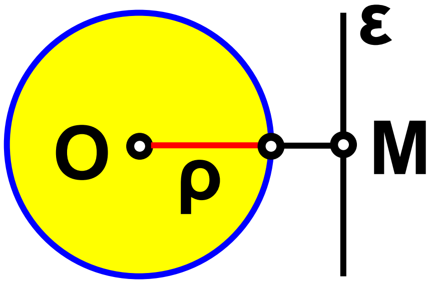


Β.1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

Ας εξετάσουμε τώρα τις σχετικές θέσεις που μπορεί να έχουν σ’ ένα επίπεδο ένας κύκλος και μια ευθεία;

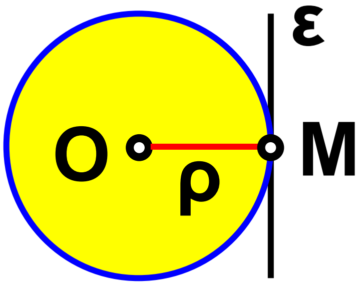
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

• Όταν ευθεία και κύκλος <u>δεν έχουν κανένα κοινό σημείο</u> λέμε ότι η ευθεία είναι <u>εξωτερική</u> του κύκλου.



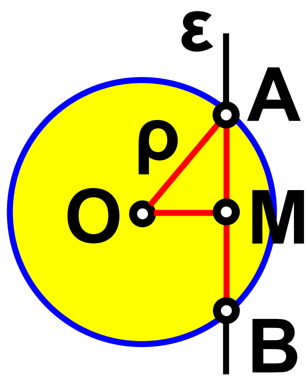
► Όταν <u>η απόσταση</u> ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι <u>μεγαλύτερη</u> από την ακτίνα ρ (ΟΜ > ρ), η ευθεία είναι <u>εξωτερική του κύκλου</u>.

• Όταν ευθεία και κύκλος έχουν ένα <u>μόνο κοινό σημείο</u> Μ, η ευθεία λέγεται <u>εφαπτόμενη</u> του κύκλου στο σημείο Μ.



► Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι ίση με την ακτίνα ρ (ΟΜ = ρ), η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Μ.

• Όταν ευθεία και κύκλος <u>έχουν δύο κοινά σημεία</u> Α και Β, η ευθεία λέγεται <u>τέμνουσα</u> του κύκλου ή λέμε ότι η ευθεία <u>τέμνει τον κύκλο</u> στα Α και Β

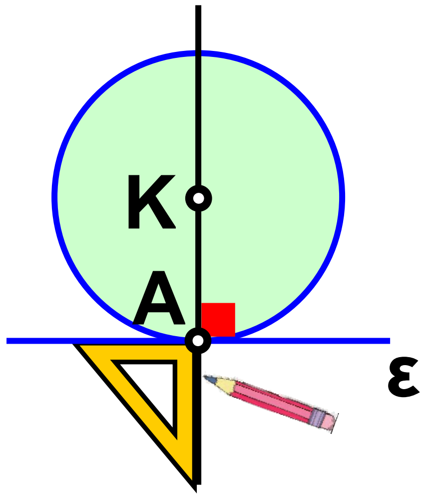


► Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ (ΟΜ < ρ), η ευθεία είναι <u>τέμνουσα</u> του κύκλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να σχεδιαστεί κύκλος που να εφάπτεται σε σημείο μιας ευθείας.

Λύση



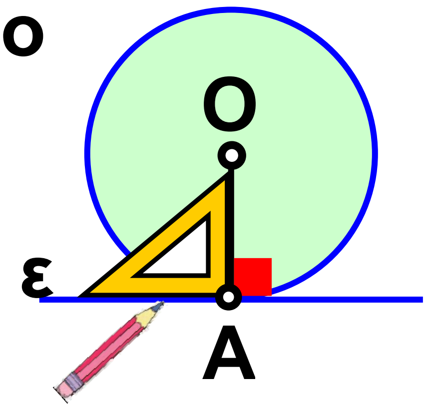
Παίρνουμε μια ευθεία ε και το σημείο της Α. Σχεδιάζουμε την ευθεία που είναι κάθετη στην ε στο σημείο Α. Με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο Κ της κάθετης αυτής και ακτίνα το τμήμα ΚΑ γράφουμε κύκλο. Ο κύκλος που φέραμε θα εφάπτεται στην ευθεία ε, διότι αυτή είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ του κύκλου στο άκρο της Α.

2. Να σχεδιαστεί ευθεία που να εφάπτεται σε σημείο ενός κύκλου.

Λύση

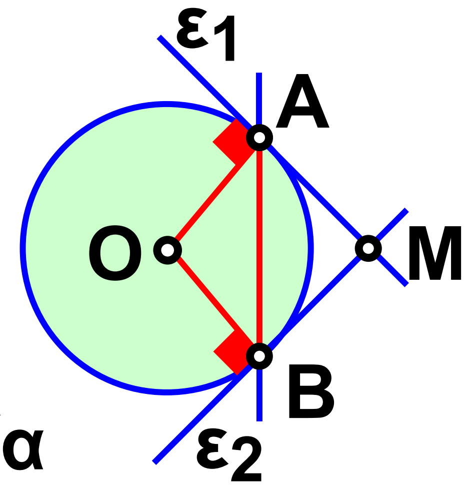
Παίρνουμε ένα κύκλο (Ο, ρ) και το σημείο του Α. Σχεδιάζουμε την ευθεία ε, που είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΑ στο σημείο Α. Η ευθεία ε

θα εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Α, διότι είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΑ στο άκρο της Α.



3. Να σχεδιαστούν εφαπτόμενες ενός κύκλου (Ο, ρ) στα άκρα Α και Β μιας χορδής του ΑΒ.

Λύση



Σχεδιάζουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ. Στο σημείο Α της ακτίνας ΟΑ φέρνουμε την ευθεία ε_1 κάθετη στην ακτίνα αυτή. Η ευθεία ε_1 είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Στο σημείο Β της ακτίνας ΟΒ φέρνουμε την ευθεία ε_2 κάθετη στην ακτίνα αυτή. Η ευθεία ε_2 είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β.

• **Αν είναι Μ το σημείο που τέμνονται οι εφαπτόμενες, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ και ΒΜ λέγονται εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Να σχεδιάσεις δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ που να απέχουν μεταξύ τους 2,5 cm. Να πάρεις ένα σημείο Μ της $ε_1$ και να βρεις σημεία της $ε_2$ που απέχουν 3,6 cm από το Μ.*

***2.** Να σχεδιάσεις ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 3,6 cm και έναν κύκλο με διάμετρο την ΑΒ. Να χαράξεις τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από τα Α και Β. Να δικαιολογήσεις γιατί οι εφαπτόμενες αυτές είναι ευθείες παράλληλες.*

3. Παίρνουμε έναν κύκλο (Ο, ρ) και μια ευθεία ε. Ονομάζουμε δ την απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία ε. Να βρεις τον αριθμό των κοινών σημείων του κύκλου και της ευθείας, στις περιπτώσεις:

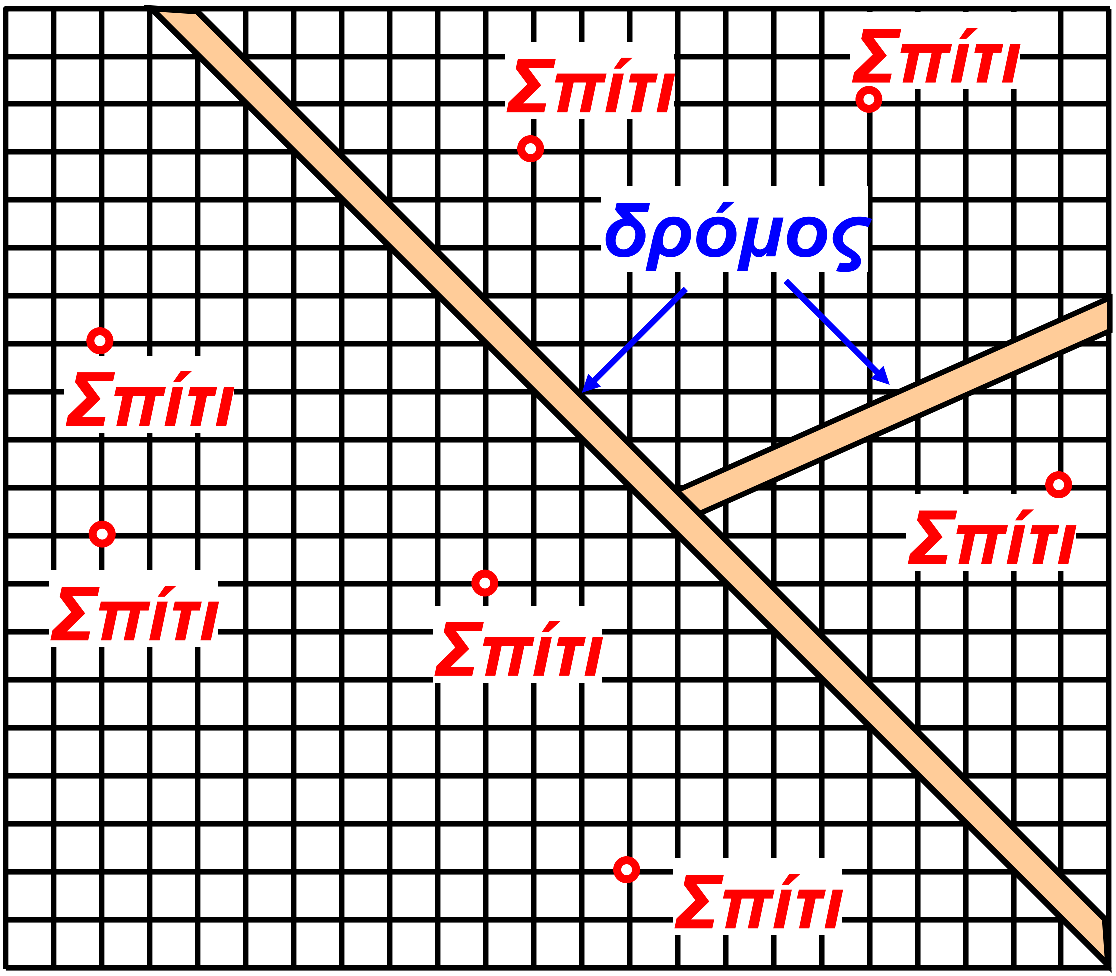
(α) Αν ρ = 5 cm και δ = 4 cm,
(β) αν ρ = 2,5 cm και δ = 2,5 cm και
(γ) αν ρ = 3 cm και δ = 6 cm.

4. Να σχεδιάσεις δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 και να ονομάσεις Α το σημείο τομής τους. Να πάρεις ένα σημείο Κ της ε_1 ώστε να είναι ΚΑ = 3,1 cm. Να φέρεις τους κύκλους (Κ, 2,1cm), (Κ, 3,1cm) και (Κ, 36 cm). Να βρεις ποια είναι η θέση της ε_2 ως προς τους κύκλους αυτούς.

5. Να σχεδιάσεις ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 40 mm. Να πάρεις ένα σημείο Μ του ΑΒ, ώστε να είναι ΑΜ = 18 mm. Να φέρεις τους κύκλους (Α, 18 mm) και (Β, 22 mm). Να χαράξεις ευθεία ε που να διέρχεται από το Μ και να είναι κάθετη στην ΑΒ. Ποια είναι η θέση της ε ως προς τον καθένα από τους κύκλους; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

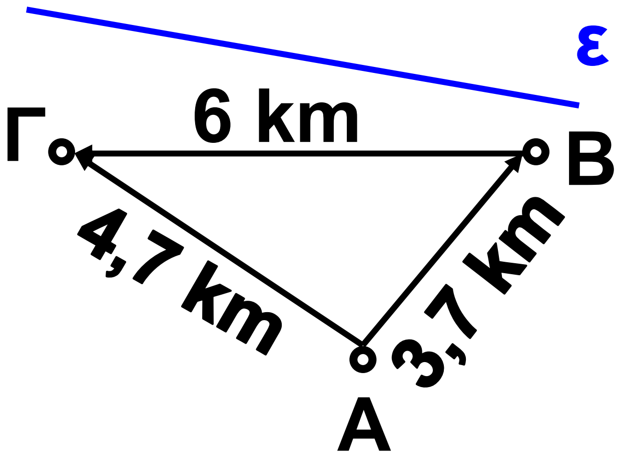
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Μια επιχείρηση αποφάσισε να κατασκευάσει ένα εργοστάσιο σε μια αγροτική περιοχή που επιλέγει για το σκοπό αυτό. Η πλευρά κάθε τετραγώνου του σχήματος της επόμενης σελίδας, αντιπροσωπεύει απόσταση 100 m. Το εργοστάσιο πρέπει να βρίσκεται τουλάχιστον σε



ακτίνα 600 m μακριά από τα σπίτια (Σ). Επίσης πρέπει να απέχει το λιγότερο 300 m από την άκρη του δρόμου. Να αντιγράψεις σε τετραγωνισμένο χαρτί το σχήμα και να χρωματίσεις τις περιοχές όπου μπορεί να κατασκευαστεί το εργοστάσιο.

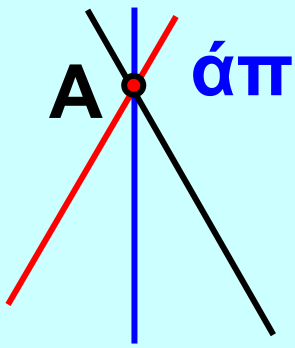
2. Η συμφωνία μεταξύ των χωριών Α, Β και Γ για την κατασκευή μιας γεώτρησης σε μια θέση Μ περιλαμβάνει τους εξής τρεις όρους:
α) ΑΜ > 2 km, β) ΒΜ = 3 km και
γ) ΓΜ = 4 km. Να αντιγράψεις το παρακάτω σχήμα και να βρεις τη θέση του σημείου Μ, καθώς και την απόσταση της θέσης αυτής από το δρόμο ε.



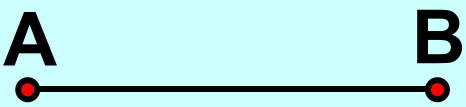
Ανακεφαλαίωση

- ΣΗΜΕΙΟ
- ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ

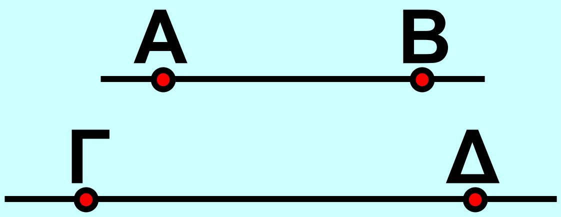
- σημείο **A**



άπειρες ευθείες από **A**

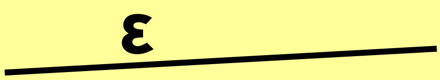


ευθύγραμμο τμήμα **AB**

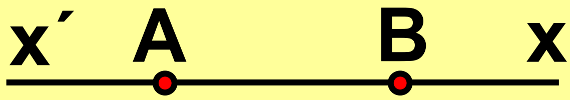


παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα

• ΕΥΘΕΙΑ
• ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

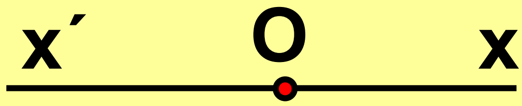


ευθεία ε

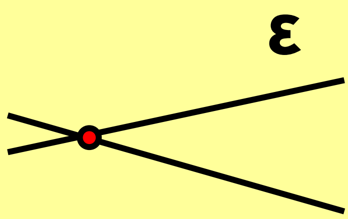


ευθεία AB

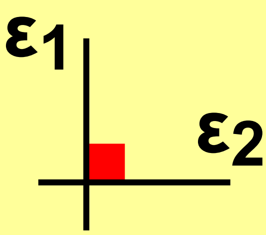
ημιευθεία Ax



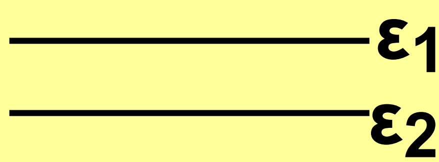
το σημείο O χωρίζει μια ευθεία σε δύο ημιευθείες Ox και Ox΄



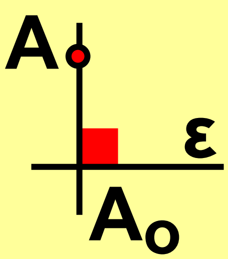
τεμνόμενες ευθείες



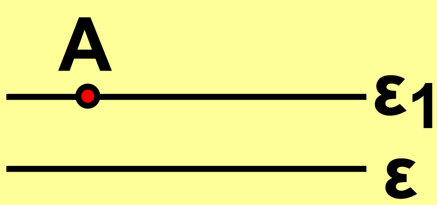
κάθετες ευθείες



παράλληλες ευθείες

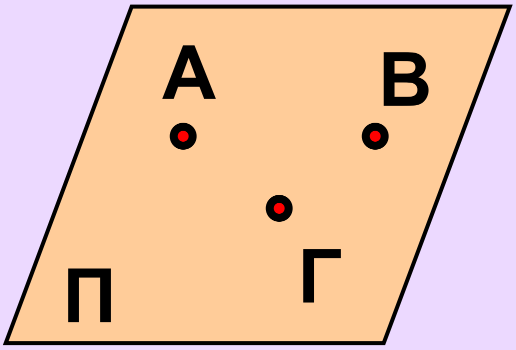


από το A μία μόνο κάθετη στην ε

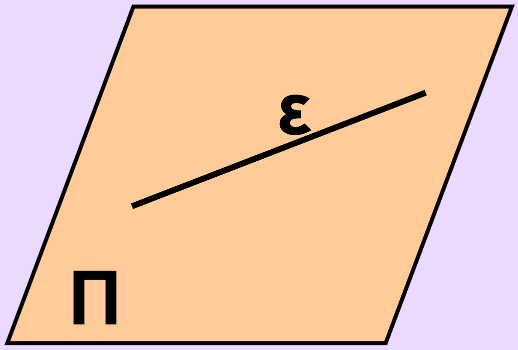


από το A μία μόνο παράλληλη στην ε

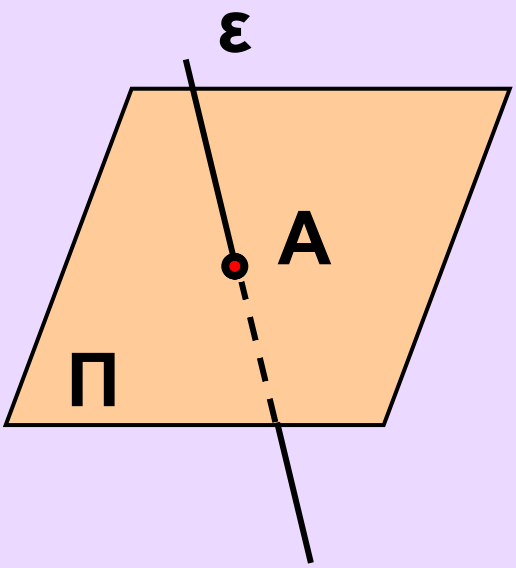
- **ΕΠΙΠΕΔΟ**
- **ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ**



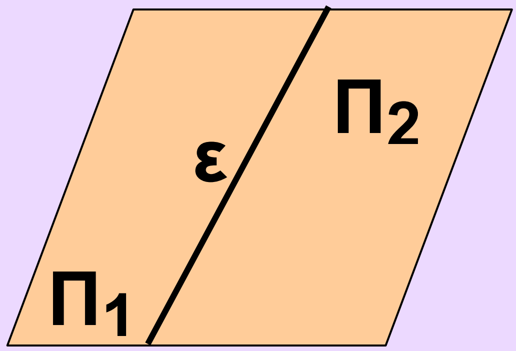
τρία σημεία ορίζουν ένα επίπεδο



Η ευθεία ε ανήκει ολόκληρη στο επίπεδο Π



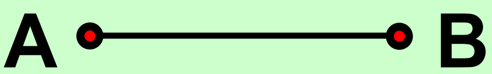
Η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο Π

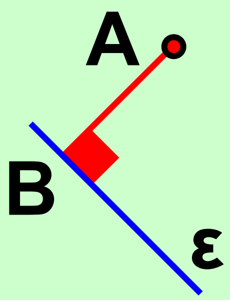


Η ευθεία χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα

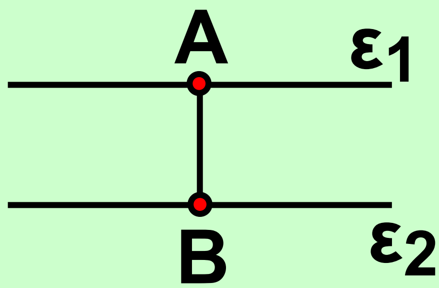
• ΑΠΟΣΤΑΣΗ

απόσταση
δύο σημείων





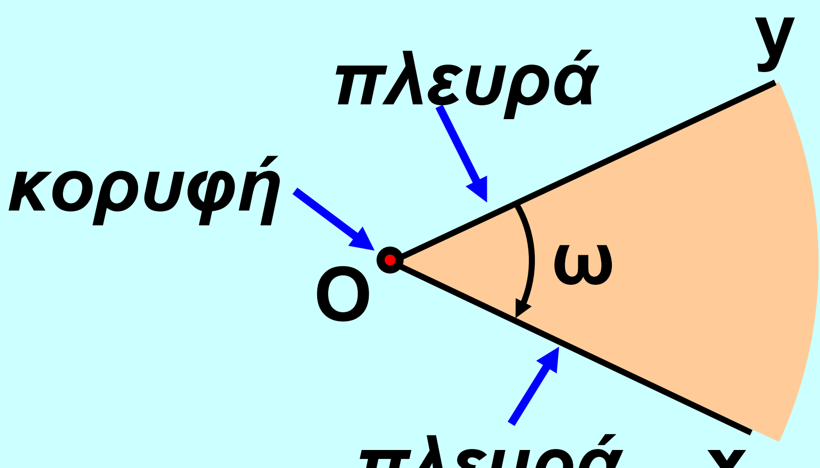
απόσταση
σημείου Α
από ευθεία ε



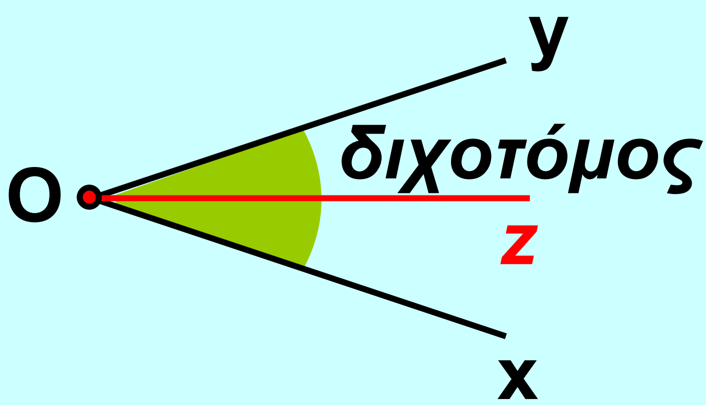
απόσταση δύο
παράλληλων
ευθειών

• ΓΩΝΙΑ

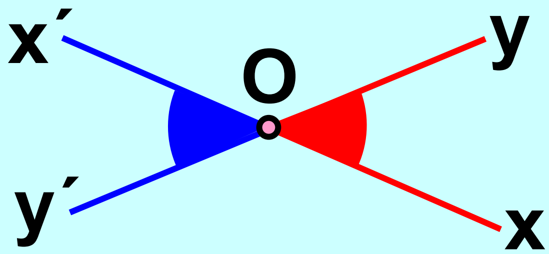
γωνία



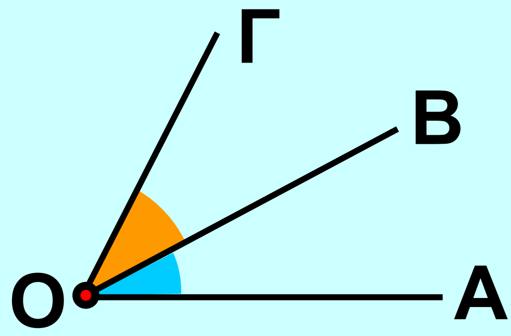
διχοτόμος γωνίας



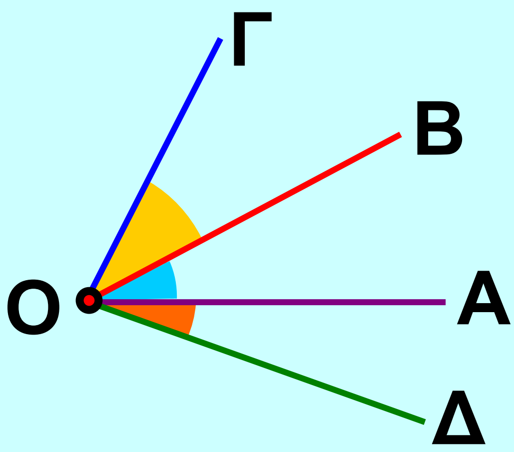
κατακορυφήν γωνίες

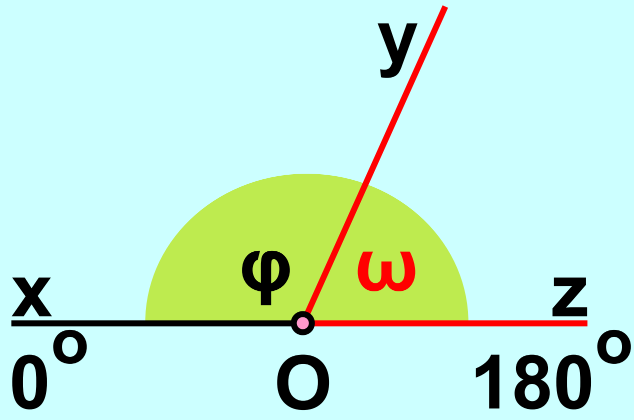


εφεξής γωνίες



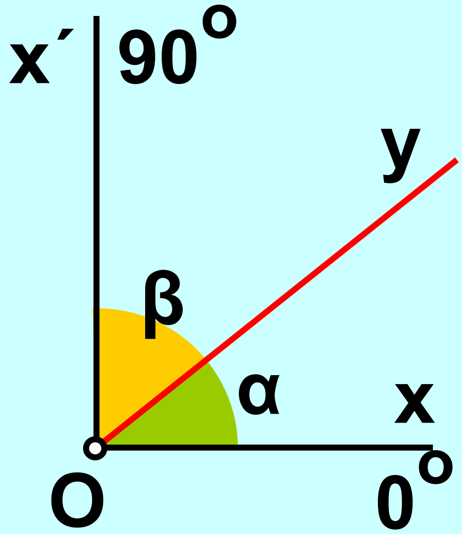
διαδοχικές γωνίες

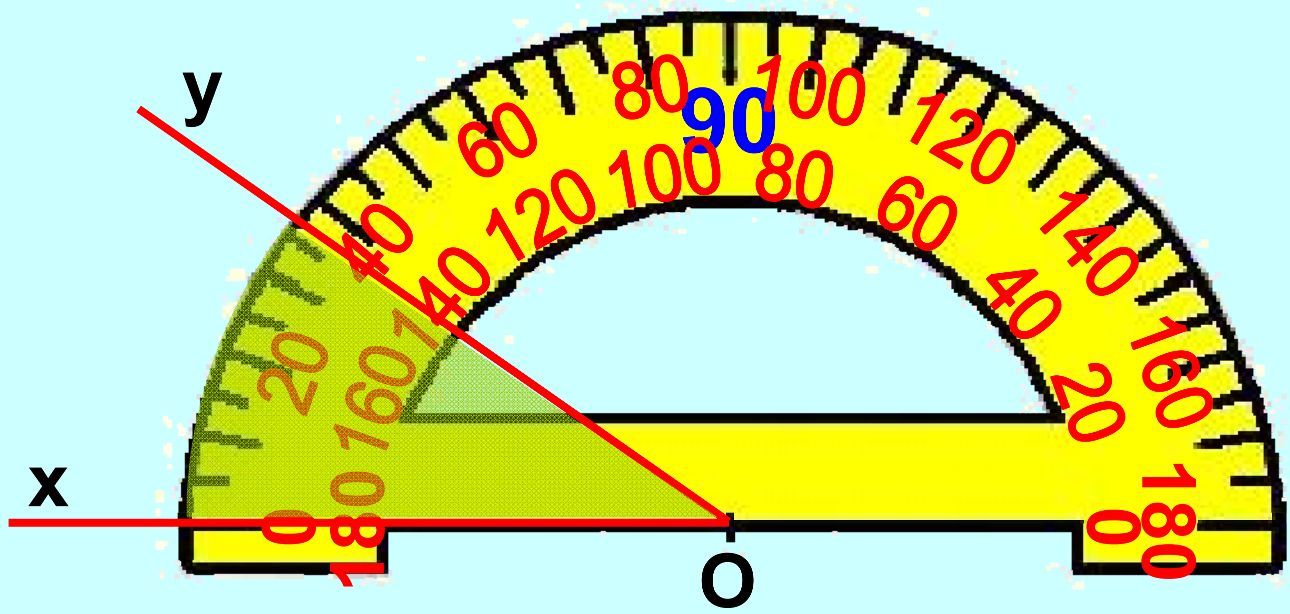




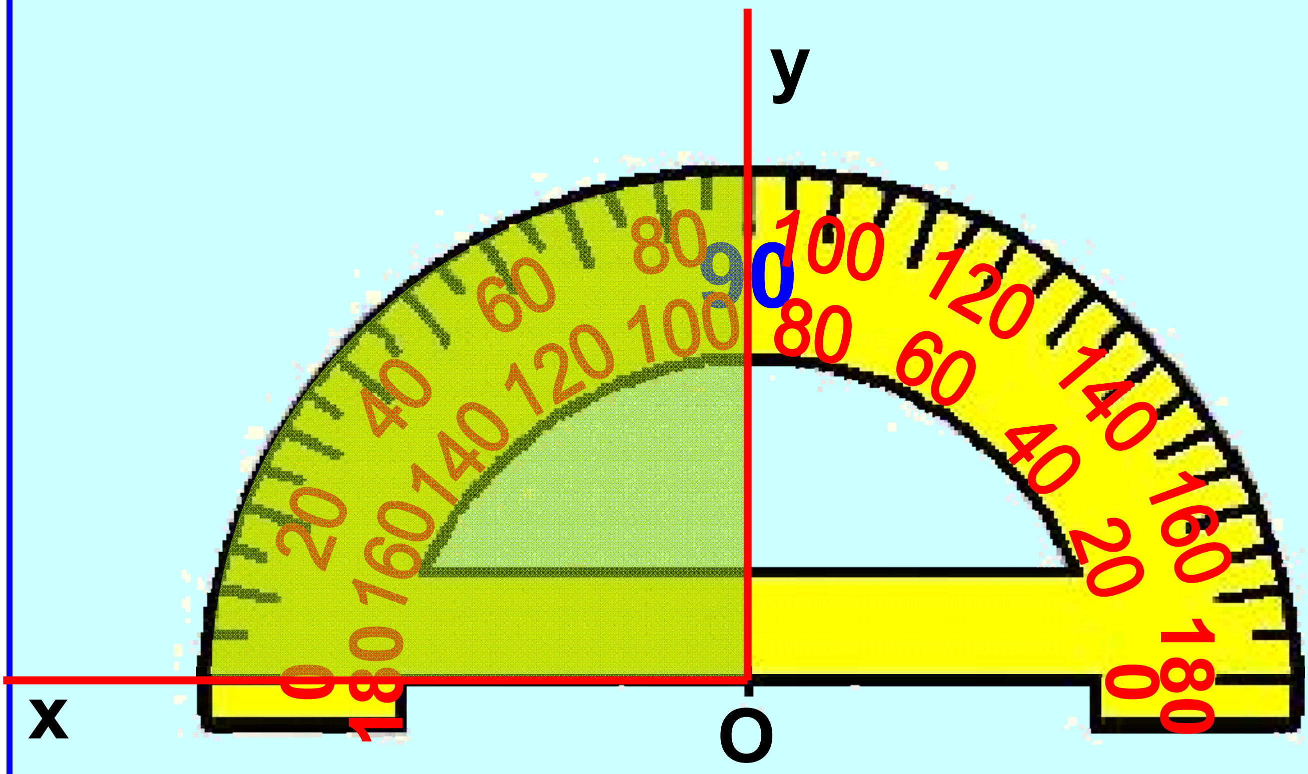
παραπληρωματικές γωνίες

συμπληρωματικές γωνίες

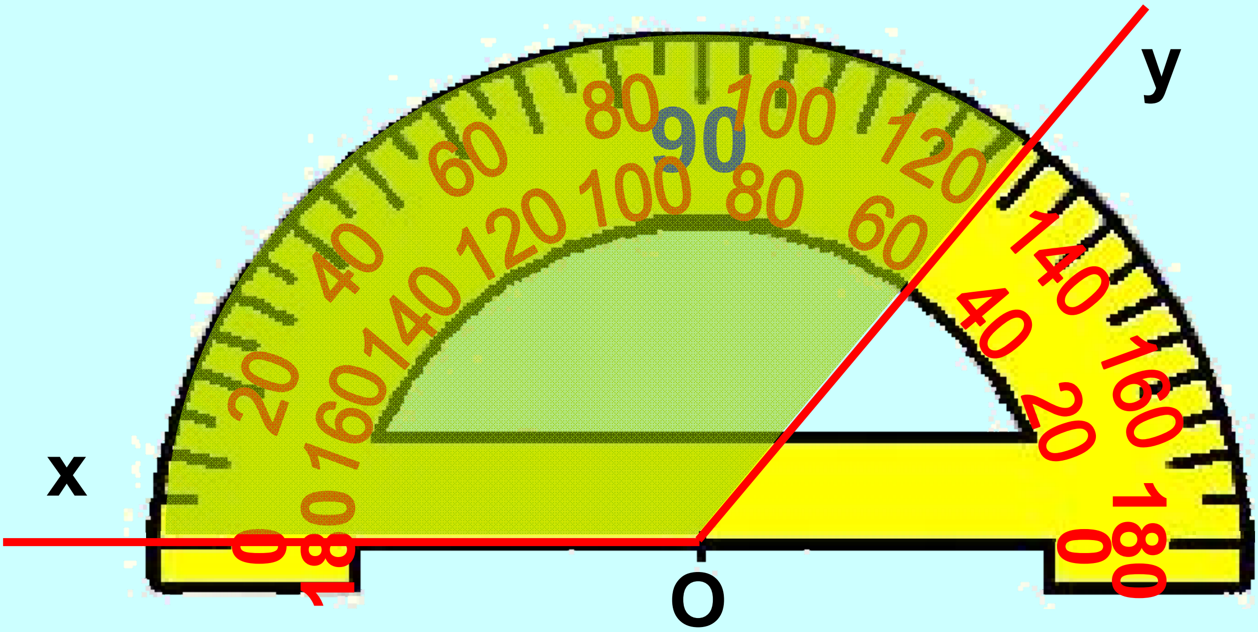




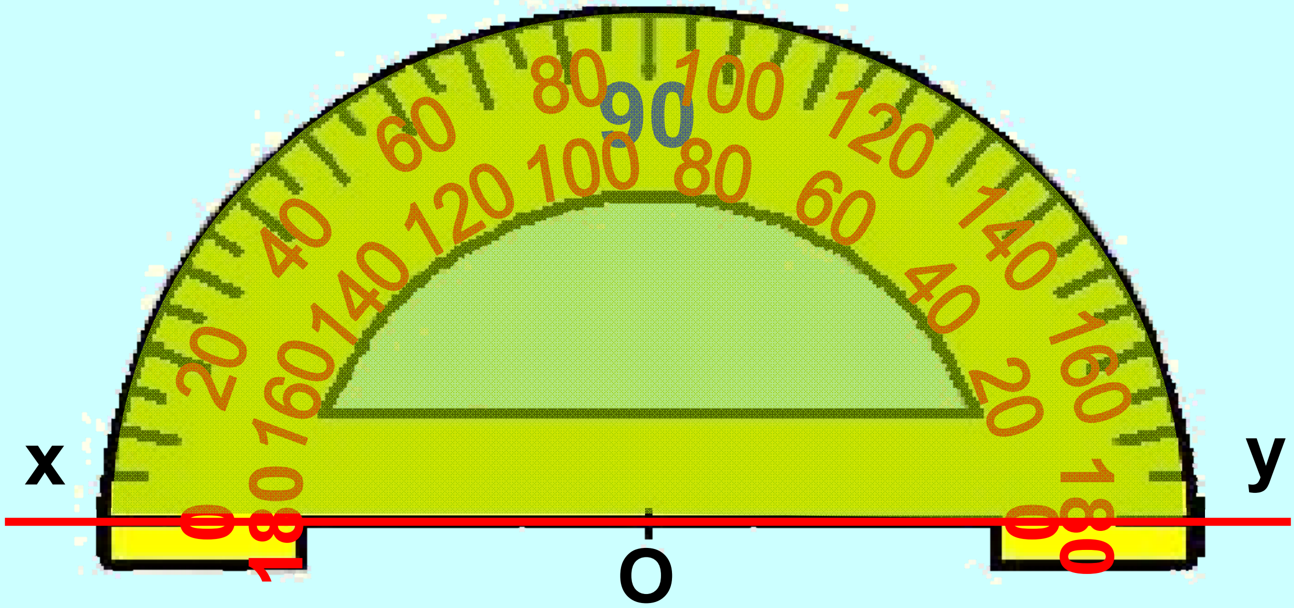
οξεία γωνία



ορθή γωνία

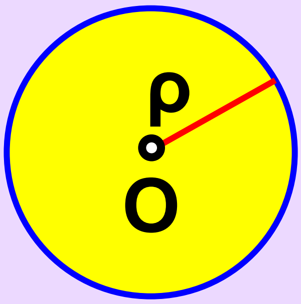


αμβλεία γωνία

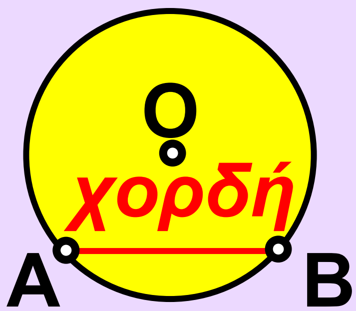


ευθεία γωνία

• Κύκλος



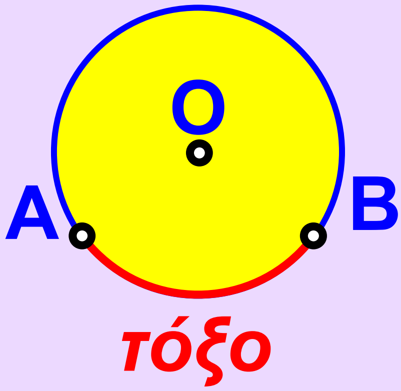
κύκλος(Ο, ρ) και
κυκλικός δίσκος



χορδή ΑΒ

η διάμετρος ΑΒ
χωρίζει τον κύκλο
σε 2 ημικύκλια

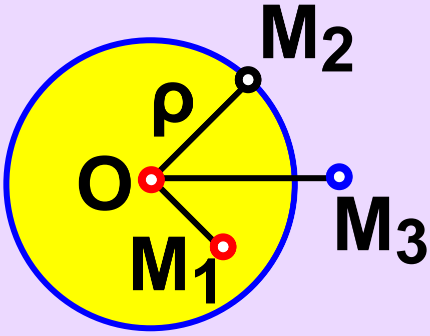
δύο σημεία Α και Β
του κύκλου ορίζουν
δύο τόξα του κύκλου



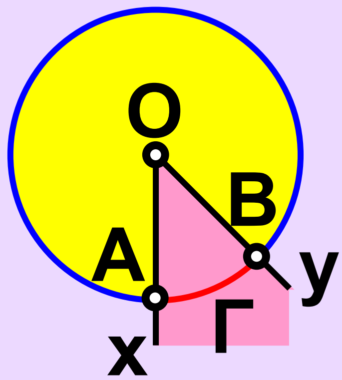
M_1 εσωτερικό του (Ο, ρ)

M_2 σημείο του (Ο, ρ)

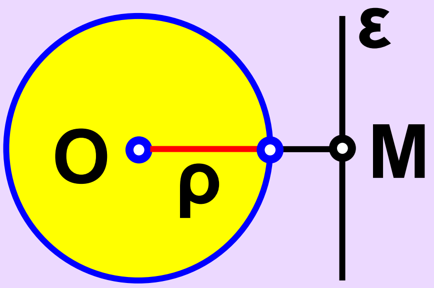
M_3 εξωτερικό του (Ο, ρ)



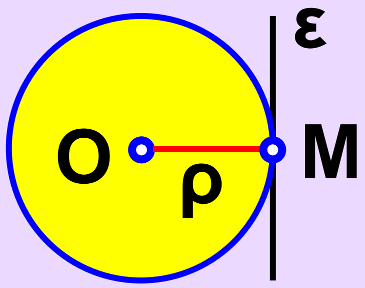
επίκεντρη γωνία



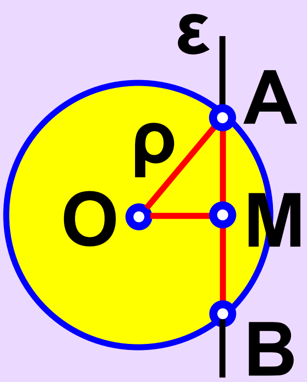
• ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ



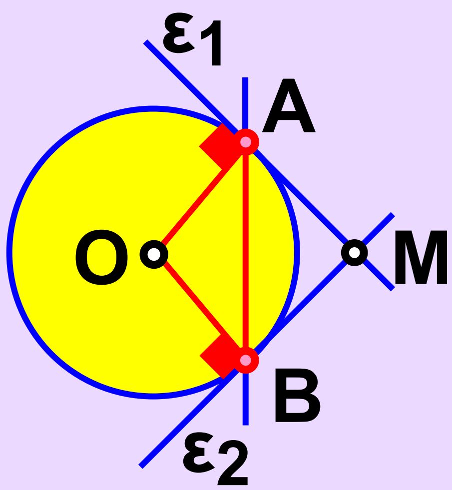
εξωτερική



εφαπτόμενη



τέμνουσα



εφαπτόμενα τμήματα

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Πολύ συχνά, σ' αυτά που διαβάζουμε, σε ό,τι ακούμε, αλλά και σε εκείνα που γράφουμε ή λέμε, υπάρχουν λέξεις που την αρχική τους προέλευση ή τη βασική τους σημασία την αντλούν από τη γεωμετρία ή γενικότερα από τα μαθηματικά.

Είναι λέξεις που τις χρησιμοποιούμε με την ίδια περίπου έννοια όπως και στα μαθηματικά, π.χ. "στο μέσο της διαδρομής" ή "το μισό του προϋπολογισμού" κ.λπ.

Σε αρκετές όμως περιπτώσεις, με αυτές τις λέξεις εκφραζόμαστε μεταφορικά, αποδίδοντάς τους ένα ευρύτερο νόημα. Λέμε πχ. "Όλες οι χώρες της Ευρώπης δε βρίσκονται στο ίδιο οικονομικό επίπεδο" ή "το φεστιβάλ συνεχίστηκε με παράλληλες εκδηλώσεις".

Στο κείμενο που ακολουθεί, υπάρχουν πολλές τέτοιες λέξεις. Προσπάθησε να τις εντοπίσεις και να τις υπογραμμίσεις με την πρώτη ανάγνωση.

“Το κρίσιμο σημείο”

…Η μπάλα έχει τοποθετηθεί στο σημείο του “πέναλτι”. Οι φίλαθλοι στις κερκίδες έχουν παγώσει. Οι παίκτες των δύο ομάδων βρίσκονται, ήδη, έξω από τις γραμμές της μεγάλης περιοχής. Ο τερματοφύλακας, στο μέσον ακριβώς της εστίας του, κοιτάζει κατευθείαν στα μάτια τον αντίπαλο του, που ετοιμάζεται να εκτελέσει την εσχάτην των ποινών αυτού του αγώνα. Για ένα κλάσμα του δευτερολέπτου οι δύο παίκτες και η μπάλα βρίσκονται ακριβώς στην ίδια ευθεία και αμέσως

μετά η σφαιρική μάγισσα διαγράφει μια καμπύλη τροχιά και καρφώνεται στη δεξιά γωνία της εστίας, τη στιγμή που ο τερματοφύλακας πέφτει προς την αντίθετη πλευρά. “Γκοοοοοοόλ”, φωνάζει με όλη τη δύναμη του ο Μιχάλης, τρέχοντας προς το κέντρο του κατάφωτου από τους προβολείς γηπέδου, ενώ οι οπαδοί της ομάδας του τον αποθεώνουν αφού έδωσε λύση στο πιο κρίσιμο σημείο του αγώνα. ***Ταυτόχρονα, ανοίγει η πόρτα του δωματίου και η μητέρα του Μιχάλη, μισοξυπνημένη, τρέχει ανήσυχη να δει τι συμβαίνει στον ύπνο του γιού της.***

– Αυτό το παιδί, μουρμουρίζει, δε θα μάθει ποτέ να σβήνει το φως πριν κοιμηθεί…

- ***Μπορείς στα νεοελληνικά κείμενα, αλλά και στα άλλα μαθήματα π.χ. στην ιστορία, τη Γεωγραφία, τη Βιολογία κ.λπ., να εντοπίσεις τέτοιες λέξεις;***

- ***Να ελέγξεις σε ποιες περιπτώσεις έχουν σημασία κυριολεκτική και σε ποιες μεταφορική.***

- ***Προσπάθησε να συλλέξεις φράσεις, από λογοτεχνικά κείμενα, όπου οι λέξεις χρησιμοποιούνται κυρίως με μεταφορική σημασία, όπως π.χ. "βίοι παράλληλοι", "του κύκλου τα γυρίσματα" κ.λπ.***

- ***Τέλος, προσπάθησε να γράψεις κι εσύ ένα κείμενο ή μια ιστορία, στην οποία να χρησιμοποιήσεις τέτοιες λέξεις ή εκφράσεις, με κυριολεκτική ή και μεταφορική σημασία.***

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Γράψε "Σ" μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και "Λ" μπροστά από κάθε λάθος

☐ ***1. Αντικείμενες ημιευθείες λέγονται δύο ημιευθείες που έχουν κοινή αρχή.***

☐ ***2. Παράλληλες λέγονται δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου, που δεν έχουν κοινό σημείο.***

☐ ***3. Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών λέγεται το μήκος κάθε ευθύγραμμου τμήματος που έχει τα άκρα του σ' αυτές.***

☐ 4. *Αντίστοιχα στοιχεία των ίσων σχημάτων λέμε αυτά που συμπίπτουν όταν τοποθετήσουμε τα σχήματα το ένα πάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.*

☐ 5. *Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζουμε το σημείο Μ του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του.*

☐ 6. *Τόξο λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συνδέει δύο σημεία Α και Β του κύκλου.*

☐ 7. *Διάμετρος του κύκλου λέγεται η χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου.*

☐ 8. *Παραπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες, με άθροισμα 90^o.*

- 9. ***Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες με άθροισμα 180^o.***
- 10. ***Κατακορυφήν γωνίες λέγο-νται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή.***
- 11. ***Από ένα σημείο διέρχεται μία μόνο ευθεία.***
- 12. ***Από δύο σημεία μπορούν να περάσουν άπειρες ευθείες.***
- 13. ***Μια ευθεία επεκτείνεται απεριόριστα.***
- 14. ***Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.***
- 15. ***Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε άπειρα ημιεπίπεδα.***

☐ ***16. Δύο ευθείες που βρίσκονται στο επίπεδο είναι πάντα παράλληλες.***

☐ ***17. Από ένα σημείο Α μπορούμε να φέρουμε άπειρες ευθείες κάθετες σε μια ευθεία.***

☐ ***18. Δύο ευθείες του επιπέδου κάθετες σε μια τρίτη ευθεία είναι μεταξύ τους κάθετες.***

☐ ***19. Οι τεθλασμένες γραμμές διακρίνονται σε κλειστές ή μη κυρτές.***

☐ ***20. Η τεθλασμένη γραμμή έχει μήκος το άθροισμα των μηκών των ευθύγραμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται.***

☐ ***21. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μεγαλύτερο από κάθε τεθλασμένη γραμμή με τα ίδια άκρα Α και Β.***

☐ ***22. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ που ενώνει ένα σημείο Α του κύκλου με το κέντρο του Ο είναι διάμετρος του κύκλου.***

☐ ***23. Δύο κύκλοι με ακτίνες άνισες είναι ίσοι.***

☐ ***24. Η διάμετρος είναι τριπλάσια από την ακτίνα του κύκλου.***

☐ ***25. Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο Ο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ.***

☐ ***26. Οι προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι ίσες.***

☐ ***27. Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι συμπληρωματικές.***

☐ ***28. Ημικύκλιο λέγεται ένα από τα δύο τόξα, στα οποία διαιρείται ένας κύκλος από μια διάμετρό του.***

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Β΄ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – *Βασικές γεωμετρικές έννοιες (συνέχεια από τον 1ο τόμο)*