

**Μαθηματικά**

**Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**ΜΕΡΟΣ Β΄  
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ  
Τόμος 3ος**

**Γ' Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1 /  
Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:**

**«Αναμόρφωση των προγραμμάτων  
σπουδών και συγγραφή νέων  
εκπαιδευτικών πακέτων»**

**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ**

**Δημήτριος Γ. Βλάχος**

**Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ**

**Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου**

**Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων  
βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού  
εκπαιδευτικού υλικού με βάση το  
ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»**

**Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου**

**Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης**

**Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου**

**Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου**

**Γεώργιος Κ. Παληός**

**Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου**

**Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου**

**Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.**

**Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από**

**το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και**

**25% από εθνικούς πόρους.**

## ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ιωάννης Βανδουλάκης, *Μαθημ/κός*  
Χαράλαμπος Καλλιγιάς, *Μαθημ/κός-  
Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης*  
Νικηφόρος Μαρκάκης, *Μαθημ/κός*  
*Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπ/σης*  
Σπύρος Φερεντίνος, *Σχολικός*  
*Σύμβουλος Μαθηματικών*

## ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Χαράλαμπος Τσίτουρας,  
*Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ - Χαλκίδας*  
Γεώργιος Μπαραλός, *Σχολικός*  
*Σύμβουλος Μαθηματικών*  
Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου,  
*Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*

## ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Κλειώ Γκιζελή, *Ζωγράφος*  
Ιόλη Κυρούση, *Γραφίστρια*

## ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Βαρβάρα Δερνελή, *Φιλολόγος*  
*Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπ/σης*

**ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

**ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ**

**ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ**

**Αθανάσιος Σκούρας,**

***Σύμβουλος Παιδαγωγ. Ινστιτούτου***

**ΕΞΩΦΥΛΛΟ**

**Μανώλης Χάρος, Ζωγράφος**

**ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ**

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ**

**Στη συγγραφή του πρώτου μέρους  
(1/3) έλαβε μέρος και η Θεοδώρα  
Αστέρη, *Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ  
ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

***Ομάδα Εργασίας***

***Αποφ. 16158/6-11-06 και***

***75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ***

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,  
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ  
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**Ιωάννης Βανδουλάκης  
Χαράλαμπος Καλλιγιάς  
Νικηφόρος Μαρκάκης  
Σπύρος Φερεντίνος**

**Μαθηματικά**

**Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**ΜΕΡΟΣ Β΄  
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ  
Τόμος 3ος**

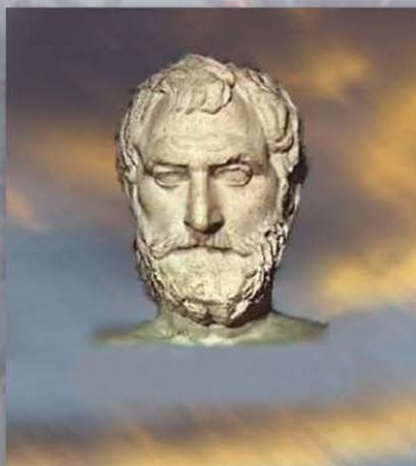


# Συμμετρία

ΜΕΡΟΣ  
Β΄

2ο

Κ  
Ε  
Φ  
Α  
Λ  
Α  
Ι  
Ο



**ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ**  
**640 – 546 π.Χ.**

## 2.1 Συμμετρία ως προς άξονα

- Γνωρίζω πότε δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς ευθεία
- Γνωρίζω πότε δύο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς ευθεία και ότι τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα
- Βρίσκω το συμμετρικό σημείο ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας, τριγώνου, γωνίας και κύκλου ως προς μία ευθεία και γνωρίζω τις γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από την συμμετρία αυτή

## 2.2 Άξονας συμμετρίας

- Αναγνωρίζω σχήματα με άξονα ή άξονες συμμετρίας

## 2.3 Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

- Χαράσσω τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος με τη

**βοήθεια βαθμολογημένου κανόνα και γνώμονα**

- **Γνωρίζω τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκάθετου ευθυγράμμου τμήματος**
- **Χαράσσω τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος με κανόνα και διαβήτη**

## **2.4 Συμμετρία ως προς σημείο**

- **Γνωρίζω ότι η συμμετρία ως προς κέντρο  $O$  είναι μια στροφή γύρω από το  $O$  κατά γωνία  $180^\circ$**
- **Γνωρίζω τότε δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς σημείο**
- **Γνωρίζω τότε δύο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς σημείο και ότι αυτά τα συμμετρικά σχήματα είναι ίσα**
- **Κατασκευάζω το συμμετρικό σημείου, ευθυγράμμου τμήματος, ευθείας, γωνίας, τριγώνου,**

**πολυγώνου και κύκλου ως προς σημείο**

## **2.5 Κέντρο συμμετρίας**

- **Αναγνωρίζω σχήματα με κέντρο συμμετρίας**
- **Γνωρίζω τα βασικά γεωμετρικά σχήματα με κέντρο συμμετρίας και τις γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από τη συμμετρία αυτή**

## **2.6 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία**

- **Γνωρίζω πώς ονομάζονται τα ζεύγη των γωνιών που σχηματίζονται από την τομή δύο παραλλήλων με μία τέμνουσά τους.**
- **Διαπιστώνω ότι όλες οι οξείες (ή οι αμβλείες) γωνίες, που σχηματίζουν δύο παράλληλες**

**οι οποίες τέμνονται από τρίτη  
ευθεία, είναι ίσες**

- **Διαπιστώνω ότι μία οξεία και μία  
αμβλεία γωνία από τις γωνίες  
που σχηματίζονται από την τομή  
δύο παραλλήλων από την τρίτη  
ευθεία είναι παραπληρωματικές**

## B.2.1. Συμμετρία ως προς άξονα

**Τι είναι συμμετρία; Ο ποιητής θα έλεγε: ό,τι φοριέται από την ανάποδη. Ότι διπλώνει και ταιριάζει, ό,τι στρίβει και «συμπίπτει». Μόνο η φαντασία δεν έχει καθόλου συμμετρία. Γι' αυτό η συμμετρία χρειάζεται και λίγη φαντασία. Αν αυτή ακριβώς τη φαντασία τη φορέσουμε ανάποδα, θα μας βγει όλη η Γεωμετρία.**



### **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ**

**Κατασκεύασε ένα ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με  $ΑΒ = ΑΓ = 5 \text{ cm}$  και  $ΒΓ = 4 \text{ cm}$  και τη διάμεσό του  $ΑΔ$ .**

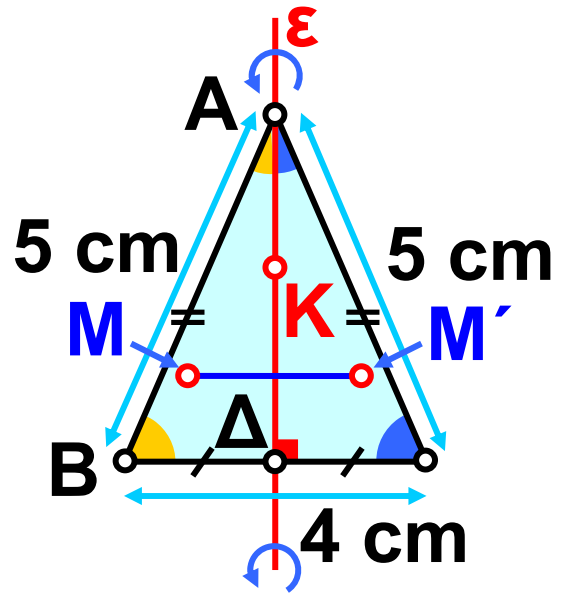
**Δίπλωσε το σχήμα κατά μήκος της ευθείας  $\epsilon$  που ανήκει η  $ΑΔ$ .**

**➤ Τι παρατηρείς;**



## Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε  
ότι τα τρίγωνα  
ΑΒΔ και ΑΓΔ  
συμπίπτουν.  
Αυτό σημαίνει,  
ότι κάθε σημείο



του ενός τριγώνου συμπίπτει με  
ένα σημείο του άλλου τριγώνου. Για  
παράδειγμα, το Β συμπίπτει με το  
Γ. Τα σημεία αυτά λέγονται  
συμμετρικά ως προς άξονα  
συμμετρίας την ευθεία ε.

Με τη δίπλωση κατά μήκος της  
ευθείας ε, κάθε σημείο της  
συμπίπτει με τον εαυτό του.  
Επομένως συμμετρικό του Α είναι  
το Α, του Δ το Δ και ενός  
οποιοδήποτε σημείου Κ της ε το  
ίδιο το Κ.

## Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



• Συμμετρικό σημείου  $B$  ως προς ευθεία  $\epsilon$ , είναι το σημείο  $\Gamma$  με το οποίο συμπίπτει το  $B$ , αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας  $\epsilon$ .

► Κάθε σημείο μιας ευθείας  $\epsilon$  είναι συμμετρικό του εαυτού του ως προς την  $\epsilon$ .

Όπως είδαμε, με τη δίπλωση κατά μήκος της ευθείας  $\epsilon$  κάθε σημείο του τριγώνου  $ΑΒΔ$  συμπίπτει με ένα σημείο του τριγώνου  $ΑΓΔ$ . Αυτό σημαίνει ότι καθένα από τα τρίγωνα αυτά αποτελείται από τα συμμετρικά όλων των σημείων του άλλου τριγώνου ως προς την ευθεία  $\epsilon$ .

*Γι' αυτό λέμε ότι:*

◆ Τα τρίγωνα  $ΑΒΔ$  και  $ΑΓΔ$  είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία  $\epsilon$ .

**Γενικότερα:**

- Δύο σχήματα

$(\Sigma_1)$  και  $(\Sigma_2)$

λέγονται

συμμετρικά

ως προς μία

ευθεία  $\varepsilon$ , όταν καθένα

αποτελείται από τα συμμετρικά

σημεία του άλλου ως προς την  $\varepsilon$ .

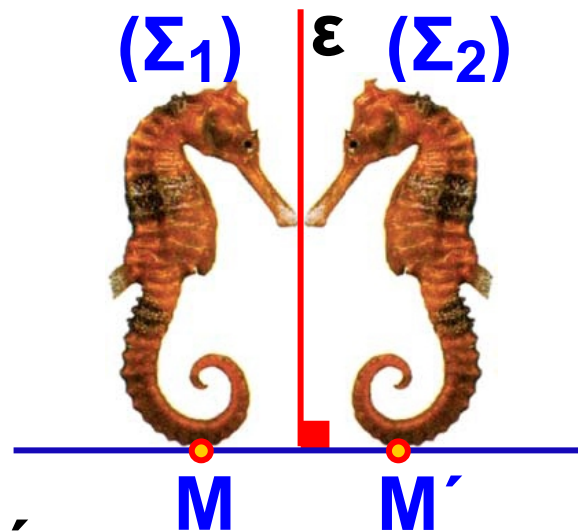
Επειδή με δίπλωση κατά μήκος

της  $\varepsilon$  συμπίπτει το  $(\Sigma_1)$  με το  $(\Sigma_2)$ ,

γνωρίζουμε ότι αυτά θα είναι ίσα.

Επομένως:

- ◆ Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα.



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

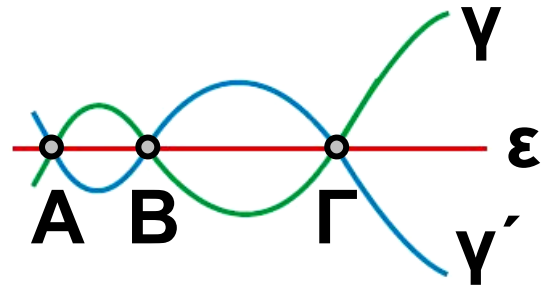
1. Μια γραμμή  $\gamma$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon$  στα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ . Να βρεθεί ο λόγος για τον οποίο και η συμμε-

τρική  $\gamma'$  της  $\gamma$ , ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ , θα περνάει από τα ίδια σημεία.

### Λύση



Η συμμετρική γραμμή  $\gamma'$  της  $\gamma$  ως προς την



$\varepsilon$ , αποτελείται από τα συμμετρικά όλων των σημείων της  $\gamma$ .

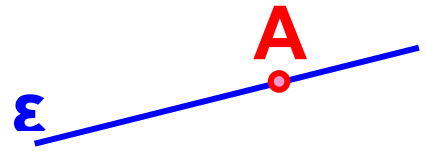
Επομένως στη  $\gamma'$  ανήκουν και τα συμμετρικά σημεία των A, B και Γ. Επειδή όμως τα A, B και Γ είναι σημεία της  $\varepsilon$  τα συμμετρικά τους είναι τα ίδια τα σημεία. Άρα τα A, B και Γ ανήκουν και στη  $\gamma'$ .

**2. Να κατασκευαστεί το συμμετρικό  $A'$  σημείου A ως προς μια ευθεία  $\varepsilon$ .**

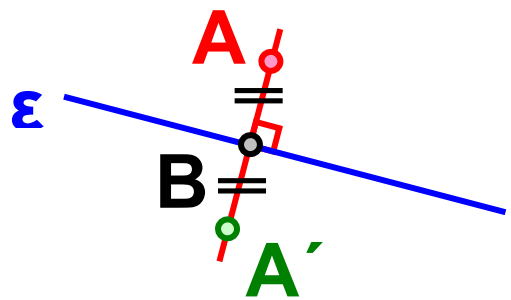
### Λύση

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Το σημείο  $A$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ . Τότε, όπως είδαμε, το συμμετρικό του είναι το ίδιο το σημείο  $A$ .



- Το σημείο  $A$  δεν ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ . Τότε, για να βρούμε το συμμετρικό του, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

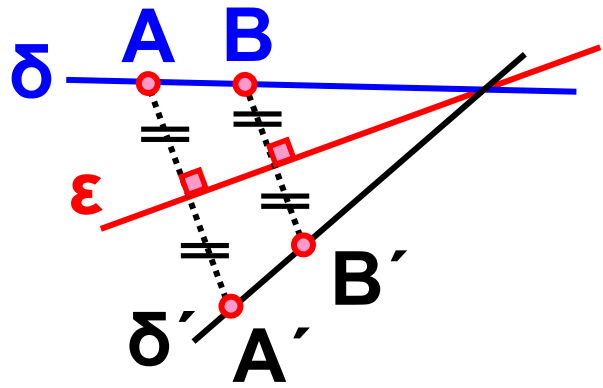


Φέρνουμε το κάθετο τμήμα  $AB$  από το σημείο  $A$  προς την ευθεία  $\varepsilon$  και το προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα, ώστε να είναι  $BA' = AB$ . Το σημείο  $A'$  είναι το συμμετρικό του  $A$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ .

**3.** Να κατασκευαστεί η συμμετρική ως προς ευθεία  $\varepsilon$ :  
(α) ευθείας  $\delta$  και (β) ημιευθείας  $A\chi$ .

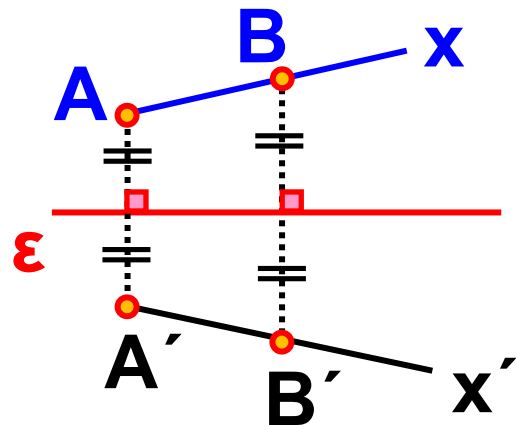
## Λύση

(α) Παίρνουμε δύο σημεία  $A$  και  $B$  πάνω στην ευθεία  $\delta$  και βρίσκουμε,



όπως περιγράφεται στην εφαρμογή 2, τα συμμετρικά τους  $A'$  και  $B'$ , ως προς την  $\epsilon$ . Η ευθεία  $\delta'$  που ορίζουν τα  $A'$  και  $B'$  είναι η συμμετρική της ευθείας  $\delta$ .

(β) Παρόμοια παίρνουμε, εκτός του  $A$ , ένα δεύτερο σημείο  $B$  πάνω στην

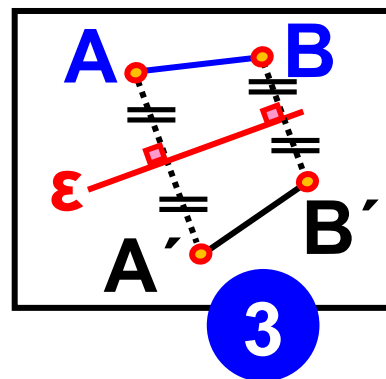
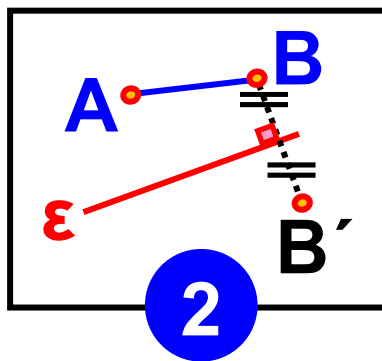
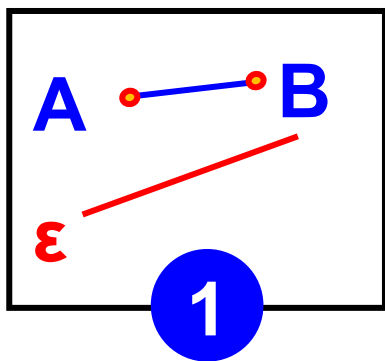


ημιευθεία  $Ax$  και βρίσκουμε, όπως πριν, τα συμμετρικά τους  $A'$  και  $B'$  ως προς την  $\epsilon$ . Η ημιευθεία  $A'x'$  που ορίζουν τα  $A'$  και  $B'$  είναι η συμμετρική της ημιευθείας  $Ax$ .

4. Να κατασκευαστεί το συμμετρικό  $A'B'$  ενός ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ , ως προς μια ευθεία  $\epsilon$ .

### Λύση

Βρίσκουμε με τον τρόπο που είδαμε στην εφαρμογή 3, τα συμμετρικά  $A'$  και  $B'$ , ως προς την  $\epsilon$ , των  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα  $A'B'$  θα είναι το συμμετρικό του  $AB$ , ως προς την ευθεία  $\epsilon$ .



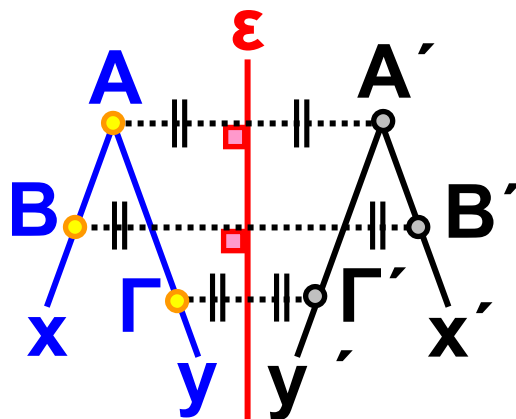
Τα συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα θα είναι μεταξύ τους ίσα, δηλαδή:  $A'B' = AB$

5. Να κατασκευαστεί η συμμετρική γωνία  $\hat{x}\hat{A}\hat{y}$  ως προς μία ευθεία  $\epsilon$ .

## Λύση

Για να κατασκευάσουμε τη γωνία  $\hat{x'A'y'}$  αρκεί να βρούμε το συμμετρικό  $A'$  της κορυφής  $A$  καθώς και τα συμμετρικά  $B'$  και  $\Gamma'$  δύο ακόμα σημείων  $B$  και  $\Gamma$ , που ανήκουν το καθένα σε μια από τις πλευρές της αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι θα είναι:

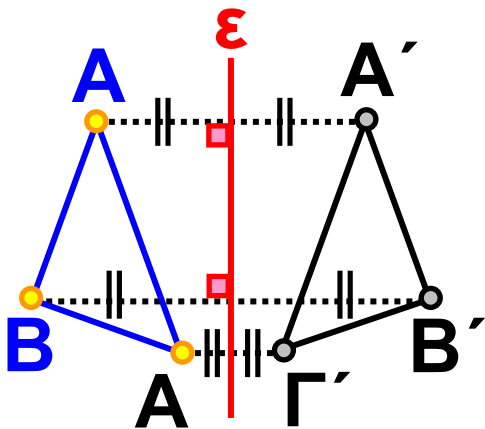
$$\hat{x'A'y'} = \hat{xAy}$$



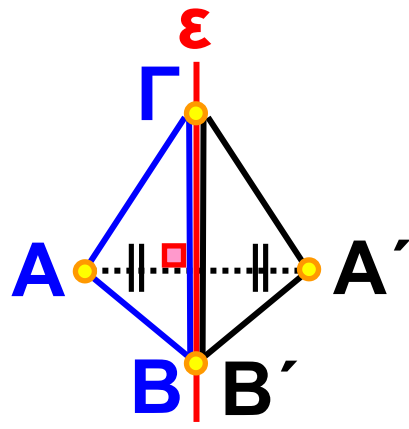
**6.** Να κατασκευαστεί το συμμετρικό  $A'B'\Gamma'$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς μία ευθεία  $\varepsilon$ , η οποία (α) δεν τέμνει τις πλευρές του, (β) διέρχεται από δύο κορυφές του και (γ) τέμνει τις πλευρές του.

## Λύση

Σε κάθε περίπτωση βρίσκουμε τα συμμετρικά  $A'$ ,  $B'$ ,  $\Gamma'$ , ως προς την  $\varepsilon$ , των κορυφών  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  του τριγώνου. Τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει συμμετρικό το τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$ , που είναι ίσο με το  $AB\Gamma$ .

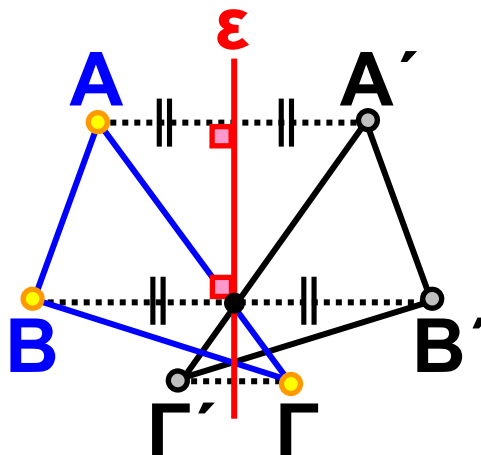


( $H \varepsilon$  δεν τέμνει τις πλευρές)



( $H \varepsilon$  διέρχεται από τα  $B$  και  $\Gamma$ )

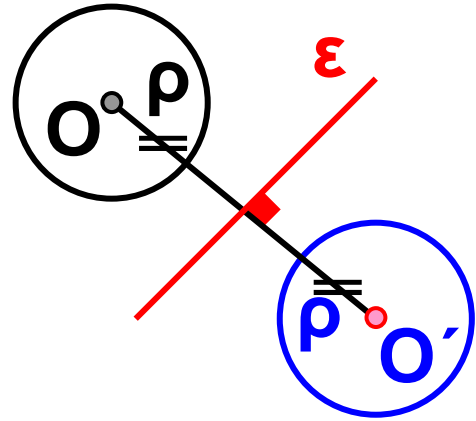
( $H \varepsilon$  τέμνει τις πλευρές)



**7. Να κατασκευαστεί το συμμετρικό κύκλου  $(O, \rho)$  ως προς ευθεία  $\varepsilon$ .**

**Λύση**

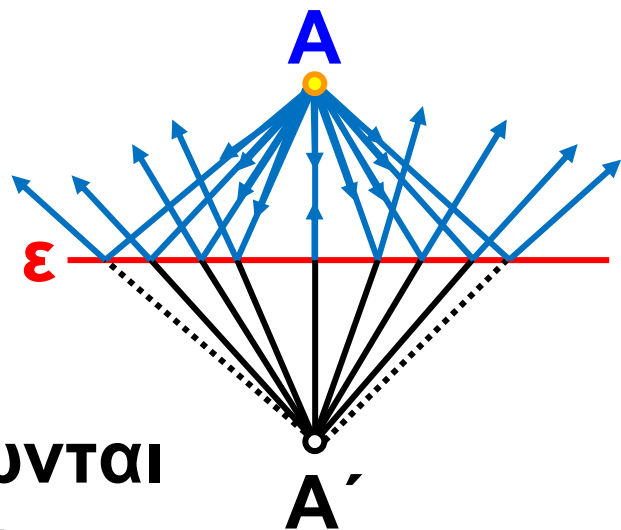
Το συμμετρικό του κύκλου  $(O, \rho)$  ως προς την  $\varepsilon$  είναι κύκλος  $(O', \rho)$  ίσος με τον  $(O, \rho)$ , με  $O'$  συμμετρικό του  $O$  ως προς την  $\varepsilon$ . Όπως όλα τα συμμετρικά σχήματα, οι κύκλοι  $(O, \rho)$  και  $(O', \rho)$  είναι ίσοι, δηλαδή έχουν ίσες ακτίνες.



**8. Να χαραχθεί η πορεία των ακτίνων του φωτός, που εκπέμπονται από ένα φωτεινό σημείο  $A$  και ανακλώνται σ' έναν επίπεδο καθρέφτη (ο οποίος στο σχήμα φαίνεται ως μία ευθεία  $\varepsilon$ ).**

**Λύση**

Βρίσκουμε το  
συμμετρικό  $A'$   
του σημείου  $A$   
ως προς την  
ευθεία  $\varepsilon$ .



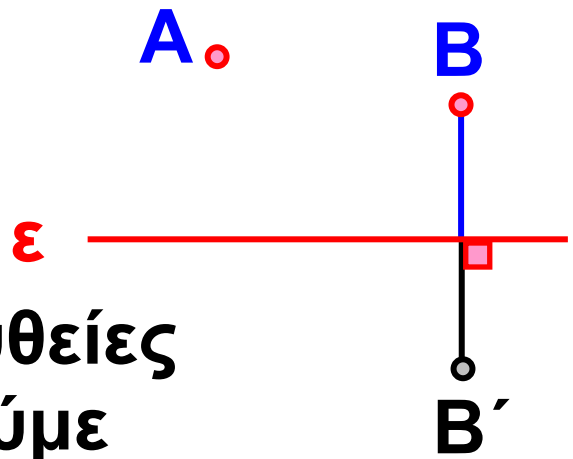
Οι ακτίνες ανακλώνται  
στον καθρέφτη και  
ακολουθούν την πορεία, που θα  
είχαν, αν η πηγή του φωτός ήταν το  
σημείο  $A'$ . Επειδή οι γωνίες που  
σχηματίζουν οι ακτίνες με την  $\varepsilon$   
είναι συμμετρικές, θα είναι και ίσες.  
Άρα, η γωνία με την οποία μια ακτί-  
να πέφτει στον καθρέφτη είναι ίση  
με τη γωνία με την οποία  
ανακλάται.

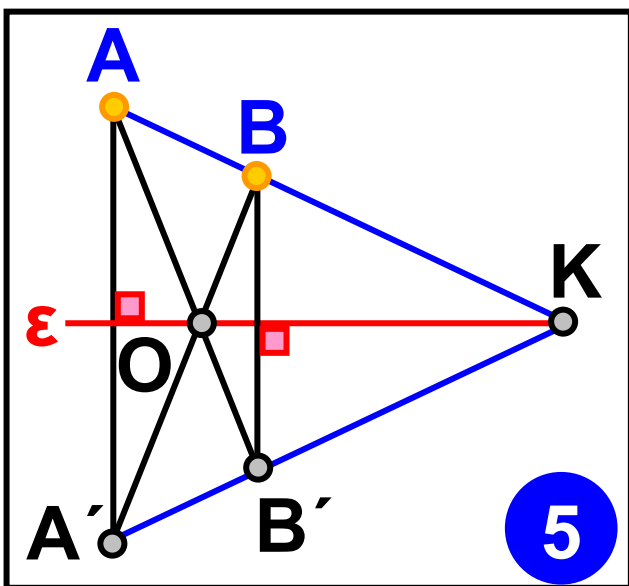
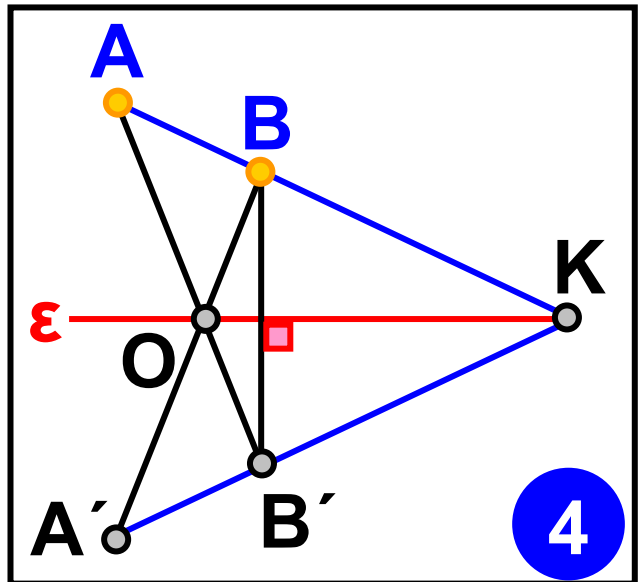
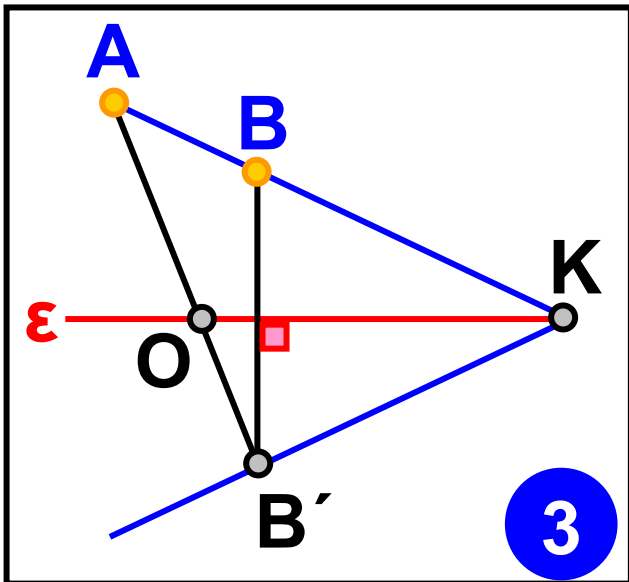
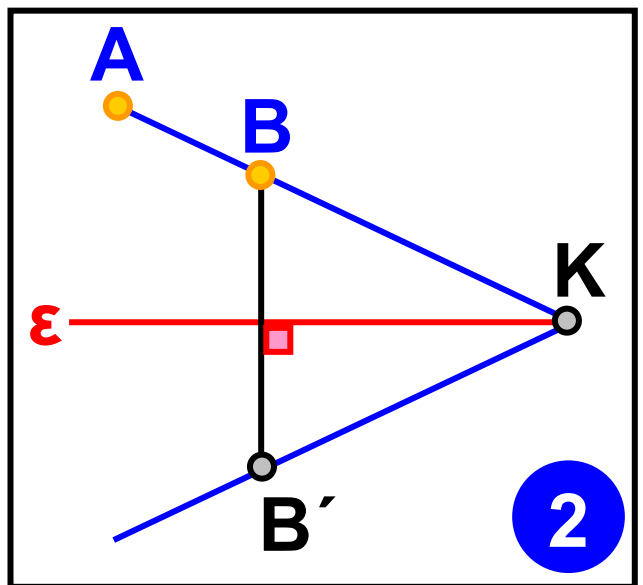
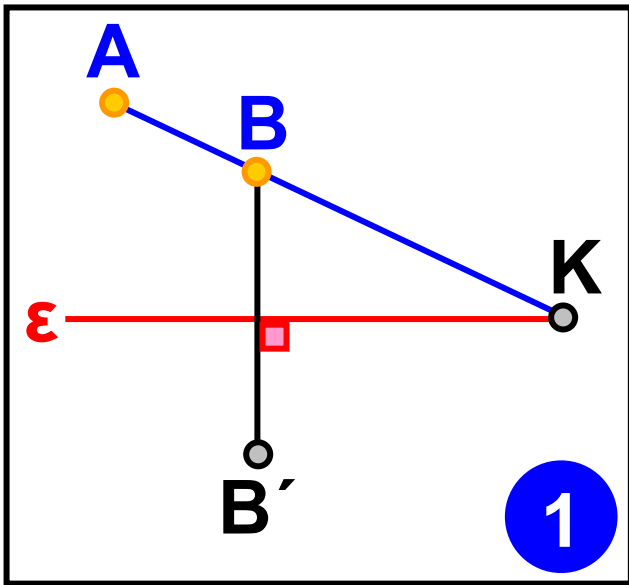
**9.** Στο σχήμα τα σημεία  $B$  και  $B'$   
είναι συμμετρικά ως προς την  
ευθεία  $\varepsilon$ . Να βρεθεί με τη βοήθεια  
μόνο του χάρακα το συμμετρικό του  
 $A$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ .

## Λύση

Επειδή με το χάρακα μπορούμε να φέρουμε μόνο ευθείες γραμμές, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα:

- Φέρνουμε την ευθεία  $AB$  και την προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει τον άξονα  $\varepsilon$  στο σημείο  $K$ .
- Φέρνουμε την ευθεία  $KB'$ , η οποία είναι συμμετρική της  $KB$ , αφού ενώνει δύο συμμετρικά σημεία αυτής, τα  $K$  και  $B'$ .
- Φέρνουμε την  $AB'$ , που τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $O$ .
- Τέλος, φέρνουμε την  $BO$ , που η συμμετρική της είναι η  $OB'$ . Οι ευθείες  $KB'$  και  $BO$  είναι συμμετρικές των  $KB$  και  $B'O$  αντίστοιχα και οι τομές τους θα είναι συμμετρικά σημεία, τα  $A$  και  $A'$ .

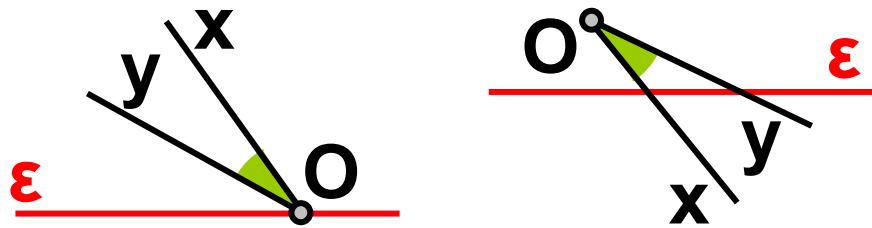




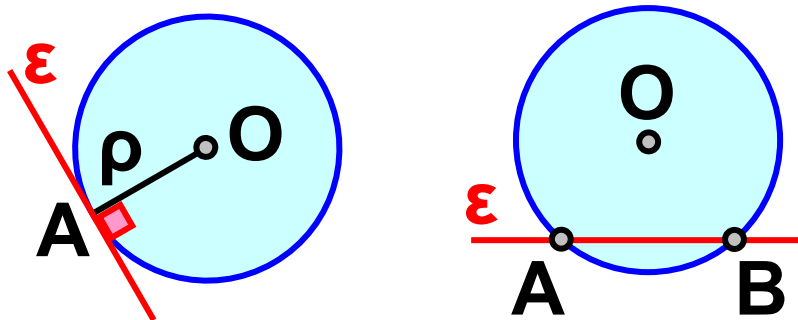


## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρεις τη συμμετρική της γωνίας  $\hat{xOy}$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ , σε καθεμιά από τις δυο περιπτώσεις.

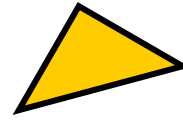


2. Να βρεις το συμμετρικό του κύκλου  $(O, \rho)$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$  σε καθεμιά από τις δυο περιπτώσεις.



3. Να βρεις το συμμετρικό του σχήματος ως προς την ευθεία  $\varepsilon$  και το συμμετρικό του νέου σχήματος ως προς την ευθεία  $\varepsilon'$ , η οποία είναι

**παράλληλη με την  $\epsilon$ . Τι σχέση έχουν το αρχικό και το τελευταίο σχήμα; Να επαναλάβεις το ίδιο και με μια τρίτη παράλληλη. Τι παρατηρείς;**



## **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ**

**1. Βρες το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς μια ευθεία  $\epsilon$  και το συμμετρικό του νέου τριγώνου ως προς μία άλλη ευθεία  $\zeta$ . Τι σχέση έχουν το αρχικό και το τελευταίο τρίγωνο; Να επαναλάβεις το ίδιο και με τρίτη ευθεία.**



**2. Προσπάθησε να δείξεις, ότι το συμμετρικό σχήμα ως προς άξονα  $\delta$  μιας ευθείας  $\epsilon$  παράλληλης προς τη  $\delta$ , είναι ευθεία παράλληλη προς την ευθεία  $\epsilon$ .**

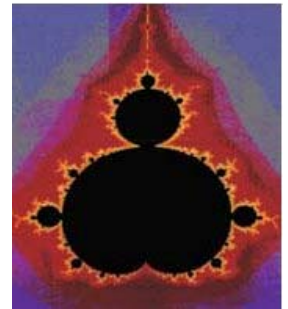
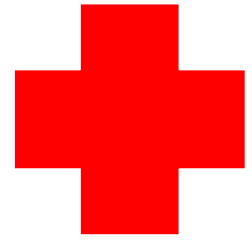
## Β.2.2. Άξονας συμμετρίας

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σχεδίασε σ' ένα διαφανές χαρτί μια ευθεία. Τοποθέτησε το διαφανές αυτό χαρτί πάνω σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα. Εξέτασε αν υπάρχει θέση τέτοια που τα δύο μέρη, στα οποία η ευθεία “χωρίζει” το σχήμα, συμπίπτουν, όταν το διπλώσεις κατά μήκος της ευθείας, ακριβώς στη θέση αυτή.

- Προσπάθησε να βρεις αν υπάρχει και άλλη θέση στην οποία μπορείς να παρατηρήσεις το ίδιο φαινόμενο για το ίδιο σχήμα.





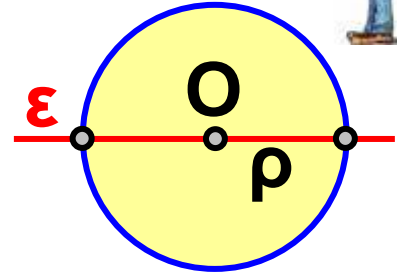
## Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Άξονας συμμετρίας σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία αυτή.
- ▶ Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι το ίδιο το σχήμα.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Να βρεθούν οι άξονες συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου  $(O, \rho)$ .



### Λύση

Με δίπλωση διαπιστώνουμε ότι η ευθεία  $\epsilon$  πάνω στην οποία βρίσκεται μια οποιαδήποτε διάμετρος του κύκλου  $(O, \rho)$  είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

Επομένως:

► Οποιαδήποτε διάμετρος κύκλου είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

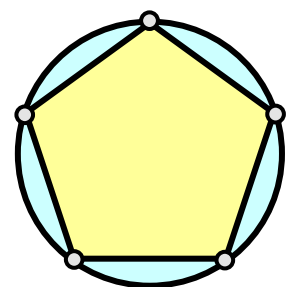
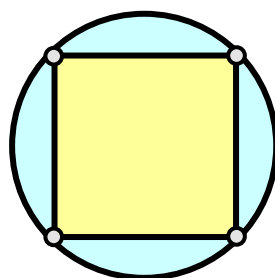
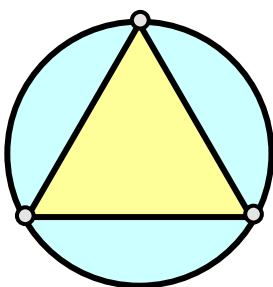
1. Να επιλέξεις τη σωστή απάντηση:

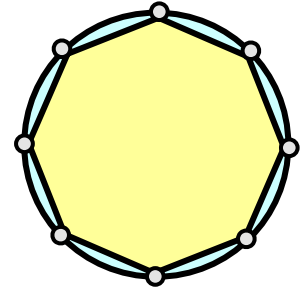
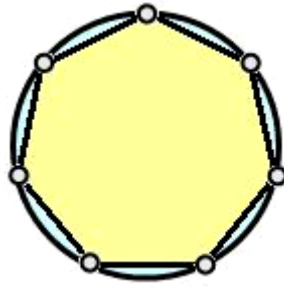
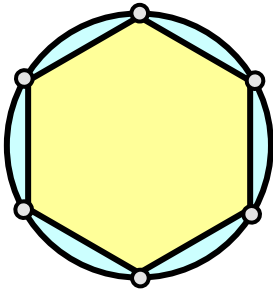
Κάθε κύκλος και ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος έχουν:

- Ένα άξονα συμμετρίας
- Άπειρους άξονες συμμετρίας
- Κανένα άξονα συμμετρίας.

2. Εξέτασε αν τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου Α, Ι, Γ και Θ έχουν: (α) κανένα, (β) ένα, (γ) περισσότερους από ένα άξονες συμμετρίας.

3. Σχεδίασε τους άξονες συμμετρίας των παρακάτω γεωμετρικών σχημάτων.





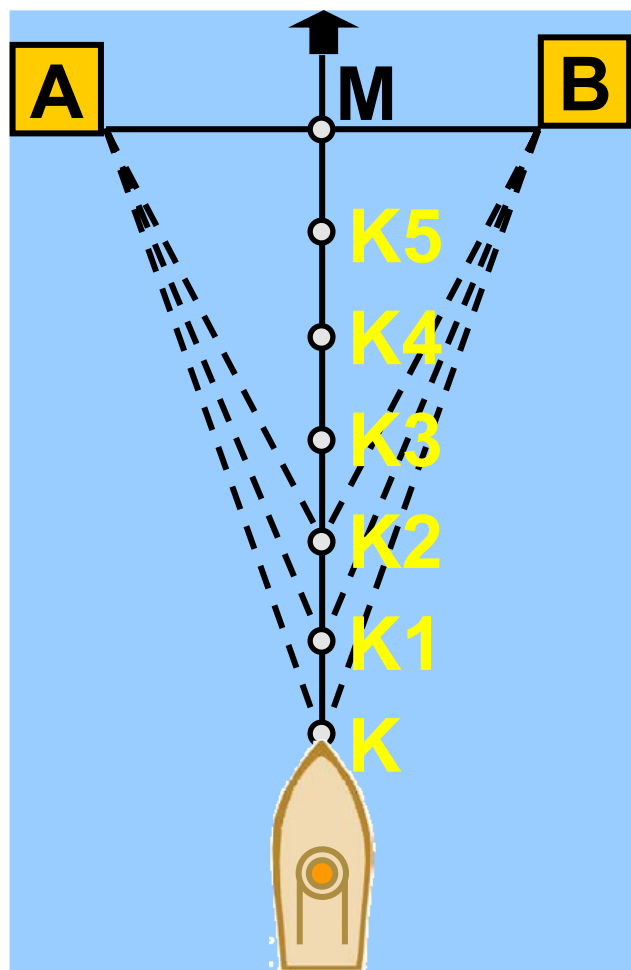
**4. Σχεδίασε τους άξονες συμμετρίας του σχήματος που δημιουργείται από δύο ίσους τεμνόμενους κύκλους.**

**5. Βρες τους άξονες συμμετρίας του σχήματος που δημιουργείται από δύο κύκλους με διαφορετικές ακτίνες, όταν: (α) έχουν το ίδιο κέντρο και (β) έχουν διαφορετικά κέντρα.**

## Β.2.3. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ο καπετάνιος του πλοίου προσπαθεί να κρατήσει την πορεία του πλοίου το ίδιο μακριά από τις βάσεις Α και Β της γέφυρας, επειδή η στενότητα του περάσματος, ο αέρας και η γνωστή παλίρροια του Ευβοϊκού κόλπου επιδρούν στην πορεία των καραβιών και κάνουν τη διέλευση επικίνδυνη. Μπορείς να υποδείξεις την πορεία που πρέπει να έχει ένα πλοίο για να περάσει με ασφάλεια το στενό του Ευρίππου;



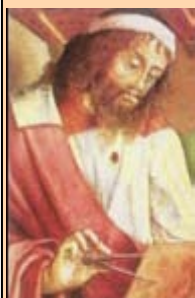
- ▶ Τι είναι η πορεία του πλοίου σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ ;
- ▶ Τι είναι τα σημεία  $A$  και  $B$  μεταξύ τους σε σχέση με την πορεία του πλοίου;
- ▶ Ποια σημαντική ιδιότητα πρέπει να έχουν τα σημεία της πορείας αυτής;



## Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.
- ▶ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος έχει ίσες αποστάσεις (ισαπέχει) από τα άκρα του.
- ▶ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετό του.

► Η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι άξονας συμμετρίας του.



*Κατά τον Ευκλείδη οι Κατασκευές, στηρίζονται σε τρεις κανόνες (“αιτήματα”)*

- Από δύο σημεία να διέρχεται μία μόνο ευθεία.
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται απεριόριστα
- Ο κύκλος ορίζεται με ένα σημείο (κέντρο) και ένα ευθύγραμμο τμήμα (ακτίνα)

*Με βάση τους παραπάνω κανόνες («αιτήματα») μπορούν να γίνουν οι κατασκευές όλων των γεωμετρικών σχημάτων με την χρήση «του κανόνα και του διαβήτη». («Κανόνας» είναι ένας χάρακας χωρίς υποδια-*

ρέσεις για να χαράζουμε ευθείες και όχι για να κάνουμε μετρήσεις μηκών). Οι κατασκευές αυτές απαιτούν μεγαλύτερη επιδεξιότητα και γνώση, δίνουν όμως ακριβέστερα αποτελέσματα και βοηθούν να αποφεύγονται λάθη, που οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων που χρησιμοποιούμε στην πράξη.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

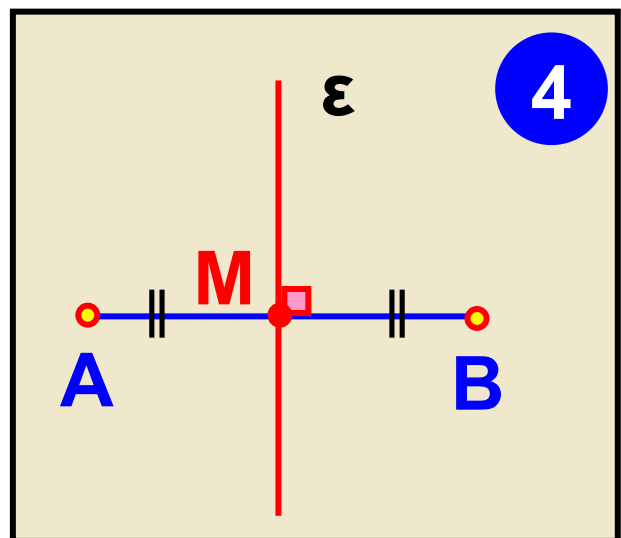
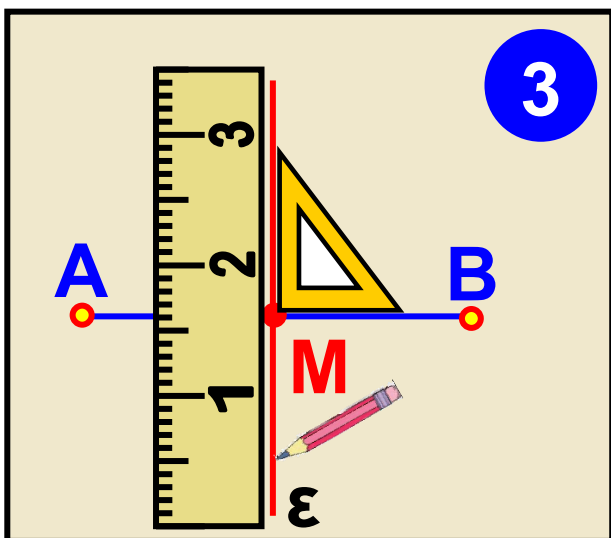
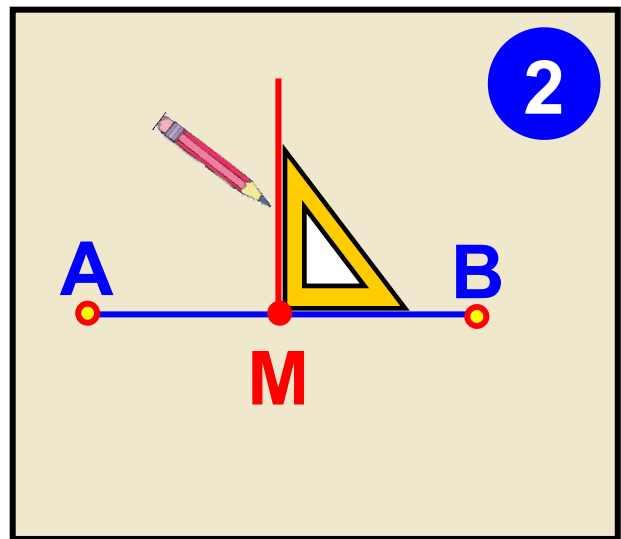
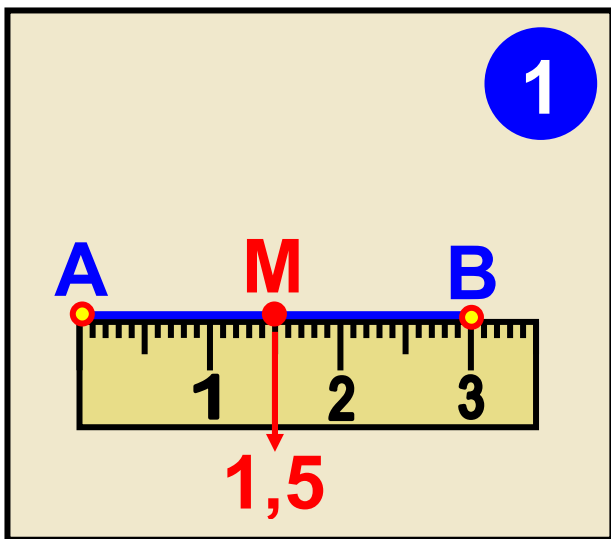
1. Να σχεδιαστεί η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , με τη βοήθεια του υποδεκάμετρου και του γνώμονα.



### Λύση

Προσδιορίζουμε το μέσον  $M$  του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  με το υποδεκάμετρο και στη συνέχεια με το γνώμονα σχεδιάζουμε την ευθεία

ε, που διέρχεται από το M και είναι  
κάθετη στο AB.



**2.** Να σχεδιαστεί η μεσοκάθετος  
ενός ευθυγράμμου τμήματος AB,  
χωρίς τη βοήθεια του υποδεκάμε-  
τρου και του γνώμονα, άλλα μόνο  
με τη χρήση “του κανόνα και του  
διαβήτη”.

## Λύση

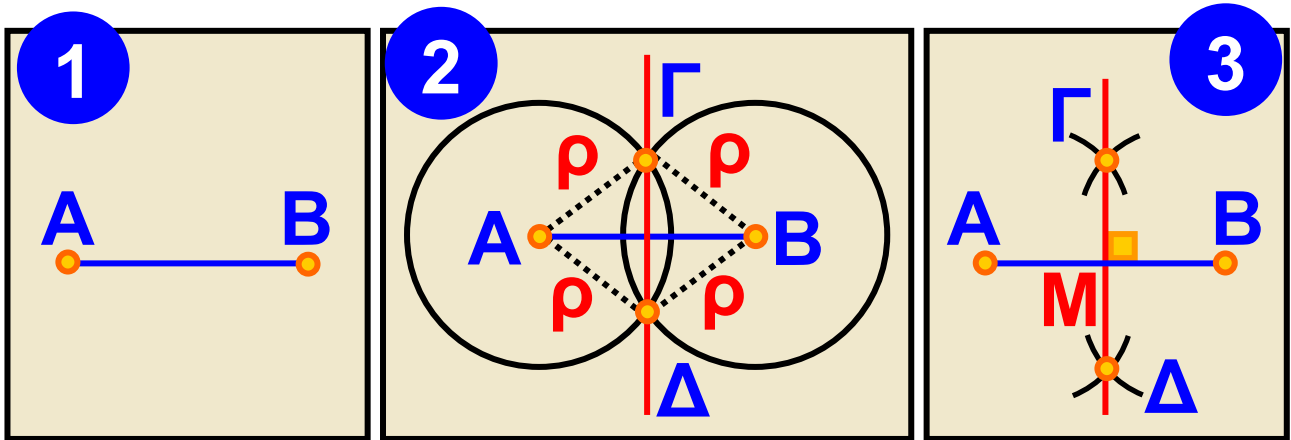
Γνωρίζουμε ότι η μεσοκάθετος, όπως κάθε ευθεία, ορίζεται από δύο σημεία και ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Για να σχεδιάσουμε τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  πρέπει να βρούμε δύο σημεία που να ισαπέχουν από τα  $A$  και  $B$ .

Γράφουμε, λοιπόν, δύο ίσους κύκλους με κέντρα τα άκρα  $A$  και  $B$  του ευθυγράμμου τμήματος και με ακτίνα  $\rho$  (μεγαλύτερη από το μισό μήκος του  $AB$ , για να τέμνονται).

Τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ , στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι ορίζουν την ευθεία που είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , διότι δύο σημεία της, τα  $\Gamma$  και  $\Delta$ , απέχουν

εξίσου από τα άκρα A και B, αφού είναι  $\Gamma A = \Gamma B = \rho$  και  $\Delta A = \Delta B = \rho$ .



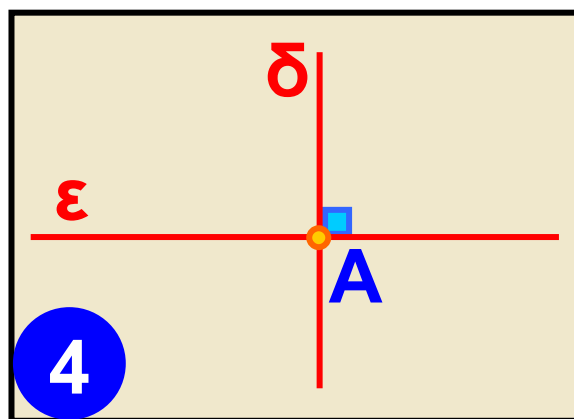
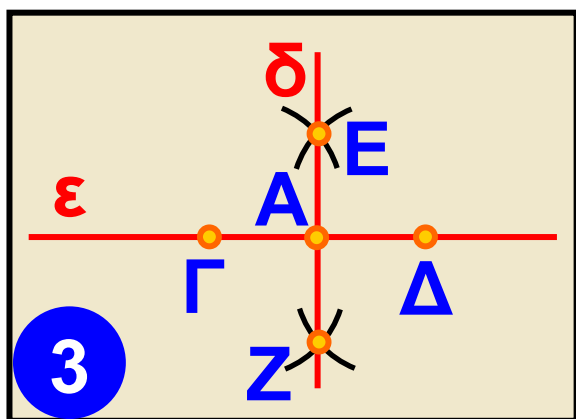
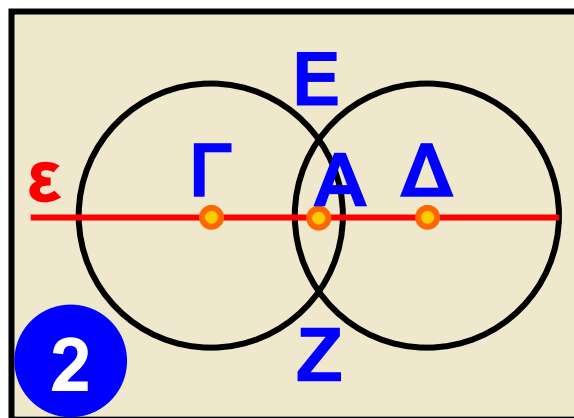
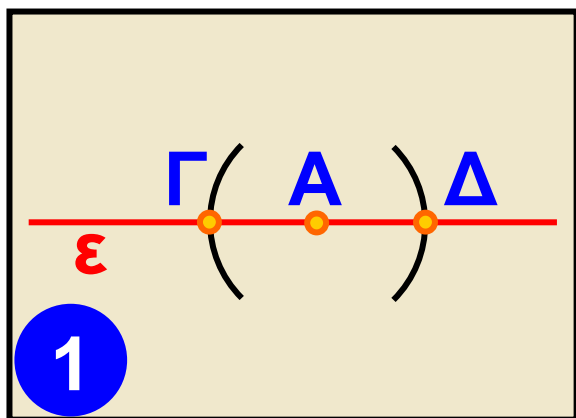
♦ Με την κατασκευή της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB, βρήκαμε με ακρίβεια και το μέσο M, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε υποδεκάμετρο.

**3. Να κατασκευαστεί ευθεία δ κάθετη σε ευθεία ε στο σημείο της A.**

**Λύση**

Γράφουμε κύκλο με κέντρο το A και τυχαία ακτίνα, που τέμνει την ε σε δύο σημεία Γ και Δ. Επειδή το A είναι μέσο του ΓΔ, αρκεί να φέρουμε

τη μεσοκάθετο του  $\Gamma\Delta$  που διέρχεται από το μέσο του  $A$  και είναι κάθετη στην  $\varepsilon$ .

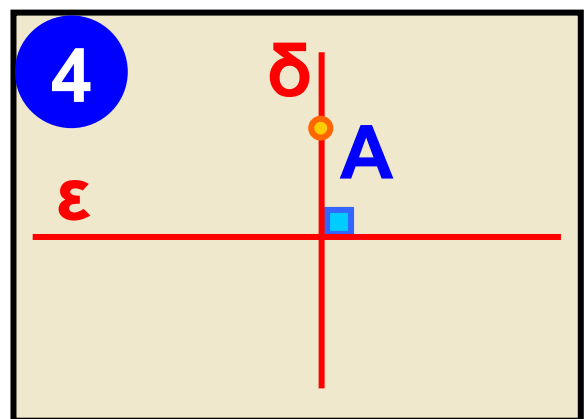
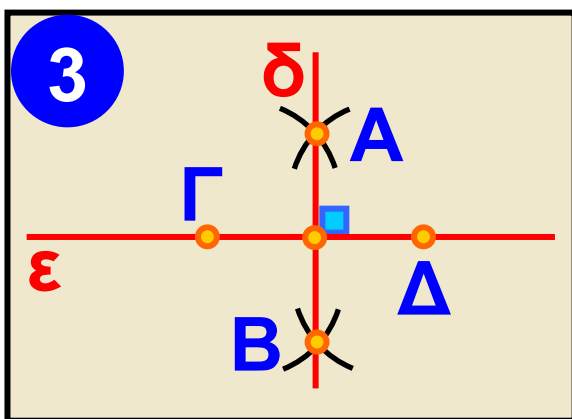
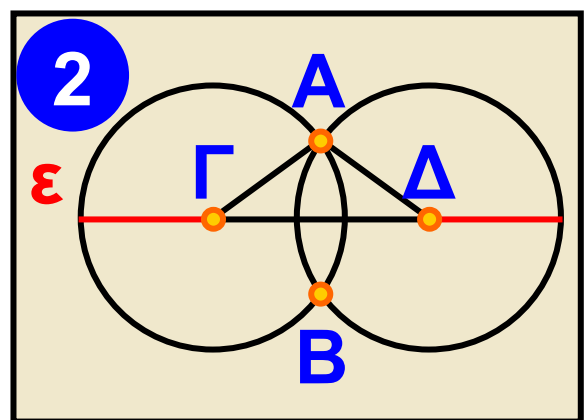
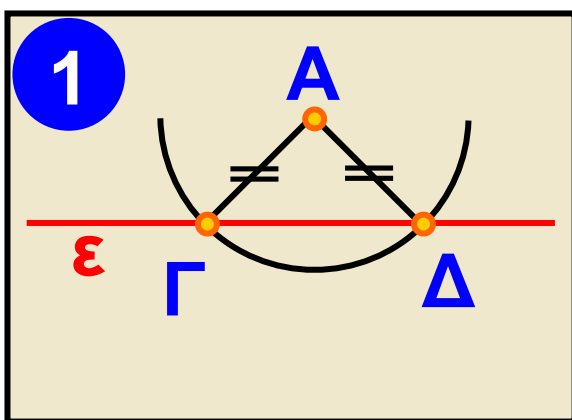


4. Να κατασκευαστεί η κάθετη  $\delta$  μιας ευθείας  $\varepsilon$  από σημείο  $A$  εκτός αυτής.

**Λύση**

Γράφουμε κύκλο με κέντρο το  $A$  και ακτίνα τέτοια ώστε να τέμνει την  $\varepsilon$  σε δύο σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ . Επειδή το  $A$

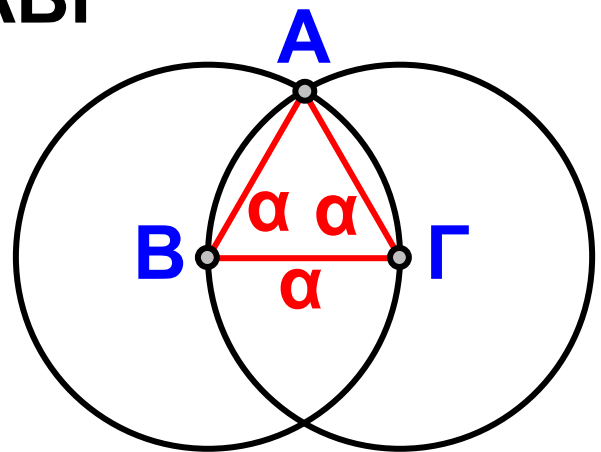
ισαπέχει από τα  $\Gamma$  και  $\Delta$ , θα είναι σημείο της μεσοκαθέτου του τμήματος  $\Gamma\Delta$ . Επομένως, αρκεί να φέρουμε, με τον τρόπο που μάθαμε στην εφαρμογή 2, τη μεσοκάθετο του  $\Gamma\Delta$  που διέρχεται από το  $A$ .



**5. Να κατασκευαστεί ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς  $\alpha$ .**

**Λύση**

Γράφουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma = \alpha$ . Με κέντρα τα άκρα  $B$  και  $\Gamma$  και ακτίνα ίση με  $\alpha$  γράφουμε δύο κύκλους. Έστω  $A$  το ένα σημείο από τα δύο που τέμνονται οι κύκλοι αυτοί. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι το ζητούμενο ισόπλευρο, διότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες με  $\alpha$ , ως ακτίνες ίσων κύκλων ακτίνας  $\alpha$ .



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη



.....

(β) Με την κατασκευή της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ ,

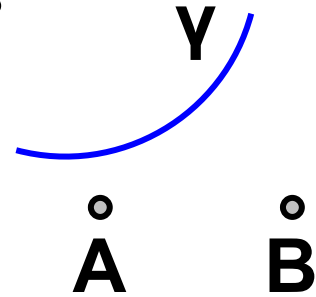
**βρήκαμε με ακρίβεια και το  
..... του, χωρίς να  
χρησιμοποιήσουμε υποδεκάμετρο.  
(γ) Δύο σημεία  $M$  και  $M'$  είναι  
συμμετρικά ως προς ευθεία  $\varepsilon$ , όταν  
η  $\varepsilon$  είναι .....  
του τμήματος  $MM'$ .**

**2. Να χαράξεις ένα ευθύγραμμο  
τμήμα  $AB$  και με τη χρήση του κα-  
νόνα και του διαβήτη να το χωρί-  
σεις σε δυο ίσα τμήματα και στη  
συνέχεια σε τέσσερα ίσα τμήματα.**

**3. Σχεδίασε έναν κύκλο και μια  
ακτίνα του  $KA$ . Βρες δυο σημεία του  
κύκλου, που το καθένα να ισαπέχει  
από τα  $K$  και  $A$ .**

**4. Στο παρακάτω σχήμα η καμπύλη  
γραμμή  $\gamma$  παριστά τμήμα της δια-  
δρομής του αστικού λεωφορείου.**

**Οι κάτοικοι των οικισμών  $A$  και  $B$  αποφάσισαν να κατασκευάσουν μια στάση, που να απέχει εξίσου από τους δύο οικισμούς. Βρες το κατάλληλο σημείο της διαδρομής και δικαιολόγησε τη λύση που θα δώσεις.**



**5. Να βρεις το σημείο της όχθης ενός ποταμού το οποίο ισαπέχει από δύο χωριά  $A$  και  $B$ .**

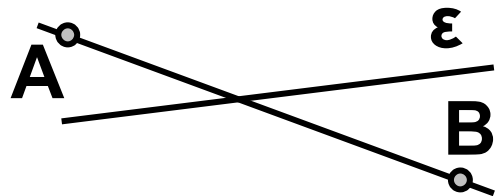
**6. Σχεδίασε ένα τρίγωνο και βρες με ακρίβεια τα μέσα των πλευρών του.**

**7. Σχεδίασε έναν κύκλο με κέντρο  $K$  και μια χορδή του  $AB$ . Να κατασκευάσεις τη μεσοκάθετο της χορδής  $AB$  και να ονομάσεις  $M$  και  $N$  τα σημεία στα οποία τέμνει τον κύκλο.**

(α) Σύγκρινε τις χορδές  $MA$  και  $MB$  και δικαιολόγησε το αποτέλεσμα της σύγκρισης, (β) κάνε το ίδιο και για τις χορδές  $NA$  και  $NB$ , (γ) βρες εάν το κέντρο  $K$  του κύκλου είναι σημείο της μεσοκαθέτου και δικαιολόγησε την απάντησή σου.

8. Σχεδίασε τις μεσοκάθετες τριών χορδών ενός κύκλου και εξέτασε αν υπάρχει σημείο στο σχήμα σου, από το οποίο να διέρχονται και οι τρεις μεσοκάθετες.

9. Στο διπλανό σχήμα βρες εκείνο το σημείο της  $\epsilon$ , που να ισαπέχει από τα σημεία  $A$  και  $B$ .



## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

**1. Σχεδιάσε έναν κύκλο με ένα νόμισμα. Πώς μπορείς να βρεις το κέντρο του;**



**2. Τρεις οικογένειες κατασκήνωσαν σ' ένα κάμπινγκ και τοποθέτησαν τις σκηνές τους  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_3$  έτσι ώστε:  $\Sigma_1\Sigma_2 = 3,8 \text{ m}$ ,  $\Sigma_1\Sigma_3 = 2 \text{ m}$  και  $\Sigma_2\Sigma_3 = 3,5 \text{ m}$ . Να σχεδιάσεις τη διάταξη των σκηνών σε σχέδιο με κλίμακα 1:100 και να βρεις το σημείο  $N$ , που πρέπει να τοποθετηθεί ένα ντους, ώστε και οι τρεις σκηνές να απέχουν εξίσου απ' αυτό. Υπάρχουν πολλές τέτοιες θέσεις; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.**

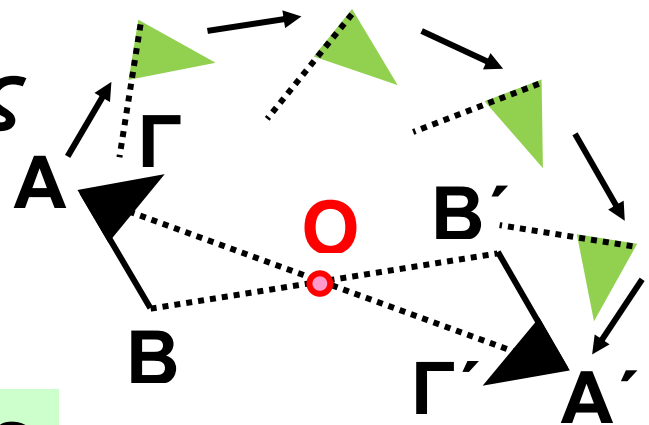
## B.2.4. Συμμετρία ως προς σημείο



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Αν περιστραφεί το σχήμα  $AB\Gamma$ , γύρω από το σημείο  $O$  κατά  $180^\circ$ , παίρνει μια νέα θέση την  $A'B'\Gamma'$ .

► Τι συμπεραίνεις για τα σχήματα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ ;



### Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι όταν ολοκληρωθεί η στροφή αυτή, κάθε σημείο του  $AB\Gamma$  συμπίπτει με ένα σημείο του  $A'B'\Gamma'$ . Για παράδειγμα, θα συμπίπτουν τα σημεία  $A$  και  $A'$ .

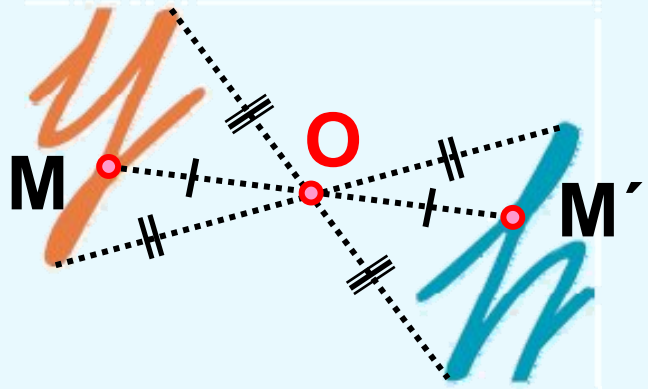


◆ Τα σημεία αυτά λέγονται συμμετρικά, ως προς κέντρο  $O$ . Δηλαδή:

- Συμμετρικό σημείου  $A$  ως προς κέντρο  $O$ , είναι το σημείο  $A'$ , με το οποίο το  $A$ , αν περιστραφεί περί το  $O$  κατά  $180^\circ$ .

Ισχύει ότι:

- ▶ Δύο σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς σημείο  $O$ , όταν το  $O$  είναι μέσο του τμήματος  $MM'$ .



- Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο  $O$ , όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου ως προς το  $O$ .
- ▶ Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα.

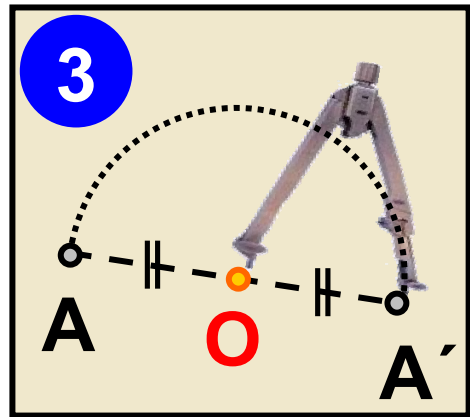
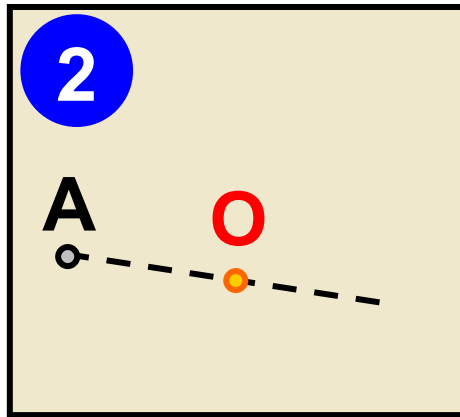
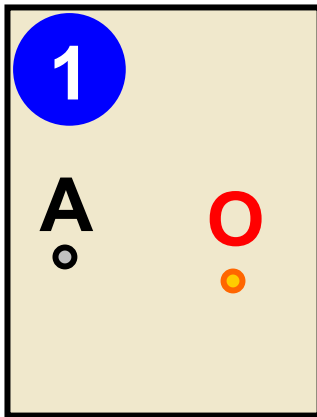
## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το συμμετρικό  $A'$  του σημείου  $A$ , ως προς σημείο  $O$ .

**Λύση**



Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό  $A'$  ενός σημείου  $A$  ως προς σημείο  $O$ , φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα  $AO$  και στην προέκτασή του (με το υποδεκάμετρο ή με το διαβήτη) παίρνουμε ίσο τμήμα  $OA'$ , όπως δείχνουν οι παρακάτω εικόνες.



**2.** Να κατασκευαστεί το συμμετρικό  $A'B'$  ενός ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  ως προς σημείο  $O$ .

**Λύση**

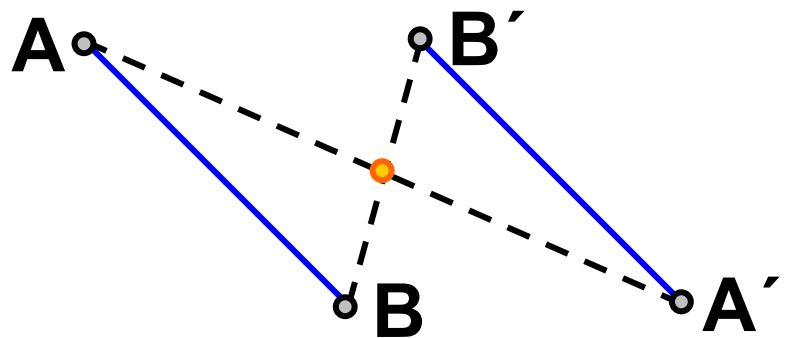
Το συμμετρικό ενός ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  ως προς σημείο  $O$ , είναι ευθύγραμμο τμήμα  $A'B'$ . Για

να το κατασκευάσουμε αρκεί να βρούμε τα σημεία  $A'$  και  $B'$ , που είναι τα συμμετρικά των  $A$  και  $B$  ως προς  $O$ .

Παρατηρούμε ότι είναι:

$$A'B' = AB$$

$$\text{και } A'B' \parallel AB.$$

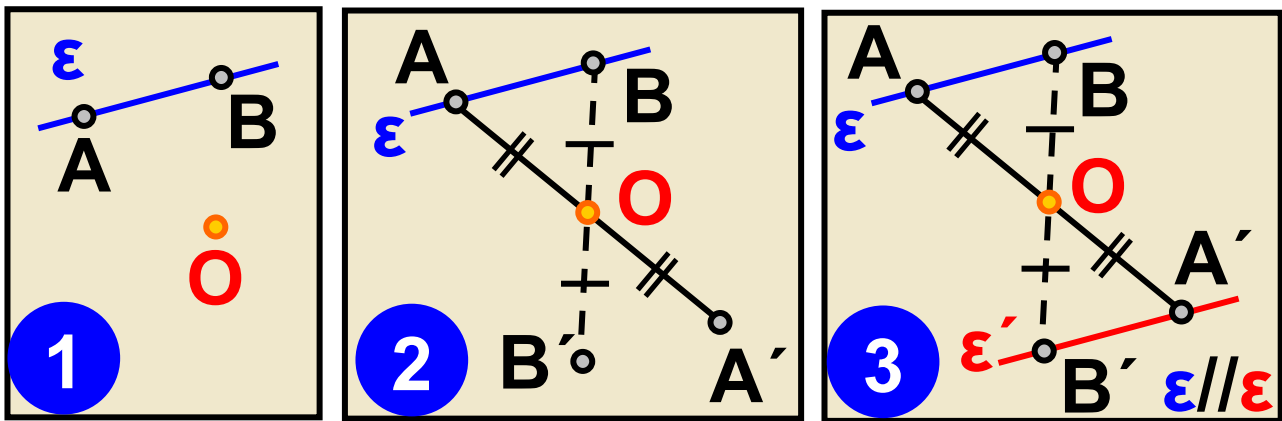


**3.** Να κατασκευαστεί το συμμετρικό ως προς σημείο  $O$ : (α) μιας ευθείας  $\varepsilon$  και (β) μιας ημιευθείας  $Ax$ .

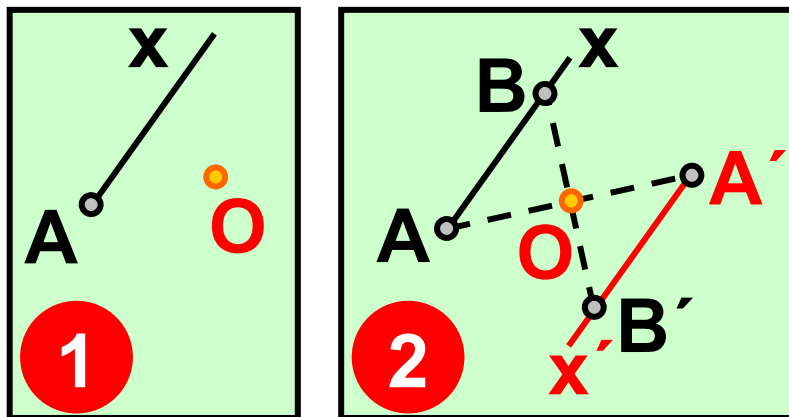
### Λύση

Παίρνουμε δύο σημεία  $A$  και  $B$  πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$  ή την ημιευθεία  $Ax$  και βρίσκουμε, όπως παραπάνω, τα συμμετρικά ως προς το  $O$ . Η προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος  $A'B'$  είναι η  $\varepsilon'$  ή η  $A'x'$ , που είναι συμμετρική της ευθείας  $\varepsilon$  ή της ημιευθείας  $Ax$  αντίστοιχα.

(α)



(β)

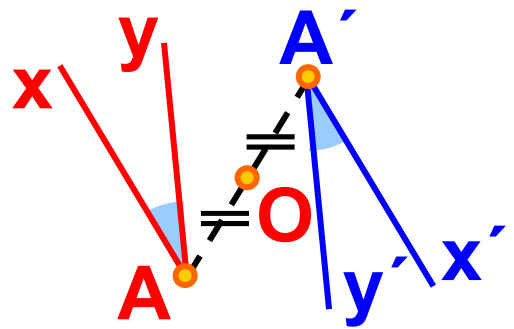


4. Να κατασκευαστεί το συμμετρικό σχήμα μιας γωνίας  $\hat{x}Ay$  ως προς σημείο  $O$ .

**Λύση**

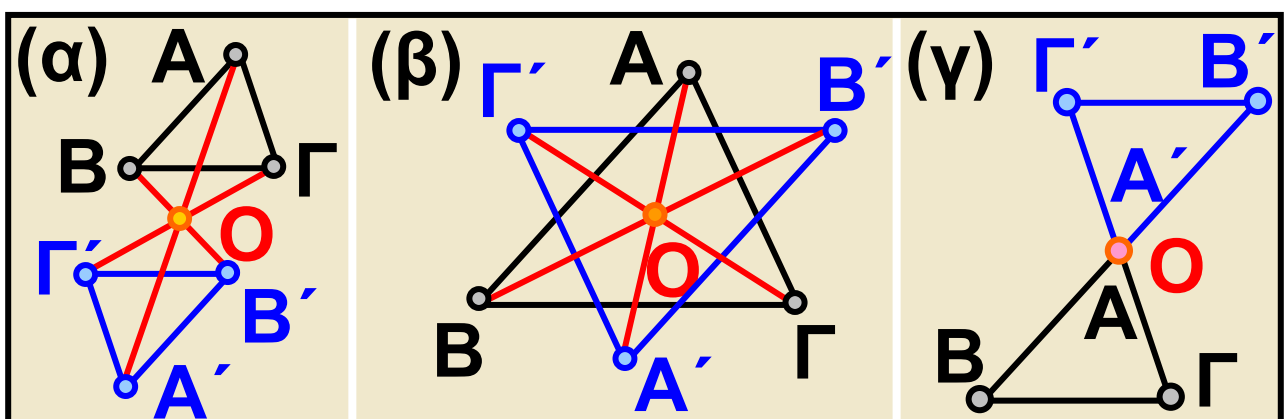
Βρίσκουμε το συμμετρικό  $A'$  της κορυφής  $A$  και τις συμμετρικές ημιευθείες  $A'x'$  και  $A'y'$  των δύο πλευρών της  $Ax$  και  $Ay$  αντίστοιχα ως προς το  $O$ , όπως μάθαμε προηγουμένως.

Τότε, η γωνία  $\widehat{x'A'y'}$   
είναι συμμετρική  
της  $\widehat{x\hat{A}y}$  και είναι  
ίση μ' αυτή.



**5.** Να κατασκευαστεί το συμμετρικό  $A'B'\Gamma'$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς σημείο  $O$ , το οποίο  
(α) είναι εκτός τριγώνου,  
(β) βρίσκεται εντός του τριγώνου  
και (γ) είναι μία κορυφή του.

### Λύση



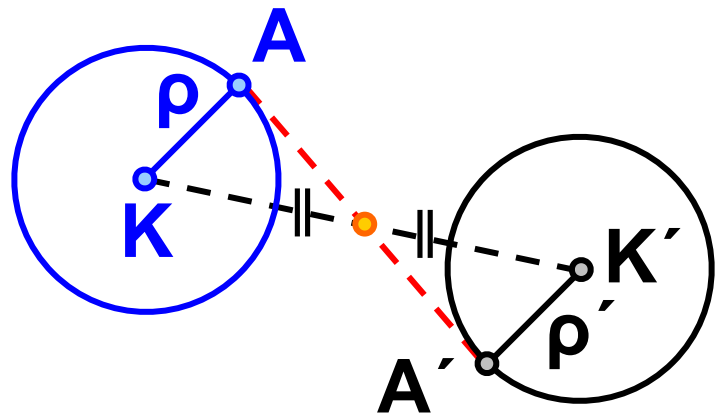
Και στις τρεις περιπτώσεις,  
βρίσκουμε τα συμμετρικά  $A'$ ,  $B'$ ,  $\Gamma'$ ,

ως προς το  $O$ , των κορυφών  $A, B, \Gamma$  του τριγώνου. Τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει συμμετρικό το τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$ , που είναι ίσο με το  $AB\Gamma$ .

**6.** Να κατασκευαστεί το συμμετρικό σχήμα ενός κύκλου  $(K, \rho)$  ως προς σημείο  $O$ .

### Λύση

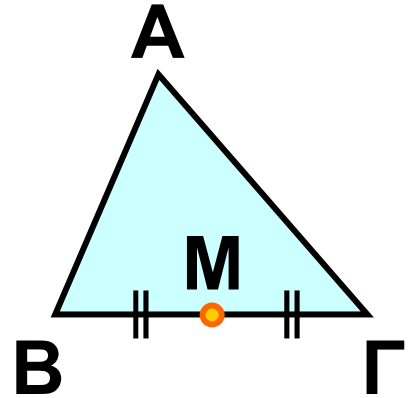
Βρίσκουμε το συμμετρικό ως προς το  $O$  του κέντρου  $K$  και ενός σημείου του κύκλου  $A$ , που είναι τα σημεία  $K'$  και  $A'$  αντίστοιχα. Γράφουμε τον κύκλο  $(K', \rho = K'A')$  που είναι ο ζητούμενος. Οι δύο κύκλοι είναι ίσοι διότι έχουν ίσες ακτίνες.



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Να κατασκευάσεις τα συμμετρικά  $B'$ ,  $M'$  και  $\Gamma'$  των  $B$ ,  $M$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα ως προς το  $A$  και να δικαιολογήσεις ότι το  $M'$  είναι μέσο του  $B'\Gamma'$ . (Το  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ ).



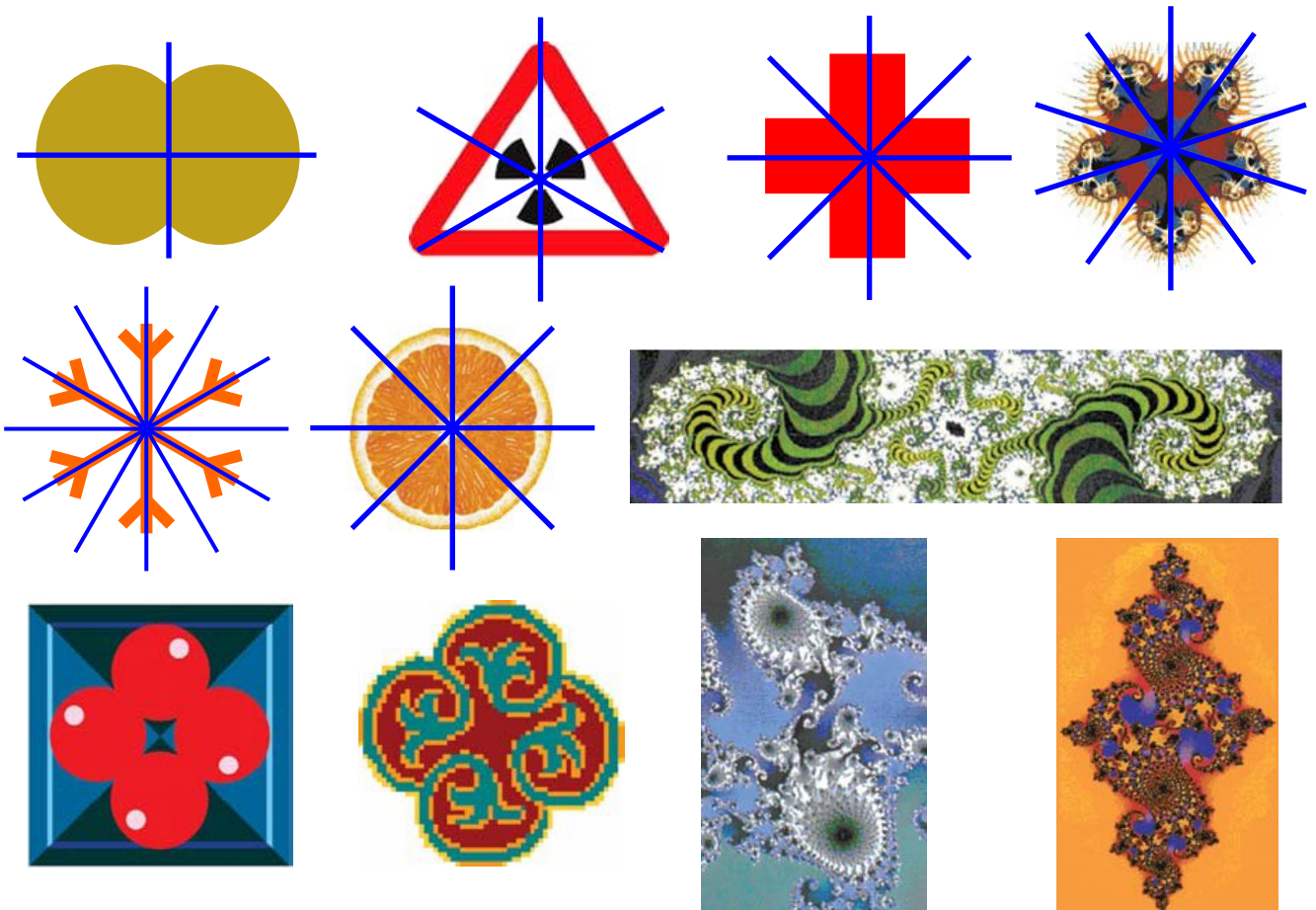
2. Να σχεδιάσεις τρίγωνο  $AB\Delta$  και το συμμετρικό  $\Gamma$  της κορυφής του  $A$  ως προς το μέσον  $O$  της πλευράς  $B\Delta$ . Πώς μπορείς να χαρακτηρίσεις το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ ;

## B.2.5. Κέντρο συμμετρίας



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

**Βρες ένα σημείο, σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα, γύρω από το οποίο προσπάθησε να περιστρέψεις το σχήμα αυτό κατά  $180^\circ$  και να παρατηρήσεις εάν συμπίπτει ή όχι με τον εαυτό του, μετά την ολοκλήρωση της περιστροφής αυτής.**





## Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο του  $O$ , γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά  $180^\circ$ , συμπίπτει με το αρχικό.

Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο, λέμε ότι το σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο  $O$ .

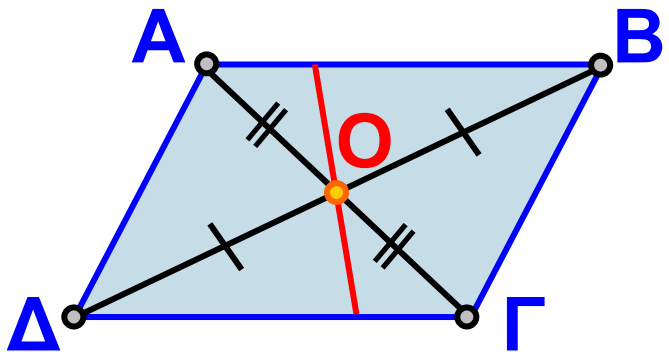
► Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** Το συμμετρικό παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$ , ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του, είναι το ίδιο το παραλληλόγραμμο.

## Λύση

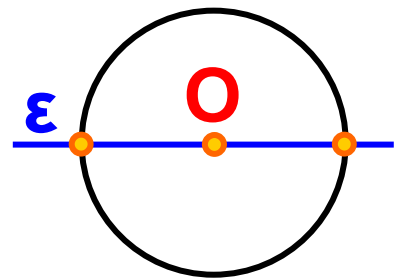
Παρατηρούμε, ότι ένα σημείο  $E$  του παραλληλογράμμου, με στροφή κατά  $180^\circ$  γύρω από το  $O$ , θα συμπίπτει με ένα άλλο σημείο  $E'$  του ίδιου του παραλληλογράμμου. Αυτό συμβαίνει για όλα τα σημεία του  $AB\Gamma\Delta$ , επομένως το συμμετρικό του ως προς το  $O$  είναι πάλι το ίδιο το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ .



2. Ποιο είναι το κέντρο συμμετρίας ενός κύκλου;

## Λύση

Με στροφή κατά  $180^\circ$  γύρω από το κέντρο  $O$  του κύκλου, διαπιστώνουμε ότι αυτός συμπίπτει με τον εαυτό του. Επομένως:

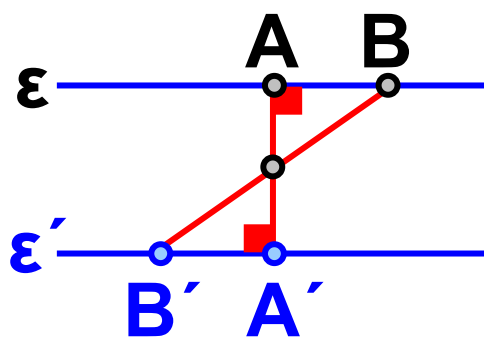


► Το κέντρο του κύκλου είναι κέντρο συμμετρίας του καθώς και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

3. Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό σχήμα μιας ευθείας  $\varepsilon$ , ως προς κέντρο  $O$ , είναι ευθεία  $\varepsilon' // \varepsilon$ .

### Λύση

Φέρνουμε την απόσταση  $OA$  του  $O$  από την  $\varepsilon$ .



Έστω  $B$  ένα άλλο σημείο της  $\varepsilon$ .

Βρίσκουμε τα συμμετρικά  $A'$  και  $B'$  των σημείων  $A$  και  $B$  ως προς το  $O$  και ονομάζουμε  $\varepsilon'$  την ευθεία που διέρχεται από τα  $A'$  και  $B'$ . Η ευθεία  $\varepsilon'$  είναι συμμετρική της  $\varepsilon$  ως προς κέντρο συμμετρίας το  $O$ .

Η γωνία  $\widehat{O A' B'}$  θα είναι συμμετρική της γωνίας  $\widehat{O A B}$ . Επειδή οι συμμε-

τρικές γωνίες είναι ίσες, θα είναι:

$\widehat{O\acute{A}B} = \widehat{O\acute{A}B} = 90^\circ$ . Άρα, οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  είναι κάθετες στην ίδια ευθεία  $AA'$ , συνεπώς μεταξύ τους παράλληλες.

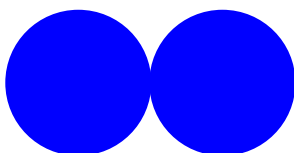
► Οι συμμετρικές ως προς σημείο ευθείες, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Αφού γράψεις τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου, εξέτασε αν έχουν κέντρο συμμετρίας.

2. Να βρεις στα παρακάτω σχήματα το κέντρο συμμετρίας, αν υπάρχει.



**3. Τοποθέτησε ένα “X” στις κατάλληλες θέσεις, για τη θετική σου απάντηση.**

|                          | Άξονες συμμετρίας |     |     |       |          |               |                        |
|--------------------------|-------------------|-----|-----|-------|----------|---------------|------------------------|
|                          | Κανένα            | Ένα | Δύο | Τρεις | Τέσσερις | Περισσότερους | Έχει Κέντρο Συμμετρίας |
| <b>Ευθύγραμμο τμήμα</b>  |                   |     |     |       |          |               |                        |
| <b>Ισοσκελές τρίγωνο</b> |                   |     |     |       |          |               |                        |
| <b>Ισόπλευρο τρίγωνο</b> |                   |     |     |       |          |               |                        |
| <b>Παραλληλόγραμμο</b>   |                   |     |     |       |          |               |                        |
| <b>Ορθογώνιο</b>         |                   |     |     |       |          |               |                        |
| <b>Ρόμβος</b>            |                   |     |     |       |          |               |                        |
| <b>Τετράγωνο</b>         |                   |     |     |       |          |               |                        |
| <b>Κύκλος</b>            |                   |     |     |       |          |               |                        |

## Β.2.6. Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στη διπλανή εικόνα

βλέπουμε ένα δημόσιο δρόμο να διασχίζει δύο αγροκτήματα.



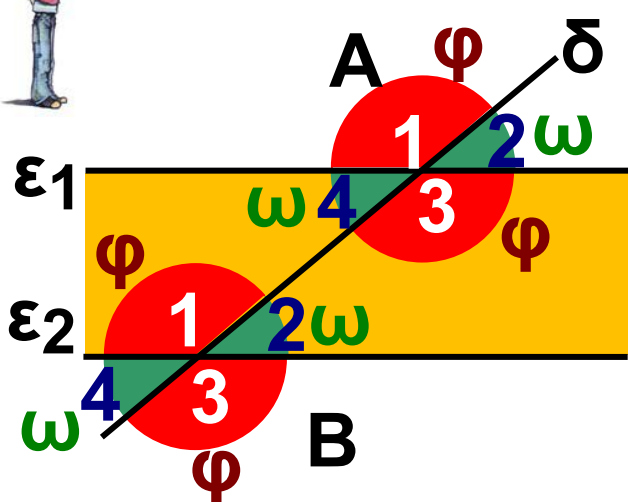
Οι παράλληλες ευθείες  $\epsilon_1$ , και  $\epsilon_2$  ορίζουν τα όρια του δρόμου αυτού και χωρίζουν τη γη σε τρεις ζώνες. Δώσε μια συγκεκριμένη κοινή ονομασία για όλα τα σημεία που βρίσκονται στην άσφαλτο του δρόμου, δηλαδή στη ζώνη ανάμεσα στις ευθείες  $\epsilon_1$ , και  $\epsilon_2$ , καθώς και μία άλλη κοινή ονομασία για όλα τα σημεία που βρίσκονται έξω απ' αυτή, δηλαδή στα χωράφια.

Στην ίδια εικόνα υπάρχει ένας χωματόδρομος που χωρίζει τα δύο αγροκτήματα και ορίζει μια ευθεία  $\delta$  που είναι το σύνορο μεταξύ τους.

► Πώς μπορείς να δώσεις μια κοινή ονομασία σε όλα τα σημεία που ανήκουν στο ίδιο και μόνο αγρόκτημα;



## Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ευθείες  $\varepsilon_1$ , και  $\varepsilon_2$  ονομάζονται «εντός» (των

ευθειών) και όλες οι άλλες «εκτός».

$\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{B}_2$  είναι «εντός» και  
 $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_3, \hat{B}_4$  είναι «εκτός»

- Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας δ ονομάζονται «επί τα αυτά» (μέρη της ευθείας)

$\hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{B}_2, \hat{B}_3$  είναι “επί τα αυτά” και  
 $\hat{A}_1, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{B}_4$  είναι “επί τα αυτά”

- Δύο γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα κι η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας  $\delta$ , λέγονται μεταξύ τους “εναλλάξ”.

$\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{B}_1, \hat{B}_2$  είναι “εναλλάξ” και  
 $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_3, \hat{B}_4$  είναι “εναλλάξ”

◆ Από τον συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει ότι θα έχουμε τις παρακάτω έξι ονομασίες για τα 16 διαφορετικά ζευγάρια των γωνιών.

- (α) εντός εναλλάξ και
- (β) εκτός εναλλάξ
- (γ) εντός και επί τα αυτά και
- (δ) εκτός και επί τα αυτά
- (ε) εντός - εκτός εναλλάξ και
- (στ) εντός - εκτός επί τα αυτά.



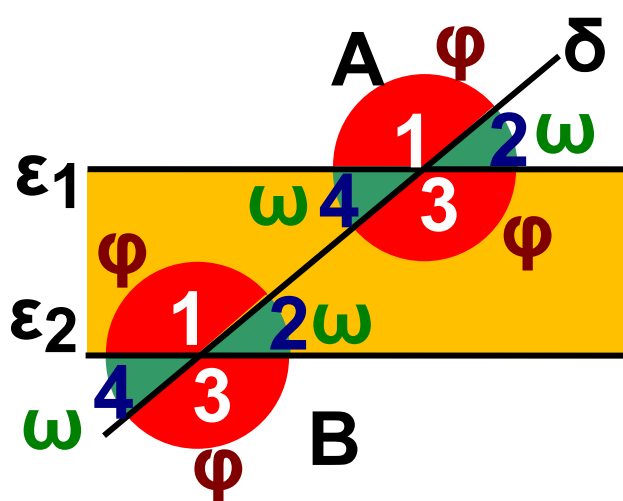
## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να συγκριθούν μεταξύ τους οι γωνίες, που σχηματίζονται στα σημεία A και B, στα οποία τέμνει μια ευθεία  $\delta$  δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  αντίστοιχα.

### Λύση

Μπορούμε να διαπιστώσουμε (μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο) ότι οι γωνίες που σχηματίζονται και στα δύο σημεία τομής A και B, είναι δύο ειδών:

- Οι οξείες γωνίες  $\hat{\omega}$ , που είναι μεταξύ τους ίσες και
- Οι αμβλείες γωνίες  $\hat{\varphi}$ , που είναι κι αυτές μεταξύ τους ίσες.



Τα τέσσερα ζευγάρια των γωνιών, που είναι όλες οξείες και ίσες μεταξύ τους είναι:

- ▶ Από τις “εντός εναλλάξ”:  $\hat{A}_4 = \hat{B}_2$
- ▶ Από τις “εκτός εναλλάξ”:  $\hat{A}_2 = \hat{B}_4$
- ▶ Από τις “εντός - εκτός επί τα αυτά”:  $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$  και  $\hat{A}_4 = \hat{B}_4$ .

Τα τέσσερα ζευγάρια των γωνιών, που είναι όλες αμβλείες και ίσες μεταξύ τους είναι:

- ▶ Από τις “εντός εναλλάξ”:  $\hat{A}_3 = \hat{B}_1$
- ▶ Από τις “εκτός εναλλάξ”:  $\hat{A}_1 = \hat{B}_3$
- ▶ Από τις “εντός - εκτός επί τα αυτά”:  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$  και  $\hat{A}_3 = \hat{B}_3$ .

Επειδή όμως οι γωνίες  $\hat{A}_1$  και  $\hat{A}_2$  είναι παραπληρωματικές, θα ισχύει γενικά:  $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^\circ$ .

Οπότε συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα ζευγάρια των γωνιών

είναι ζευγάρια παραπληρωματικών γωνιών, τα οποία και είναι τα εξής:

▶ Οι “εντός επί τα αυτά”:

$$\hat{A}_3 + \hat{B}_2 = 180^\circ \text{ και } \hat{A}_4 + \hat{B}_1 = 180^\circ$$

▶ Οι “εκτός επί τα αυτά”:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_4 = 180^\circ \text{ και } \hat{A}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$$

▶ Οι “εντός- εκτός εναλλάξ”:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ \text{ και } \hat{A}_2 + \hat{B}_1 = 180^\circ$$

$$\hat{A}_3 + \hat{B}_4 = 180^\circ \text{ και } \hat{A}_4 + \hat{B}_3 = 180^\circ$$

**2.** Στο παρακάτω σχήμα είναι  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ . Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες, που είναι σημειωμένες, αν είναι  $\hat{\alpha} = 40^\circ$ .

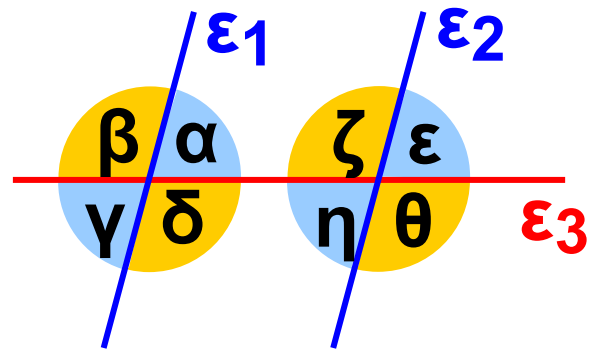
**Λύση**

Οι γωνίες  $\hat{\alpha}$  και  $\hat{\gamma}$  είναι κατακορυφήν, άρα θα είναι:  $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 40^\circ$

Οι γωνίες  $\hat{\alpha}$  και  $\hat{\beta}$  είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι:  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$   
από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε  
ότι:  $\hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ .

Οι γωνίες  $\hat{\beta}$  και  $\hat{\delta}$  είναι κατακορυφήν, άρα θα είναι:  $\hat{\beta} = \hat{\delta} = 140^\circ$

Αλλά επειδή  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$   
και η  $\varepsilon_3$  τέμνουσα  
των δύο παραλλήλων ευθειών θα είναι:



$\hat{\varepsilon} = \hat{\alpha}$  ως εντός – εκτός επί τα αυτά  
άρα  $\hat{\varepsilon} = 40^\circ$ .

$\hat{\zeta} + \hat{\alpha} = 180^\circ$  ως εντός επί τα αυτά,  
άρα  $\hat{\zeta} = 180^\circ - \hat{\alpha} = 180^\circ - 40^\circ =$   
 $= 140^\circ$ .

$\hat{\eta} = \hat{\alpha}$ , ως εντός εναλλάξ, επομένως

$$\hat{\eta} = 40^{\circ} \text{ και}$$

$\hat{\theta} = \hat{\delta}$  ως εντός – εκτός επί τα αυτά,  
άρα  $\hat{\theta} = 140^{\circ}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

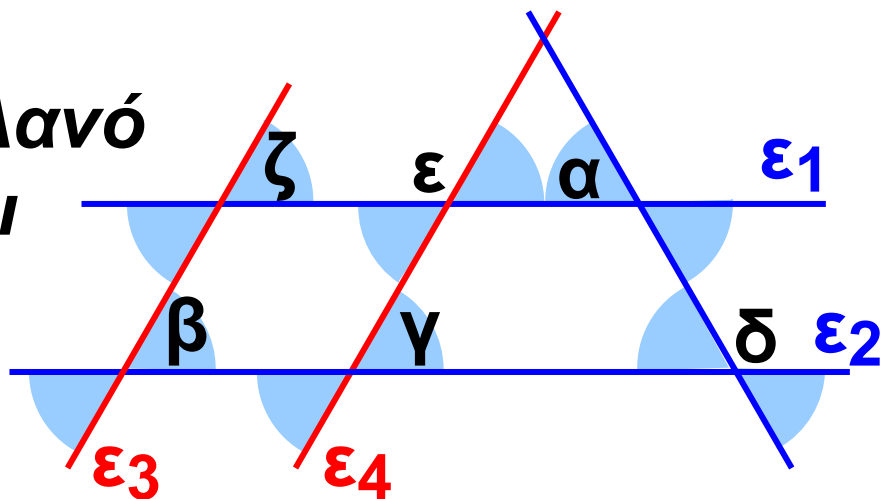


1. Σχεδιάσε δυο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , οι οποίες να απέχουν 4 cm. Φέρε μία ευθεία που να σχηματίζει με την  $\varepsilon_1$  γωνία  $12^{\circ}$  και υπολόγισε τις υπόλοιπες γωνίες.

2. Στο διπλανό σχήμα είναι

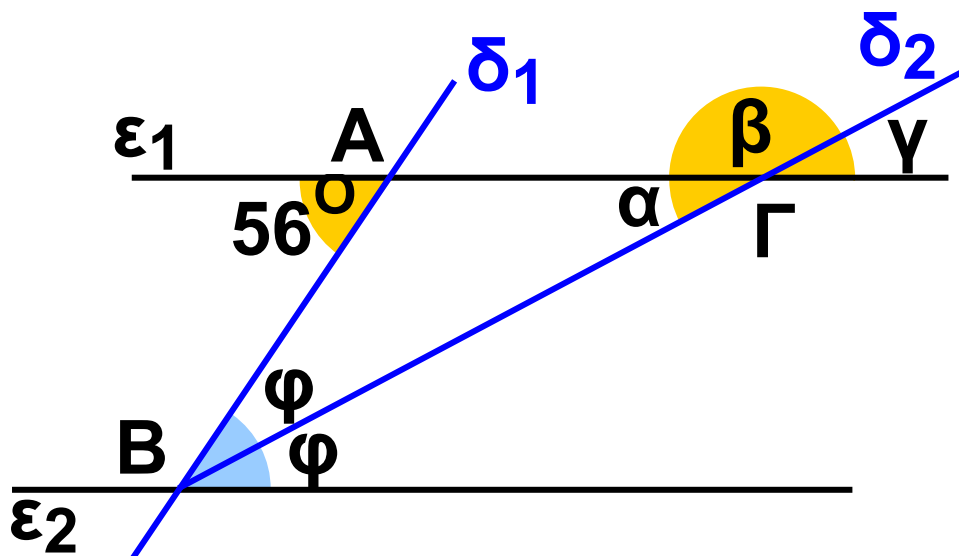
$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$  και

$\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$ .



Να υπολογίσεις τις σημειωμένες γωνίες του σχήματος, αν είναι  $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 70^{\circ}$ .

3. Να σχηματίσεις μια γωνία  $\hat{x}\hat{A}y = 63^\circ$ . Να πάρεις ένα σημείο  $B$  της πλευράς  $Ax$ , ώστε να είναι  $AB = 5 \text{ cm}$  και ένα σημείο  $\Delta$  της  $Ay$ , ώστε να είναι  $A\Delta = 2,9 \text{ cm}$ . Να φέρεις από το  $B$  την παράλληλη προς την  $Ay$  και από το  $\Delta$  την παράλληλη προς την  $Ax$ . Να ονομάσεις  $\Gamma$  το σημείο τομής των παραλλήλων αυτών. Να υπολογίσεις τις γωνίες του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ .

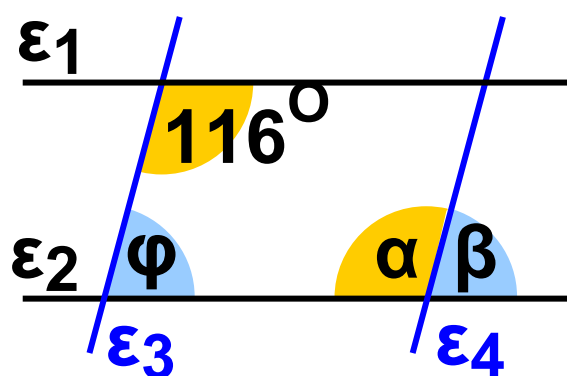


4. Στο παραπάνω σχήμα οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες και η

ημιευθεία  $B\delta_2$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ . Να υπολογίσεις τις γωνίες  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  και  $\hat{\gamma}$  του σχήματος.

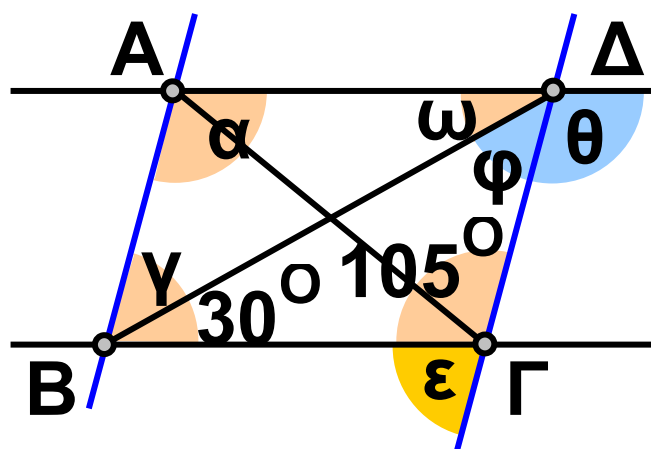
5. Στο διπλανό σχήμα είναι  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$ .

Να υπολογίσεις τις γωνίες  $\hat{\alpha}$  και  $\hat{\beta}$ .

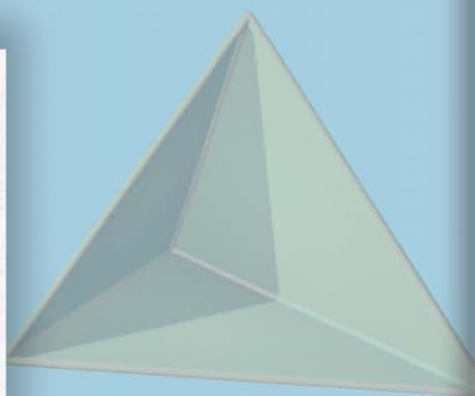
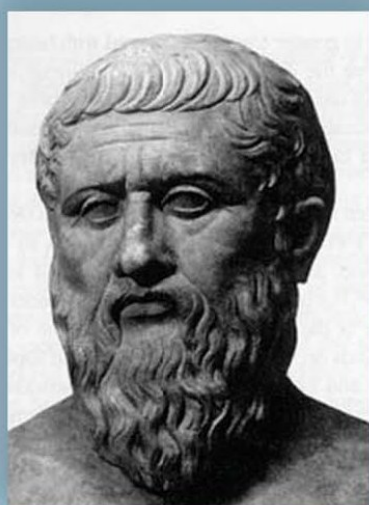
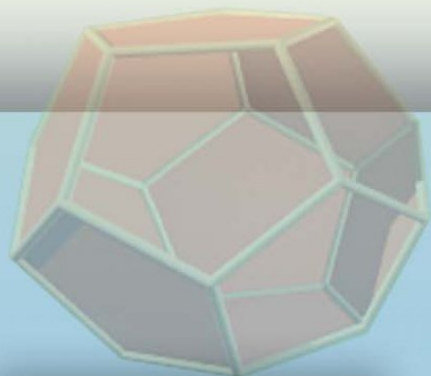
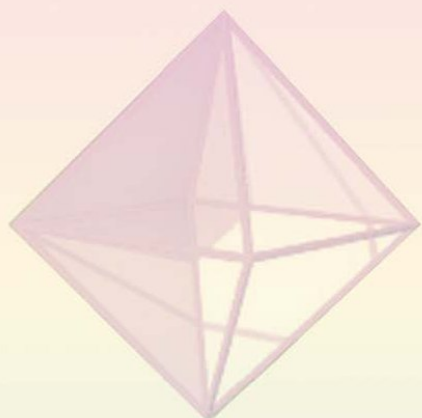


6. Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του διπλανού σχήματος είναι:  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $A\Delta \parallel B\Gamma$ .

Να υπολογίσεις όλες τις σημειωμένες γωνίες.



# Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια



ΜΕΡΟΣ  
Β΄

3ο

Κ  
Ε  
Φ  
Α  
Λ  
Α  
Ι  
Ο

**ΠΛΑΤΩΝ Ο ΑΘΗΝΑΙΟΣ**  
**(427-347 π.Χ.)**

### 3.1 Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων

- Γνωρίζω τα στοιχεία του τριγώνου
- Γνωρίζω τα είδη των τριγώνων

### 3.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

- Γνωρίζω ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^{\circ}$
- Γνωρίζω τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου και του ισοπλεύρου τριγώνου

### 3.3 Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπέζιο – Ισοσκελές τραπέζιο

- Γνωρίζω ποιο τετράπλευρο ονομάζεται παραλληλόγραμμο, ποιο ορθογώνιο, ποιο ρόμβος, ποιο τετράγωνο και ποιο τραπέζιο

- ***Χαράσσω τα ύψη του παραλληλογράμμου και του τραπεζίου***

### **3.4 Ιδιότητες Παραλληλογράμμου – Ορθογωνίου – Ρόμβου – Τετράγωνου – Τραπεζίου – Ισοσκελούς τραπεζίου**

- ***Γνωρίζω τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, του ορθογωνίου, του ρόμβου και του ισοσκελούς τραπεζίου***

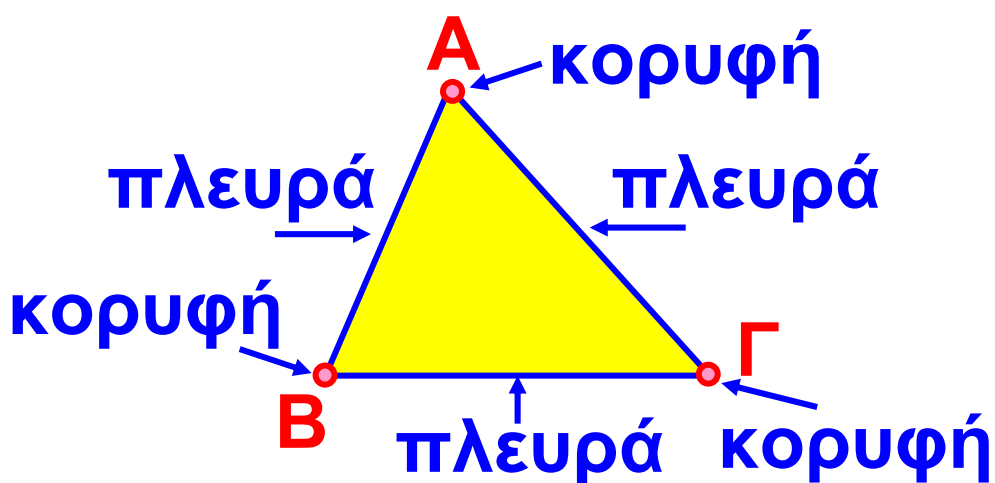
## Β.3.1. Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων



### Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

#### Κύρια στοιχεία τριγώνου

- Κάθε τρίγωνο  $ΑΒΓ$  έχει τρεις κορυφές  $A, B, Γ$ , τρεις πλευρές  $ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ$  και τρεις γωνίες  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{Γ}$ .



- ◆ Τα  $ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ$ , εκτός από τις πλευρές, συμβολίζουν και τα μήκη των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων.

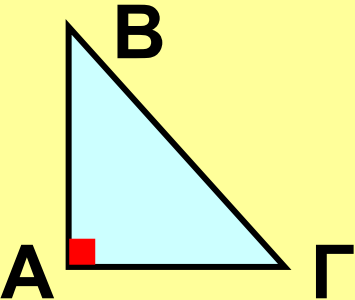
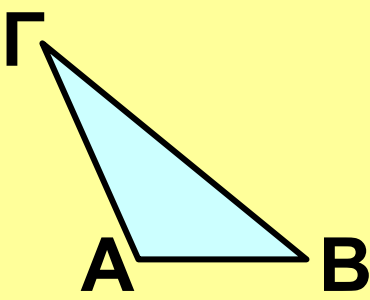
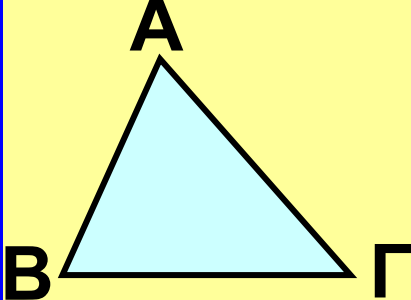
# ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Παρακάτω βλέπουμε την κατάταξη των τριγώνων με βάση δύο συγκεκριμένα κριτήρια. Μπορείς να εκφράσεις με λόγια τα κριτήρια με τα οποία έγινε αυτή η κατάταξη;

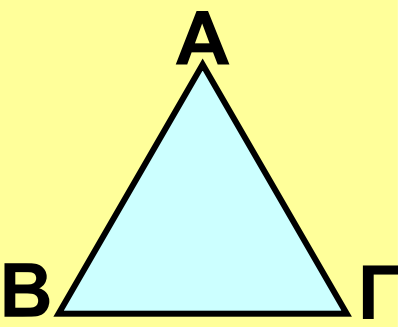
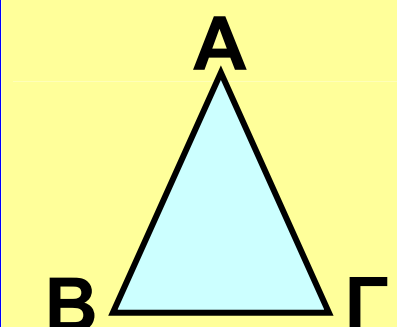
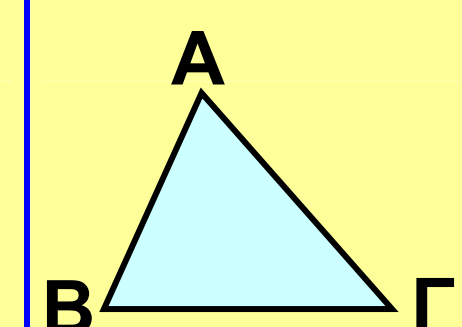


**Σκεφτόμαστε**

Με βάση το 1ο κριτήριο διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

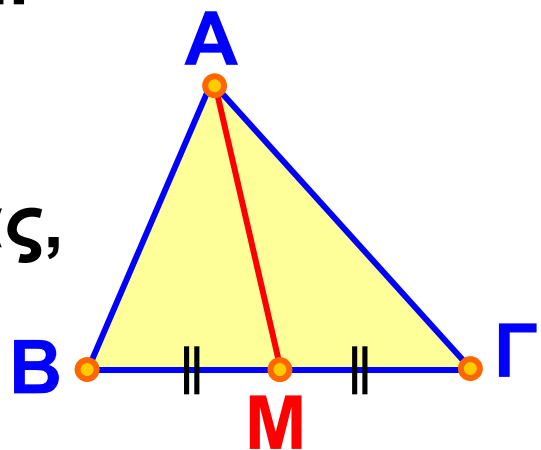
| Πλευρές<br>κάθετες  | Όχι κάθετες πλευρές   |   |
|---|---|---|
| Μία γωνία<br>ορθή   | Μία γωνία<br>μεγαλύτερη<br>της ορθής  | Όλες οι<br>γωνίες<br>μικρότερες<br>της ορθής  |
|  |  |  |
| <b>Ορθογώνιο</b>  | <b>Αμβλυγώνιο</b>   | <b>Οξυγώνιο</b>   |

Με βάση το 2ο κριτήριο  
διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

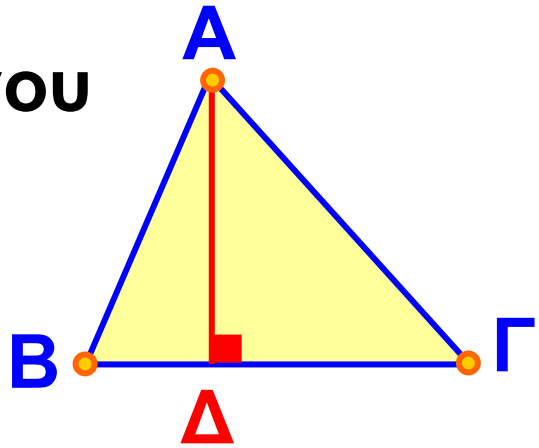
| Ισότητα πλευρών  |  | Ανισότητα<br>πλευρών  |
|--|--|---|
| Τρεις<br>πλευρές<br>ίσες   | Δύο<br>πλευρές<br>ίσες   | Όλες οι<br>πλευρές<br>άνισες  |
|  |  |  |
| <b>Ισόπλευρο</b>   | <b>Ισοσκελές</b>   | <b>Σκαληνό</b>  |

## Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

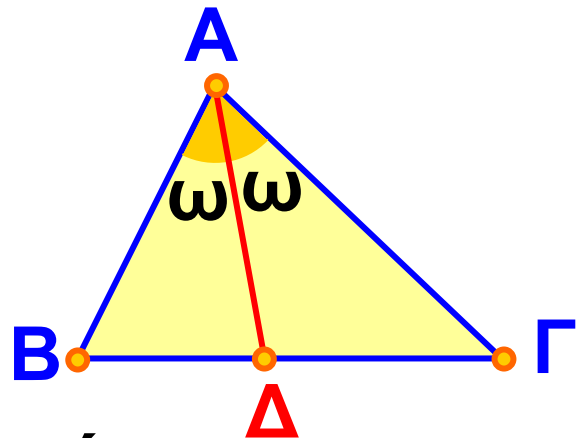
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς, λέγεται διάμεσος.



- Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή ενός τριγώνου κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς, λέγεται ύψος του τριγώνου.



- Το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου που φέρνουμε από μια κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά, λέγεται διχοτόμος του τριγώνου.



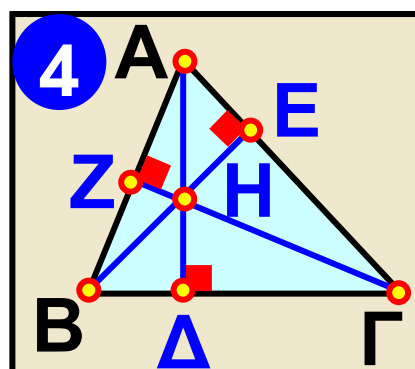
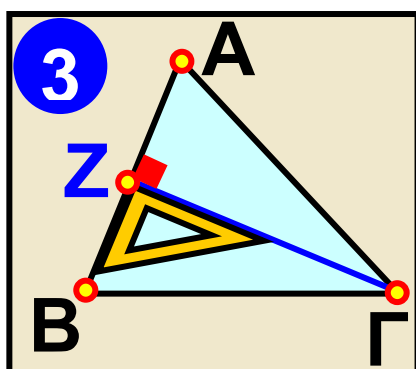
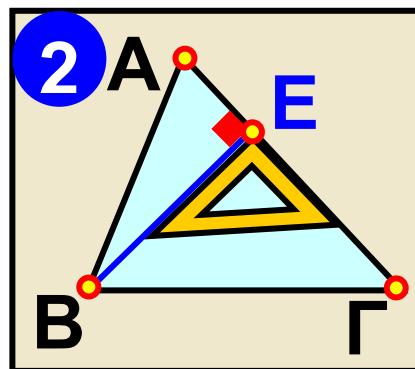
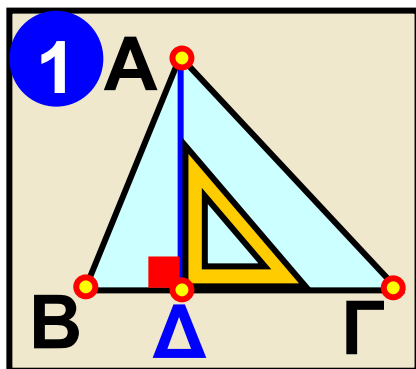
## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να σχεδιαστούν τα ύψη σε τρίγωνο που είναι: (α) οξυγώνιο, (β) αμβλυγώνιο και (γ) ορθογώνιο.

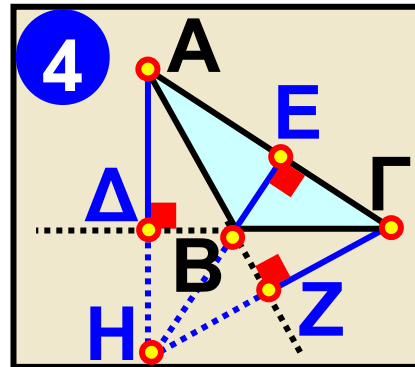
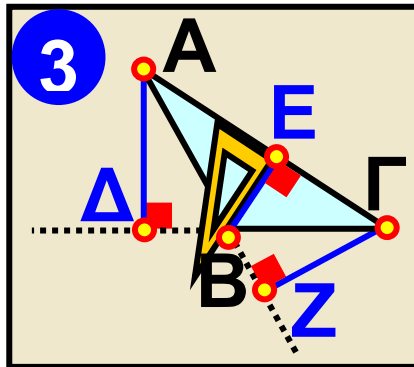
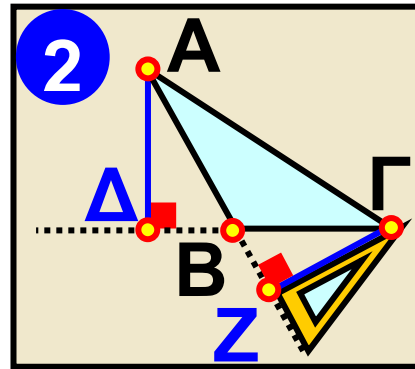
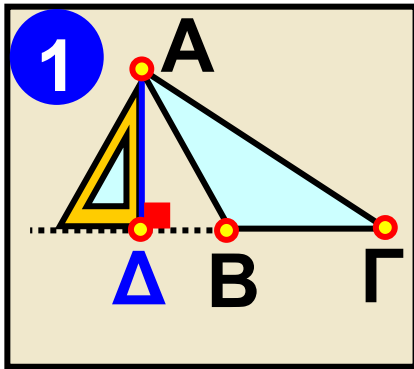
## Λύση

Από την κορυφή π.χ. την  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρνουμε την κάθετο στην απέναντι πλευρά του. Τότε η απόσταση του  $A$  από την πλευρά  $B\Gamma$  είναι το ύψος  $A\Delta$  του τριγώνου. Αυτήν τη διαδικασία την επαναλαμβάνουμε και από τις άλλες δύο κορυφές του τριγώνου για να βρούμε και τα τρία ύψη του, τα οποία παρατηρούμε ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο  $H$ , που λέγεται ορθόκεντρο.

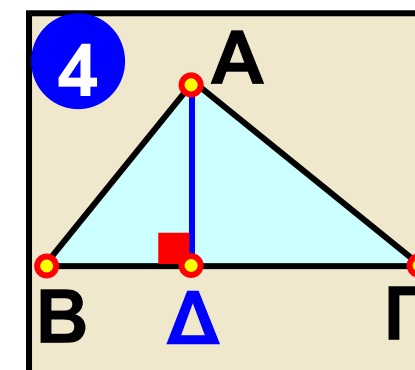
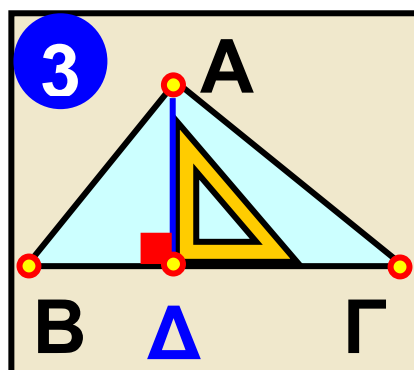
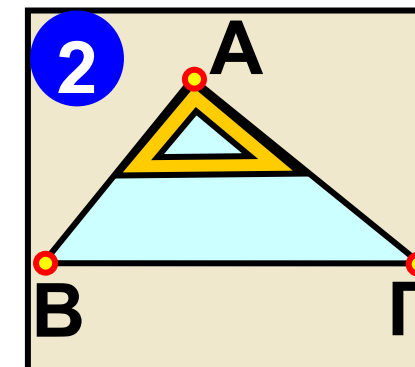
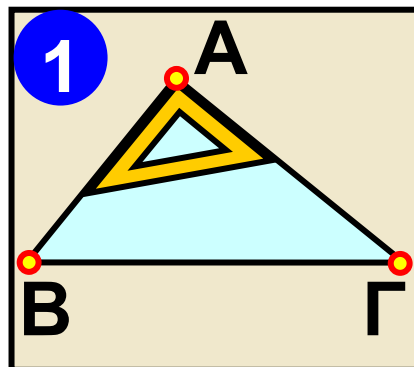
(α)



(β)



(γ)





## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

**1. Γράψε “Σ” μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και “Λ” μπροστά από κάθε λάθος.**

- (α) Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχει μια ορθή γωνία.
- (β) Το αμβλυγώνιο τρίγωνο έχει δύο αμβλείες γωνίες.
- (γ) Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- (δ) Το ισοσκελές τρίγωνο μπορεί να είναι και αμβλυγώνιο.
- (ε) Το ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισόπλευρο.
- (στ) Το ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισοσκελές.
- (ζ) Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο.
- (η) Ένα σκαληνό τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο.

**2. Σ' ένα τρίγωνο  $ABΓ$ , με πλευρά  $BΓ = 4,4 \text{ cm}$ , φέρε τη διάμεσο  $AM$ . Μετά φέρε τις διαμέσους  $AK$  και  $AL$  των τριγώνων  $ABM$  και  $AΓM$  και βρες το μήκος των  $KM$  και  $AL$ .**

**3. Σχεδίασε ένα ισόπλευρο τρίγωνο  $ABΓ$  και τις διαμέσους του  $AD$ ,  $BE$  και  $ΓZ$ . Δικαιολόγησε γιατί οι διάμεσοι του ισόπλευρου είναι διχοτόμοι και ύψη του.**

**4. Σχεδίασε ένα τρίγωνο  $ABΓ$ .**  
**(α) Βρες το μέσο  $D$  της πλευράς  $AB$ , το μέσο  $E$  της πλευράς  $BΓ$  και το μέσο  $Z$  της πλευράς  $ΓA$ .**  
**(β) Σχεδίασε τη διάμεσο  $AE$  του τριγώνου  $ABΓ$  που τέμνει τη  $ZD$  στο σημείο  $M$ . Σύγκρινε με το διαβήτη τα τμήματα  $DM$  και  $MZ$ . Τι παρατηρείς;**

**5. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . (α) Φέρε τις διάμεσους  $AM$  και  $BN$  και ονόμασε με το γράμμα  $\Theta$  το σημείο στο οποίο τέμνονται, (β) Μετά σχεδίασε την ευθεία  $\Gamma\Theta$  και ονόμασε με το γράμμα  $P$  το σημείο στο οποίο η ευθεία  $\Gamma\Theta$  τέμνει την πλευρά  $AB$ . (γ) Σύγκρινε με το διαβήτη τα ευθύγραμμα τμήματα  $AP$  και  $BP$ . Τι παρατηρείς;**

**6. Σχεδίασε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ , πάρε το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  και χάραξε από το σημείο  $M$  μια ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη προς την πλευρά  $AB$  του τριγώνου. Αν το σημείο στο οποίο τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  το ονομάσεις  $N$ , να συγκρίνεις με το διαβήτη τα τμήματα  $AN$  και  $N\Gamma$ . Τι παρατηρείς;**

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ



Να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα με τα σχήματα των αντίστοιχων τριγώνων.

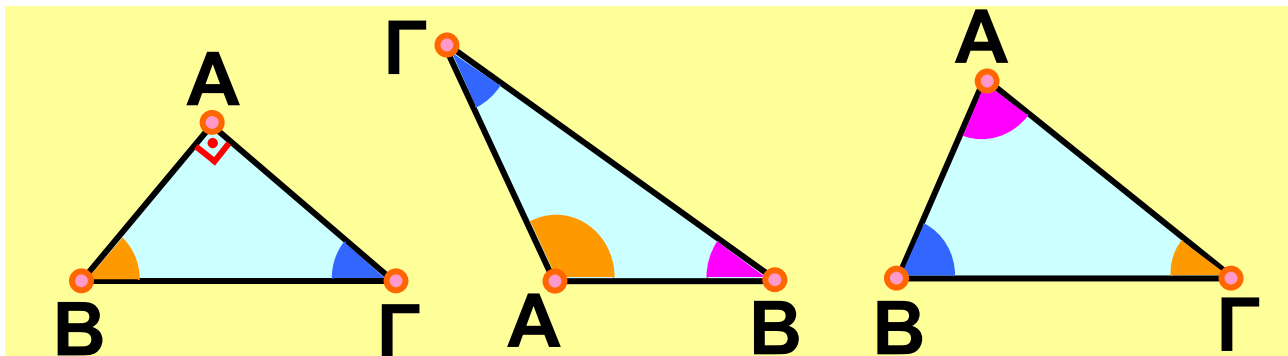
| ΤΡΙΓΩΝΑ   | Οξυγώνιο | Ορθογώνιο | Αμβλυγώνιο |
|-----------|----------|-----------|------------|
| Σκαληνό   |          |           |            |
| Ισοσκελές |          |           |            |
| Ισόπλευρο |          |           |            |

## Β.3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σχεδίασε διάφορα τυχαία ορθογώνια, αμβλυγώνια και οξυγώνια τρίγωνα, όπως πχ. αυτά που φαίνονται πιο κάτω. Μέτρησε τις γωνίες τους με το μοιρογνωμόνιο και υπολόγισε το άθροισμά τους. Μπορείς να διατυπώσεις κάποιο συμπέρασμα;



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Προσπάθησε να διαπιστώσεις ποια διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι άξονας συμμετρίας του και γιατί.

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Προσπάθησε να διερευνήσεις πόσους άξονες συμμετρίας έχει ένα ισόπλευρο τρίγωνο και γιατί.

### Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



▶ Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

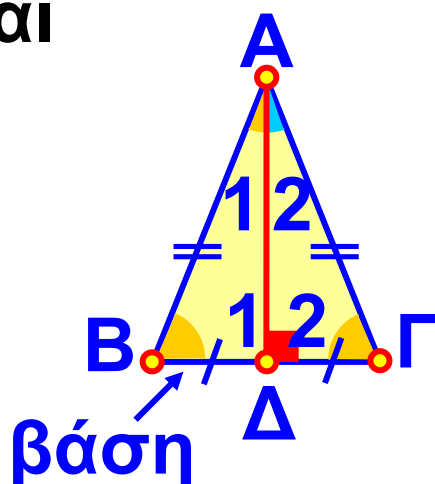
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

**Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:**

▶ Η ευθεία της διαμέσου, που αντιστοιχεί στη βάση είναι άξονας συμμετρίας του ισοσκελούς τριγώνου.

▶ Η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.

▶ Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς είναι ίσες.

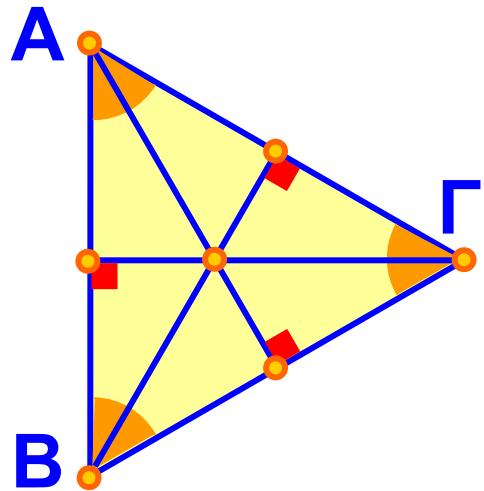


**Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει  
ότι:**

▶ Οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου.

▶ Κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.

▶ Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες.



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

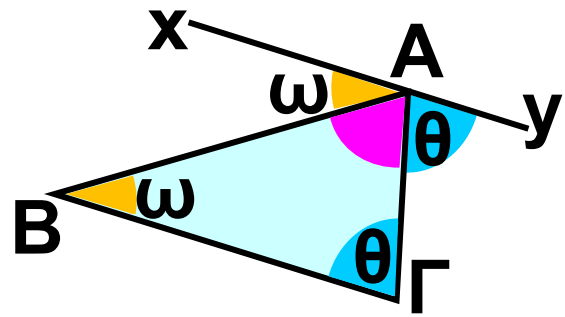


**1. Να δικαιολογηθεί με λογικά επιχειρήματα ότι το άθροισμα των τριών γωνιών κάθε τριγώνου είναι  $180^\circ$ .**

### Λύση

Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και μία ευθεία  $\chi\Lambda\gamma$ , που διέρχεται από

το A και είναι  
παράλληλη προς  
την ευθεία ΒΓ.



Παρατηρούμε ότι:

$\hat{xAB} = \hat{\omega} = \hat{B}$  γιατί είναι γωνίες  
εντός εναλλάξ, των παράλληλων  
ευθειών xAy και ΒΓ, που τέμνονται  
από την ΑΒ.

$\hat{yAG} = \hat{\theta} = \hat{\Gamma}$  γιατί είναι γωνίες εντός  
εναλλάξ των παράλληλων ευθειών  
xAy και ΒΓ, που τέμνονται από την  
ΑΓ.

Οι γωνίες  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{A}$  και  $\hat{\theta}$  σχηματίζουν  
μια ευθεία γωνία. Επομένως

θα είναι:  $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\theta} = 180^\circ$ .

Επειδή όμως είναι:  $\hat{\omega} = \hat{B}$  και  $\hat{\theta} = \hat{\Gamma}$

θα έχουμε:  $\hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ .

**2. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.**

### Λύση

Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο

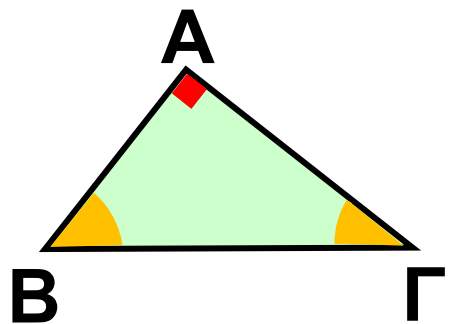
ΑΒΓ με  $\hat{A} = 90^\circ$ .

Επειδή είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ.$$

θα έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$



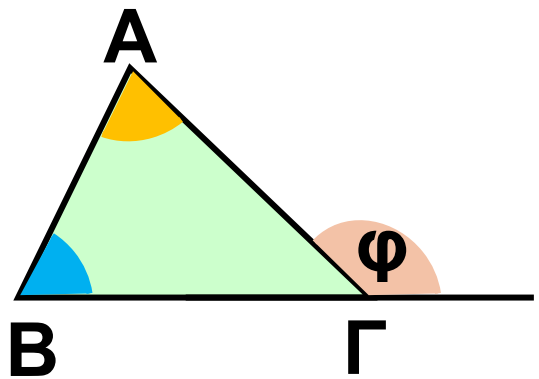
Γνωρίζουμε, ότι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα  $90^\circ$  λέγονται συμπληρωματικές. Άρα, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές.

**3. Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου ισούται με την εξωτερική**

της τρίτης γωνίας. (Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η γωνία  $\hat{A}\hat{\Gamma}\chi$ , που σχηματίζεται από την  $A\Gamma$  και την προέκταση της  $B\Gamma$  προς το μέρος του  $\Gamma$ , ονομάζεται εξωτερική γωνία της  $\hat{\Gamma}$ ).

### Λύση

Η εξωτερική γωνία  $\hat{\Phi}$  είναι παραπληρωματική της



εσωτερικής γωνίας  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου,

δηλαδή θα είναι  $\hat{\Phi} = 180^\circ - \hat{\Gamma}$ .

Επειδή σε κάθε τρίγωνο είναι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ, \text{ άρα}$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} \text{ δηλαδή } \hat{A} + \hat{B} = \hat{\Phi}$$

Άρα, η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου.

4. Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι όλες ίσες με  $60^\circ$ .

### Λύση

Γνωρίζουμε ότι στο ισόπλευρο

τρίγωνο είναι:  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ .

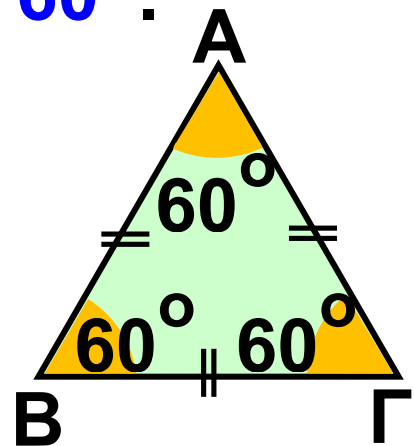
Επειδή σε κάθε τρίγωνο είναι

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ , θα είναι

$\hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180^\circ$ , άρα  $3 \cdot \hat{A} = 180^\circ$ ,

συνεπώς:  $\hat{A} = 180^\circ : 3 = 60^\circ$ .

Άρα, όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες με  $60^\circ$ .

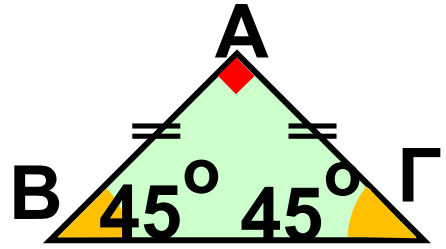


5. Να υπολογιστούν οι γωνίες ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

## Λύση

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ.$$



Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο

ΑΒΓ η γωνία  $\hat{A}$  είναι ορθή, δηλαδή

$$\hat{A} = 90^\circ, \text{ θα είναι: } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο είναι και ισοσκε-

λές θα είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  άρα θα είναι,

$$\hat{B} + \hat{B} = 90^\circ, \text{ από την οποία}$$

προκύπτει ότι:  $2 \cdot \hat{B} = 90^\circ$  δηλαδή

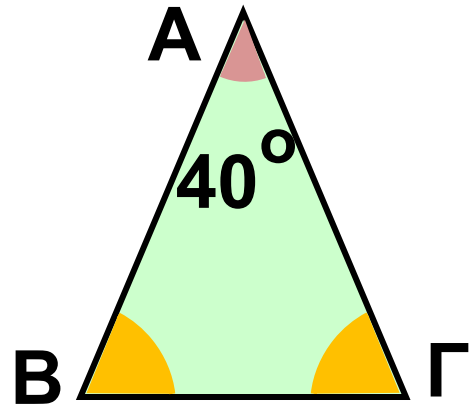
$$\text{θα έχουμε } \hat{B} = 90^\circ : 2 = 45^\circ \text{ και}$$

επομένως και  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ .

**6.** Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου, αν είναι γνωστό μόνο ότι το μέτρο μιας γωνίας του είναι  $40^\circ$ .

## Λύση

Έστω ένα ισοσκελές  
τρίγωνο  $AB\Gamma$   
με  $AB = A\Gamma$ .  
Τότε θα είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ .



Επειδή είναι  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ , δια-  
κρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

(α) Αν είναι  $\hat{A} = 40^\circ$ .

Συνεπώς θα είναι  $40^\circ + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ,  
επομένως  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - 40^\circ$ .

Επομένως θα είναι:  $\hat{B} + \hat{B} = 140^\circ$ ,  
από την οποία προκύπτει ότι:

$2 \cdot \hat{B} = 140^\circ$ , δηλαδή

$\hat{B} = 140^\circ : 2 = 70^\circ$  άρα και  $\hat{\Gamma} = 70^\circ$ .

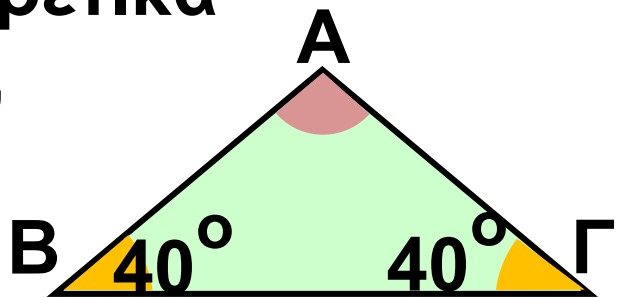
(β) Αν είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 40^\circ$ .

Θα είναι  $\hat{A} + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ$ ,

δηλαδή  $\hat{A} + 80^\circ = 180^\circ$ , συνεπώς

θα έχουμε:  $\hat{A} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ .

Παρατηρούμε ότι με τα ίδια ακριβώς δεδομένα προκύπτουν δύο τελείως διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία όμως ικανοποιούν αυτά τα δεδομένα.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Γράψε “Σ” μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και “Λ” μπροστά από κάθε λάθος.

(α) Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

(β) Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ .

- (γ) Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες ίσες με  $30^\circ$ .
- (δ) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η ευθεία μιας διαμέσου είναι άξονας συμμετρίας.
- (ε) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι και διχοτόμος.
- (στ) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι ευθείες των πλευρών είναι άξονες συμμετρίας.
- (ζ) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι ευθείες των υψών είναι άξονες συμμετρίας.
- (η) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο κάθε διάμεσος είναι και ύψος.
- (θ) Σε κάθε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι  $60^\circ$ .

2. Σχεδίασε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  ώστε να είναι  $\hat{B} = 75^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 35^\circ$  και υπολόγισε τη γωνία  $\hat{A}$ .

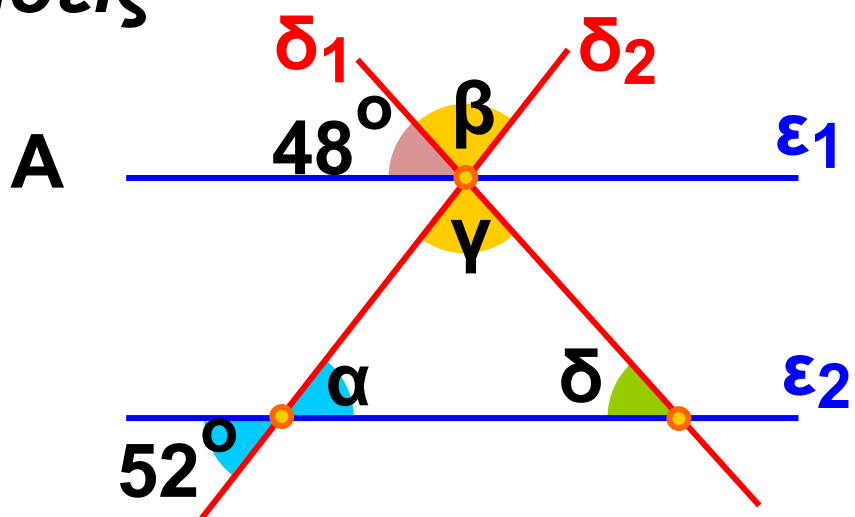
3. Σχεδίασε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , στο οποίο να είναι  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  και  $AB = 4,2 \text{ cm}$ .  
(α) Υπολόγισε τη γωνία  $\hat{\Gamma}$ .  
(β) Μέτρησε την πλευρά  $B\Gamma$  και σύγκρινε το μήκος της με το μήκος της πλευράς  $AB$ .

4. Στο διπλανό σχήμα είναι  $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ .  
Να υπολογίσεις

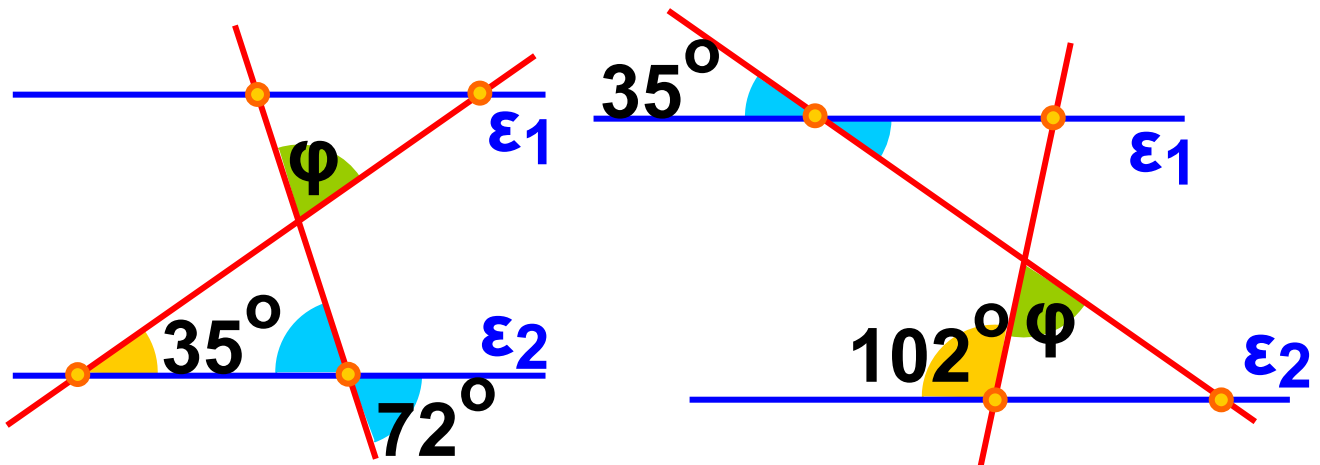
τις γωνίες

$\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$

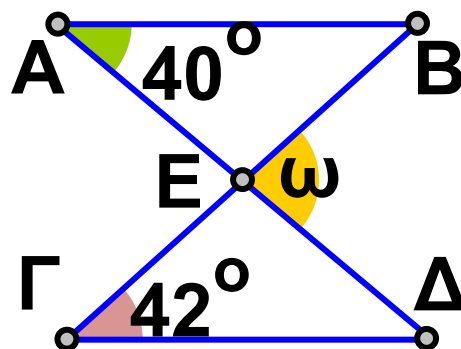
και  $\hat{\delta}$ .



5. Στα παρακάτω σχήματα είναι  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ . Να υπολογίσεις τη γωνία  $\hat{\varphi}$ .



6. Στο παρακάτω σχήμα είναι  $AB \parallel \Gamma\Delta$ . Υπολόγισε τη γωνία  $\hat{\omega}$ .



7. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, η γωνία που είναι απέναντι από τη βάση είναι  $74^\circ$ . Να υπολογίσεις τις υπόλοιπες γωνίες.

8. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} = 36^\circ$  και η γωνία  $\hat{B}$  είναι διπλάσια από τη  $\hat{\Gamma}$ . Υπολόγισε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ .

9. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  η γωνία  $\hat{A}$  είναι διπλάσια από τη  $\hat{B}$  και η  $\hat{\Gamma}$  τριπλάσια από τη  $\hat{B}$ . Να υπολογίσεις τις γωνίες του τριγώνου.

10. Να σχεδιάσεις ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , να πάρεις ένα σημείο  $O$  στο εσωτερικό του και να φέρεις τις  $OA$ ,  $OB$ ,  $OG$  και  $OD$ . Να υπολογίσεις το άθροισμα των γωνιών  $\hat{A\hat{O}B}$ ,  $\hat{B\hat{O}G}$ ,  $\hat{\Gamma\hat{O}D}$  και  $\hat{\Delta\hat{O}A}$  και στη συνέχεια το άθροισμα των γωνιών του  $AB\Gamma\Delta$ .

## **Β.3.3. Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο Τραπέζιο – Ισοσκελές τραπέζιο**

### **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η**

**Η υπηρεσία οδικής ασφάλειας αποφάσισε να βάψει το οδόστρωμα σε όλες τις διασταυρώσεις με έντονο κίτρινο χρώμα. Για να κάνει τους υπολογισμούς της, πρέπει να βρεθεί το ακριβές σχήμα του οδοστρώματος στο κοινό μέρος δύο δρόμων, σε κάθε διασταύρωση.**



**Με την προϋπόθεση ότι οι δρόμοι που διασταυρώνονται είναι ευθείς, προσπάθησε να βρεις όλες τις περιπτώσεις των τετραπλεύρων που σχηματίζουν οι δρόμοι:**

**(α) όταν έχουν το ίδιο πλάτος και τέμνονται καθέτως.**

**(β) όταν έχουν διαφορετικό πλάτος και τέμνονται καθέτως.**

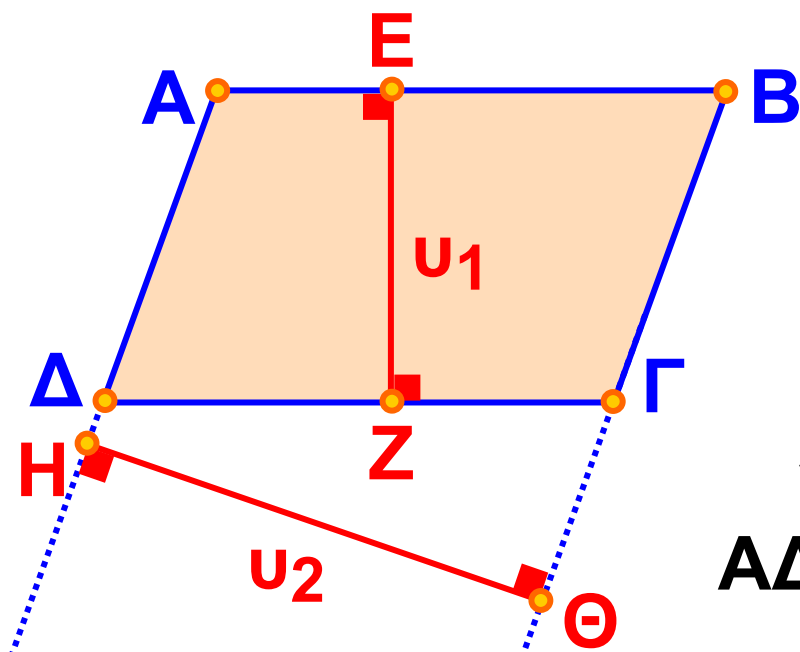
**(γ) όταν έχουν το ίδιο πλάτος και τέμνονται πλαγίως.**

**(δ) όταν έχουν διαφορετικό πλάτος και τέμνονται πλαγίως.**



## **Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε**

- Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή  $ΑΒ // ΓΔ$  και  $ΑΔ // ΒΓ$ .
- Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί βάση του παραλληλογράμμου.
- Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου.



Για τις βάσεις AB και ΓΔ ύψος είναι το EZ, ενώ για τις βάσεις ΑΔ και ΒΓ ύψος είναι το ΗΘ.

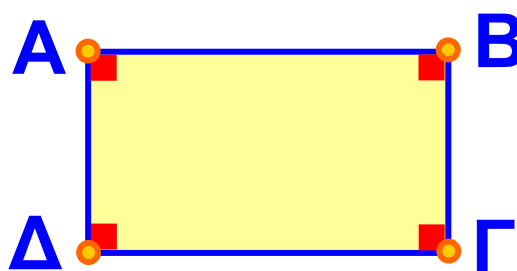
## Ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων

- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές λέγεται

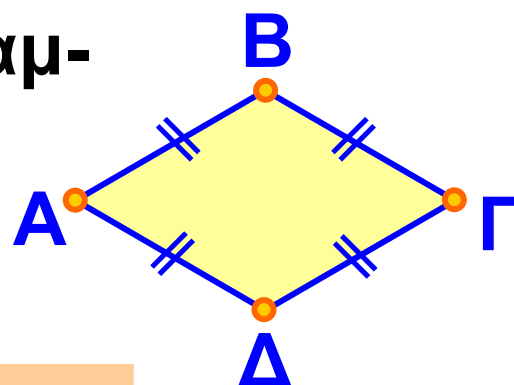
ορθογώνιο

παραλληλόγραμμο

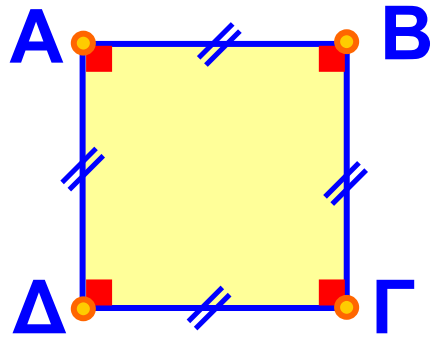
ή απλά ορθογώνιο.



- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται ρόμβος.



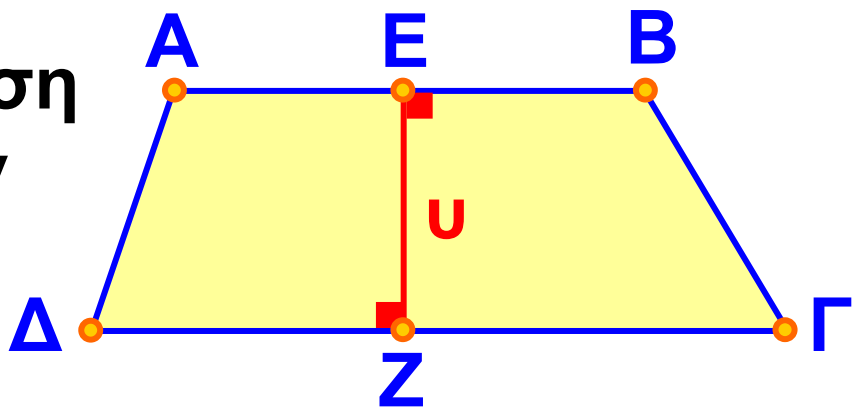
- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται τετράγωνο.



## Τραπέζιο

- Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου μόνο δύο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται τραπέζιο.
- Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ, ΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) του τραπέζιου λέγονται βάσεις του τραπέζιου.

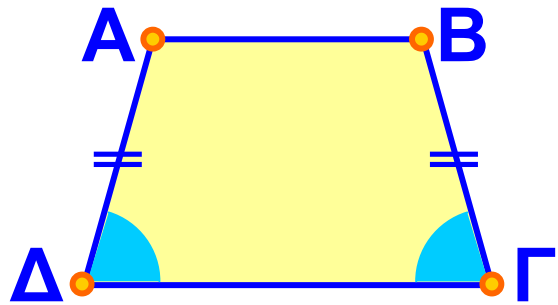
- Η απόσταση των βάσεων λέγεται ύψος του τραπέζιου.



*Η απόσταση των βάσεων ΑΒ και ΓΔ είναι το ύψος ΕΖ.*

- Αν ένα τραπέζιο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες λέγεται ισοσκελές τραπέζιο.

Είναι  $AD = BG$



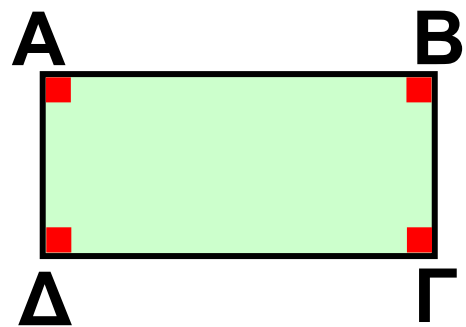
## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να εξηγήσετε γιατί οι πλευρές του ορθογωνίου είναι και ύψη.



**Λύση**

Επειδή όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές, οι διαδοχικές πλευρές του θα είναι κάθετες μεταξύ τους. Επομένως οι πλευρές του ορθογωνίου είναι και ύψη.

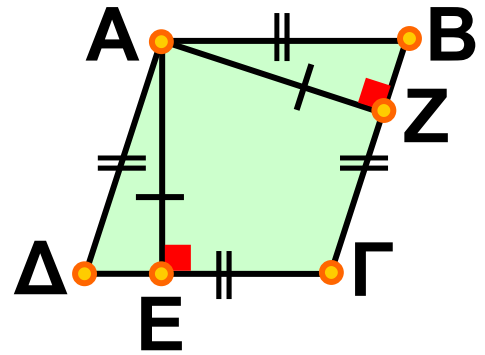


2. Να συγκριθούν τα ύψη του ρόμβου που άγονται από μία κορυφή.

## Λύση

Συγκρίνουμε με το διαβήτη ή με διαφανές χαρτί τα ύψη  $AE$

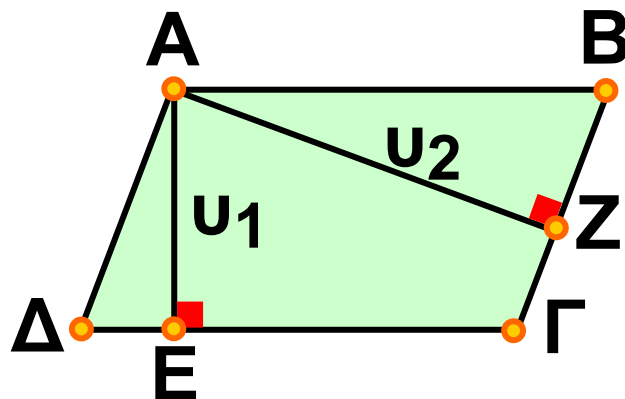
και  $AZ$  του ρόμβου και διαπιστώνουμε ότι είναι ίσα, δηλαδή:  $AE = AZ$ .



3. Να σχεδιαστούν τα ύψη του παραλληλογράμμου που άγονται από μια κορυφή.

## Λύση

Τα ύψη του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  που φέρνουμε από την κορυφή  $A$  στις πλευρές  $\Delta\Gamma$  και  $B\Gamma$  είναι τα  $AE$  και  $AZ$  αντίστοιχα.





## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

**1. Γράψε “Σ” μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και “Λ” μπροστά από κάθε λάθος.**

- (α) Ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος.
- (β) Ένας ρόμβος είναι τετράγωνο.
- (γ) Κάθε διαγώνιος ορθογωνίου παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ορθογώνια τρίγωνα.
- (δ) Κάθε διαγώνιος ρόμβου τον χωρίζει σε δύο ισόπλευρα τρίγωνα.
- (ε) Κάθε διαγώνιος ισοσκελούς τραπεζίου το χωρίζει σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

**2. Πόσα ισοσκελή τρίγωνα σχηματίζονται σ' ένα ισοσκελές τραπέζιο, που έχει τρεις πλευρές ίσες, όταν φέρουμε τις δύο διαγώνιες του; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.**

**3. Με τέσσερα σπέρτα (ολόκληρα και ίσα) ποια τετράπλευρα μπορείς να κατασκευάσεις; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.**

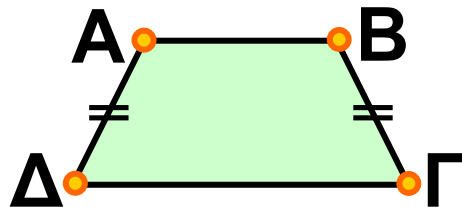
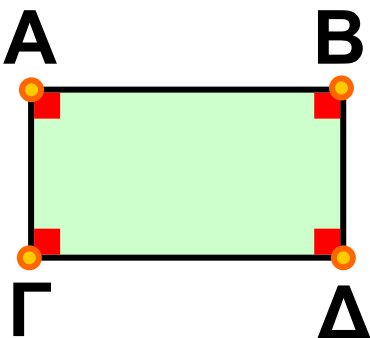
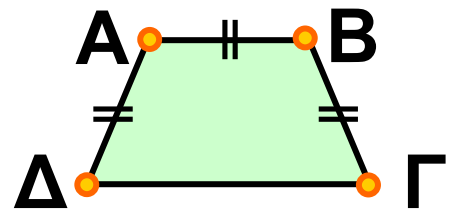
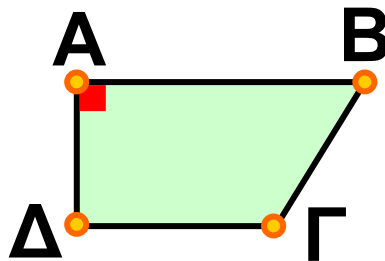
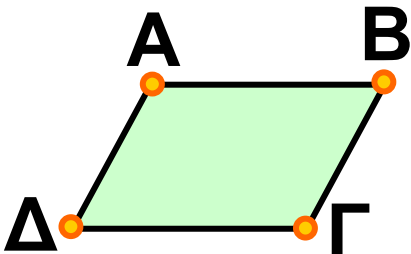
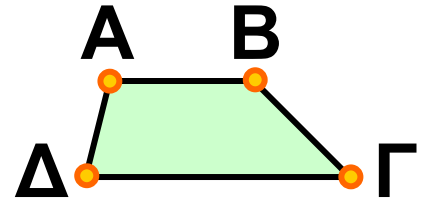
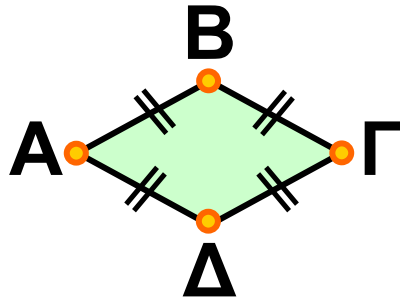
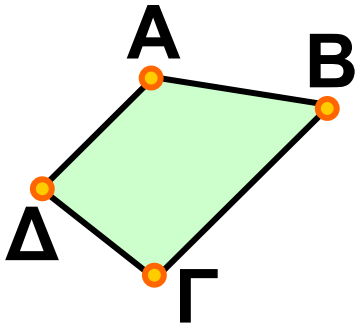
**4. Με δύο ολόκληρα και δύο μισά σπέρτα μπορείς να κατασκευάσεις παραλληλόγραμμο και ποια; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.**

## **ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ**



**➤ Προσπάθησε να χωρίσεις τα πιο κάτω τετράπλευρα σε ομάδες.**

- Δώσε από ένα όνομα στο καθένα.
- Προσπάθησε να δικαιολογήσεις το χωρισμό σε ομάδες που έκανες.

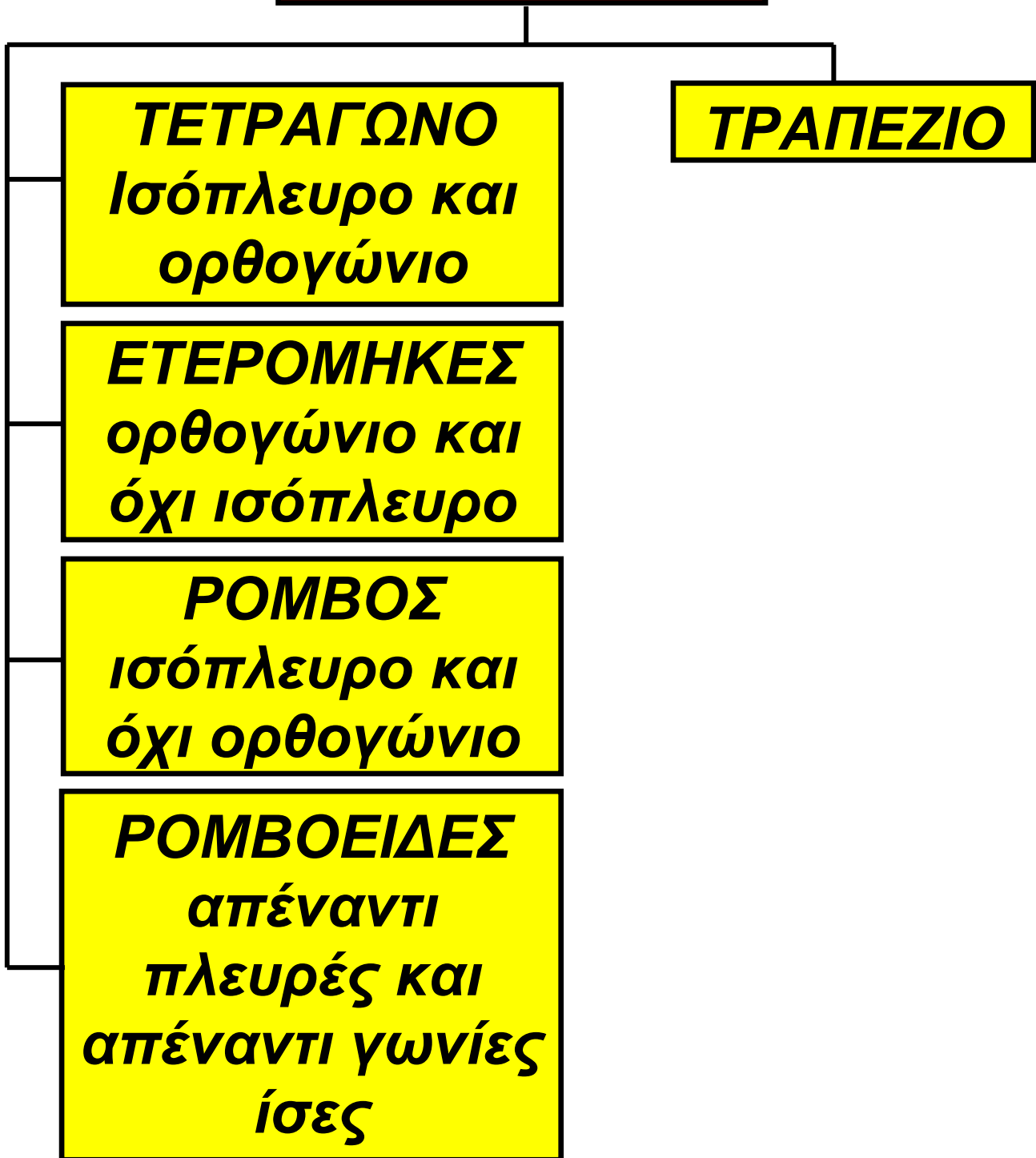


## ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



Ο Ευκλείδης στα “Στοιχεία” του προτείνει μια ταξινόμηση (Διάγραμμα 1), που δεν χρησιμοποιεί ως κριτήριο την παραλληλία, την οποία εισάγει αργότερα.

# **ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ**

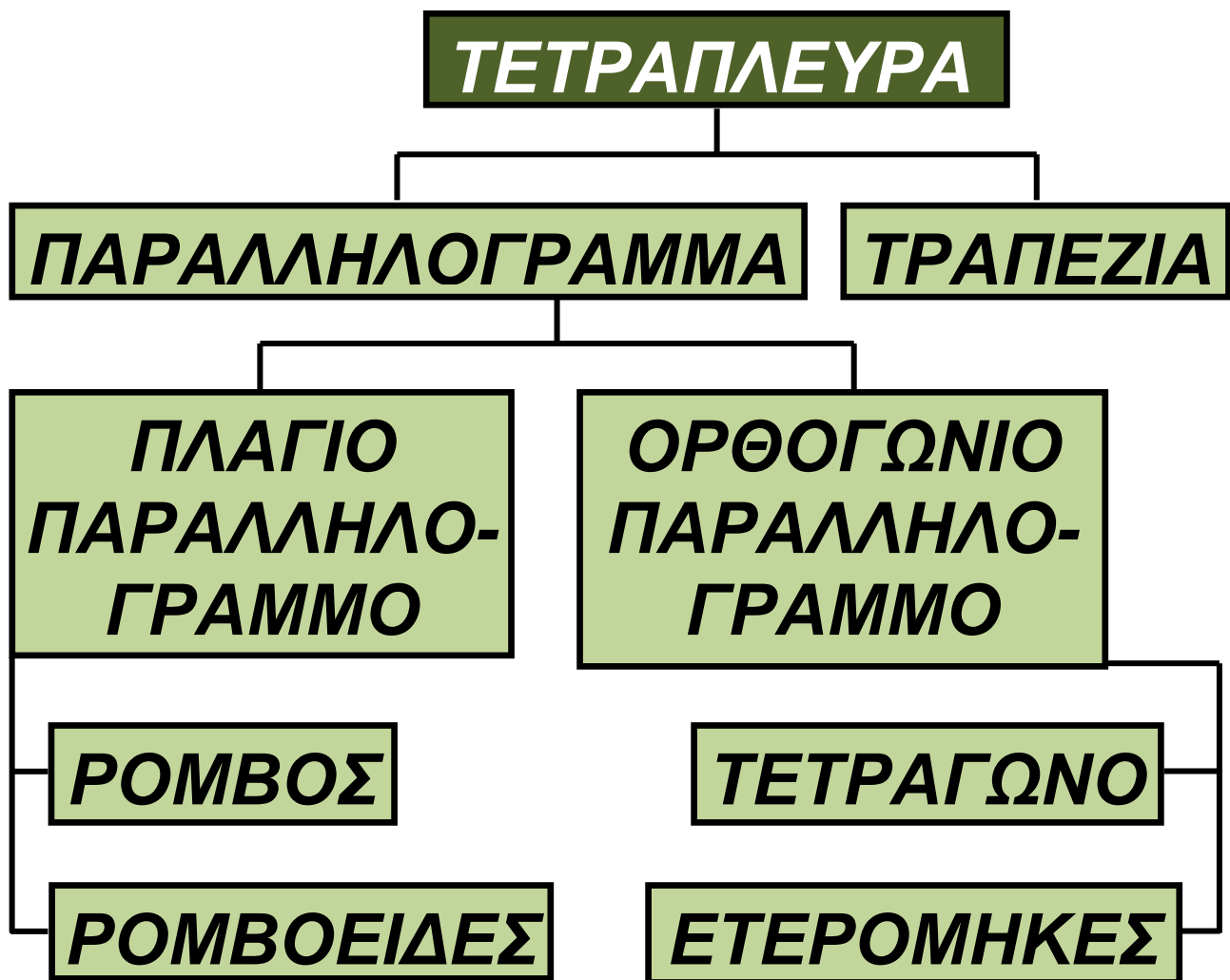


**Διάγραμμα 1**  
**Η Ευκλείδεια ταξινόμηση**

**Τραπέζιο ονομάζει, όχι εκείνο που λέμε εμείς σήμερα, δηλαδή το τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αλλά οποιοδήποτε τετράπλευρο. Τον όρο τραπέζιο, με τη σύγχρονη έννοια, τον συναντάμε αργότερα στον Αρχιμήδη. Επίσης το τετράπλευρο που ονομάζει ρομβοειδές εκφράζει το σημερινό παραλληλόγραμμο.**



**Μια προσπάθεια διόρθωσης της Ευκλείδειας ταξινόμησης απαντάται τον 16ο αιώνα στη “Γεωμετρία” (1569) του Petrus Ramus ή Pierre de la Ramée.**



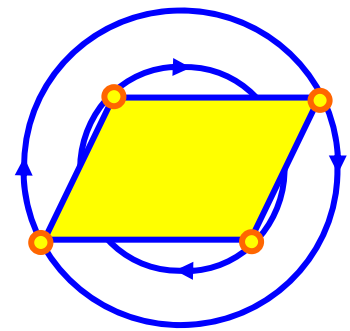
*Διάγραμμα 2  
Η ταξινόμηση του Ramus*

## Β.3.4. Ιδιότητες Παραλληλογράμμου - Ορθογωνίου - Ρόμβου - Τετραγώνου - Τραπεζίου - Ισοσκελούς τραπεζίου



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

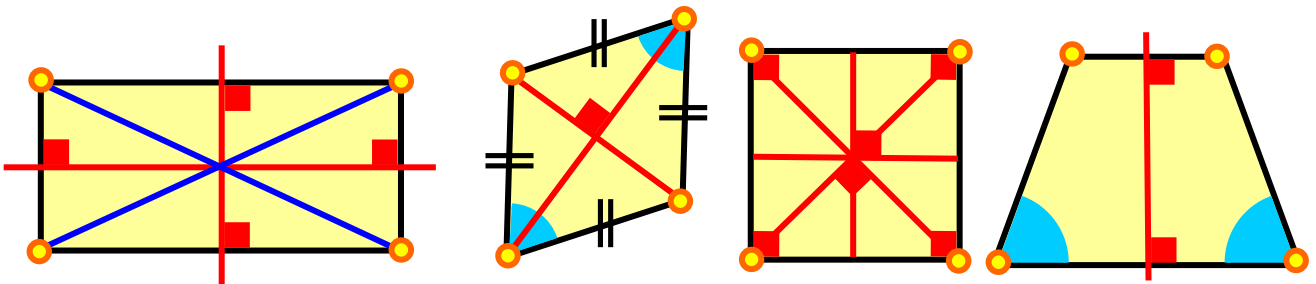
Προσπάθησε να  
διαπιστώσεις εάν  
το παραλληλόγραμμο  
έχει κέντρο συμμετρίας.



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Προσπάθησε να βρεις τους άξονες  
συμμετρίας:

(α) του ορθογωνίου, (β) του ρόμβου,  
(γ) του τετραγώνου και  
(δ) του ισοσκελούς τραπεζίου.



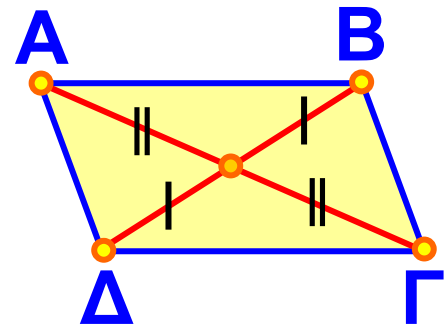
## Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

### Ιδιότητες του ορθογώνιου και πλάγιου παραλληλογράμμου



▶ Σε κάθε παραλληλόγραμμο το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του.

▶ Οι διαγώνιές του διχοτομούνται (κάθε μία περνάει από το μέσον της άλλης).

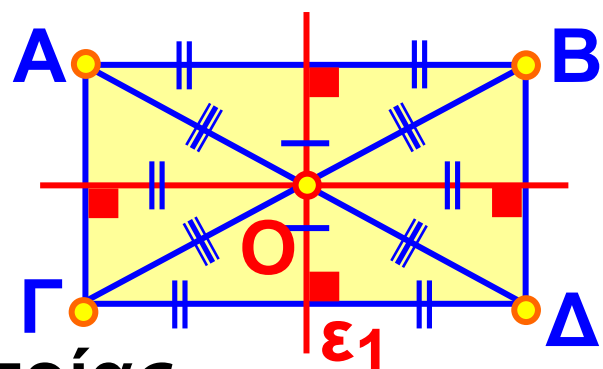


▶ Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

▶ Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

**Στο ορθογώνιο:**

▶ Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.

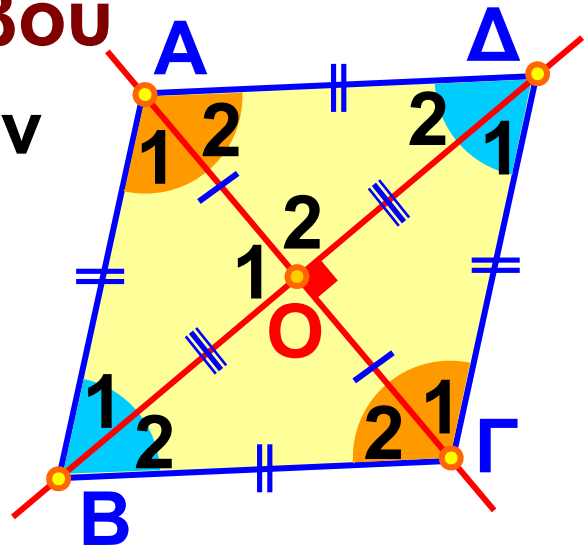


▶ Οι διαγώνιές του είναι ίσες και διχοτομούνται.

## Ιδιότητες του ρόμβου

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:

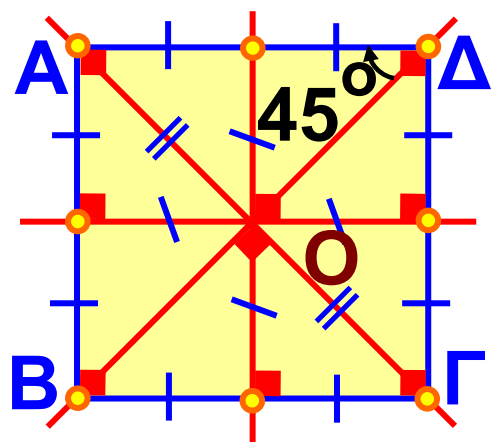
- ▶ Οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας.
- ▶ Οι διαγώνιες είναι κάθετες (και διχοτομούνται).
- ▶ Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.



## Ιδιότητες του τετραγώνου

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:

- ▶ Οι ευθείες των διαγωνίων του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.

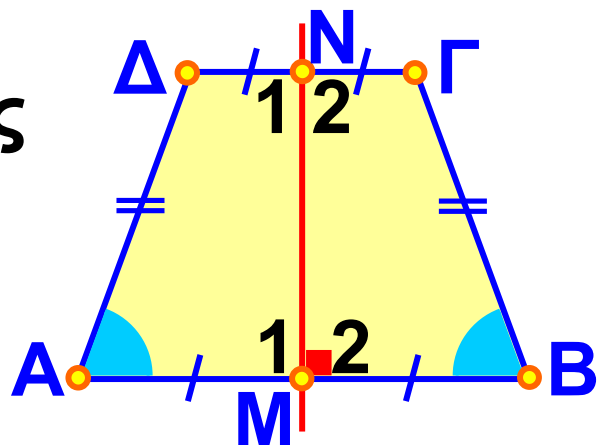


- ▶ Οι διαγώνιές του είναι ίσες, κάθετες (και διχοτομούνται)
- ▶ Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

## Ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου

- ▶ Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του.

- ▶ Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες.

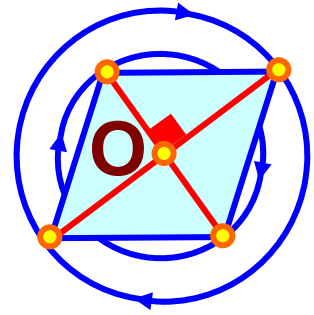


## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

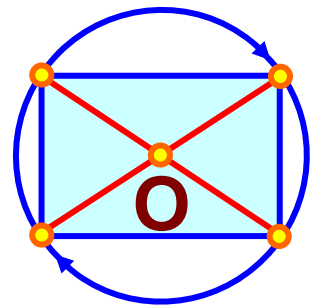
Να βρεθεί το κέντρο συμμετρίας:  
 (α) του ρόμβου, (β) του ορθογωνίου  
 και (γ) του τετραγώνου.

**Λύση**

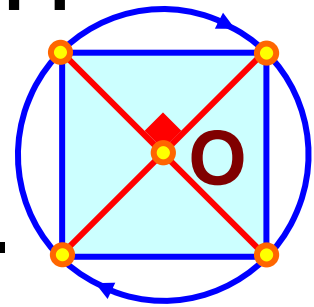
(α) Επειδή ο ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο, το σημείο  $O$  τομής των διαγωνίων του θα είναι και κέντρο συμμετρίας του.



(β) Επειδή το ορθογώνιο είναι και παραλληλόγραμμο, το σημείο τομής  $O$  των διαγωνίων του θα είναι και κέντρο συμμετρίας του.



(γ) Επειδή το τετράγωνο είναι και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το σημείο τομής  $O$  των διαγωνίων του θα είναι και κέντρο συμμετρίας του.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σχεδιάσε ένα ορθογώνιο, ένα ρόμβο και ένα τετράγωνο με τις διαγώνιές τους και εξέτασε εάν τα τρίγωνα στα



**οποία χωρίζεται το καθένα από τις διαγώνιες είναι ίσα.**

**2. Σχεδίασε ένα ορθογώνιο  $ΑΒΓΔ$  και με διάμετρο τη διαγώνιο του  $ΑΓ$  γράψε ένα κύκλο. Δικαιολόγησε το γεγονός ότι ο κύκλος αυτός περνάει από όλες τις κορυφές του ορθογώνιου.**

**3. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  φέρε τη διαγώνιο  $ΒΔ$  και μετά σύγκρινε τις αποστάσεις των κορυφών  $Α$  και  $Γ$  απ' αυτή.**

**4. Σχεδίασε ένα παραλληλόγραμμο και από τις κορυφές του φέρε παράλληλες ευθείες προς τις διαγωνίους του. Τι παρατηρείς;**

**5. Σχεδίασε τις διχοτόμους των γωνιών ενός πλαγίου παραλληλο-**

**γράφου. Τι παρατηρείς για το σχήμα που δημιουργείται απ' αυτές, εάν προεκταθούν;**

**6. Σχεδίασε τις διχοτόμους των γωνιών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Τι παρατηρείς για το σχήμα που δημιουργείται απ' αυτές εάν προεκταθούν; Επίσης, τις διχοτόμους των γωνιών (α) ενός τετραγώνου και (β) ενός ρόμβου. Τι παρατηρείς;**

**7. Σχεδίασε τα ύψη των τριγώνων  $AB\Delta$  και  $\Delta B\Gamma$ , τα οποία σχηματίζονται, όταν φέρεις τη διαγώνιο  $B\Delta$  του τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$ . Μέτρησε τα ύψη των δύο αυτών τριγώνων με το υποδεκάμετρο. Τι παρατηρείς; (Δικαιολόγησε την απάντησή σου).**

**8.** Πάνω σε δύο μη αντικείμενες ημιευθείες  $Ox$  και  $Oy$ , πάρε τα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα έτσι, ώστε  $OA = OB$ . Από το  $A$  φέρε  $Ay' \parallel Oy$  και από το  $B$  την  $Bx' \parallel Ox$ . Ονόμασε  $K$  το σημείο τομής των  $Ay'$  και  $Bx'$ . Φέρε τις διαγώνιες του  $AOBK$  και διαπίστωσε τη σχετική τους θέση. Επίσης, σύγκρινε μεταξύ τους τις αποστάσεις του  $O$  από τις ευθείες  $Ay'$  και  $Bx'$  και του  $K$  από τις  $Ox$  και  $Oy$ .

**9.** Σχεδίασε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  έτσι, ώστε ανά δύο οι διαδοχικές πλευρές του να είναι κάθετες. Αν  $AB = 3 \text{ cm}$  και  $B\Gamma = 4 \text{ cm}$ . Να βρεις:  
(α) το μήκος των  $\Gamma\Delta$  και  $A\Delta$  και  
(β) το μήκος των  $B\Delta$  και  $A\Gamma$ , με τη βοήθεια του υποδεκάμετρου. Τι παρατηρείς;

# Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

**Α. Τοποθέτησε ένα “x” στην θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση**

| ΟΝΟΜΑΣΙΑ<br>ΖΕΥΓΟΥΣ ΓΩΝΙΩΝ                         | ΣΧΕΣΗ |                            |
|--|-------|----------------------------|
| ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥ-<br>ΘΕΙΕΣ ΤΕΜΝΟΜΕ-<br>ΝΕΣ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ | ΙΣΕΣ  | ΠΑΡΑ-<br>ΠΛΗΡΩ-<br>ΜΑΤΙΚΕΣ |
| “ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ”                                    |       |                            |
| “ΕΚΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ”                                    |       |                            |
| “ΕΝΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ<br>ΑΥΤΑ”                             |       |                            |
| “ΕΚΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ<br>ΑΥΤΑ”                             |       |                            |
| “ΕΝΤΟΣ - ΕΚΤΟΣ<br>ΕΝΑΛΛΑΞ”                         |       |                            |
| “ΕΝΤΟΣ - ΕΚΤΟΣ<br>ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ”                     |       |                            |

**B. Τοποθέτησε ένα «x» στην θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.**

**(Υπάρχουν και περιπτώσεις που περισσότερες από μία απαντήσεις είναι σωστές).**

**1. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι:**

$270^\circ$       $180^\circ$       $90^\circ$

**2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι και:**

Άξονας συμμετρίας     Ύψος  
 Διχοτόμος

**3. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι εξωτερικές του γωνίες είναι ίσες με:**

$145^\circ$       $270^\circ$       $120^\circ$

**4. Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι ίσες οι:**

- Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του
- Όλες οι πλευρές του
- Οι διαγώνιοι του.

**5. Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες του είναι:**

- Άξονες συμμετρίας
- Κάθετες και διχοτομούνται
- Διχοτόμοι των γωνιών του.

**6. Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο άξονες συμμετρίας είναι:**

- Οι διαγώνιές του
- Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του
- Οι πλευρές του.

**7. Σε κάθε τετράγωνο οι ευθείες των διαγωνίων του είναι:**

- Διχοτόμοι των γωνιών του**
- Μεσοκάθετοι των πλευρών του**
- Άξονες συμμετρίας.**

**8. Σε κάθε παραλληλόγραμμο είναι:**

- Κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.**
- Οι διαγώνιές του άξονες συμμετρίας**
- Οι διαγώνιές του διχοτομούνται.**

**Γ. Τοποθέτηση ένα «X» στην θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.**

|                                    |                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |                                     |                               |              |                                 |                                     |
|------------------------------------|--------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|-------------------------------------|-------------------------------|--------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| <b>ΚΕΝΤΡΟ<br/>ΣΥΜΜΕ-<br/>ΤΡΙΑΣ</b> | <b>ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΕΟΝΩΝ<br/>ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ</b> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | <b>ΕΥΘΥ-<br/>ΓΡΑΜΜΑ<br/>ΣΧΗΜΑΤΑ</b> | <b>ΕΥΘΥΓΡΑΜ-<br/>ΜΟ ΤΜΗΜΑ</b> | <b>ΓΩΝΙΑ</b> | <b>ΚΑΤΑΚΟΡΥ-<br/>ΦΗΝ ΓΩΝΙΕΣ</b> | <b>ΕΝΤΟΣ<br/>ΕΝΑΝΤΑΣ<br/>ΓΩΝΙΕΣ</b> |
|                                    |                                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |                                     |                               |              |                                 |                                     |

| <b>ΕΥΘΥ-<br/>ΓΡΑΜΜΑ<br/>ΣΧΗΜΑΤΑ</b> | <b>ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΞΟΝΩΝ<br/>ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ</b> |          |          |          |          |          |          |          |          |          |           |           | <b>ΚΕΝΤΡΟ<br/>ΣΥΜΜΕ-<br/>ΤΡΙΑΣ</b> |           |
|-------------------------------------|--------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|------------------------------------|-----------|
|                                     | <b>0</b>                             | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6</b> | <b>7</b> | <b>8</b> | <b>9</b> | <b>10</b> | <b>11</b> |                                    | <b>12</b> |
| <b>ΤΥΧΑΙΟ<br/>ΤΡΙΓΩΝΟ</b>           |                                      |          |          |          |          |          |          |          |          |          |           |           |                                    |           |
| <b>ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ<br/>ΤΡΙΓΩΝΟ</b>        |                                      |          |          |          |          |          |          |          |          |          |           |           |                                    |           |
| <b>ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ<br/>ΤΡΙΓΩΝΟ</b>        |                                      |          |          |          |          |          |          |          |          |          |           |           |                                    |           |
| <b>ΤΡΑΠΕΖΙΟ</b>                     |                                      |          |          |          |          |          |          |          |          |          |           |           |                                    |           |
| <b>ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ<br/>ΤΡΑΠΕΖΙΟ</b>       |                                      |          |          |          |          |          |          |          |          |          |           |           |                                    |           |



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΜΕΡΟΣ Β΄ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Συμμετρία</b>   | <b>7</b>  |
| 2.1 Συμμετρία ως προς άξονα.....   | 12        |
| 2.2 Άξονας συμμετρίας .....  | 28        |
| 2.3 Μεσοκάθετος ευθυγράμμου<br>τμήματος .....                            | 33        |
| 2.4 Συμμετρία ως προς σημείο .....                                       | 47        |
| 2.5 Κέντρο συμμετρίας .....  | 55        |
| 2.6 Παράλληλες ευθείες που<br>τέμνονται από μία άλλη<br>ευθεία.....      | 61        |
| <br>   |           |
| <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – Τρίγωνα –<br/>Παραλληλόγραμμο –<br/>Τραπέζια</b>        | <b>71</b> |
| 3.1 Στοιχεία τριγώνου – Είδη<br>τριγώνων .....                           | 74        |
| 3.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου<br>– Ιδιότητες ισοσκελούς<br>τριγώνου ..... | 84        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>3.3 Παραλληλόγραμμο –<br/>Ορθογώνιο – Ρόμβος –<br/>Τετράγωνο – Τραπεζίο –<br/>Ισοσκελές τραπέζιο .....</b>                 | <b>98</b>  |
| <b>3.4 Ιδιότητες Παραλληλογράμμου<br/>– Ορθογωνίου – Ρόμβου –<br/>Τετράγωνου – Τραπεζίου –<br/>Ισοσκελούς τραπέζιου .....</b> | <b>110</b> |
| <b><i>Επαναληπτικές Ερωτήσεις<br/>Αυτοαξιολόγησης .....</i></b>   | <b>118</b> |



**Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').**

**Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.**