

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
Τόμος 3ος

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ιωάννης Βανδουλάκης, *Μαθηματικός*
Χαράλαμπος Καλλιγιάς, *Μαθημ/κός-Πληροφορικός,*
Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης
Νικηφόρος Μαρκάκης, *Μαθημ/κός-Πληροφορικός,*
Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης
Σπύρος Φερεντίνος, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ

Χαράλαμπος Τσίτουρας, *Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ-Χαλκίδας*
Γεώργιος Μπαραλός, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθ/κών*
Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου,
Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Κλειώ Γκιζελή, *Ζωγράφος*
Ιόλη Κυρούση, *Γραφίστρια*

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Βαρβάρα Δερνελή, *Φιλολόγος Εκπ/κός Β/θμιας*
Εκπ/σης

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Αθανάσιος Σκούρας, *Σύμβουλος Παιδαγωγ. Ινστιτούτου*

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

Μανώλης Χάρος, *Ζωγράφος*

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Στη συγγραφή του πρώτου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και
η Θεοδώρα Αστέρη, *Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγιάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
Τόμος 3ος

**Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ II / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία
Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων
σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»**

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

**Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ Πρόεδρος του
Παιδαγωγ. Ινστιτούτου**

**Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και
παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με
βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»**

**Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου**

**Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός**

**Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.**

**Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό
Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.**

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

A.6.5. Προβλήματα αναλογιών

Για να διαπιστώσουμε, εάν δυο ποσά είναι ανάλογα, χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:

1. Τον ορισμό των ανάλογων ποσών

Εξετάζουμε αν τα ποσά που μεταβάλλονται είναι τέτοια ώστε: όταν οι τιμές του ενός ποσού πολλαπλασιάζονται, με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Για παράδειγμα:

Αν $15 = 5 \cdot 3$ πρέπει $21 = 7 \cdot 3$ και

αν $2,5 = 5 \cdot \frac{1}{2}$ πρέπει $3,5 = 7 \cdot \frac{1}{2}$

x	y
5	7
15	21
2,5	3,5

Diagram illustrating the relationship between the values of x and y. Arrows show that multiplying x by 3 results in y, and multiplying x by 1/2 results in y.

2. Τη σχέση $y = \alpha \cdot x$

Εξετάζουμε αν τα ποσά συνδέονται με μια σχέση αναλογίας.

Για παράδειγμα:

Κόστος ανθοδέσμης =
= $0,5 \cdot$ αριθμός τριαντάφυλλων



0,5 € το ένα
τριαντάφυλλο

3. Τη σχέση $\frac{y}{x} = \alpha$

Εξετάζουμε αν όλες οι αντίστοιχες τιμές των δύο ποσών έχουν σταθερό λόγο.

x	y	$\frac{y}{x} = 2$
3	6	$\frac{6}{3} = 2$
5,5	11	$\frac{11}{5,5} = 2$
....

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για να φτιάξουμε γλυκό βύσσινο πρέπει να καθαρίσουμε τα βύσσινα από τα κουκούτσια. Αν καθαρίσουμε 2,5 Kg βύσσινο, παίρνουμε 2 Kg καθαρό βύσσινο. Αν καθαρίσουμε 5 Kg βύσσινο, τι ποσότητα καθαρού βύσσινου θα πάρουμε;



Λύση

Τα ποσά ακαθάριστο βύσσινο και καθαρό βύσσινο είναι ανάλογα.

Συμβολίζουμε με y την άγνωστη ποσότητα καθαρού βύσσινου και δημιουργούμε τον πίνακα αναλογίας.



Αριθμητική επίλυση του προβλήματος

Βύσσινο με κουκούτσι	2,5 Kg	5 Kg
Καθαρό βύσσινο	2 Kg	y

Θα έχουμε $\frac{2,5}{2} = \frac{5}{y}$ δηλαδή:

$2,5 \cdot y = 2 \cdot 5$, επομένως $2,5 \cdot y = 10$ συνεπώς,

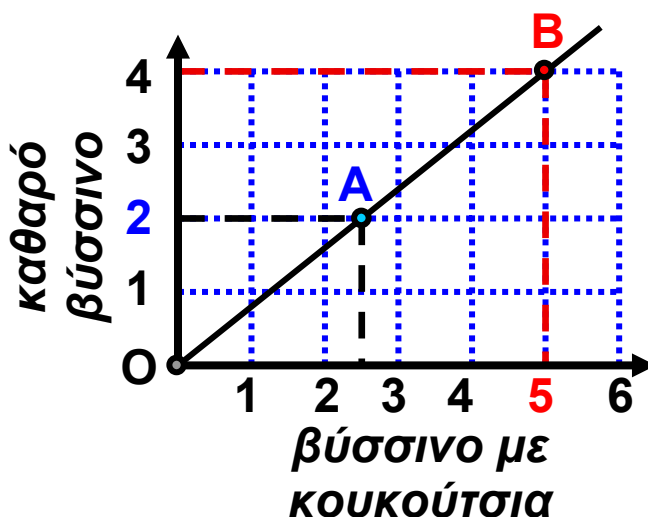
$y = \frac{10}{2,5}$ άρα, $y = 4$ Kg.

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης των δύο ανάλογων ποσών, από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα καθαρού βύσσινου (τεταγμένη του σημείου **B**), από την ποσότητα των 5 Kg, βύσσινου με κουκούτσια (τετμημένη).

Η ημιευθεία, που αναπαριστά τη σχέση αναλογίας του προβλήματος μας, ορίζεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(2,5, 2)$



Γραφική επίλυση του προβλήματος



Στον ημιάξονα Ox (κιλά βύσσινο με κουκούτσια) και στο σημείο που βρίσκεται ο αριθμός 5 φέρουμε κάθετη.

Αυτή τέμνει τη γραφική παράσταση της σχέσης αναλογίας, σε σημείο B . Το σημείο B έχει τετμημένη 5.

Η τεταγμένη του προκύπτει, αν φέρουμε κάθετη από το B προς τον ημιάξονα Oy (καθαρό βύσσινο) και είναι 4 Kg.

2. Ένας μεσίτης αγοράζει ένα σπίτι 360.000 € και σκοπεύει να το πουλήσει με κέρδος 28%. Σε ένα πελάτη έκανε έκπτωση 15%, επί της τιμής πώλησης.

(α) Πόσο πουλήθηκε το σπίτι στον πελάτη αυτόν;

(β) Ποιο είναι το ποσοστό κέρδους του μεσίτη, για το σπίτι αυτό;



Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

Δύο ποσά που συνδέονται με ποσοστιαία σχέση, είναι ποσά ανάλογα.

(α) Για να βρεθεί η τιμή πώλησης του σπιτιού πρέπει ν' αφαιρεθεί η έκπτωση που έγινε στην αρχική τιμή πώλησης. Δηλαδή:

• Θα υπολογίσουμε την αρχική τιμή πώλησης του σπιτιού. Στην τιμή κόστους θα έχουμε κέρδος 28%, δηλαδή ένα προϊόν με τιμή κόστους 100 € πωλείται 128 €. Τότε, ο πίνακας αναλογίας θα είναι:

Τιμή αγοράς	100	360.000
Τιμή πώλησης	128	y

$$\text{Δηλαδή: } \frac{100}{128} = \frac{360.000}{y}$$

$$\text{Επομένως, } 100 \cdot y = 360.000 \cdot 128$$

$$\text{συνεπώς, } y = \frac{360.000 \cdot 128}{100}. \quad \text{Άρα, } y = 460.800 \text{ €}$$

- Θα υπολογίσουμε την τιμή πώλησης μετά την έκπτωση που έγινε. Στην τιμή πώλησης έγινε έκπτωση 15%, δηλαδή ένα προϊόν με τιμή πώλησης 100 € πωλείται 85 €. Ας γράψουμε τον πίνακα αναλογίας:

Αρχική τιμή πώλησης	100	460.800
Τιμή πώλησης με έκπτωση 15%	85	y

$$\text{Δηλαδή: } \frac{100}{85} = \frac{460.800}{y}$$

$$\text{Επομένως, } 100 \cdot y = 85 \cdot 460.800 \text{ συνεπώς,}$$

$$y = \frac{85 \cdot 460.800}{100} \quad \text{Άρα, } y = 391.680 \text{ €}.$$

Ο πελάτης αγόρασε το σπίτι 391.680 €.

(β) Για να υπολογίσουμε το ποσοστό κέρδους επί της τιμής αγοράς, πρέπει να ανάγουμε το κέρδος στα 100 €. Το κέρδος του εμπόρου είναι:

$$391.680 \text{ €} - 360.000 \text{ €} = 31.680 \text{ €}$$

Έχουμε, λοιπόν, τον παρακάτω πίνακα αναλογίας:

Τιμή αγοράς	360.000	100
Κέρδος	31.680	x

Δηλαδή: $\frac{360.000}{31.680} = \frac{100}{x}$

Επομένως, $360.000 \cdot x = 31.680 \cdot 100$

συνεπώς, $x = \frac{31.680 \cdot 100}{360.000}$

Άρα $x = 8,8$.

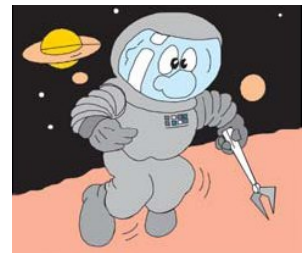
Το ποσοστό κέρδους του εμπόρου είναι **8,8%**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ένας πάσσαλος ύψους 1,2 m ρίχνει σκιά 3 m. Την ίδια στιγμή ένα δέντρο ρίχνει σκιά 14 m. Αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά ύψος – σκιά είναι ανάλογα, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.



2. Το βάρος στο φεγγάρι και το βάρος στη γη είναι ποσά ανάλογα. Ένας αστροναύτης ζυγίζει στο φεγγάρι 13 Kg και στη γη 78 Kg. Πόσο θα ζυγίζει στο φεγγάρι ένα παιδί, που στη γη έχει βάρος 52 Kg;



3. Από 100 Kg σταφύλια βγαίνουν 80 Kg μούστος. Ένας αμπελουργός θέλει να γεμίσει με μούστο 6 βαρέλια, των 350 Kg το καθένα. Πόσα Kg σταφύλια, της ίδιας ποιότητας, πρέπει να πατήσει;

4. Δύο εργάτες δούλεψαν σε μια οικοδομή και πήραν μαζί 270 €. Ο πρώτος δούλεψε 4 ημέρες και ο δεύτερος 5 ημέρες. Πόσα χρήματα αντιστοιχούν στον καθένα.

5. Το θαλασσινό νερό περιέχει αλάτι σε ποσοστό 3%. Πόσα κιλά θαλασσινό νερό πρέπει να εξατμιστούν για να πάρουμε 60 Kg αλάτι;

6. Ένας γεωργός είχε ένα χωράφι 7 στρέμματα και πήρε και το γειτονικό χωράφι εμβαδού 8 στρεμμάτων, για να φυτέψει καλαμπόκι. Η συμφωνία με το γείτονά του ήταν να του δώσει το 15% της παραγωγής του χωραφιού του. Η συνολική παραγωγή ήταν 14 τόνοι καλαμπόκι. Πόσους τόνους θα πάρει ο γεωργός και πόσους ο γείτονάς του;

7. Αν ψήσουμε 2,5 Kg ωμό κρέας θα μείνει 1,9 Kg ψημένο κρέας.

(α) Πόσο είναι το ποσοστό απώλειας που έχουμε;

(β) Πόσο κρέας πρέπει να ψήσουμε για να έχουμε 2,3 Kg ψημένο κρέας;

8. Η μηνιαία κάρτα απεριορίστων διαδρομών στοιχίζει 12 € και η τιμή της θα αυξηθεί, κατά 75%. Το εισιτήριο στο αστικό λεωφορείο είναι 0,7 € και θα αυξηθεί, κατά 50%. Ένας εργαζόμενος παίρνει λεωφορείο, για να πάει και να γυρίσει από τη δουλειά του κάθε ημέρα, για είκοσι φορές το μήνα. Τον συμφέρει η χρήση της κάρτας ή όχι;

9. Ένα κεφάλαιο δίνει τόκο 1.000 € το χρόνο, με επιτόκιο 10%. Αν το επιτόκιο μειωθεί κατά 20%, πόσο τόκο θα δίνει το κεφάλαιο για ένα χρόνο; Πόσο τοις εκατό πρέπει ν' αυξήσουμε το κεφάλαιό μας για να έχουμε τον ίδιο τόκο, παρά την μείωση του επιτοκίου;

10. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα και σχεδίασε διάγραμμα που αντιστοιχεί στα δεδομένα του προβλήματος.

	Οικογένειες	Ποσοστά
ΣΥΝΟΛΟ	200	100%
Με 0 παιδιά	10	
Με 1 παιδιά	40	
Με 2 παιδιά	80	
Με 3 παιδιά	50	
Με 4 παιδιά	15	
Πάνω από 4 παιδιά	5	

A.6.6. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ξεκινούν ταυτόχρονα από μια πόλη:

- (α) ένα αυτοκίνητο που τρέχει με ταχύτητα 120 Km/h
- (β) ένα αεροπλάνο με 600 Km/h
- (γ) μία μοτοσικλέτα με 75 Km/h
- (δ) ένα λεωφορείο που τρέχει με 80 Km/h
- (ε) ένα ελικόπτερο με 300 Km/h
- (στ) ένα ταξί με 100 Km/h
- (ζ) μία βέσπα με 60 Km/h και
- (η) ένα πούλμαν με 90 Km/h



Το τέλος της διαδρομής είναι μια άλλη πόλη που απέχει 600 Km σε ευθεία γραμμή από την αφετηρία..

- Βρες σε πόσες ώρες, θα φθάσει το καθένα στον προορισμό του και
- συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

Ταχύτητα σε Km/h							
Χρόνος σε ώρες							

- Ποια σχέση συνδέει τα μεγέθη της ταχύτητας και του χρόνου;
- Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών που βρήκες, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ένα συνεργείο που αποτελείται από 8 εργάτες χρειάζεται 30 ημέρες για να ολοκληρώσει ένα οικοδομικό έργο.

➤ Πόσες ημέρες θα χρειαστεί το συνεργείο, που αποτελείται από 2, 4, 6, 10, 12, 24 ή 48 εργάτες για να τελειώσει το ίδιο έργο;

➤ Μπορείς να συμπληρώσεις

➤ τον παρακάτω πίνακα;



Εργάτες συνεργείου	2	4	6	8
Ημέρες εργασίας				30

Εργάτες συνεργείου	10	12	24	48
Ημέρες εργασίας				

➤ Τι παρατηρείς για το γινόμενο “εργάτες” · “ημέρες”;

➤ Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών του πίνακα, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις x και y . Αν γνωρίζεις ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 144 m^2 , μπορείς να βρεις δεκατέσσερις ακέραιες τιμές των διαστάσεών του και να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα;

x							
y							

x							
y							

- Ποια σχέση συνδέει τις διαστάσεις του ορθογωνίου με το εμβαδόν του;
- Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών του πίνακα, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;
- Ποιο ορθογώνιο, απ' αυτά που βρήκες, έχει τη μικρότερη περίμετρο;



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- ▶ Δύο μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα, στην περίπτωση, που η μεταβολή τους είναι τέτοια, ώστε: όταν το ένα μέγεθος πολλαπλασιάζεται επί έναν αριθμό, το άλλο διαιρείται με τον ίδιο αριθμό.

x	y
5	6
15	2
2,5	12

- ▶ Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερό: $y \cdot x = \alpha$, $\alpha \neq 0$

x	y	$y \cdot x = 30$
5	6	$5 \cdot 6 = 30$
15	2	$15 \cdot 2 = 30$
...

- ◆ Στην περίπτωση που $\alpha = 1$, τα x και y είναι αντίστροφοι αριθμοί.
- Τα σημεία που παριστούν τα ζεύγη (x, y) βρίσκονται σε μία καμπύλη γραμμή. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται υπερβολή.
- ◆ Η υπερβολή δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες Ox και Oy , διότι οι συντεταγμένες των σημείων της δεν παίρνουν ποτέ την τιμή 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Ένας ελαιοπαραγωγός χρησιμοποιεί δοχεία των 20 lt, 15 lt, 10 lt και 5 lt, για να συσκευάσει το λάδι που παράγει. Η παραγωγή του είναι 3.600 lt. Θέλει να συσκευάσει την ίδια ποσότητα λαδιού σε κάθε μία από τις τέσσερις διαφορετικές συσκευασίες.

- (α) Πόσα δοχεία χρειάζεται από κάθε είδος;
 (β) Πόσο θα κοστίσει η συσκευασία της παραγωγής του αν στοιχίζει 0,4 € το δοχείο των 20 lt, 0,3 € το δοχείο των 15 lt, 0,2 € το δοχείο των 10 lt και 0,1 € το δοχείο των 5 lt;

Λύση

(α) Ο παραγωγός θέλει να συσκευάσει την ίδια ποσότητα λαδιού σε 4 διαφορετικά είδη δοχείων, άρα σε κάθε είδος δοχείου θα συσκευάσει το $\frac{1}{4}$ της

παραγωγής του, δηλαδή

$$\frac{1}{4} \cdot 3600 = \frac{3600}{4} = 900 \text{ lt για κάθε είδος δοχείων.}$$

Συνεπώς, θα ισχύει:

$$x \text{ (Αριθμός Δοχείων)} \cdot y \text{ (Χωρητικότητα)} = 900 \text{ lt.}$$

Τότε, θα είναι:

$$\text{για } x = 20 \text{ lt, είναι: } y = \frac{900}{x} = \frac{900}{20} = 45$$

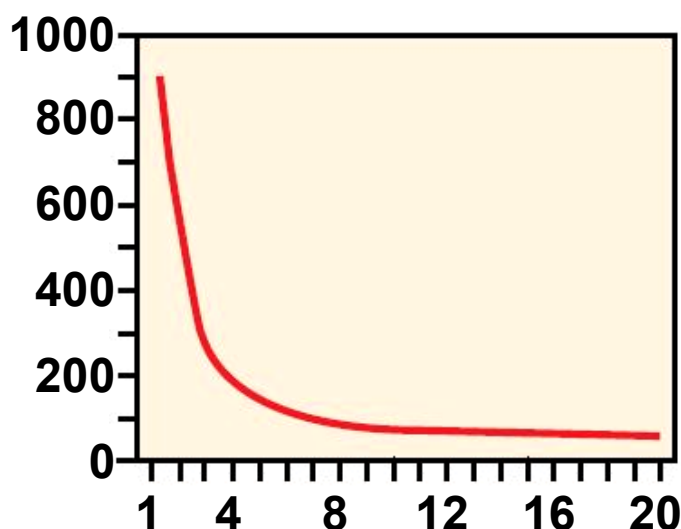
$$\text{για } x = 15 \text{ lt, είναι: } y = \frac{900}{x} = \frac{900}{15} = 60$$

$$\text{για } x = 10 \text{ lt, είναι: } y = \frac{900}{x} = \frac{900}{10} = 90$$

$$\text{για } x = 5 \text{ lt, είναι: } y = \frac{900}{x} = \frac{900}{5} = 180$$

Έτσι, θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα και το αντίστοιχο διάγραμμα.

x (χωρητικότητα)	20	15	10	5
y (αριθμός δοχείων)	45	60	90	180



(β) Τα ποσά **Αριθμών δοχείων** και **Κόστος συσκευασίας** είναι ανάλογα.

Έτσι σε κάθε είδος δοχείου θα έχουμε:

Δοχεία 20 lt	Αριθμός δοχείων	1	45
	Κόστος δοχείων	0,4	ω

Δηλαδή: $\omega = 45 \cdot 0,4$ άρα $\omega = 18 \text{ €}$

Δοχεία 15 lt	Αριθμός δοχείων	1	60
	Κόστος δοχείων	0,3	ω

Δηλαδή: $\omega = 60 \cdot 0,3$ άρα $\omega = 18 \text{ €}$

Δοχεία 10 lt	Αριθμός δοχείων	1	90
	Κόστος δοχείων	0,2	ω

Δηλαδή: $\omega = 90 \cdot 0,2$ άρα $\omega = 18 \text{ €}$

Δοχεία 5 lt	Αριθμός δοχείων	1	180
	Κόστος δοχείων	0,1	ω

Δηλαδή: $\omega = 180 \cdot 0,1$ άρα $\omega = 18 \text{ €}$

Έτσι, το συνολικό κόστος της συσκευασίας θα είναι το άθροισμα του κόστους των δοχείων και των τεσσάρων ειδών. **Συνολικό κόστος = $18 \text{ €} + 18 \text{ €} + 18 \text{ €} + 18 \text{ €} = 72 \text{ €}$**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα;

Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος.

(α) Η βάση και το εμβαδόν ενός τριγώνου, με σταθερό ύψος.



- (β) Η παροχή μιας βρύσης και ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει μια μπανιέρα
- (γ) Το εμβαδόν της ρωγμής ενός πλοίου και ο χρόνος που απαιτείται, για να γεμίσουν τα αμπάρια του με νερό.
- (δ) Ο αριθμός ατόμων και το βάρος του παγωτού που θα φάνε, από ένα οικογενειακό παγωτό 2 Kg.
- (ε) Η χωρητικότητα των μπουκαλιών και ο αριθμός μπουκαλιών που χρειαζόμαστε, για να εμφιαλώσουμε 100 lt κρασιού.
- (στ) Ο αριθμός των ατόμων και οι σκηνές των 2 ατόμων που χρειάζονται, για να κατασκηνώσουν.

2. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα και η τιμή του ενός διπλασιάζεται, τότε η αντίστοιχη τιμή του άλλου

.....

(β) Η γραφική αναπαράσταση δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών είναι γραμμή και ονομάζεται

3. Εξέτασε τους παρακάτω πίνακες:

(α)

x	1	2	3	4
y	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

(β)

x	0,25	0,4	0,5
y	10	6,25	5

	(γ)			
x	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{58}$	$\frac{7}{10}$	4
y	100	29	$\frac{10}{7}$	$\frac{1}{4}$

	(δ)		
x	3	6	9
y	9	5	3

Ποιοι από αυτούς είναι πίνακες τιμών αντιστρόφως ανάλογων ποσών;

4. Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα.

(α) Συμπλήρωσε τον πίνακα :

x	0,2	0,5	0,7	1		
y				3,5	2,5	1,75

x	2,3	3		10	12
y			0,875		

(β) Βρες τα σημεία που παριστάνουν κάθε ζευγάρι τιμών (x, y), σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων ημιαξόνων και σχεδίασε την υπερβολή.

5. Για την αναδάσωση μιας πλαγιάς, εργάστηκαν 20 εργάτες για 10 ημέρες. Πόσοι εργάτες, ίδιας απόδοσης, χρειάζονται για να αναδασώσουν την έκταση αυτή, σε 8 ημέρες;

6. Σε ένα αγρόκτημα, τοποθέτησαν ντομάτες σε 50 καφάσια, των 12 Kg το καθένα. Πόσα καφάσια των 20 Kg θα χρειαζόντουσαν για να τοποθετήσουν τις ντομάτες. Αν κάθε καφάσι των 12 Kg στοιχίζει 0,28 € και κάθε καφάσι των 20 Kg 0,46 €, ποια συσκευασία τους συμφέρει, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος συσκευασίας του προϊόντος τους;

7. Το πετρέλαιο που υπάρχει στη δεξαμενή μιας πολυκατοικίας, επαρκεί για 30 ημέρες, όταν καταναλώνονται 80 lt την ημέρα. Όταν το κρύο δυναμώνει, η ημερήσια κατανάλωση αυξάνεται, κατά 20%. Για πόσες ημέρες θα φτάσει το πετρέλαιο;

Ανακεφαλαίωση

Λόγος δύο αριθμών: $\frac{\alpha}{\beta} = \kappa$

Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{τότε} \quad \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Ποσά ανάλογα

Τα ποσά x και y είναι ανάλογα, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει η σχέση:

$$\frac{y}{x} = \alpha \quad \text{ή} \quad y = \alpha \cdot x,$$

όπου α συντελεστής αναλογίας

Πίνακας τιμών:

·0,3	x	0	0,3	0,9	1,5	3	3,6	4,5	5,4	6
	y	0	1	3	5	10	12	15	18	20

$$y = 0,3 \cdot x \quad \text{ή} \quad \text{και} \quad y = 30\% \cdot x$$

Το y είναι ποσοστό του x

Γραφική παράσταση



Κάθε ζευγάρι τιμών (x, y) δύο ανάλογων ποσών αναπαρίσταται από ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες το ζευγάρι τιμών (x, y) .

Τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια ημιευθεία, με αρχή το σημείο $O(0,0)$

Κάθε σημείο της ημιευθείας η οποία αναπαριστά μια σχέση αναλογίας, έχει συντεταγμένες που ικανοποιούν αυτήν τη σχέση αναλογίας $y = 0,3 \cdot x$

Ποσά αντιστρόφως ανάλογα

Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει η σχέση:

$$y \cdot x = \alpha \quad \text{ή} \quad y = \frac{\alpha}{x}, \quad \text{όπου } x, y \neq 0.$$

Πίνακας τιμών:

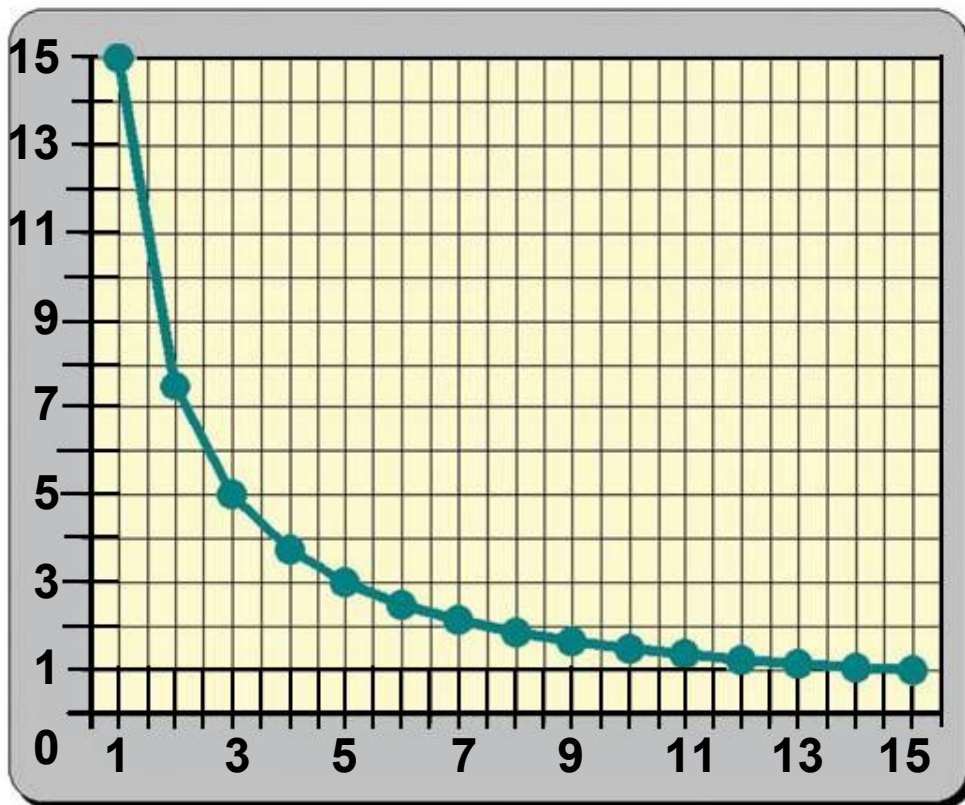
x	15	5	3	2,5	1,5	1,25	1
y	1	3	5	6	10	12	15

The diagram illustrates the inverse relationship between x and y . As x decreases from 15 to 1, y increases from 1 to 15. The product $x \cdot y$ is constant for each pair: $15 \cdot 1 = 15$, $5 \cdot 3 = 15$, $3 \cdot 5 = 15$, $2,5 \cdot 6 = 15$, $1,5 \cdot 10 = 15$, $1,25 \cdot 12 = 15$, and $1 \cdot 15 = 15$. The constant product is labeled as $\cdot 15$ in an orange oval. Similarly, the ratio x/y is constant: $15/1 = 15$, $5/3 = 1,666...$, $3/5 = 0,6$, $2,5/6 = 0,416...$, $1,5/10 = 0,15$, $1,25/12 = 0,104...$, and $1/15 = 0,066...$. The constant ratio is labeled as $: 10$ in an orange oval.

Δύο μεγέθη λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν μεταβάλλονται έτσι ώστε το ένα μέγεθος πολλαπλασιάζεται επί έναν αριθμό όταν το άλλο, ταυτόχρονα, διαιρείται με τον ίδιο αριθμό.

Δύο **αντιστρόφως ανάλογα** ποσά x και y , δεν μπορούν να πάρουν τιμές ίσες με **μηδέν**.

Γραφική παράσταση



Τα σημεία που παριστούν τα ζεύγη (x, y) βρίσκονται, σε μια καμπύλη γραμμή.

Η καμπύλη αυτή, που έχει χαρακτηριστικό σχήμα και ιδιότητες, ονομάζεται υπερβολή.

Η υπερβολή δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες Ox και Oy , διότι οι συντεταγμένες των σημείων της δεν παίρνουν ποτέ την τιμή 0 .

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

A. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος

- 1. Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά οι τιμές τους έχουν σταθερό γινόμενο
- 2. Η παροχή της βρύσης είναι ανάλογη του χρόνου που γεμίζει η μπανιέρα
- 3. Στα ανάλογα ποσά οι αντίστοιχες τιμές τους έχουν σταθερό πηλίκο
- 4. Το ποσό α είναι ποσοστό του β , τότε τα ποσά α και β είναι ανάλογα
- 5. Μια κλίμακα 2:1 αντιστοιχεί σε σμίκρυνση στο μισό του αρχικού σχήματος.
- 6. Ένας χάρτης περιοχής με κλίμακα 1:1.000 είναι μικρότερος από έναν άλλο χάρτη της ίδιας περιοχής με κλίμακα 1:2.000
- 7. Αν δύο μοιραστούν 6.000 € με λόγο 2:1 τότε ο ένας θα πάρει 3.000 €

B. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

1. Το πηλίκο των μέτρων δύο ομοειδών μεγεθών, όταν έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα, λέγεται

.....

2. Ο λόγος της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου ονομάζεται

.....

3. Αν πενταπλασιάσουμε την τιμή ενός από δύο ανάλογα ποσά και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού

4. Το πηλίκο των αντίστοιχων τιμών δύο ανάλογων ποσών ονομάζεται

5. Η γραφική αναπαράσταση μιας σχέσης αναλογίας είναι γραμμή που περνάει από το σημείο

6. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα ανάλογων ποσών

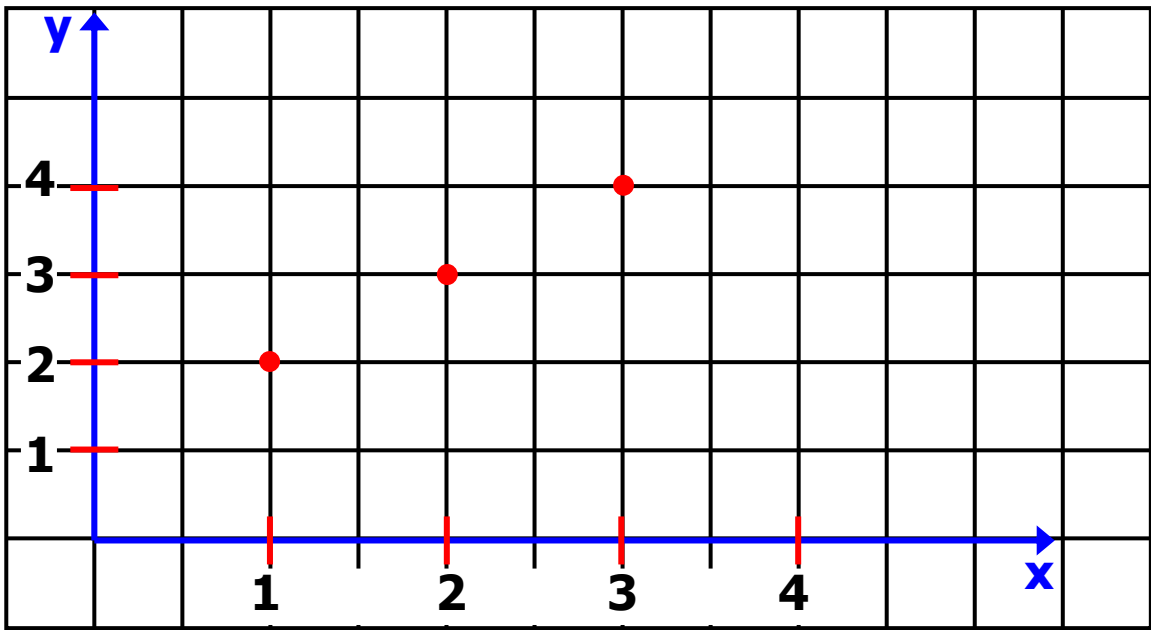
x	2	4		15	16
y		15	30		

7. Δύο ποσά των οποίων το γινόμενο των δύο αντίστοιχων τιμών είναι σταθερό λέγονται

8. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα των αντιστρόφως ανάλογων ποσών:

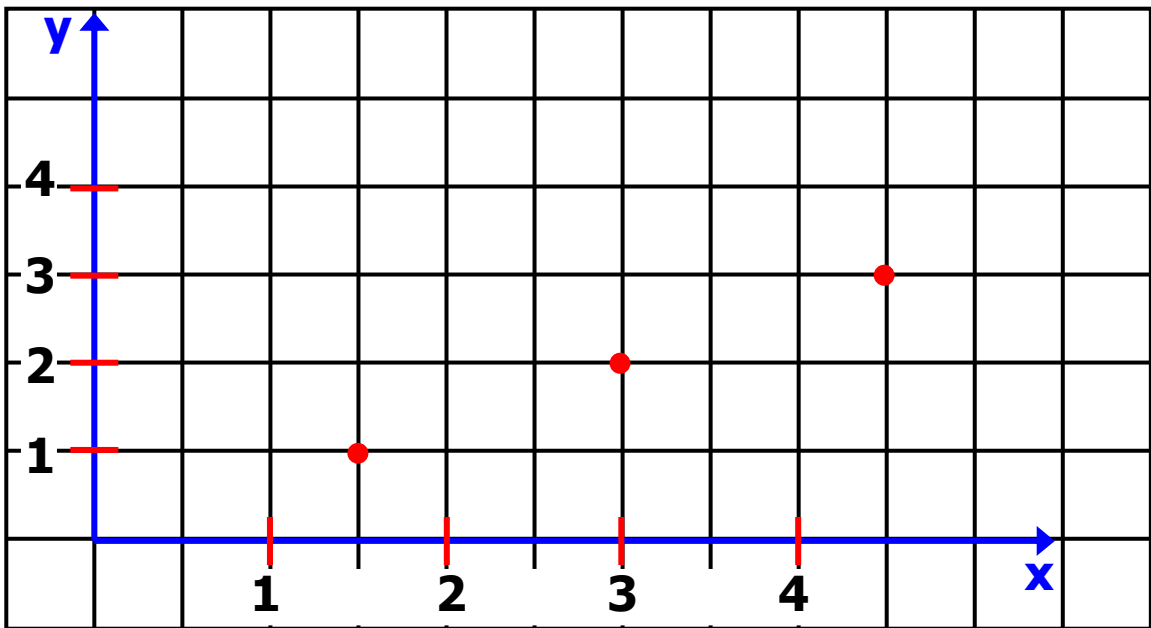
x	2			4	8
y	8	16	32		

9. Συμπλήρωσε, στην επόμενη σελίδα, τον πίνακα με τις συντεταγμένες των σημείων των γραφικών παραστάσεων, που έχουν σημειωθεί έντονα, προσπάθησε να βρεις τον αντίστοιχο τύπο και να εκτιμήσεις αν αυτός αφορά σχέση αναλογίας.



x			
y			

y =



x			
y			

y =

ΜΕΡΟΣ Α'

7ο

Κ
Ε
Φ
Α
Λ
Α
Ι
Ο



ΥΠΑΤΙΑ (370 – 415 μ.Χ.)

Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί

7.1 Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου

- Κατανοώ την ανάγκη εισαγωγής των αρνητικών αριθμών
- Εκφράζω μεγέθη ή μεταβλητές μεγεθών, με θετικούς ή αρνητικούς αριθμούς
- Παριστάνω ένα ρητό με σημείο ενός άξονα

7.2 Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών

- Γνωρίζω την έννοια της απόλυτης τιμής ενός ρητού και με τη βοήθεια αυτής και του πρόσημου του ρητού, αντιστοιχίζω τον ρητό με ένα σημείο του άξονα
- Βρίσκω με ακρίβεια ή με προσέγγιση τον ρητό που αντιστοιχεί σε ένα σημείο του άξονα
- Γνωρίζω ποιοι ρητοί είναι αντίθετοι και ποια είναι η σχετική τους θέση στον άξονα
- Συγκρίνω δύο ρητούς και γνωρίζω την θέση τους πάνω στον άξονα
- Διατάσσω δύο ή περισσότερους ρητούς

7.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών

- Βρίσκω το άθροισμα δύο ρητών αριθμών
- Βρίσκω το άθροισμα πολλών ρητών αριθμών
- Γνωρίζω τις ιδιότητες της πρόσθεσης και τη σημασία τους στον υπολογισμό αθροισμάτων πολλών προσθετέων

7.4 Αφαίρεση ρητών αριθμών

- Γνωρίζω ότι η διαφορά $a - \beta$, ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta + x = a$, δηλαδή ότι ισχύει η ισοδυναμία: $\beta + x = a \Leftrightarrow x = a - \beta$
- Βρίσκω τη διαφορά δύο ρητών αριθμών
- Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις με προσθέσεις και αφαιρέσεις
- Κάνω απαλοιφή παρενθέσεων

7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

- Βρίσκω το γινόμενο δύο ρητών αριθμών
- Γνωρίζω και εφαρμόζω τις ιδιότητες του γινομένου ρητών αριθμών
- Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις
- Εφαρμόζω την επιμεριστική ιδιότητα

7.6 Διάρθρωση ρητών αριθμών

- Γνωρίζω ότι το πηλίκο $a : \beta$, ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta \cdot x = a$, δηλαδή ότι ισχύει η ισοδυναμία $\beta \cdot x = a \Leftrightarrow x = a : \beta$
- Βρίσκω το πηλίκο δύο ρητών αριθμών
- Γνωρίζω ότι το γινόμενο και το πηλίκο δύο ρητών αριθμών είναι ομόσημοι αριθμοί
- Κατανοώ το πηλίκο δύο ρητών και ως λόγο

7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

- Διακρίνω τους ρητούς ως δεκαδικούς ή περιοδικούς δεκαδικούς
- Μετατρέπω ένα κλάσμα σε δεκαδικό ή περιοδικό δεκαδικό και αντιστρόφως

7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

- Γνωρίζω την έννοια της δύναμης a^v , με a ρητό και v φυσικό και υπολογίζω τέτοιες δυνάμεις.
- Γνωρίζω τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό και τις εφαρμόζω στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων
- Γνωρίζω την έννοια της δύναμης a^{-v} , με τον ρητό $a \neq 0$ και v φυσικό και υπολογίζω τέτοιες δυνάμεις
- Εκτελώ τις πράξεις με την προβλεπόμενη προτεραιότητα των πράξεων

7.9 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

- Γνωρίζω τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο και υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις με δυνάμεις
- Γνωρίζω ότι: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-v}$ και με τη βοήθεια της ισότητας αυτής, υπολογίζω δυνάμεις με βάση κλασματικό αριθμό και εκθέτη αρνητικό ακέραιο

7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών.

- Γράφω πολύ “μεγάλους” και “μικρούς” αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή

Α.7.1 Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου

Οι αριθμοί που γνωρίσαμε, μέχρι τώρα οι φυσικοί, οι δεκαδικοί και οι κλασματικοί, μπορούν να εκφράσουν τα φυσικά μεγέθη, όχι όμως και όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες και καταστάσεις. Άλλωστε, όταν τοποθετήσαμε τους φυσικούς αριθμούς πάνω σε μια ευθεία, πήραμε αυθαίρετα ένα σημείο ως αρχή και συνεχίσαμε «δεξιά», σε ίσες αποστάσεις, να γράφουμε τους γνωστούς μας αριθμούς. Κάθε «δεξιά» όμως μιας αρχής προϋποθέτει και το «αριστερά». Όπως το δεξί χέρι προϋποθέτει το αριστερό του. Και ακόμα δεν θα υπήρχε το «πάνω» χωρίς να υπάρχει το «κάτω», το «ζεστό» χωρίς το «κρύο» κ.λπ. Έτσι αν το πρώτο το πούμε «θετικό» θα πρέπει να υπάρχει το αντίθετό του και να το πούμε «αρνητικό». Επίσης, σε κάθε στοιχείο του ενός χρειάζεται να αντιστοιχίσουμε ακριβώς ένα στοιχείο του άλλου και να βρούμε τρόπο να το συμβολίσουμε. Δε θα είναι δύσκολο, αφού είναι πράγματα που τα βιώνουμε καθημερινά. Όπως π.χ. η πρόβλεψη του καιρού στη δραστηριότητα που ακολουθεί.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Η μετεωρολογική υπηρεσία προέβλεψε ότι οι θερμοκρασίες στις διάφορες πόλεις θα είναι αυτές που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

- Προσπάθησε να σημειώσεις στον παρακάτω χάρτη αριθμούς που να εκφράζουν τις συγκεκριμένες θερμοκρασίες.

Αθήνα

Θεσσαλονίκη

Ιωάννινα

Πάτρα

Αλεξανδρούπολη

Φλώρινα

Τρίπολη

Χανιά

7° πάνω από το μηδέν

3° κάτω από το μηδέν

5° κάτω από το μηδέν

2° πάνω από το μηδέν

8° κάτω από το μηδέν

10° κάτω από το μηδέν

6° κάτω από το μηδέν

11° πάνω από το μηδέν



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στον ανεγκυστήρα ενός γκαράζ υπάρχουν τα κουμπιά που βλέπεις δίπλα.

➤ Τι εκφράζουν οι αριθμοί που είναι γραμμένοι στα κουμπιά;

3

2

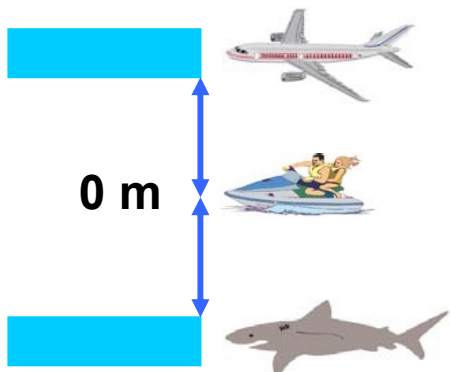
1

0

-1

-2

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η



Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι το αεροπλάνο πετάει στα 200 m και ο καρχαρίας βρίσκεται σε βάθος 200 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας;

➤ Προσπάθησε να εκφράσεις με κατάλληλους αριθμούς τις θέσεις του αεροπλάνου και του καρχαρία σε σχέση με την επιφάνεια της θάλασσας;



Σκεφτόμαστε

Αν ο αριθμός 0 εκφράζει τη θέση της επιφάνειας της θάλασσας, τότε το αεροπλάνο πετάει στα +200 m και ο καρχαρίας βρίσκεται στα -200m .

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



Μετά από τα παραπάνω συμφωνούμε ότι:

- Τα σύμβολα «+» και «-» λέγονται πρόσημα. Γράφονται πριν από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν, αντίστοιχα, ως θετικούς ή αρνητικούς.

+3, + $\frac{3}{4}$, +15,7 και +0,352 **θετικοί αριθμοί**

-2, -10, -28,95 και -0,098 **αρνητικοί αριθμοί**

◆ Οι αριθμοί που συναντήσαμε μέχρι τώρα ήταν μόνο θετικοί και επομένως δεν υπήρχε ανάγκη να χρησιμοποιούμε πρόσημο. Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών δημιουργεί την ανάγκη της τοποθέτησης πρόσημου

μπροστά από όλους τους αριθμούς. Έτσι γίνεται φανερό ποιοι αριθμοί είναι οι θετικοί και ποιοι οι αρνητικοί.

Σε περιπτώσεις που αναφερόμαστε μόνο σε θετικούς αριθμούς, μπορούμε να παραλείψουμε το πρόσημο + π.χ. αντί να γράψουμε +7 παραλείψουμε το + και γράψουμε 7.

◆ Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

• Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.

π.χ. οι αριθμοί -7 και -0,58 και $-\frac{3}{4}$ είναι ομόσημοι


και οι αριθμοί +1,25, $+\frac{10}{7}$ και +5 είναι ομόσημοι.

• Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Οι αριθμοί -7 και +0,58 είναι ετερόσημοι αλλά και

οι αριθμοί -1,25 και $+\frac{10}{7}$ είναι ετερόσημοι.

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.


..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

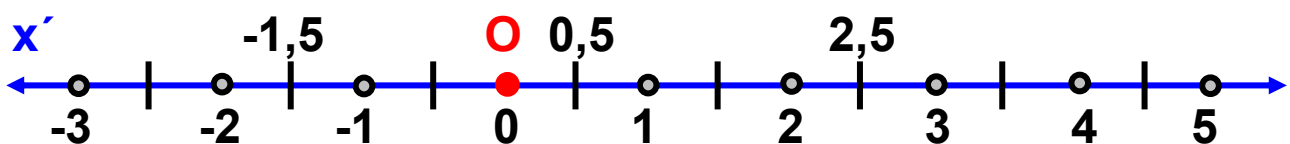
Ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, κλάσματα και δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίζονται για πρώτη φορά σε ένα Κινέζικο μαθηματικό βιβλίο, με τίτλο “Μαθηματικά σε εννέα Βιβλία” (“Τσιου-τσανγκ-σουάν σου”), που τοποθετείται χρονικά στην περίοδο της δυναστείας των Χαν (206 π.Χ. - 220 μ.Χ.).

Στην Ευρωπαϊκή παράδοση ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός Διόφαντος (200 - 284 μ.Χ.), που άκμασε στην Αλεξάνδρεια γύρω στα 250 μ.Χ. και έγραψε το ογκώδες έργο του (13 βιβλία) τα “Αριθμητικά”, χρησιμοποιεί πρώτος τους αρνητικούς αριθμούς στους ενδιάμεσους υπολογισμούς του, ενώ ως λύση ενός προβλήματος αναζητεί πάντα θετικό ρητό αριθμό.

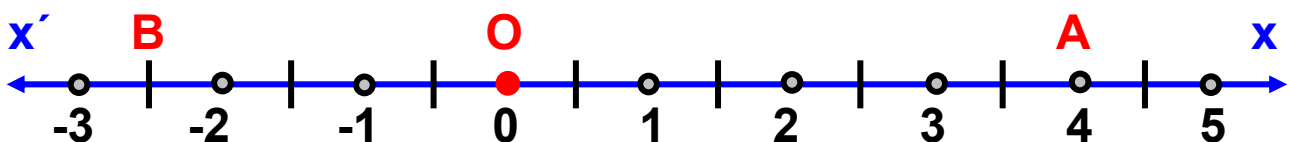
Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία μιας ευθείας

- Αν θεωρήσουμε αριστερά της αρχής O του ημιάξονα Ox των αριθμών, τον αντικείμενο αυτού ημιάξονα Ox' , θα έχουμε τη δυνατότητα, με αυτόν τον τρόπο, να παραστήσουμε όλους τους ρητούς αριθμούς.



- ▶ Ο άξονας $x'Ox$ περιλαμβάνει όλους τους ρητούς αριθμούς (αρνητικούς, θετικούς και το μηδέν).

- Η θέση ενός σημείου A επάνω στην ευθεία ορίζεται με έναν αριθμό που ονομάζεται τετμημένη του σημείου.



Το σημείο Α έχει τετμημένη 4 και το σημείο Β έχει τετμημένη -2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Να εκφραστούν με τη βοήθεια των θετικών και αρνητικών ρητών αριθμών: (α) 13,75 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας,

(β) 20° Κελσίου πάνω από το μηδέν,

(γ) κέρδος 3.368,97 €, (δ) αύξηση κατά 2.527,15 €,

(ε) μείωση κατά 50 μονάδες και

(στ) έκπτωση 15% επί της τιμής.

Λύση

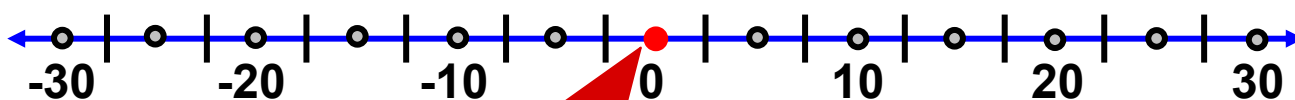
(α) -13,75 m, (β) +20°, (γ) +3368,97 €, (δ) +2527,15 €,

(ε) -50, (στ) -15%

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ



Ας υποθέσουμε, ότι η στιγμή της γέννησής σου είναι το μηδέν, δηλαδή η αρχή της μέτρησης του χρόνου. Βρες μέχρι δέκα χρονολογίες, που αφορούν τα πιο σημαντικά, για σένα, προσωπικά και οικογενειακά γεγονότα και τοποθέτησέ τα στην παρακάτω ευθεία.



Η γέννησή σου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Οι ρητοί που έχουν πρόσημο «+» λέγονται ενώ αυτοί που έχουν πρόσημο «-» λέγονται

(β) Οι αριθμοί με το ίδιο πρόσημο λέγονται ενώ αυτοί με διαφορετικό πρόσημο λέγονται

(γ) Στην ευθεία των αριθμών, δεξιά του μηδενός βρίσκονται οι ρητοί και αριστερά του μηδενός οι ρητοί.

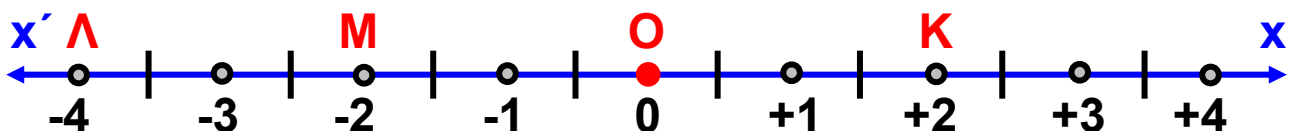
2. Να κατατάξεις τους παρακάτω αριθμούς σε δύο ομάδες, τους θετικούς και τους αρνητικούς: -3, 1, +5, +8, -20, 7, -3, 18.

3. Γράψε “Σ” ή “Λ” για κάθε σωστή ή λάνθασμένη πρόταση:

(α) Οι ακόλουθοι αριθμοί είναι όλοι θετικοί:
+1, +5, +216, +3701

(β) Οι αριθμοί που ακολουθούν είναι όλοι αρνητικοί:
-3, -8, 7, -22

Οι επόμενες τρεις ερωτήσεις αναφέρονται στο σχήμα που ακολουθεί.



(γ) Η τετμημένη του σημείου K είναι +2

(δ) Η τετμημένη του σημείου Λ είναι -4

(ε) Τα σημεία K και M έχουν την ίδια τετμημένη

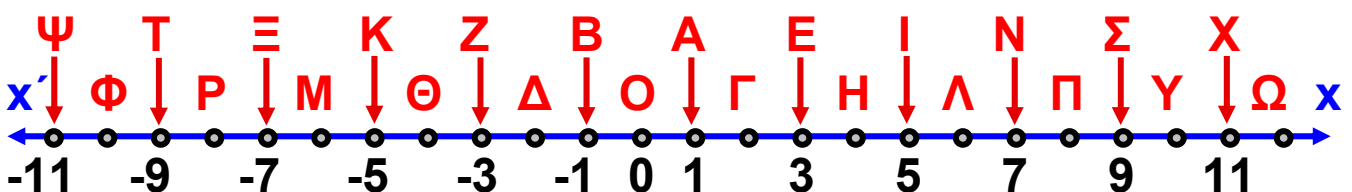
4. Στα ζεύγη αριθμών που ακολουθούν να βρεις ποιοι αριθμοί είναι ομόσημοι και ποιοι είναι ετερόσημοι:

- (α) 3 και +3, (β) 2 και 5, (γ) -2 και -4,
(δ) 7 και +9, (ε) -2 και 1, (στ) 17 και -20,
(ζ) -9 και -3,2, (η) -10,5 και 11, (θ) -3 και -100,
(ι) +6,7 και +12,3.

5. Να εκφράσεις με ρητούς αριθμούς τις παρακάτω προτάσεις:

- (α) Κατάθεση 50.000 €
(β) Ανάληψη 78.000 €,
(γ) Αύξηση μισθού κατά 500 €,
(δ) Μείωση επιτοκίου κατά 1 μονάδα,
(ε) 30 μέτρα αριστερά.

6. Κοιτάζοντας την αριθμογραμμή της επόμενης σελίδας, βρες τη λέξη που σχηματίζεται από τα γράμματα με τετμημένες -6, 10, 9, -9, 5, -5, 0 στο παρακάτω σχήμα. Στη συνέχεια γράψε μ' αυτό τον τρόπο ένα όνομα που σου αρέσει.



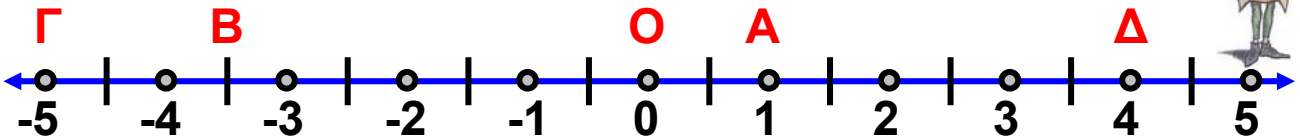
7. Τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες α και β, αντίστοιχα. Να βρεθεί η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ όταν:

- (α) α = +5 και β = +8,
(β) α = -4 και β = -13.

A.7.2. Απόλυτη τιμή ρητού - Αντίθετοι ρητοί - Σύγκριση ρητών

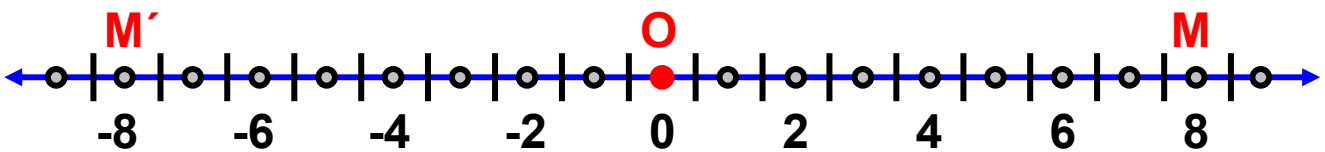
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Βρες πόσες μονάδες απέχουν από την αρχή O του άξονα τα σημεία A , B , Γ και Δ .



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στην παρακάτω ευθεία βρες τις τετμημένες των σημείων M' και M .

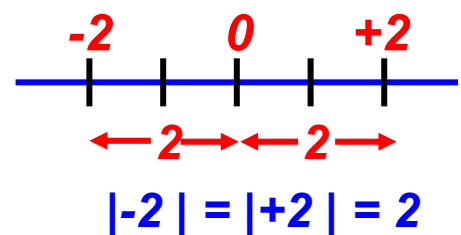


- Τι παρατηρείς για τις τετμημένες των σημείων M' και M ;
- Προσπάθησε να τοποθετήσεις στην παραπάνω ευθεία των ρητών τα σημεία A' και A που απέχουν από την αρχή O του άξονα 3,5 μονάδες.
- Κάνε το ίδιο για τα σημεία B' και B που απέχουν από την αρχή O του άξονα 6 μονάδες.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.



• Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

◆ Ο αντίθετος του x είναι ο $-x$.

ο αντίθετος του $+5,1$ είναι ο $-5,1$.

ο αντίθετος του $-2,7$ είναι ο $-(-2,7) = +2,7$

▶ Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

$$\text{π.χ. } |+9,63| = 9,63.$$

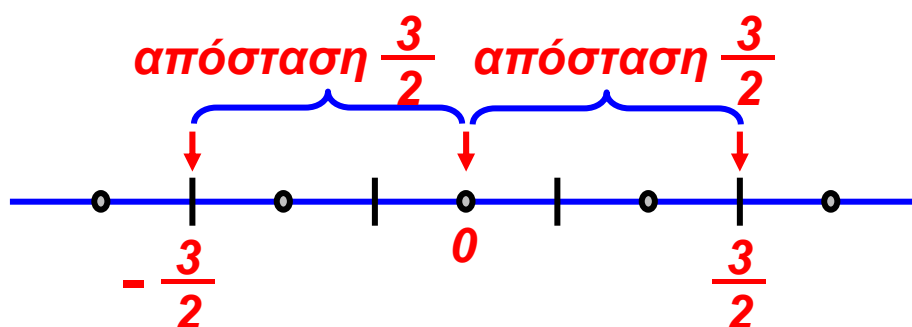
▶ Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

$$\text{π.χ. } |-8,4| = 8,4 = -(-8,4).$$

▶ Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν.

$$\text{π.χ. } |0| = 0.$$

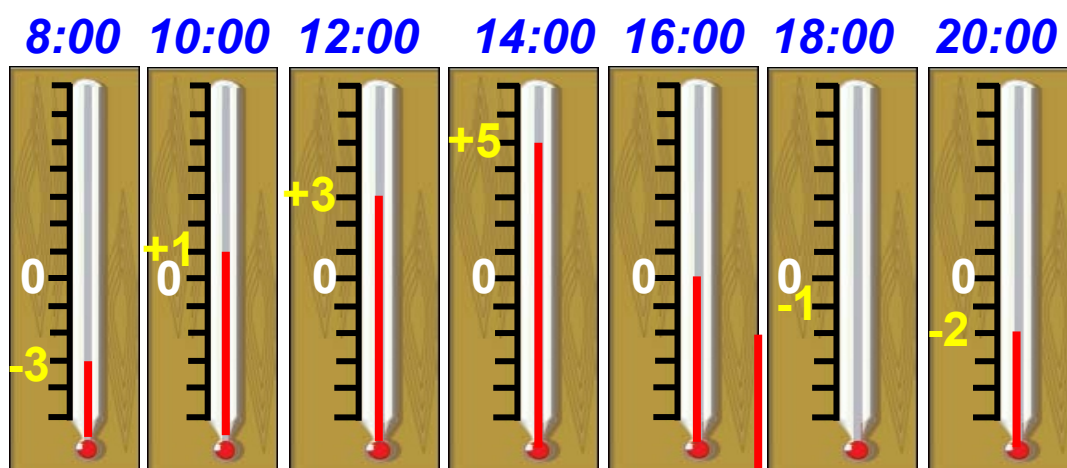
◆ Δύο σημεία που βρίσκονται σε ίση απόσταση, δεξιά και αριστερά από την αρχή των αξόνων, έχουν τετμημένες, αντίθετους αριθμούς.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η



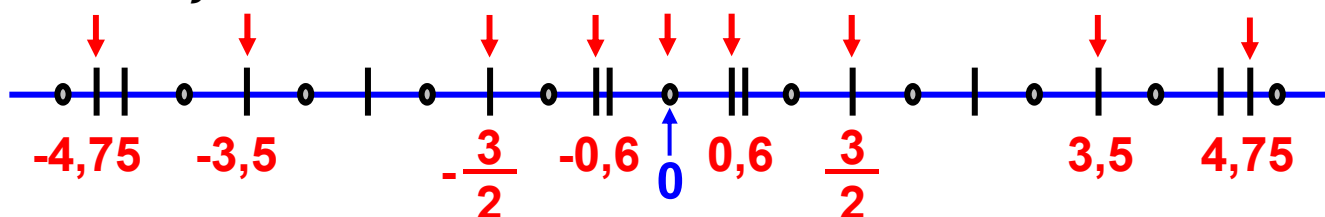
Μια κρύα μέρα του χειμώνα ο Κώστας κοιτούσε τη θερμοκρασία κάθε δύο ώρες. Οι ενδείξεις του θερμομέτρου, που έβλεπε, φαίνονται παρακάτω:



- Μπορείς να καταγράψεις όλες τις ενδείξεις του θερμομέτρου με αύξουσα ή φθίνουσα σειρά;

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- ▶ Ο μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.



Κάθε θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό αριθμό.

$$-4,75 < -3,5 < -\frac{3}{2} < -0,6 < 0 < 0,6 < +\frac{3}{2} < +3,5 < +4,75$$

◆ Το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό και μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό.

π.χ. $0 < 2,9$ και $-3,8 < 0$

◆ Ο μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.

$+2,67 < +5,89$ διότι $|2,67| < |5,89|$

◆ Ο μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την μικρότερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.

$-6,8 < -3,7$ διότι $|-6,8| = 6,8 > 3,7 = |-3,7|$

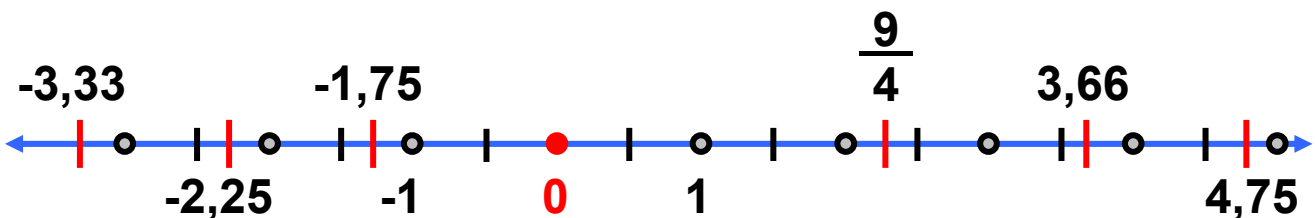
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Στον άξονα των αριθμών να τοποθετηθούν οι αριθμοί:

(α) $-2,25$, (β) $-3,33$, (γ) $-1,75$, (δ) $+\frac{9}{4}$
(ε) $+4,75$ και (στ) $+3,66$.



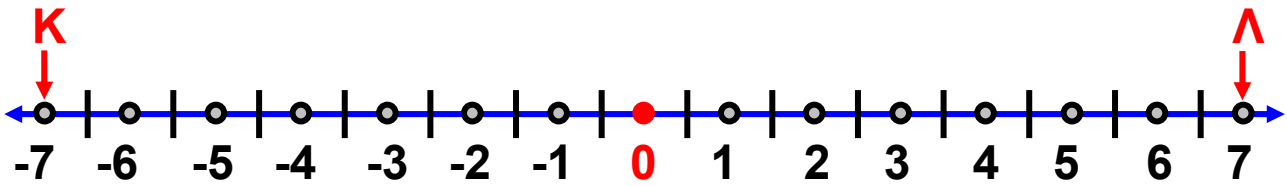
Λύση



$-3,33 < -2,25 < -1,75 < +\frac{9}{4} < +3,66 < +4,75$

2. Το σημείο K έχει τετμημένη -7 . Να βρεθεί το σημείο Λ με αντίθετη τετμημένη.

Λύση

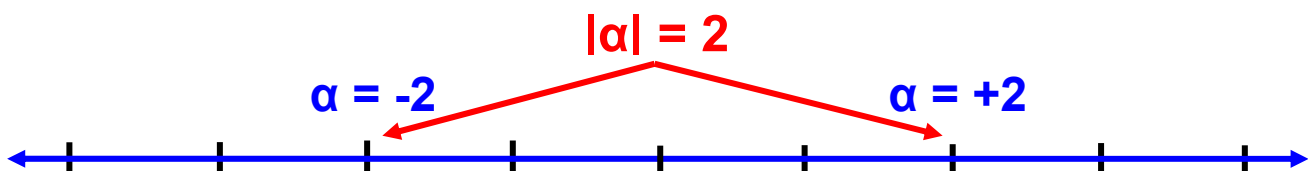


Πάνω σε άξονα $x'Ox$ βρίσκουμε το σημείο K με τετμημένη -7 . Τότε το Λ έχει τετμημένη τον αριθμό $+7$.

3. Εάν η απόλυτη τιμή του αριθμού a είναι 2, να βρεθεί ο αριθμός a .

Λύση

Εφόσον $|a| = 2$ τότε ο αριθμός a θα είναι, είτε το $+2$ είτε το -2 , διότι $|+2| = 2$ και $|-2| = 2$.



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί -2 και $+2$, έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά αντίθετο πρόσημο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Η απόσταση του σημείου, με το οποίο αναπαριστάνεται ένας ρητός αριθμός, από την αρχή του άξονα λέγεται του αριθμού και είναι πάντα αριθμός.



(β) Δύο ρητοί αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή και είναι ετερόσημοι λέγονται

(γ) Αν ένας αριθμός a είναι θετικός ο αντίθετός του είναι

Αν η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ίση με 6 τότε ο αριθμός είναι ο ή ο

(δ) Από δύο θετικούς ρητούς μικρότερος είναι εκείνος που έχει την απόλυτη τιμή.

(ε) Από δύο αρνητικούς ρητούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει την απόλυτη τιμή.

2. Να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί:

Αριθμός	Απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί από την αρχή του άξονα
-2,73	
+7,66	
-1,05	
0	
+8,07	
-8	

3. Γράψε “Σ” ή “Λ” για κάθε σωστή ή λάθος πρόταση:

(α) Ισχύει η ανισότητα: $-5,7 < 5,7$.

(β) Ισχύει η ανισότητα: $-7,6 > 6,7$.

(γ) Στην ανισότητα $2,3 < x < 4,7$
ο x μπορεί να πάρει 2 ακέραιες τιμές.

(δ) Υπάρχουν 5 ακριβώς ακέραιοι που αληθεύουν τη σχέση: $-2 \leq x \leq +2$

(ε) Δύο ακέραιοι με αντίθετο πρόσημο είναι αντίθετοι.

4. Βρες την απόλυτη τιμή των ρητών:
(α) +7,25, (β) -2,5, (γ) +16, (δ) -20,05, (ε) -58.

5. Βρες τους αριθμούς που έχουν ως απόλυτη τιμή:
(α) 100, (β) 21,7, (γ) 0, (δ) 7,03, (ε) 5,2.

6. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Αριθμός	Αντίθετος	Απόλυτη τιμή
1		
		2
-19		
	-8	
	12	
		7

7. Τοποθέτησε στον άξονα $x'Ox$ τα σημεία με τετμημένες:
-9, -5,5, +8, -3, -7,25, +1, +12, +3, +9. Ποια από αυτά είναι συμμετρικά ως προς την αρχή του άξονα;

8. Σχεδίασε τον άξονα $x'Ox$, με κατάλληλη μονάδα για να παραστήσεις τα σημεία με τετμημένες τους αριθμούς:
-20,5, +15, -39,75, -68,25, +70, +52,25, +43, -69.

9. Να συγκρίνεις τους αριθμούς:
(α) +41 και +38, (β) 9 και 11,
(γ) -3 και -2, (δ) -9 και -16,
(ε) 7 και -8, (στ) 0 και -3, (ζ) 0 και +4.

10. Να συγκρίνεις τους αριθμούς: (α) 11, -11 και |11|, (β) -3, +3 και |3|. Τι συμπεραίνεις;

11. Να γράψεις τους αριθμούς: -2, +7, +15, -3, 0, -4, +5, -8 και -10 σε αύξουσα σειρά.

12. Να συμπληρώσεις με το κατάλληλο σύμβολο: <, > ή = τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) -3 ... -8, (β) -4 ... 10, (γ) 0 ... -1, (δ) +3 ... 0,

(ε) -5 ... -|-5|, (στ) -5 ... -(+5), (ζ) |+7|... |-7|,

(η) -(-8) ... -8, (θ) +3 ... -(+4), (ι) 0 ... -|-4|.

13. Το x παριστάνει έναν ακέραιο αριθμό. Για ποιες τιμές του x θα ισχύουν οι σχέσεις:

(α) $-13 < x < -8$, (β) $-4 > x > -5$, (γ) $-2 < x < 5$

A.7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που περιγράφονται στον πρώτο πίνακα, να βρεις στον δεύτερο πίνακα την πρόσθεση που της αντιστοιχεί και τέλος το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον τρίτο πίνακα.

1 Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε συνεχόμενα δύο φορές: Η πρώτη αύξηση ήταν 8,5 € και η δεύτερη 6,2 €	α $(+8,5) + (-6,2)$	1 -14,7 Μειώθηκε κατά 14,7€
2 Η τιμή ενός προϊόντος μειώθηκε συνεχόμενα δύο φορές: Η πρώτη μείωση ήταν 8,5 € και η δεύτερη 6,2 €	β $(-8,5) + (+6,2)$	2 +2,3 Αυξήθηκε κατά 2,3€
3 Η τιμή ενός προϊόντος αυξήθηκε κατά 8,5 € και μετά μειώθηκε κατά 6,2 €	γ $(+8,5) + (+6,2)$	3 -2,3 Μειώθηκε κατά 2,3€
4 Η τιμή ενός προϊόντος μειώθηκε κατά 8,5 € και μετά αυξήθηκε κατά 6,2 €	δ $(-8,5) + (-6,2)$	4 +14,7 Αυξήθηκε κατά 14,7€



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



◆ Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

$$(+8,5) + (+6,2) = +14,7$$

$$(-8,5) + (-6,2) = -14,7$$

◆ Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$$(+8,5) + (-6,2) = +2,3$$

$$(-8,5) + (+6,2) = -2,3$$

Ιδιότητες της πρόσθεσης

Παρατηρούμε ότι:

$$(+1,5) + (-2,3) = -0,8$$

$$(-2,3) + (+1,5) = -0,8$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος.

(Αντιμεταθετική ιδιότητα)

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Παρατηρούμε ότι:

$$-1,4 + (+2,7 + -3,1) = -1,4 + -0,4 = -1,8$$

$$(-1,4 + +2,7) + -3,1 = +1,3 + -3,1 = -1,8$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Μπορούμε να αντικαθιστούμε προσθετέους με το άθροισμά τους ή να αναλύουμε ένα προσθετέο σε άθροισμα.

(Προσεταιριστική ιδιότητα).

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(+1,5) + 0 = +1,5 \quad 0 + (-2,3) = -2,3$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Το 0 όταν προστεθεί σε ένα ρητό δεν τον μεταβάλλει.

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\left(+\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{9}{4}\right) = 0 \quad \text{ή} \quad \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(+\frac{9}{4}\right) = 0$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν.

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Σε μια πόλη παρατηρήθηκαν οι παρακάτω αυξομειώσεις της θερμοκρασίας:

Αρχικές θερμοκρασίες

(α) Βράδυ $+1^{\circ}\text{C}$

(β) Μεσημέρι -1°C

Αυξομειώσεις θερμοκρασίας

την επόμενη μέρα αυξήθηκε κατά 4°C

το βράδυ μειώθηκε κατά 2°C

Αρχικές θερμοκρασίες Αυξομειώσεις θερμοκρασίας

(γ) Βράδυ -2°C

την επόμενη μέρα αυξήθηκε
κατά 5°C

(δ) Μεσημέρι $+5^{\circ}\text{C}$

το βράδυ μειώθηκε κατά 7°C

(ε) Μεσημέρι -3°C

το βράδυ μειώθηκε κατά 3°C

Ποια ήταν η τελική θερμοκρασία
σε κάθε περίπτωση;

Λύση

(α) Την επομένη ημέρα η θερμοκρασία έχει αυξηθεί κατά 4°C , δηλαδή έχει μεταβληθεί κατά $+4^{\circ}\text{C}$. Η θερμοκρασία θα είναι 5°C πάνω από το μηδέν, διότι:

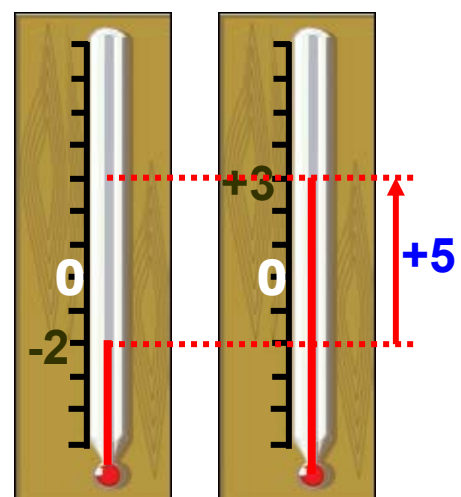
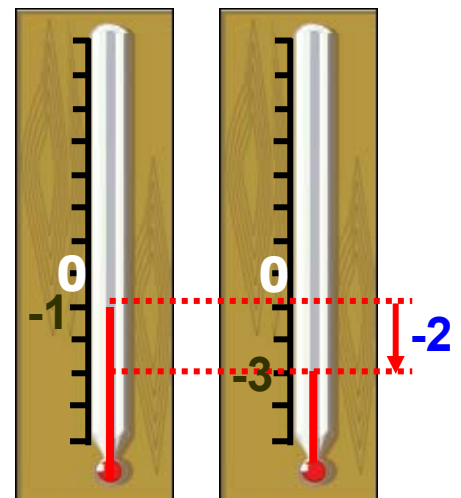
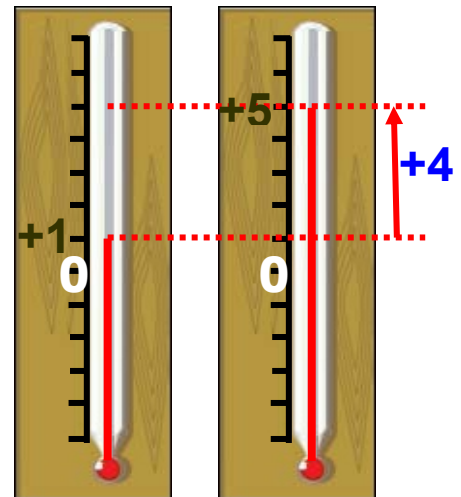
$$(+1) + (+4) = +5$$

(β) Από -1°C η θερμοκρασία μειώθηκε κατά 2°C , άρα μεταβλήθηκε κατά -2°C . Η νέα θερμοκρασία είναι -3°C , διότι έχουμε:

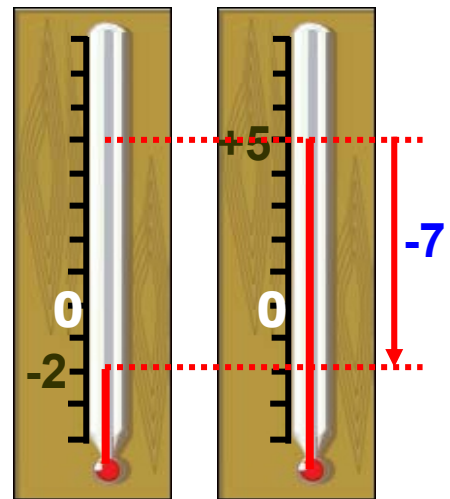
$$(-1) + (-2) = -3$$

(γ) Στην περίπτωση αυτή η θερμοκρασία από -2°C , αυξήθηκε κατά 5°C , δηλαδή έχουμε μια μεταβολή $+5^{\circ}\text{C}$. Η θερμοκρασία έφτασε στους $+3^{\circ}\text{C}$, διότι:

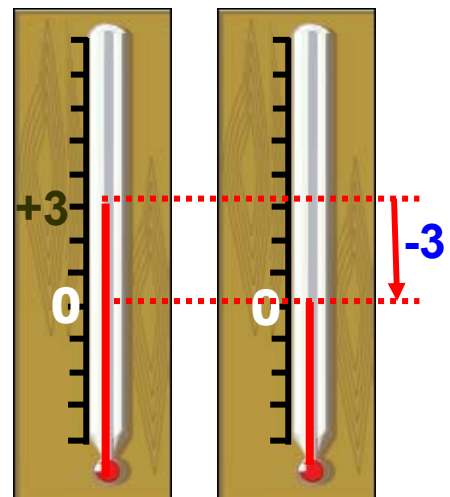
$$(-2) + (+5) = +3$$



(δ) Η αρχική θερμοκρασία ήταν $+5^{\circ}\text{C}$ και μειώθηκε κατά 7°C , δηλαδή έχουμε μια μεταβολή κατά -7°C . Η θερμοκρασία έγινε, τελικά -2°C , διότι:
 $(+5) + (-7) = -2$



(ε) Από 3°C η θερμοκρασία μειώθηκε κατά 3°C , δηλαδή μεταβλήθηκε κατά -3°C . Η θερμοκρασία έγινε τελικά 0°C , διότι:
 $(+3) + (-3) = 0$



2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

(α) $(+5,6) + (+8,7) + (-3,2) + (-6,9) + (+3,2) + (-7,4)$ και
 (β) $(-1,8) + (+4,8) + (+9,7) + (-4,8) + (-3,4) + (+1,5)$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad & (+5,6) + (+8,7) + (-3,2) + (-6,9) + (+3,2) + (-7,4) = \\ & = (+5,6) + (+8,7) + (+3,2) + (-3,2) + (-6,9) + (-7,4) = \\ & \text{(χωρίζουμε τους αρνητικούς από τους θετικούς)} \\ & = (+17,5) + (-17,5) = 0 \end{aligned}$$

(προσθέτουμε χωριστά τους αρνητικούς και τους θετικούς)

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad & (-1,8) + (+4,8) + (+9,7) + (-4,8) + (-3,4) + (+1,5) = \\ & = (-1,8) + (-4,8) + (-3,4) + (+4,8) + (+9,7) + (+1,5) = \\ & = (-10) + (+16) = +6 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Γράψε “Σ” ή “Λ” για κάθε σωστή ή λανθασμένη πρόταση:



- (α) Στους ρητούς αριθμούς η πρόσθεση σημαίνει πάντα αύξηση
- (β) Αν το άθροισμα δύο ρητών είναι αρνητικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι αρνητικοί αριθμοί
- (γ) Αν $\alpha + \beta = 0$, τότε οι α και β είναι αντίθετοι ρητοί αριθμοί
- (δ) Αν το άθροισμα δύο ρητών είναι θετικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι θετικοί αριθμοί.
- (ε) Το άθροισμα ενός ρητού και του αντίθετου αυτού είναι πάντα μηδέν.

2. Υπολόγισε τα αθροίσματα:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (α) $(+4,05) + (+6,15)$, | (β) $(+5,03) + (+4,07)$, |
| (γ) $(+2,7) + (+97,3)$, | (δ) $(+2,6) + (+11,4)$, |
| (ε) $(+7,25) + (+8,75)$, | (στ) $(-3,5) + (-2,5)$, |
| (ζ) $(-1,3) + (-5,2)$, | (η) $(-7,15) + (-4,85)$, |
| (θ) $(-5,25) + (-9,75)$, | (ι) $(-13,7) + (-6,3)$ |

3. Υπολόγισε τα αθροίσματα:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (α) $(+4,05) + (-6,15)$, | (β) $(+5,03) + (-4,07)$, |
| (γ) $(-2,7) + (+97,3)$, | (δ) $(-2,6) + (+11,4)$, |
| (ε) $(+7,25) + (-8,75)$, | (στ) $(+3,5) + (-2,5)$, |
| (ζ) $(-1,3) + (+5,2)$, | (η) $(+7,15) + (-4,85)$, |
| (θ) $(-5,25) + (+9,75)$, | (ι) $(+13,7) + (-6,3)$ |


4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

+	+4	-8	-11	+17
-5				
+9				
-4				
-21				

5. Τοποθέτησε στα κενά τα κατάλληλα πρόσημα, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:

(α) $(...6) + (-8) = -2$, (β) $(+5) + (...5) = 0$,
 (γ) $(+7) + (...9) = +16$, (δ) $(...9) + (...8) = -17$,
 (ε) $(...6) + (...5) = +11$

6. Εξέτασε αν είναι μαγικά τα τετράγωνα: (Μαγικά τετράγωνα είναι αυτά στα οποία η πρόσθεση των αριθμών κάθε στήλης ή γραμμής, καθώς και των διαγωνίων τους, δίνουν το ίδιο ακριβώς άθροισμα).

↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↙
→	-1	+4	-3		+1,1	+2,4	-2,5	←
→	-2	0	+2		-0,1	+3,5	-2,4	←
→	+3	-4	+1		0	-4,9	+5,9	←
↗								↖

7. Υπολόγισε τα αθροίσματα:

(α) $(-3,8) + (+2,8) + (-5,4) + (+8,2)$ και
 (β) $(-3,5) + (-9,99) + (+2,5) + (-15,75) + (+20,75) + (+9,99)$

8. Υπολόγισε τα αθροίσματα:

(α) $(+\frac{9}{4}) + (-\frac{5}{4}) + (+\frac{2}{3}) + (-\frac{5}{3}) + (+\frac{7}{13}) + (-\frac{20}{13})$ και
 (β) $(+\frac{1}{7}) + (-\frac{5}{7}) + (+\frac{3}{5}) + (-\frac{1}{35})$

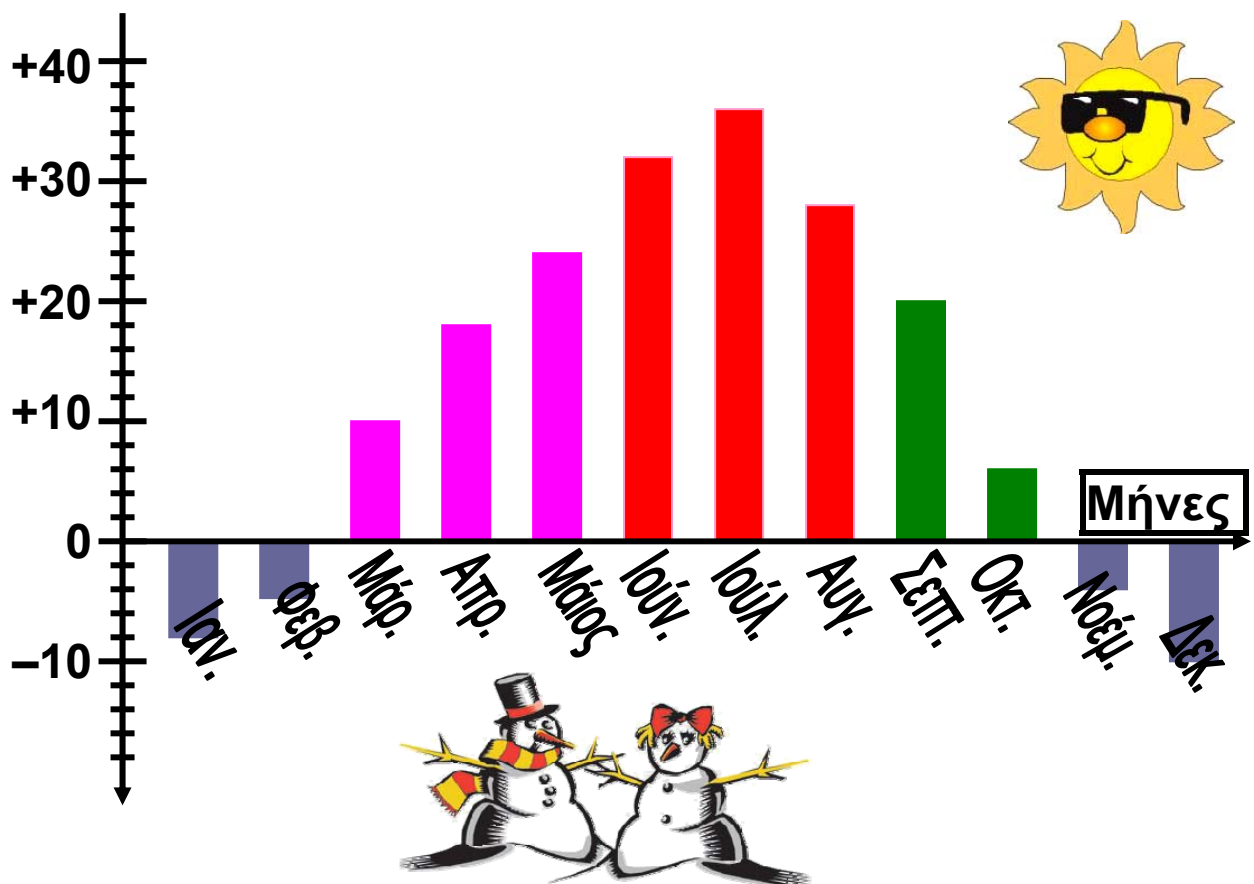
Α.7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Στο σχήμα βλέπουμε τη μέση θερμοκρασία μιας περιοχής για τους 12 μήνες του χρόνου σε συγκεκριμένη ώρα της ημέρας.

Θερμοκρασία



- Ποιος είναι ο πιο ζεστός μήνας του έτους και ποιος ο πιο κρύος;
- Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ αυτών των μηνών;
- Ποια είναι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών μηνών;

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



◆ Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β , προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β .

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

$$(+8,5) - (+6,2) = (+8,5) + (-6,2) = 8,5 - 6,2 = 2,3$$

$$(+8,5) - (-6,2) = (+8,5) + (+6,2) = 8,5 + 6,2 = 14,7$$

◆ Στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση και επομένως είναι πάντα δυνατή (δηλαδή, δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο, όπως ίσχυε μέχρι τώρα).

Απαλοιφή παρενθέσεων

Σε αρκετές περιπτώσεις αριθμητικών παραστάσεων εμφανίζονται περισσότεροι του ενός αριθμοί με τα πρόσημά τους μέσα σε παρενθέσεις, μπροστά από τις οποίες μπορεί να υπάρχουν τα πρόσημα + ή -. Για να απαλείψουμε τις παρενθέσεις εργαζόμαστε ως εξής:

◆ Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το + (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το + (αν έχει) και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους.

$$(+5) + (-7) = +5 - 7 = -2$$

$$(9,1 - 6,2 + 3,4) + (-7,5 + 10 - 8,3) = \\ = 9,1 - 6,2 + 3,4 - 7,5 + 10 - 8,3$$

◆ Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το -, μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το - και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα.

$$(-5) - (-7) = -5 + 7 = +2$$

$$-(9,1 - 6,2 + 3,4) - (-7,5 + 10 - 8,3) =$$
$$= -9,1 + 6,2 - 3,4 + 7,5 - 10 + 8,3$$

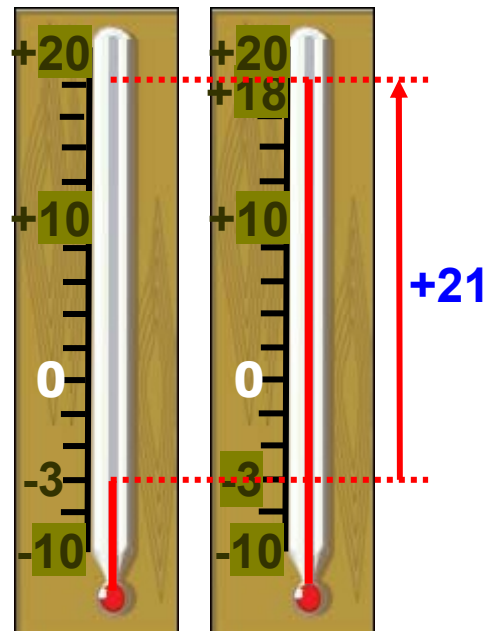
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ένα βράδυ το θερμόμετρο στο μπαλκόνι ενός σπιτιού έδειχνε -3°C και μέσα στο σπίτι 18°C . Πόση ήταν η διαφορά θερμοκρασίας;



Λύση

Το πρόβλημα ζητάει να υπολογίσουμε τη διαφορά των θερμοκρασιών, δηλαδή τη διαφορά $(+18) - (-3)$. Αν παρατηρήσουμε το σχήμα θα δούμε ότι η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του εσωτερικού του σπιτιού και του εξωτερικού του ήταν $+21^{\circ}\text{C}$. Σύμφωνα με τον ορισμό της αφαίρεσης ρητών θα έχουμε:

$$(+18) - (-3) = (+18) + (+3) = (+21)$$


2. Ένας έμπορος χρωστάει στον προμηθευτή του 897,56 € και του οφείλει ένας πελάτης 527,42 €. Ποσά € πρέπει να έχει στο ταμείο για να ξεχρεώσει;

Λύση

Αν x είναι το ποσό των χρημάτων που χρειάζεται, θα είναι:

$$x + (+527,42) = +897,56. \text{ Γνωρίζουμε ότι:}$$

$$x = (+897,56) - (+527,42)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αφαίρεσης ρητών, έχουμε ότι:

$$x = (+897,56) + (-527,42). \text{ Άρα, } x = +(897,56 - 527,42) \text{ ή } x = +370,14 \text{ €}$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$(α) x + (+3) = (-9), (β) (-8) - x = +7$$

Λύση

$$(α) \text{ Αν είναι: } x + (+3) = (-9) \text{ τότε } x = (-9) - (+3) \\ \text{ή } x = (-9) + (-3) \text{ ή } x = (-12). \text{ Δηλαδή, } x = -12$$

(β) Εφ' όσον $(-8) - x = +7$ θα ισχύει ότι: $(-8) = (+7) + x$ και επίσης:

$$x = (-8) - (+7) \text{ ή } x = (-8) + (-7) \text{ δηλαδή } x = -15$$

4. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$-13 - (0,38 - 11 - 13) + (0,38 - 11).$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & -13 - (0,38 - 11 - 13) + (0,38 - 11) = \\ & = -13 - 0,38 + 11 + 13 + 0,38 - 11 = \\ & = -13 + 13 - 0,38 + 0,38 - 11 + 11 = \\ & = 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Γράψε “Σ” ή “Λ” για κάθε σωστή ή λάθος πρόταση:

- (α) Στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση σημαίνει πάντα ελάττωση.
- (β) Αν η διαφορά δύο ρητών είναι αρνητικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι αρνητικοί αριθμοί.



- (γ) Ισχύει στην αφαίρεση η αντιμεταθετική ιδιότητα:
 $\alpha - \beta = \beta - \alpha$
- (δ) Ισχύει ότι: $6 - (+8) + (+5) + (-3) + (2) + (-1) = 0$
- (ε) Λύση της εξίσωσης
 $x + (-3) = -2$ είναι ο αριθμός $+1$
- (στ) Οι εξισώσεις $x + (-2) = +5$
και $x - (+7) = -10 + (+5)$ έχουν την ίδια λύση.
- (ζ) Λύση της εξίσωσης $x - (-2) = -8 + (+7) - (-4)$
είναι ο αριθμός $+1$.

2. Υπολόγισε τις διαφορές:

- (α) $5 - (-7)$, (β) $-8 - (+8)$, (γ) $-2 - (-15,2)$,
(δ) $14,55 - 18,45$, (ε) $-\frac{2}{7} - (-\frac{2}{7})$.

3. Κάνε τις πράξεις:

- (α) $|+3| + |-2| + |-9|$, (β) $|-20| + |-10| - |+10|$,
(γ) $|-3| - |-2| + |-5| - |+6|$.

4. Κάνε τις πράξεις:

- (α) $(+5) - (+3) + (+8)$, (β) $(-25) + (-4) - (-10)$,
(γ) $(+12) + (+2) - (-8)$.

5. Συμπλήρωσε τον πίνακα με τους κατάλληλους αριθμούς:

α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
+3		-5	
	-8	+10	
-2	-5		
-9		+6	

6. Να λύσεις τις εξισώσεις:

$$(α) x + (-8) = -18, \quad (β) x + 12 = -14,$$

$$(γ) x + \frac{5}{4} = \frac{7}{8}, \quad (δ) x - \frac{5}{4} = 2.$$

7. Συμπλήρωσε τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα:
Τι συμπεραίνεις για τους αριθμούς των δύο αυτών στηλών;

α	β	$\alpha - \beta$	$\beta - \alpha$
7	3		
$2\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$		
-5,55	-2,45		
3	-2,1		

8. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων με δύο τρόπους:

$$(α) 11 - (12 - 2) + (10 - 5) - (8 + 5),$$

$$(β) -(13,7 - 2,6) + 14,8 - (-8,7 + 5),$$

$$(γ) \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{6}\right)$$

9. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	3,5		1,89	$-\frac{1}{4}$
y	-1,5	4,3		$-\frac{1}{4}$
z		-2,3	3,11	
$x + y + z$	0		0,22	$\frac{1}{2}$
$x - y - z$		0		

A.7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Ένας έμπορος διαπίστωσε, ότι κάθε ημέρα του τελευταίου δεκαήμερου των εκπτώσεων έβγαζε κέρδος 524,5 €. Το επόμενο, όμως, δεκαήμερο είχε καθημερινή ζημιά



265,4 €. Είναι γνωστό, ότι στα λογιστικά βιβλία το κέρδος καταχωρείται ως θετική εγγραφή και η ζημιά ως αρνητική.

Δηλαδή, το συνολικό κέρδος για το δεκαήμερο των εκπτώσεων θα είναι $(+524,5 \text{ €}) \cdot (+10 \text{ ημέρες})$ και για το επόμενο δεκαήμερο η συνολική ζημιά θα είναι $(-265,4\text{€}) \cdot (+10 \text{ ημέρες})$

- Προσπάθησε να βρεις το αποτέλεσμα των παραπάνω πράξεων χωρίς να κάνεις τους πολλαπλασιασμούς.
- Τι παρατηρείς για το πρόσημο των αποτελεσμάτων;



Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι:

- ▶ Το γινόμενο δύο θετικών ρητών είναι θετικός ρητός
- ▶ Το γινόμενο ενός θετικού και ενός αρνητικού ρητού είναι αρνητικός ρητός

Ας δούμε τώρα πώς βρίσκουμε το γινόμενο δύο αρνητικών ακεραίων.

$$\begin{aligned} (-10) \cdot (+9) &= -90 \\ (-10) \cdot (+8) &= -80 \\ (-10) \cdot (+7) &= -70 \\ (-10) \cdot (+6) &= -60 \\ (-10) \cdot (+5) &= -50 \\ (-10) \cdot (+4) &= -40 \\ (-10) \cdot (+3) &= -30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-10) \cdot (+2) &= -20 \\ (-10) \cdot (+1) &= -10 \\ (-10) \cdot 0 &= 0 \\ (-10) \cdot (-1) &= ; \\ (-10) \cdot (-2) &= ; \\ (-10) \cdot (-3) &= ; \\ (-10) \cdot (-4) &= ; \end{aligned}$$

.....

Σημειώνουμε τους πολλαπλασιασμούς δύο παραγόντων, από τους οποίους ο ένας μένει σταθερός, το -10, και ο άλλος μειώνεται διαδοχικά κατά 1 κάθε φορά.

Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα αυξάνονται διαδοχικά κατά 10.

Αν υποθέσουμε ότι και μετά το μηδενισμό του δεύτερου παράγοντα τα γινόμενα συνεχίζουν να αυξάνονται με τον ίδιο τρόπο, πρέπει να ορίσουμε ότι:

$$\begin{aligned} (-10) \cdot (-1) &= + 10 = + (10 \cdot 1) \\ (-10) \cdot (-2) &= + 20 = + (10 \cdot 2) \\ (-10) \cdot (-3) &= + 30 = + (10 \cdot 3) \\ (-10) \cdot (-4) &= + 40 = + (10 \cdot 4) \end{aligned}$$

.....



Διαπιστώνουμε επομένως ότι:

▶ Το γινόμενο δύο αρνητικών ακεραίων είναι θετικός ακέραιος

Γενικότερα:

▶ Το γινόμενο δύο αρνητικών ρητών είναι θετικός ρητός.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».

Δηλαδή: $+ \cdot + = +$ και $- \cdot - = +$

$$(+1,5) \cdot (+2,2) = (+3,3) \quad (-1,5) \cdot (-2,2) = (+3,3)$$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «-».

Δηλαδή: $+ \cdot - = -$ και $- \cdot + = -$

$$(+1,5) \cdot (-2,2) = (-3,3) \quad (-1,5) \cdot (+2,2) = (-3,3)$$

Ο Διόφαντος πρώτος εισάγει την έννοια «ΛΕΙΨΙΣ» (αρνητικός) διατυπώνοντας τους κανόνες της πράξης του πολλαπλασιασμού με την έκφραση:

«ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΛΕΙΨΙΝ ΠΟΙΕΙ ΥΠΑΡΞΙΝ, ΛΕΙΨΙΣ ΕΠΙ ΥΠΑΡΞΙΝ ΠΟΙΕΙ ΛΕΙΨΙΝ»

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

Παρατηρούμε ότι:

$$(+1,5) \cdot (-2,2) = -3,3 \quad (-2,2) \cdot (+1,5) = -3,3$$

Γενικά ισχύει ότι:

- Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά δύο παραγόντων ενός γινομένου (Αντιμεταθετική ιδιότητα).

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

Παρατηρούμε ότι:

$$-0,5 \cdot (+2,2 \cdot -3,5) = -0,5 \cdot -7,7 = +3,85$$

$$(-0,5 \cdot +2,2) \cdot -3,5 = -1,1 \cdot -3,5 = +3,85$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Μπορούμε να αντικαθιστούμε παράγοντες με το γινόμενό τους ή να αναλύουμε ένα παράγοντα σε γινόμενο (Προσεταιριστική ιδιότητα).

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

Παρατηρούμε ότι:

$$1 \cdot (+1,5) = +1,5 \cdot 1 = +1,5$$

$$1 \cdot (-2,2) = -2,2 \cdot 1 = -2,2$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Όταν ένας ρητός πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό 1 δεν μεταβάλλεται.

$$1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

Παρατηρούμε ότι:

$$0,15 \cdot (-5) + 1,85 \cdot (-5) = (-0,75) + (-9,25) = -10$$

$$(0,15 + 1,85) \cdot (-5) = 2 \cdot (-5) = -10$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

και

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(+3) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = +\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = 1$$

$$(-0,25) \cdot (-4) = + (0,25 \cdot 4) = 1$$

Γενικά ισχύει ότι:

• Οι ρητοί αριθμοί α και β λέγονται **αντίστροφοι**, όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα: $\alpha \cdot \beta = 1$

Ο καθένας από τους α και β είναι αντίστροφος του άλλου.

Παρατηρούμε ότι:

$$(-1,3) \cdot 0 = 0 \quad \text{ή} \quad 0 \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) = 0$$

Γενικά ισχύει ότι:

◆ Όταν ένας ρητός πολλαπλασιάζεται με το 0 μηδενίζεται. $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$

Γινόμενο πολλών παραγόντων

Πώς εργαζόμαστε όταν έχουμε να υπολογίσουμε ένα γινόμενο με περισσότερους από δύο παράγοντες;

Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο θετικών ρητών είναι πάντα θετικό. Αν υπάρχει ένας παράγοντας που είναι αρνητικός μετατρέπει το γινόμενο σε αρνητικό. Στην περίπτωση που υπάρχει και δεύτερος αρνητικός παράγοντας ξαναμετατρέπει το γινόμενο σε θετικό κ.ο.κ.

Άρα:

◆ Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων (που κανένας δεν είναι μηδέν),

πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

- Το πρόσημο +, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο** (ζυγό).
- Το πρόσημο -, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό** (μονό).
- ◆ Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν, τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.

Το σημείο του πολλαπλασιασμού «•» μεταξύ των γραμμάτων και των παρενθέσεων παραλείπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

$$(α) (-1,4) \cdot 5, \quad (β) (+\frac{2}{3}) \cdot (-2,1), \quad (γ) (-10) \cdot (-0,7)$$

Λύση

$$(α) (-1,4) \cdot 5 = -(1,4 \cdot 5) = -7$$

$$(β) (+\frac{2}{3}) \cdot (-2,1) = -(\frac{2}{3} \cdot 2,1) = -1,4$$

$$(γ) (-10) \cdot (-0,7) = +(10 \cdot 0,7) = +7$$

2. Να υπολογιστεί το γινόμενο $(-1)\alpha$, όταν το α παίρνει

τις τιμές: $+3, -1,2, +\frac{2}{3}, -2,$

Λύση

$$\text{Για } \alpha = +3 \text{ είναι: } (-1)(+3) = -3$$

$$\text{Για } \alpha = -1,2 \text{ είναι: } (-1)(-1,2) = +1,2$$

$$\text{Για } \alpha = +\frac{2}{3} \text{ είναι: } (-1)(+\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$$



Για $\alpha = -2$ είναι: $(-1)(-2) = +2$

3. Να δειχθεί ότι: $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

Λύση

Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, έχουμε:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = (\alpha + \beta)\gamma + (\alpha + \beta)\delta = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

4. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

$$(-1)(-20)(+\frac{2}{3})(-3)(-0,25).$$

Λύση

$$(-1)(-20)(+\frac{2}{3})(-3)(-0,25) =$$

(πλήθος αρνητικών παραγόντων 4)

$$= +(1 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 0,25) =$$

$$= +(20 \cdot 2 \cdot 0,25) = +(40 \cdot 0,25) = +10$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να συμπληρωθούν τα παρακάτω κενά:

(α) Το πρόσημο του γινομένου δύο ομόσημων ρητών είναι πάντα

(β) Το πρόσημο του γινομένου δύο ετερόσημων ρητών είναι πάντα

(γ) Ένας ρητός όταν πολλαπλασιάζεται με το 1 δεν

(δ) Το γινόμενο δύο αντίστροφων αριθμών είναι πάντα ίσο με



(ε) Το πρόσημο γινομένου πολλών παραγόντων εξαρτάται από το πλήθος των παραγόντων.

2. Υπολόγισε τα γινόμενα:

(α) $(-1)(-1)$, (β) $-3(-10)$, (γ) $-1,2(-0,5)$,

(δ) $0(-10589)$, (ε) $1(-20015)$, στ) $-0,725(+1000)$,

(ζ) $\frac{12}{25} (-\frac{15}{24})$.

3. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων με τις λιγότερες δυνατές πράξεις:

(α) $-5 \cdot 27 + 2 \cdot 27$, (β) $10,35(-25) + 9,65(-25)$,

(γ) $-\frac{6}{7}(-10) + (-\frac{6}{7})(+3)$

4. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

·	-1	$-\frac{1}{2}$	0	+2	+3
-2					
-3,2					
$+\frac{3}{2}$					
+10					

5. Κάνε τις πράξεις:

(α) $-7(-8 + 10 - 5)$, (β) $(0,25 - 0,05)(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8})$,

(γ) $-10 - 6(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$

6. Κάνε τις πράξεις:

(α) $(5 + \alpha)(2 + \beta)$, (β) $(\alpha + 7)(\alpha - 7)$,
(γ) $(\alpha - 3)(\beta - 3)$, (δ) $(\gamma + 8)(\delta + 5)$.

7. Υπολόγισε τα γινόμενα:

(α) $(-1)(-1)$, (β) $(-1)(-1)(-1)$, (γ) $(-1)(-1)(-1)(-1)$

8. Υπολόγισε την τιμή των παραστάσεων:

$A = (\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha - 2)(\alpha + 2)$, όταν $\alpha = 3$

$B = \beta(\beta - 3)(\beta + 3)(\beta - 5)(\beta + 5)$, όταν $\beta = 2$

$\Gamma = \gamma(2\gamma - 1)(3\gamma + 1)(4\gamma - 2)(\gamma + 2)(\gamma - 2)$, όταν $\gamma = 0,5$

9. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	-2	$-\frac{1}{2}$	-2
y	0,5	+6	$+\frac{3}{2}$
z	+1	-4	0,2
ω	-3	-0,3	-7
$A = x y z$			
$B = y x \omega$			
$\Gamma = x A - B$			
$A B + \Gamma$			

Α.7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

• Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

▶ το πρόσημο +, αν είναι ομόσημοι. Δηλαδή:

$$+ : + = + \quad \text{και} \quad - : - = +$$

▶ το πρόσημο -, αν είναι ετερόσημοι. Δηλαδή:

$$+ : - = - \quad \text{και} \quad - : + = -$$

$$(+11,22) : (+2,2) = (+5,1)$$

$$(-11,22) : (-2,2) = (+5,1)$$

$$(+11,22) : (-2,2) = (-5,1)$$

$$(-11,22) : (+2,2) = (-5,1)$$

• Το πηλίκο της διαίρεσης $a : b$ ή $\frac{a}{b}$ λέγεται **λόγος του a προς το b** και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $b \cdot x = a$

Ο λόγος του -20 προς το 4 είναι:

$$(-20) : (+4) = \frac{-20}{+4} = -5 \quad \text{διότι} \quad (+4) \cdot (-5) = (-20)$$

Ο λόγος τον -7 προς το -2 είναι: $(-7) : (-2) = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$ **διότι**

$$(-2) \cdot \frac{7}{2} = (-7)$$

◆ Η διαίρεση $\frac{a}{b}$ μπορεί και να γραφεί $a \cdot \frac{1}{b}$, επομένως για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$(-3) : (-4) = \frac{-3}{-4} = -3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$6 : (-7) = \frac{6}{-7} = 6 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$(-5) : (+2) = \frac{-5}{2} = -5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

◆ Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν τα πηλίκα:

$$(\alpha) (+1,5) : (+5), \quad (\beta) \left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{7}{5}\right), \quad (\gamma) (-0,45) : (-0,15).$$

Λύση

$$(\alpha) (+1,5) : (+5) = +(1,5 : 5) = +0,3$$

$$(\beta) \left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{7}{5}\right) = -\left(\frac{2}{3} : \frac{7}{5}\right) = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right) = -\frac{10}{21}$$

$$(\gamma) (-0,45) : (-0,15) = +(0,45 : 0,15) = +3$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$(\alpha) -6x = -24, \quad (\beta) -3x = +15, \quad (\gamma) x : (-2) = -3$$

Λύση

$$(\alpha) -6x = -24$$

$$x = (-24) : (-6)$$

$$x = +(24 : 6)$$

$$x = +4$$

$$(\beta) -3x = +15$$

$$x = (+15) : (-3)$$

$$x = -(15 : 3)$$

$$x = -5$$

$$(\gamma) x : (-2) = -3$$

$$x = (-3) \cdot (-2)$$

$$x = +(3 \cdot 2)$$

$$x = +6$$

3. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\left[\frac{2}{3}(-3) - (-2)(-9)\right] : [0,4(-10) - (-0,2)(-5)] + 7.$$



Λύση

$$\left[\frac{2}{3}(-3) - (-2)(-9) \right] : [0,4(-10) - (-0,2)(-5)] + 7 =$$

$$= \left[-\left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) - (2 \cdot 9) \right] : [-(0,4 \cdot 10) - (0,2 \cdot 5)] + 7 =$$

(κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις)

$$= (-2 - 18) : (-4 - 1) + 7 =$$

$$= (-20) : (-5) + 7 =$$

(κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις)

$$= +(20 : 5) + 7 =$$

$$= +4 + 7 =$$

(κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις)

$$= +11$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Το πρόσημο του πηλίκου δύο ομόσημων ρητών είναι πάντα

(β) Το πρόσημο του πηλίκου δύο ετερόσημων ρητών είναι πάντα

(γ) Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το με τον αντίστροφο του

(δ) Ένα πηλίκο $\alpha : \beta$ λέγεται και του α προς το β .



2. Κάνε τις διαιρέσεις:

(α) $(+15,15) : (+3)$, (β) $(-4,5) : (-1,5)$, (γ) $(-81) : (+0,9)$,

(δ) $49 : (-7)$

3. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	y	x + y	x - y	xy	x : y
$\frac{-7}{3}$	$\frac{5}{-6}$				
1,7	2,3				
$\frac{-4}{5}$	-1				

4. Υπολόγισε τα πηλίκα:

(α) $\frac{10}{0,25}$, (β) $\frac{-0,75}{-0,5}$, (γ) $\frac{-120}{(-12) + (-8)}$, (δ) $(-3\frac{1}{5}) : (-2\frac{2}{3})$.

5. Λύσε τις εξισώσεις:

(α) $-3x = 74$, (β) $-0,14x = -49$, (γ) $x(-2) = 12$,

(δ) $\frac{2}{3}x = -\frac{4}{6}$.

6. Κάνε τις πράξεις:

(α) $\frac{-1}{3} + \frac{2}{-6} - \frac{12}{-15}$ (β) $\frac{(-2)(-5)(-1)}{-10}$,

(γ) $(\frac{-7}{3} - \frac{5}{-3}) : (-\frac{3}{2})$.

7. Υπολόγισε την τιμή της παράστασης:

$[(-8)(\frac{-7}{64}) - (-15) : (-8)](-8) + (-27) : \frac{-9}{8}$.

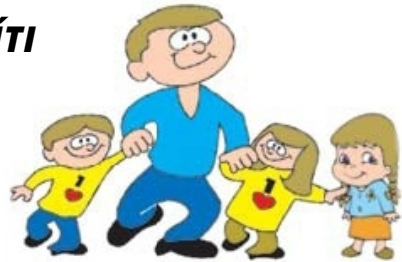
Α.7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Ένας πατέρας γυρνώντας στο σπίτι από τη δουλειά του έφερε πέντε σοκολάτες για τα δύο παιδιά του.

Όταν έφτασε στο σπίτι, διαπίστωσε ότι μαζί με τα δύο παιδιά του, ήταν και ένας φίλος τους.



➤ Μπορούν να μοιραστούν εξίσου οι πέντε σοκολάτες στα τρία παιδιά;



Σκεφτόμαστε

Αν δεν υπήρχε ο φίλος των παιδιών, θα έτρωγε καθένα από τα δύο παιδιά $5:2=2,5$ σοκολάτες. Τώρα, όμως, πρέπει να δούμε ποιο είναι το ακριβές αποτέλεσμα της διαίρεσης $5 : 3$.

Παρατηρούμε, ότι η διαίρεση δεν είναι τέλεια. Δίνει πηλίκο 1 και αφήνει υπόλοιπο 2. Αν συνεχίσουμε τη διαίρεση, θα πάρουμε πηλίκο το δεκαδικό αριθμό: 1,666...

Επειδή, όμως, το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι το ίδιο πάντα, τα δεκαδικά ψηφία επαναλαμβάνονται και είναι όλα ίσα με 6.

Άρα, δεν μπορούν να μοιραστούν εξίσου δύο σοκολάτες σε τρία παιδιά.

$$\begin{array}{r} 5,000\dots \\ 20 \\ \hline 20 \\ 20 \\ 20 \\ \dots \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 3 \\ \hline 1,6666\dots \end{array}$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

➤ Να γίνει η διαίρεση $1.000.000 : 7$. Τι παρατηρείτε;

$$\begin{array}{r}
 1.000.000,000 \quad | \quad 7 \\
 \hline
 30 \\
 20 \\
 60 \\
 40 \\
 50 \\
 10 \\
 30 \\
 20 \\
 \dots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 142857,142857142857
 \end{array}$$

Σκεφτόμαστε

Επίσης, και στο δεύτερο παράδειγμα βλέπουμε ότι η διαίρεση $1.000.000 : 7$ δεν είναι τέλεια. Δίνει πηλίκο 142.857 και υπόλοιπο 1 . Αν συνεχίσουμε τη διαίρεση θα βρούμε το δεκαδικό αριθμό $142.857,142857142857\dots$ με άπειρα δεκαδικά ψηφία, τέτοια ώστε, να επαναλαμβάνονται συνεχώς τα ίδια έξι ψηφία 142857 .

Μαθαίνουμε



- Τους αριθμούς που βρήκαμε παραπάνω τους ονομάζουμε **περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς**.
- Το τμήμα των επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων κάθε περιοδικού αριθμού ονομάζεται **περίοδος**.

Γενικότερα, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι:

► Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή δεκαδικού ή περιοδικού δεκαδικού αριθμού και συμβολίζεται όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

π.χ. $\frac{5}{3} = 1,\bar{6}$ $\frac{1000.000}{7} = 142857,\overline{142857}$.

Προηγουμένως, είδαμε με ποιόν τρόπο ένας ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί με τη μορφή περιοδικού δεκαδικού αριθμού.

Γεννιέται το ερώτημα αν μπορούμε να κάνουμε και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν μπορούμε ένα περιοδικό δεκαδικό αριθμό να τον γράφουμε με μορφή ρητού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γραφούν με κλασματική μορφή οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί:

(α) $0,\bar{2}$ και (β) $1,\bar{64}$.



Λύση

(α) Θέτουμε $x = 0,\bar{2}$ και έχουμε διαδοχικά:

$$x = 0,222\dots$$

$$10x = 2,222\dots$$

$$10x = 2 + 0,222\dots$$

$$10x = 2 + x$$

$$(10 - 1)x = 2$$

$$9x = 2 \quad x = \frac{2}{9} \quad \text{Δηλαδή: } 0,\bar{2} = \frac{2}{9}$$

(β) Αν $x = 1,\bar{64}$ έχουμε

$$x = 1,646464\dots$$

$$100x = 164,646464\dots$$

$$100x = 164 + 0,646464\dots$$

$$100x = 164 + x - 1$$

$$(100 - 1)x = 163$$

$$99x = 163 \quad x = \frac{163}{99} \quad \text{Δηλαδή: } 1,\bar{64} = \frac{163}{99}$$

Συμπεραίνουμε ότι:

► Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλασματικού ρητού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Βρες τη δεκαδική μορφή των ρητών:

(α) $-\frac{15}{10}$, (β) $\frac{5}{8}$, (γ) $\frac{13}{14}$, (δ) $\frac{20}{11}$, (ε) $\frac{32}{31}$.



2. Βρες την κλασματική μορφή των αριθμών:

(α) $57,\overline{92}$, (β) $2,\overline{8}$, (γ) $3,\overline{83}$, (δ) $7,\overline{4561}$, (ε) $15,\overline{399}$.

3. Βρες μια άλλη δεκαδική μορφή των αριθμών:

(α) $2,\overline{9}$, (β) $7,\overline{69}$, (γ) $7,\overline{3259}$.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ο αρχαίος φιλόσοφος Ζήνωνας, που έζησε στη Μεγάλη Ελλάδα το 490 - 430 π.Χ. διατύπωσε, μεταξύ άλλων, και το παρακάτω παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα: “Ο Αχιλλέας βαδίζει 10 φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα. Δε θα μπορέσει ποτέ να τη φτάσει, αν η χελώνα προηγείται ένα στάδιο (192 μέτρα περίπου) απ’ αυτόν”. Ερεύνησε και προσπάθησε να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις το λόγο για τον οποίο ο Ζήνωνας ισχυρίζεται κάτι τέτοιο.

A.7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ



Ένας υπολογιστής μολύνθηκε από κάποιο ιό, ο οποίος είχε την ιδιότητα να καταστρέφει τα ηλεκτρονικά αρχεία με τον εξής τρόπο: Κάθε μολυσμένο αρχείο μόλυνε, πριν καταστραφεί, τρία άλλα αρχεία μέσα σε μία ώρα λειτουργίας του υπολογιστή.



- Προσπάθησε να βρεις, πόσα μολυσμένα αρχεία υπάρχουν στο τέλος της 5ης ώρας.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε



Συμβολισμοί

n -παράγοντες

- Το γινόμενο $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (είτε ο a είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός), συμβολίζεται με το a^n και λέγεται δύναμη με βάση το a και εκθέτη το φυσικό $n > 1$.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

εκθέτης

βάση

n παράγοντες

- Για $n = 1$, γράφουμε $a^1 = a$
- Η δύναμη a^n διαβάζεται και νιοστή δύναμη του a .

- Η δύναμη a^2 λέγεται και τετράγωνο του a ή a στο τετράγωνο.
- Η δύναμη a^3 λέγεται κύβος του a ή a στον κύβο.

Πρόσημο δύναμης

Παρατηρούμε ότι:

$$(+2)^5 = (+2) (+2) (+2) (+2) (+2) = +32 > 0$$

Γενικά ισχύει ότι:

- ▶ Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.
- Αν $a > 0$, τότε $a^v > 0$

Παρατηρούμε ότι:

$$(-2)^4 = \overbrace{(-2) (-2) (-2) (-2)}^{\text{άρτιο πλήθος}} = +16 > 0$$

Γενικά ισχύει ότι:

- ▶ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.
- Αν $a < 0$ και v άρτιος, τότε $a^v > 0$

Παρατηρούμε ότι:

$$(-2)^5 = \overbrace{(-2) (-2) (-2) (-2) (-2)}^{\text{περιττό πλήθος}} = -32 < 0$$

Γενικά ισχύει ότι:

- ▶ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.
- Αν $a < 0$ και v περιττός, τότε $a^v < 0$

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

Παρατηρούμε ότι: $(-3)^3(-3)^5 =$

$$\begin{aligned} & \text{3 παράγοντες} \quad \text{5 παράγοντες} \\ & = \underbrace{(-3) (-3) (-3)}_{\text{8 παράγοντες}} \underbrace{(-3) (-3) (-3) (-3) (-3)} \\ & = (-3)^8 = (-3)^{3+5} \end{aligned}$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών. $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} 7^8 : 7^3 &= \frac{7^8}{7^3} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 7^{8-3} \end{aligned}$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} (2 \cdot 7)^6 &= (2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7) = \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = \\ &= 2^6 \cdot 7^6 \end{aligned}$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$(a \cdot b)^v = a^v \cdot b^v$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{9}\right)^5 &= \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{2^5}{9^5} \end{aligned}$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^v = \frac{a^v}{b^v}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} (8^3)^7 &= 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 = \\ &= 8^{3+3+3+3+3+3+3} = 8^3 \cdot 7 = 8^{21} \end{aligned}$$

Γενικά ισχύει ότι:

► Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$(a^m)^v = a^{m \cdot v}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$(α) -3^3, (β) (-3)^3, (γ) -3^4, (δ) (-3)^4.$$

Τι παρατηρείτε;



Λύση

(α) Η παράσταση θα είναι: $-3^3 = -3 \cdot 3 \cdot 3 = -27$

(β) Επειδή ο εκθέτης είναι περιττός, η δύναμη θα είναι αρνητικός αριθμός. Άρα, θα είναι:

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -3^3 = -27.$$

(γ) Η παράσταση θα είναι:

$$-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$$

(δ) Επειδή ο εκθέτης είναι άρτιος, η δύναμη θα είναι θετικός αριθμός. Άρα, θα είναι:

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +3^4 = +81$$

2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\Pi = (-2)^3 \cdot 3 - 3^4 + (-2)^4 : 16 + [-1 - (-1) \cdot 8]$$

Λύση

Η σειρά των πράξεων είναι η εξής: 1ο Δυνάμεις, 2ο Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, 3ο Προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, προηγούνται οι πράξεις μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά. Άρα:

$$\begin{aligned} \Pi &= (-2)^3 \cdot 3 - 3^4 + (-2)^4 : 16 + [-1 - (-1) \cdot 8] = \\ &= (-8) \cdot 3 - 81 + (+16) : 16 + [-1 + 8] = \\ &= -24 - 81 + 1 + 7 = -97 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι
αριθμός.

(β) Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη
..... είναι θετικός αριθμός.

(γ) Δύναμη με βάση αριθμό και εκθέτη
περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

(δ) Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια
βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το
..... των εκθετών.

(ε) Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση,
αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη
.....

(στ) Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη,
υψώνουμε ΤΟΥ
γινόμενου στον εκθέτη αυτό.

(ζ) Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη,
υψώνουμε ΤΟΥ
πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

(η) Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη,
υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο
των εκθετών.

2. Βρες με ποιο στοιχείο της 2ης και της 3ης στήλης
αντίστοιχα είναι ίσο κάθε στοιχείο της 1ης στήλης του
πίνακα της επόμενης σελίδας..

$3+5^2$	Διαφορά των 3 και 5^2	75
$(3+5)^2$	Άθροισμα των 3 και 5^2	4
$3 \cdot 5^2$	Γινόμενο των 3 και 5^2	28
$(3 \cdot 5)^2$	Πηλίκο των 3 και 5^2	64
$3 - 5^2$	Τετράγωνο της διαφοράς 3 πλην 5	0,36
$(3 - 5)^2$	Τετράγωνο του πηλίκου 3 δια 5	225
$\frac{3^2}{5}$	Τετράγωνο του αθροίσματος 3 και 5	1,8
$\left(\frac{3}{5}\right)^2$	Τετράγωνο του γινομένου 3 επί 5	-22

3. Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5,$$

$$B = 32 \cdot 5^4 - 25 \cdot 4^5 + 87,5 \cdot 4^3$$

$$\Gamma = -\frac{(-6)^2}{3^5} - \frac{8^4}{(-4)^4} + \frac{10^3}{(-5)^3}$$

A.7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Σύμφωνα με τον κανόνα της διαίρεσης των δυνάμεων με την ίδια βάση, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι:

$$\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^0, \text{ γνωρίζουμε ότι είναι και } \frac{5^7}{5^7} = 1,$$

επομένως $5^0 = 1$. Γενικά ισχύει:



- Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα.

$$a^0 = 1$$

Επίσης, θα είναι:

$$\frac{5^7}{5^8} = 5^{7-8} = 5^{-1}, \text{ γνωρίζουμε ότι είναι και}$$

$$\frac{5^7}{5^8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5}, \text{ άρα } 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{5^6}{5^8} = 5^{6-8} = 5^{-2}, \text{ γνωρίζουμε ότι είναι και}$$

$$\frac{5^6}{5^8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}, \text{ άρα } 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

Κ.Ο.Κ.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι:

- Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη.

$$a^{-v} = \frac{1}{a^v} = \left(\frac{1}{a}\right)^v$$

Επειδή τα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί, όπως και τα a και $\frac{1}{a}$ στην προηγούμενη σχέση, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$$

- ◆ Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:

$$(a) (-2)^{-5}, (b) -3^{-3}, (c) (-234567)^0.$$

Λύση

$$(a) (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

$$(b) -3^{-3} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27} \quad (c) (-234567)^0 = 1$$



2. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$(α) [(-3)^3]^2, \quad (β) 3^3 : 3^{-2}, \quad (γ) (-2)^4 \cdot (-2)^6, \quad (δ) \frac{12^{-3}}{3^{-3}}.$$

Λύση

$$(α) [(-3)^3]^2 = (-3)^{3 \cdot 2} = (-3)^6 = 729$$

$$(β) 3^3 : 3^{-2} = 3^{3 - (-2)} = 3^{3 + 2} = 3^5 = 243$$

$$(γ) (-2)^4 \cdot (-2)^6 = (-2)^{4+6} = (-2)^{10} = 1024$$

$$(δ) \frac{12^{-3}}{3^{-3}} = \left(\frac{12}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{1}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

3. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} , 10^{-7} .

Λύση

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0,00001$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000} = 0,000001$$

$$10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10000000} = 0,0000001$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

α	$\frac{1}{2}$	-1	10
β	-2	$-\frac{1}{2}$	-10
γ	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	0,01
$(\alpha + \beta)^2$			
$(\alpha \beta)^2$			
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$			
$(-\alpha)^{-2}$			
$(\gamma\beta)^{-1}$			

2. Υπολόγισε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (-1)^{-3} + (-1)^{-2} + (-1)^{-1} + (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2$$

$$B = [(-2)^2]^5 [(-3)^2]^2 + [(-23,5)^2 (23,5)^{-2}]^5,$$

$$\Gamma = \frac{(-6)^{-5}}{12^{-5}} + \frac{16^{-4}}{(-32)^{-4}} - \frac{5^{-3}}{(-10)^{-3}}$$

3. Βρες ποιος από τους αριθμούς:

$$\frac{1}{10}, 10^3 \cdot 5 \cdot 2, \frac{1}{10^3}, 10^3 + 10^2$$

δεν είναι δύναμη του 10.

4. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

x	x^{-3}	x^3	x^{-1}
0,001			
0,01			
0,1			
-10			
-100			
$2 \cdot 10^4$			
$5 \cdot 10^{-3}$			
$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{2}$			
$-\frac{1}{5}$			

5. Συμπλήρωσε τον πίνακα:

\cdot	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
10^{-3}							
10^{-2}							
10^{-1}							
10^0							
10^1							
10^2							
10^3							

Α.7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Η διάμετρος ενός ατόμου υδρογόνου είναι $0,00000000016 \text{ cm}$.

➤ Μπορείς να διαβάσεις και να θυμηθείς εύκολα αυτόν τον αριθμό;

Παρατηρούμε ότι υπάρχει δυσκολία στη γραφή και των αριθμών που εκφράζουν πολύ μικρά μεγέθη. Όμως η κατάλληλα προσαρμοσμένη χρήση της «τυποποιημένης μορφής» των αριθμών, που μάθαμε στην παράγραφο 3.4, για τη γραφή των πολύ μεγάλων αριθμών, μπορεί να βοηθήσει στην αντιμετώπιση και της γραφής των πολύ μικρών αριθμών.



Μαθαίνουμε

• Όπως οι πολύ μεγάλοι, έτσι και οι πολύ μικροί αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα στη μορφή: $\alpha \cdot 10^{-\nu}$, όπου α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10 και ν φυσικό αριθμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να εκφραστεί με τυποποιημένη μορφή το βάρος ενός μορίου νερού, που είναι: $0,000000000000000000000029 \text{ gr}$.

Λύση



Για να εκφράσουμε το βάρος ενός μορίου νερού με την τυποποιημένη μορφή πρέπει να βρούμε εκείνη τη δύναμη του 10 που, όταν πολλαπλασιάσει ένα δεκαδικό αριθμό με ένα μόνο ακέραιο ψηφίο, δίνει ξανά το παραπάνω βάρος. Δηλαδή:

$$\underbrace{0,0000000000000000000000029}_{23 \text{ θέσεις}} \text{ gr} = 2,9 \cdot 10^{-23}$$

Για να βρούμε τον κατάλληλο ακέραιο εκθέτη της δύναμης του 10 μετράμε τις δεκαδικές θέσεις μετά την υποδιαστολή.

2. Να εκφραστούν με τυποποιημένη μορφή οι αριθμοί:

(α) 0,123456789, (β) 0,00000003598,

(γ) 0,000008:1000000

Λύση

(α) $0,123456789 = 1,23456789 \cdot 10^{-1}$,

(β) $0,00000003598 = 3,598 \cdot 10^{-8}$,

(γ) $0,000008 : 1000000 = 0,0000000000008 = 8 \cdot 10^{-12}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Γράψε με τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

(α) Η απόσταση Γης - Σελήνης είναι 384.400.000 m.

(β) Η ηλικία της Γης είναι 4.500.000.000 έτη.

(γ) Η απόσταση Γης - Ήλιου είναι 149.600.000 km.



2. Η μάζα του ατόμου του υδρογόνου είναι $1,67 \cdot 10^{-27}$ gr. Να βρεις πόσα άτομα περιέχει 1 gr υδρογόνου.

3. Γράψε με τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

**(α) Η διάμετρος ενός πυρήνα ατόμου είναι
0,000000000000001 cm.**

**(β) Το βάρος ενός μορίου αλατιού είναι
0,00000000000000000000000097 gr.**

Ανακεφαλαίωση

Ακέραιοι αριθμοί:

..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

Ρητοί αριθμοί:

Φυσικοί, Κλάσματα, Δεκαδικοί (Θετικοί και Αρνητικοί)

Ομόσημοι ρητοί αριθμοί:

Έχουν το ίδιο πρόσημο

Ετερόσημοι ρητοί αριθμοί:

Έχουν αντίθετο πρόσημο

Απόλυτη τιμή ρητού $|α|$:

Εκφράζει την απόσταση σημείου με τετμημένη $α$ από την αρχή 0 του άξονα των ρητών.

Αντίθετοι ρητοί αριθμοί:

Οι ετερόσημοι με ίδια απόλυτη τιμή

Αν $α > 0$, τότε $|α| = α$
και αν $α < 0$, τότε $|α| = -α$

Πράξεις μεταξύ ρητών αριθμών

Πρόσθεση

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

- $α + β = β + α$ (Αντιμεταθετική)
- $α + (β + γ) = (α + β) + γ$ (Προσεταιριστική)

- $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ (α και $-\alpha$, αντίθετοι)

Αφαίρεση

- $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

Πολλαπλασιασμός

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (Αντιμεταθετική)
- $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ (Προσεταιριστική)
- $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
- $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$ (α και $\frac{1}{\alpha}$ αντίστροφοι)
- $\alpha \cdot 0 = 0$

Διαίρεση

- $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση:

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Προτεραιότητα Πράξεων

- 1 Ο Δυνάμεις →
- 2 Πολλαπλασιασμοί & Διαιρέσεις →
- 3 Προσθέσεις & Αφαιρέσεις

Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ορισμοί

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (n φορές)}$$

Το a λέγεται βάση και το n εκθέτης

$$a^0 = 1 \text{ και } a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ ή } a^{-n} =$$

Ιδιότητες των δυνάμεων

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

(όπου: $a, b \neq 0$ και m, n φυσικοί αριθμοί)

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

A. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Γράψε “Σ” ή “Λ” για κάθε σωστή ή λανθασμένη πρόταση:

1. $7,2 + (-5) = 2,2$

2. $-1,2 - 0,2 = -1$

3. $-2,2 + 2,2 = -4,4$

4. $7,8 - 8 = 0,2$

5. $3,5 - 9 = -5,5$

6. $3,5 - 4,5 = -1$

7. $6 - 15 = -11$

8. $3 - 8,4 = -5,4$

9. $6 - 17 = -9$

10. $59 - 64 = -5$

B. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

1. Συμπλήρωσε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

(α) $(\dots 8) + (\dots 3) + (\dots 6) + (\dots 5) = +4$

(β) $(\dots 8) + (\dots 3) + (\dots 6) + (\dots 5) = -10$

(γ) $(\dots 3,7) + (\dots 14,8) + (\dots 5,2) + (\dots 16,3) = 0$

(δ) $(\dots 3,7) + (\dots 14,8) + (\dots 5,2) + (\dots 16,3) = -10,4$

2. Βρες ποιο από τα Α, Β, Γ, Δ και Ε είναι το μεγαλύτερο, αν γνωρίζεις ότι:

$$A + (-1) = B + 3 = \Gamma + (-3) = \Delta + 4 = E + (-5)$$

3. Βρες τα αθροίσματα:

(α) $1 + (-2) + 3 + (-4) + \dots + 49 + (-50)$,

(β) $1 + (-2) + 3 + (-4) + \dots + (-198) + 199$

4. Βάλε τα γράμματα Α, Ε, Ι, Κ, Ο, Π, Ρ, Υ και Ω με αύξουσα σειρά και γράψε τη λέξη που βρήκες, όταν:

$$A = 4 + (-1,5),$$

$$E = -0,8 + (-4,8),$$

$$I = -0,8 + 4,8,$$

$$K = 4 + 1,5,$$

$$O = 0,8 + 4,8,$$

$$\Pi = 0,8 + (-0,8),$$

$$P = 0,8 + (-4,8),$$

$$Y = -4 + (-1,5),$$

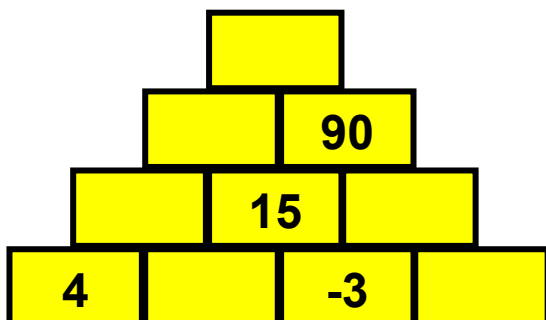
$$\Omega = -4 + 1,5$$

5. Πολλαπλασίασε ανά δύο τους τρεις ρητούς $-6,5$, $3,5$ και $-4,5$ με όλους τους δυνατούς τρόπους.

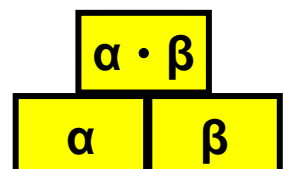
(α) Πόσοι τρόποι υπάρχουν;

(β) Ποιος από τους τέσσερις ρητούς $29,25$, $-15,75$, $-22,75$ και $15,75$ ως αποτέλεσμα των πολλαπλασιασμών αυτών είναι λάθος;

6. Συμπλήρωσε τα κενά στο σχήμα:

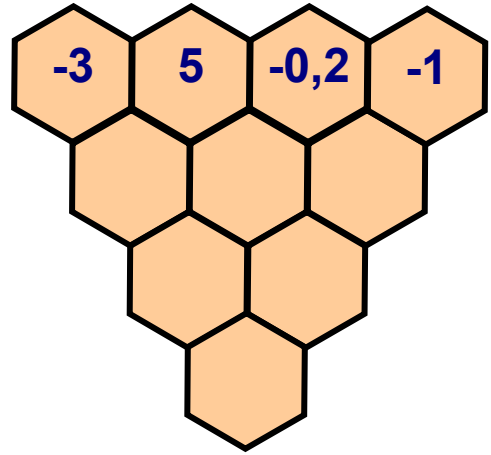
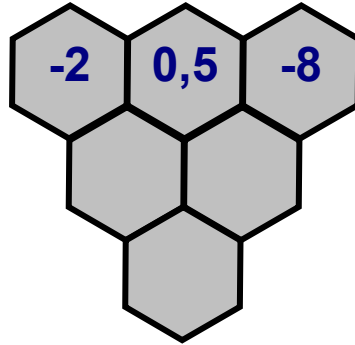
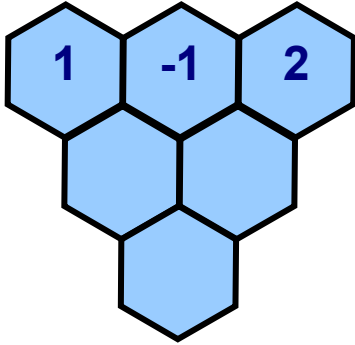
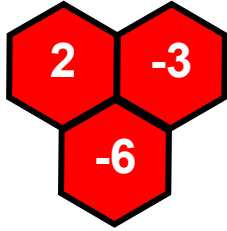


Αν γνωρίζεις ότι:



7. Συμπλήρωσε τα κενά στα σχήματα, αν γνωρίζεις

ότι:



Γ. Ασκήσεις Αντιστοίχισης

Αντιστοίχισε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης στο στοιχείο της δεύτερης στήλης που βγάζει το ίδιο αποτέλεσμα.

(α)

$(+14) + (-17)$
$(-12) + (-8)$
$(+11) + (-9)$
$(-5) + (+25)$
$(-16) + (+16)$

$(+3) + (-23)$
$(+11) + (-11)$
$(-22) + (+19)$
$(-19) + (+21)$
$(+37) + (-17)$

(β)

$(+13) - (-18)$
$(+11) - (+3)$
$(-5) - (+25)$
$(-16) - (-16)$
$(-12) - (-8)$

$(+3) - (+7)$
$(+13) - (+13)$
$(-37) - (-7)$
$(+17) - (+9)$
$(-2) - (-33)$

(Y)

$(-2) \cdot 0,5 \cdot 9 \cdot 10$	900
$2 \cdot 5 \cdot (-0,9) \cdot (-10)$	-900
$2 \cdot (-5) \cdot (-9) \cdot (-10)$	9
$-2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot (-10)$	-90
$0,2 \cdot (-5) \cdot (-0,9) \cdot 10$	90

Το Παράπονο της Άννας

Η βιβλιοθήκη ήταν πάντα στην ίδια θέση, από τότε που η Άννα θυμάται τη ζωή της σε τούτο το δωμάτιο. Ήταν το τελευταίο πράγμα που έβλεπε πριν την πάρει ο ύπνος, αφού το κρεβάτι της βρισκόταν ακριβώς απέναντι.

Της άρεσε πολύ να τοποθετεί στα ράφια τα βιβλία της, αλλά και ότι άλλο αγαπούσε εύρισκε πάντα θέση στη μικρή βιβλιοθήκη. Συχνά τα μετακινούσε και τα έφτιαχνε διαφορετικά για να τα αγαπήσει πάλι από την αρχή με νέα διάθεση. Μόνο στους “κύβους” της δεν άλλαζε ποτέ θέση. Έμεναν πάντα στο ίδιο ράφι που ήταν ψηλά στη μέση περίπου της βιβλιοθήκης. Εκεί που το βλέμμα έπεφτε πιο συχνά. Αν και το ράφι για τους κύβους ήταν πάντα το ίδιο, τους άλλαζε τακτικά διάταξη. Έχτιζε κάθε φορά με άλλο τρόπο τα ξύλινα παραλληλεπίπεδα αφήνοντας ανάμεσα κενά σαν παράθυρα και πόρτες. Στο τέλος τοποθετούσε στην κορυφή, σα στέγη, τις πυραμίδες και τους κώνους.

Κάθε βράδυ πριν ξαπλώσει γύριζε το φωτιστικό του γραφείου με τέτοιο τρόπο ώστε να φωτίζει τους κύβους της. Το φως τρύπωνε από τα κενά και με τις σκιές έδινε βάθος στο χώρο, στις σκέψεις και στα όνειρα που έκανε η Άννα λίγο πριν ο ύπνος της κλείσει τα βλέφαρα

Ένα βράδυ το ξαφνικό μπουρίνι και η ασυνήθιστα δυνατή καταιγίδα αναστάτωσε την περιοχή. Το ρεύμα κόπηκε και το σπίτι βυθίστηκε στο σκοτάδι. Η μητέρα της Άννας άναψε ένα κερί και το ακούμπησε στο γραφείο της.

- Δεν ξέρουμε πότε θα έρθει το φώς καλύτερα να κοιμηθείς, της είπε η μητέρα της.

Η Άννα μισοξάπλωσε στο κρεβάτι και κοίταξε το δωμάτιό της κάτω από το φως του κεριού που

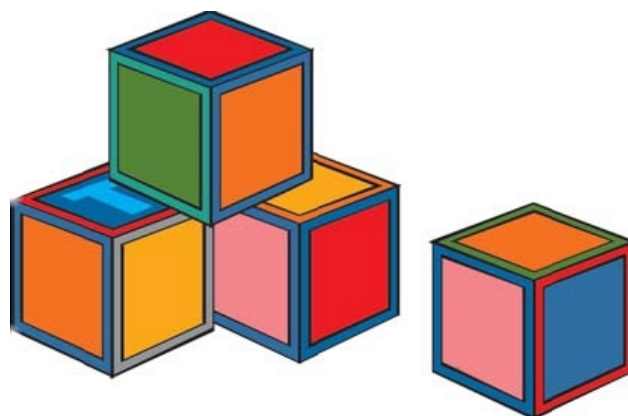
τρεμόπαιζε. Όσες φορές και αν το ξανάφερε στο νου της ποτέ δεν ήταν σίγουρη αν ήταν όνειρο η πραγματικότητα αυτό που είδε εκείνο το βράδυ.

Όλα γύρω μίκρυναν και χάθηκαν στο σκοτάδι και μόνο οι “κύβοι” μεγάλωσαν και έμειναν να αιωρούνται φωτισμένοι στη μέση του απέραντου χώρου. Δεν ήταν όμως οι κύβοι που ήξερε. Ήταν μια σύνθεση διαφορετική, μια άλλη κατασκευή, κάτι σαν το ναό του Ποσειδώνα στο Σούνιο που έμοιαζε να πλέει φωτισμένος στη σκοτεινή απεραντοσύνη. Δίπλα του βρισκόταν οι πυραμίδες της Αιγύπτου στη σκοτεινή έρημο, φωτισμένες από την πανσέληνο. Πιο πίσω ήταν το Κολοσσαίο της Ρώμης κοντά στον καθεδρικό του Μιλάνου και στο βάθος τα Μετέωρα που φωτίζονταν από τους κεραυνούς. Κάποια στιγμή της φάνηκε ότι είδε στο βάθος τη Μονεμβασιά ή μπορεί και τη Σαντορίνη, με τα σπίτια σκαρφαλωμένα στη κορυφή για να σωθούν από τα νερά. Μετά, ήταν σίγουρη πως είδε φωτισμένο τον Παρθενώνα γιατί γνώρισε τα τρίγωνα στα αετώματά του. Και αμέσως λίγο πιο κει το Ολυμπιακό στάδιο τη μέρα της μεγάλης γιορτής να απογειώνεται μέσα από τα πυροτεχνήματα.

- Θεέ μου, σκέφτηκε, τι ομορφιά. Βάλε εσύ το φως και άσε με να βάλω εγώ το σχήμα να φτιάξουμε από την αρχή τον κόσμο.

- Επιτέλους ήρθε το φως, ακούστηκε η φωνή της μητέρας της.

- Δεν εννοούσα αυτό το φως, Θεέ μου, ψιθύρισε με παράπονο η Άννα...



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο –

Ανάλογα ποσά & αντιστρόφως ανάλογα ποσά

(συνέχεια από 2ο τόμο)

6.5 Προβλήματα αναλογιών.....	5
6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	13
Ανακεφαλαίωση	22
Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης	26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο –

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί..... 29-30

7.1 Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) - Η ευθεία των ρητών - Τετμημένη σημείου.....	33
7.2. Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών.....	41
7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών	49
7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών	56
7.5. Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών.....	63
7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών.....	72
7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών.....	76
7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό.....	80
7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο.....	87
7.10. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών	93
Ανακεφαλαίωση.....	96
Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης.....	99

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.