Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Β΄
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Τόμος 1ος

<u>ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ</u>

Ιωάννης Βανδουλάκης, ***Μαθηματικός***
Χαράλαμπος Καλλιγάς, ***Μαθημ/κός-Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης***
Νικηφόρος Μαρκάκης, ***Μαθημ/κός-Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης***
Σπύρος Φερεντίνος, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

<u>ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ</u>

Χαράλαμπος Τσίτουρας, ***Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ-Χαλκίδας***
Γεώργιος Μπαραλός, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθ/κών***
Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου, ***Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

<u>ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ</u>

Κλειώ Γκιζελή, ***Ζωγράφος***
Ιόλη Κυρούση, ***Γραφίστρια***

<u>ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>

Βαρβάρα Δερνελή, ***Φιλόλογος Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ</u>

Αθανάσιος Σκούρας, ***Σύμβουλος Παιδαγωγ. Ινστιτούτου***

<u>ΕΞΩΦΥΛΛΟ</u>

Μανώλης Χάρος, ***Ζωγράφος***

<u>ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ</u>

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Στη συγγραφή του πρώτου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και η Θεοδώρα Αστέρη, ***Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης***

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Τόμος 1ος

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός

Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας

Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

Βασικές Γεωμετρικές έννοιες

ΜΕΡΟΣ Β΄

1ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ
(330 – 270 π.Χ.)

1.1. Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο

- ***Σχεδιάζω και συμβολίζω επίπεδα, σημεία, ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα, ημιευθείες και ημιεπίπεδα***
- ***Διακρίνω τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από δύο σημεία και σε ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία***
- ***Γνωρίζω ότι από δύο σημεία διέρχεται μία μοναδική ευθεία, ενώ από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες***
- ***Γνωρίζω ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα***

1.2. Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα

- ***Κατανοώ την έννοια της γωνίας και σχεδιάζω, συμβολίζω και διαβάζω γωνίες***
- ***Γνωρίζω τα είδη των γραμμών και διακρίνω τις κυρτές από τις μη κυρτές πολυγωνικές γραμμές***
- ***Γνωρίζω την έννοια του ευθυγράμμου σχήματος και διακρίνω το κυρτό από το μη κυρτό ευθύγραμμο σχήμα***
- ***Γνωρίζω ότι δύο ευθύγραμμα οχήματα είναι ίσα αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο***

1.3. Μέτρηση σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθυγράμμου τμήματος

- ***Γνωρίζω ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει συγκεκριμένο μήκος και το υπολογίζω***

- ***Γνωρίζω τις μονάδες μέτρησης μήκους στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τον συμβολισμό τους και τις μεταξύ τους σχέσεις***
- ***Γνωρίζω ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν ίσα μήκη και συγκρίνω ευθύγραμμα τμήματα με το χάρακα και με το διαβήτη***
- ***Κατασκευάζω τμήμα δοθέντος μήκους με αρχή γνωστό σημείο πάνω σε γνωστή ευθεία και να βρίσκω την απόσταση σημείων με χάρακα***
- ***Γνωρίζω ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο και το προσδιορίσω με τη βοήθεια του χάρακα***
- ***Βρίσκω το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος με το χάρακα***
- ***Γνωρίζω ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι η μικρότερη σε μήκος γραμμή από όλες τις γραμμές που συνδέουν τα σημεία Α και Β***

1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

- ***Μπορώ να προσθέτω και να αφαιρώ ευθύγραμμα τμήματα***

1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας

- ***Γνωρίζω ότι κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο, το υπολογίζω και γνωρίζω ότι αυτό εξαρτάται μόνο από το «άνοιγμα» των πλευρών της***
- ***Γνωρίζω τη βασική μονάδα μέτρησης γωνιών και υπολογίζω με μοιρογνωμόνιο το μέτρο τους***

- ***Συγκρίνω γωνίες με διαφανές χαρτί ή με μοιρογνωμόνιο και γνωρίζω ότι δύο γωνίες είναι ίσες αν και μόνο αν έχουν το ίδιο μέτρο***
- ***Σχεδιάζω γωνίες όταν γνωρίζω το μέτρο τους***
- ***Γνωρίζω τι είναι η διχοτόμος μιας γωνίας, ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο και τη σχεδιάζω***

1.6. Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

- ***Γνωρίζω και σχεδιάζω διάφορα είδη γωνιών (οξεία, ορθή, αμβλεία)***
- ***Διαπιστώνω με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου αν μια γωνία είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία και πότε δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους***
- ***Γνωρίζω ότι από ένα σημείο άγεται μία και μόνο κάθετη σε μία ευθεία και την χαράσσω με την βοήθεια του μοιρογνωμονίου ή του γνώμονα***

1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών

- ***Γνωρίζω και σχεδιάζω εφεξής γωνίες και υπολογίζω το άθροισμα δύο ή και περισσοτέρων γωνιών***

1.8. Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες

- ***Γνωρίζω πότε δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές και πότε συμπληρωματικές***
- ***Γνωρίζω ότι, όταν οι μη κοινές πλευρές δύο εφεξής γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες, οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και αντιστρόφως***

- ***Γνωρίζω ότι, όταν οι μη κοινές πλευρές δύο εφεξής γωνιών είναι κάθετες ημιευθείες, οι γωνίες είναι συμπληρωματικές και αντιστρόφως***
- ***Υπολογίζω και σχεδιάζω τη παραπληρωματική και τη συμπληρωματική μιας γωνίας***
- ***Γνωρίζω πότε δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες και σχεδιάζω δύο κατακορυφήν γωνίες***

1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

- ***Γνωρίζω πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες και ότι αν δύο ευθείες είναι κάθετες σε μία τρίτη, τότε θα είναι μεταξύ τους παράλληλες***
- ***Γνωρίζω ότι από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται μία και μόνο μία ευθεία παράλληλη προς αυτήν και τη χαράσσω με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου ή του γνώμονα***

1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων

- ***Κατανοώ τι σημαίνει απόσταση σημείου από ευθεία και την υπολογίζω με τη βοήθεια του γνώμονα και του χάρακα***
- ***Κατανοώ τι σημαίνει απόσταση δύο παραλλήλων και την υπολογίζω με τη βοήθεια του γνώμονα και του χάρακα***

1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

- ***Κατανοώ την έννοια του κύκλου, αναγνωρίζω τα στοιχεία του και τον σχεδιάζω***

• ***Διακρίνω τον κύκλο από τον κυκλικό δίσκο και σχεδιάζω με κανόνα και διαβήτη ένα τρίγωνο, όταν δίνονται οι τρεις πλευρές του***

1.12. Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντιστοίχου τόξου – Μέτρηση τόξου

• ***Γνωρίζω ότι ως μέτρο ενός τόξου ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας και ότι στον ίδιο κύκλο (ή σε ίσους κύκλους), ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα και αντιστρόφως***

• ***Κατασκευάζω, με κανόνα και διαβήτη, γωνία ίση με δεδομένη και σχεδιάζω με κανόνα και διαβήτη ένα τρίγωνο όταν δίνονται: (α) δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία και (β) μία πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες***

1.13. Θέσεις ευθείας και κύκλου

• ***Διακρίνω αν μία ευθεία είναι τέμνουσα ή εφαπτομένη του κύκλου και σχεδιάζω την εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του***

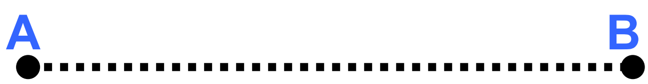
Β.1.1. Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο

Στο Δημοτικό μάθαμε τις βασικές γεωμετρικές έννοιες όπως σημείο, ευθεία, επίπεδο και γνωρίσαμε τα απλά γεωμετρικά σχήματα όπως τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, τετράγωνο και κύκλο.
Τώρα αφού ξαναθυμηθούμε αυτές τις έννοιες και τα σχήματα, μπορούμε να αναζητήσουμε περισσότερα χαρακτηριστικά τους στοιχεία, να ανακαλύψουμε τις ιδιότητές τους και να προχωρήσουμε σε ποιο σύνθετα σχήματα. Έτσι θα ασκήσουμε περισσότερο την παρατηρητικότητά μας, θα βελτιώσουμε την αντίληψη και θα οργανώσουμε καλύτερα τις σκέψεις. Ας αρχίσουμε λοιπόν.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Πώς μπορείς να ονομάσεις το σχήμα μιας τεντωμένης κλωστής;

Το σχήμα που φαίνεται πιο κάτω αποτελείται από μερικά σημεία το ένα δίπλα στο άλλο.



- ***Μπορείς να το χαρακτηρίσεις με το ίδιο τρόπο; Κι αν όχι, γιατί;***

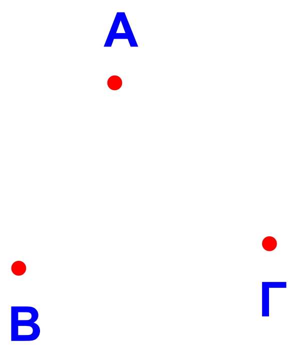
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Δίνονται τρία διαφορετικά σημεία Α, Β και Γ. Ένωσέ τα με ευθύγραμμα τμήματα, ανά δύο, και δώσε ονομασία

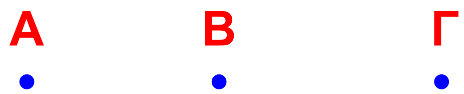
σε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται.

➢ ***Τι παρατηρείς;***

1η περίπτωση



2η περίπτωση



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Το σημείο

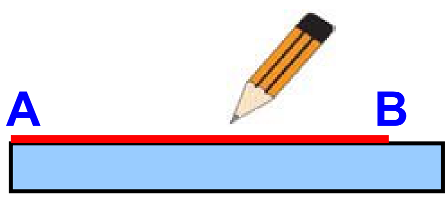
- **Η άκρη του μολυβιού μας, οι κορυφές ενός σχήματος, η μύτη μιας βελόνας, μας δίνουν την έννοια του σημείου.**

Το ευθύγραμμο τμήμα

- **Μία τεντωμένη κλωστή με άκρα Α και Β μας δίνει μια εικόνα της έννοιας του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.**

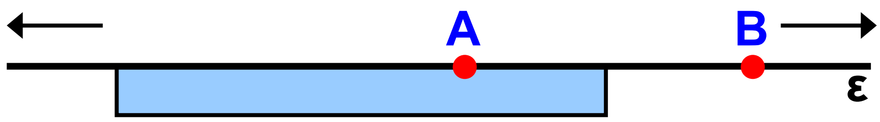
- **Τα σημεία Α και Β είναι τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.**
- **Λέμε ότι τα σημεία Α και Β ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ**

◆ **Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα, συνδέοντας δύο σημεία Α και Β, με τη βοήθεια ενός χάρακα *(“κανόνα”)*.**

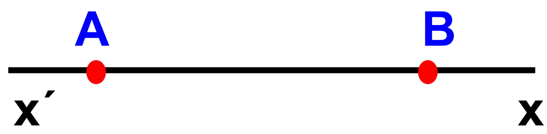


Η ευθεία

● Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ**, τότε το νέο σχήμα, που **δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος**, λέγεται **ευθεία.**

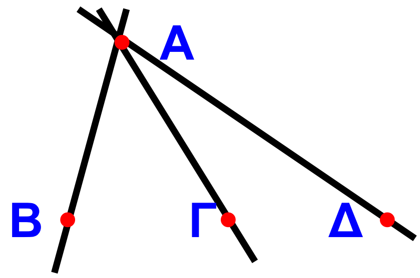


◆ Συμβολίζουμε μια ευθεία με ένα μικρό γράμμα από τα αρχικά του αλφαβήτου, π.χ. (ε), ή με δύο μικρά γράμματα από τα τελευταία του αλφαβήτου π.χ. x΄x, y΄y.



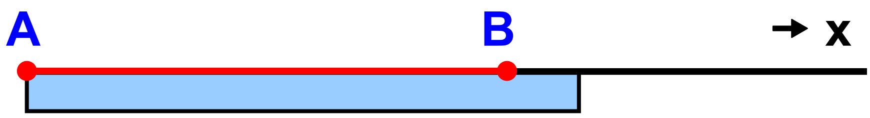
► Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.

► Από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία.



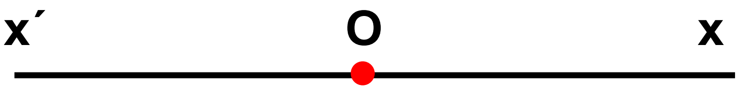
Η ημιευθεία

● Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το Β, τότε το νέο σχήμα, που **έχει αρχή το Α αλλά δεν έχει τέλος**, λέγεται **ημιευθεία.**



◆ Η ημιευθεία συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα που δηλώνει την αρχή της και ένα μικρό από τα τελευταία γράμματα, π.χ. Αx, Βy κ.λπ.

► Εάν Ο είναι ένα σημείο της ευθείας x΄x, τότε με αρχή το Ο ορίζονται δύο ημιευθείες Οx και Οx΄, οι οποίες λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες**.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Έχεις ακούσει εκφράσεις όπως: “Στο επίπεδο του ορίζοντα φαίνεται να χάνεται ο δρόμος”. “Οι χώρες της Δύσης έχουν υψηλό επίπεδο ανάπτυξης”. “Η επίπεδη οθόνη είναι καλύτερη από την κυρτή”. “Οι σχέσεις τους βρίσκονται σε καλό επίπεδο”. “Η επιφάνεια του εδάφους στην περιοχή αυτή είναι επίπεδη”.

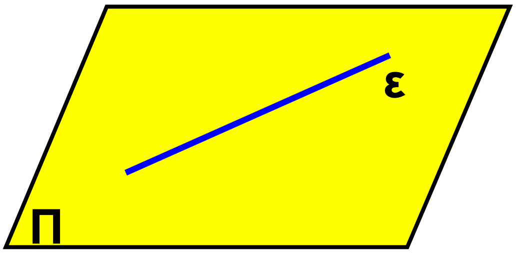
Αλλά και στον υλικό κόσμο, που βρίσκεται γύρω μας, μπορείς να δεις και να αναγνωρίσεις πολλές επίπεδες επιφάνειες. Τους τοίχους της τάξης, την οροφή του δωματίου, ένα κάδρο, την πίστα προσγείωσης, την επιφάνεια του ήρεμου νερού, τον ισημερινό της Γης.

- ***Ποιο χαρακτηριστικό ή ονομασία μπορείς να δώσεις σε μια τέτοια επιφάνεια;***

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

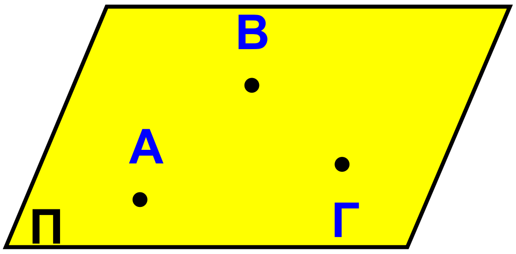
Το επίπεδο

● **Επίπεδο** είναι μια επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.

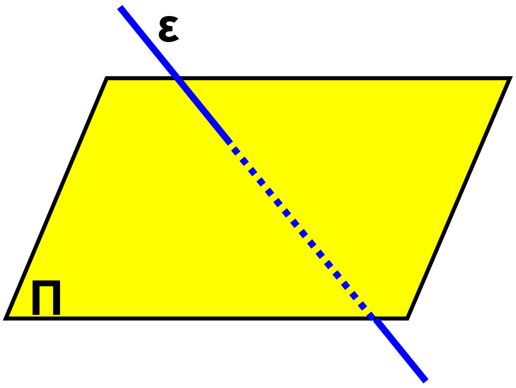


► Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.

► Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.



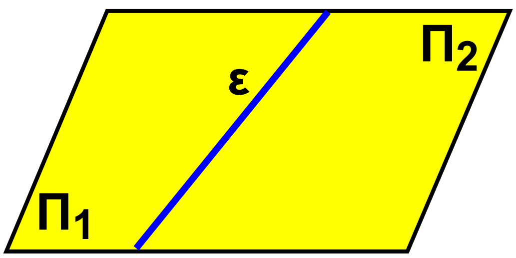
► Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη, ώστε, αν θέλουμε να περάσουμε από το ένα μέρος του χώρου στο άλλο, πρέπει να διαπεράσουμε το επίπεδο.



◆ Η **ονομασία** του επιπέδου δίνεται με ένα **κεφαλαίο γράμμα** του αλφάβητου π.χ. Π, Ρ, Σ κ.λπ.

Το ημιεπίπεδο

● Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο ημιεπίπεδα.

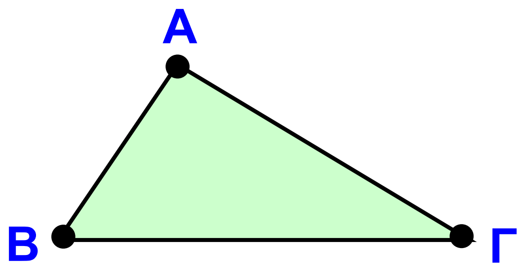


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Ας πάρουμε από τα γνωστά μας σχήματα το τρίγωνο, με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ και το τετράπλευρο, με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και ας δούμε, ποια ονομασία έχουν τα ευθύγραμμα τμήματα που βλέπουμε στα σχήματα αυτά.***

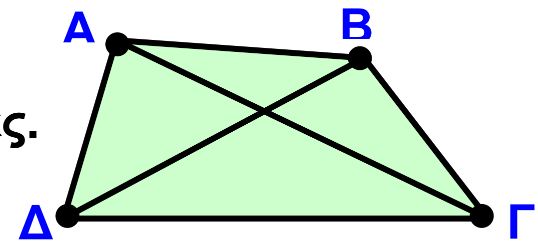
Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ που ορίζονται από δύο κορυφές, λέγονται πλευρές του τριγώνου.



Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έχει πλευρές τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ που ορίζονται από διαδοχικές κορυφές.

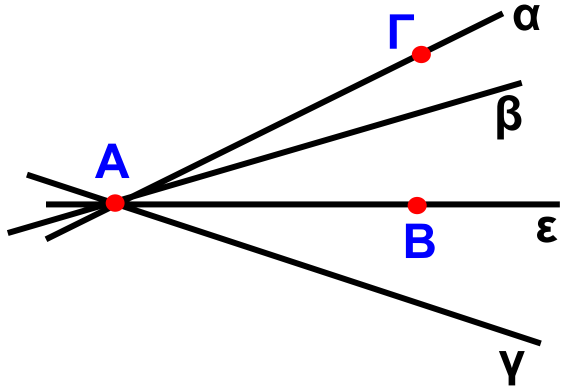
Τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ, που ορίζονται από μη διαδοχικές κορυφές, λέγονται διαγώνιες του τετραπλεύρου.



2. ***Έστω τρία σημεία Α, Β και Γ που δεν ανήκουν και τα τρία σε μια ευθεία. Πόσες ευθείες περνούν από το Α; Πόσες από τις ευθείες αυτές περνούν από το Β; Το Γ είναι σημείο της ευθείας ΑΒ;***

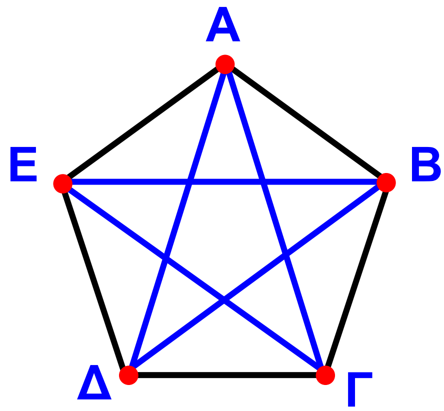
Λύση

Από το Α διέρχονται άπειρες ευθείες. Μια από αυτές περνάει και από το Β.



Επειδή τα σημεία Α, Β και Γ δεν ανήκουν και τα τρία σε μια ευθεία, το σημείο Γ δεν μπορεί να είναι σημείο της ευθείας ΑΒ.

3. Στο σχήμα φαίνονται πέντε σημεία, τα Α, Β, Γ, Δ και Ε. Να χαράξετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα, που έχουν άκρα τα σημεία αυτά. Πόσα διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα είναι;



Λύση

Κάθε σημείο είναι άκρο ενός από τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα, που το συνδέουν με τα υπόλοιπα τέσσερα σημεία. Επομένως:

Το σημείο Α είναι άκρο των τμημάτων: ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ,ΑΕ
Το σημείο Β είναι άκρο των τμημάτων: ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ
Το σημείο Γ είναι άκρο των τμημάτων: ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ, ΓΕ
Το σημείο Δ είναι άκρο των τμημάτων: ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ΔΕ
Το σημείο Ε είναι άκρο των τμημάτων: ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ

Στα παραπάνω, κάθε τμήμα εμφανίζεται δύο φορές π.χ. το ΑΒ και ΒΑ, αφού το τμήμα έχει δύο άκρα. Έτσι, στο σχήμα, δεν είναι είκοσι (20) διαφορετικά τμήματα, αλλά δέκα (10) τα: ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΔ, ΓΕ, ΔΕ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Ένα ευθύγραμμο τμήμα αποτελείται από τα άκρα του Α και Β αλλά και τα .... σημεία που βρίσκονται ανάμεσα σ' αυτά τα δύο.

(β) Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πέρα από τα δύο άκρα του,

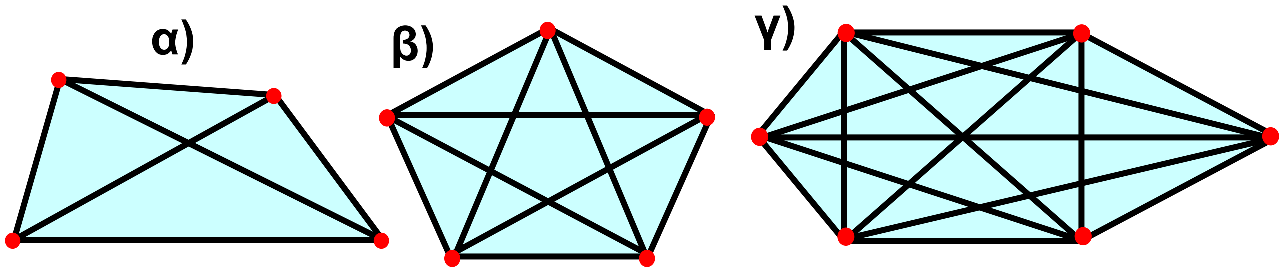
Α και Β, παίρνουμε το σχήμα που λέγεται ....

(γ) Αν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πέρα από το ένα μόνο άκρο του, π.χ. το Β, παίρνουμε το σχήμα που λέγεται ....

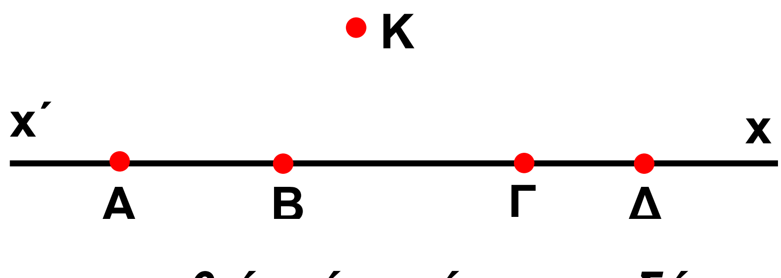
(δ) .... λέγονται δύο ημιευθείες που έχουν κοινή αρχή και που οι δύο μαζί αποτελούν μία ευθεία.

(ε) Η επιφάνεια, πάνω στην οποία η απεριόριστη ευθεία γραμμή εφαρμόζει παντού ολόκληρη είναι το ....

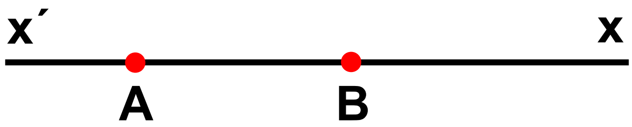
2. Να δώσεις δική σου ονομασία σε όλα (α) τα σημεία και (β) τα ευθύγραμμα τμήματα των παρακάτω ευθυγράμμων σχημάτων.



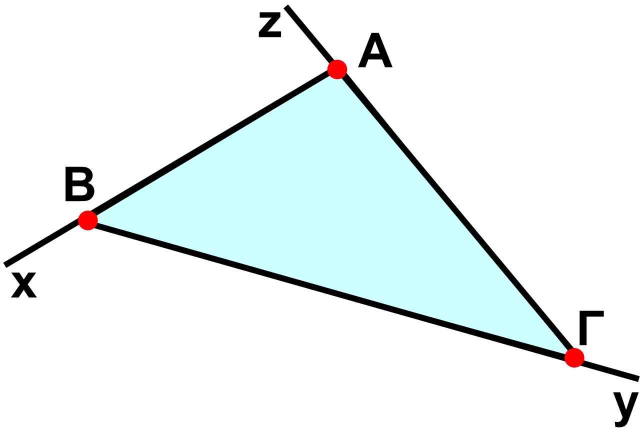
3. Πάρε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ πάνω σε μια ευθεία και ένα σημείο Κ που δεν βρίσκεται στην παραπάνω ευθεία. Ένωσε το Κ με τα Α, Β, Γ, Δ και ονόμασε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα του σχήματος.



4. Πάνω σε μια ευθεία x΄x παίρνουμε δύο σημεία Α και Β. Ονόμασε τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το Α και τις αντικείμενες ημιευθείες που έχουν αρχή το Β.



5. ***Στο διπλανό σχήμα χάραξε τις αντικείμενες ημιευθείες των ημιευθειών ΑΒx, ΒΓy και ΓΑz.***



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. ***Σχεδίασε ένα πολύγωνο που να έχει:***

(α) Λιγότερες διαγώνιες από πλευρές,
(β) ίδιο αριθμό διαγωνίων και πλευρών,
(γ) περισσότερες διαγώνιες από πλευρές.

2. ***Στον παρακάτω χάρτη φαίνονται έξι (6) πόλεις της Ελλάδας, που δε βρίσκονται ανά τρεις στην ίδια ευθεία:***

Α (Αλεξανδρού-πολη),
Ρ (Ρόδος),
Η (Ηράκλειο),
Χ (Χανιά),
Κ (Κέρκυρα) και
Θ (Θεσσαλονίκη).

Μπορείς να σχεδιάσεις τις απ' ευθείας αεροπορικές συνδέσεις μεταξύ των πόλεων αυτών; Ονόμασε τις συνδέσεις αυτές χρησιμοποιώντας τα γράμματα των πόλεων. Μπορείς να βρεις πόσες τέτοιες συνδέσεις υπάρχουν, δικαιολογώντας κατάλληλα την απάντησή σου;

Β.1.2. Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Γύρω μας υπάρχουν διαφόρων ειδών γωνίες, μερικές από τις οποίες βλέπουμε στις παρακάτω εικόνες. Τι κοινό χαρακτηριστικό έχουν;

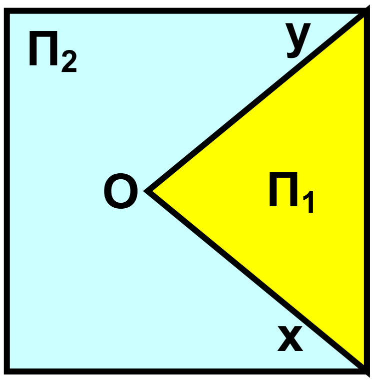
Προσπάθησε να τις περιγράψεις, χωρίς να σε επηρεάζει η υλική τους υπόσταση.

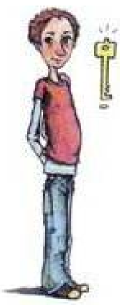





Ορίζοντας την γωνία

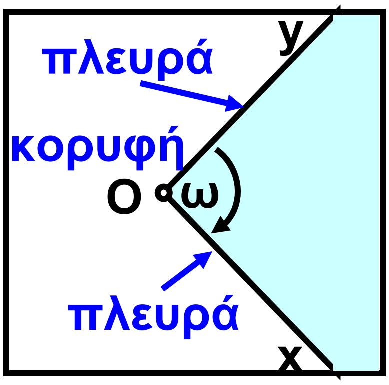
Σχεδιάζουμε σ' ένα φύλλο χαρτί δύο ημιευθείες Οx και Οy, με κοινή αρχή το σημείο Ο. Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές $Π_1$ και $Π_2$.





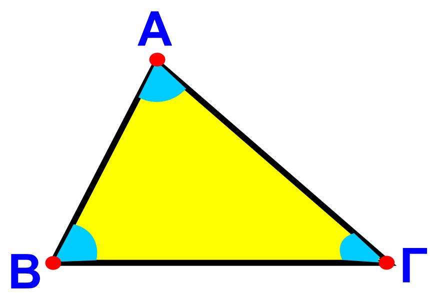
- **Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες Οx και Οy ονομάζεται γωνία.**

● Η “μικρότερη” ($Π_1$) λέγεται **κυρτή** και η άλλη ($Π_2$) **μη κυρτή**.



● Το σημείο Ο λέγεται **κορυφή** της γωνίας και οι ημιευθείες Οx και Οy λέγονται **πλευρές** της γωνίας.
Τις γωνίες που σχηματίζονται τις συμβολίζουμε $y\hat{O}x$ ή $x\hat{O}y$ (το γράμμα της κορυφής Ο γράφεται πάντα στη μέση) ή με ένα μικρό γράμμα, π.χ. $\hat{\omega}$.

Γωνίες τριγώνου



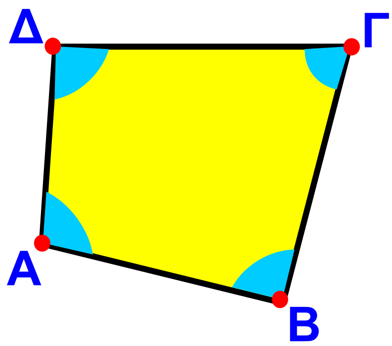
◆ Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις γωνίες, την $\hat{A}$, τη $\hat{B}$ και τη $\hat{Γ}$.

◆ Όταν λέμε, π.χ. η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ, εννοούμε τη γωνία που έχει πλευρές τις ημιευθείες ΑΒ, ΑΓ και περιέχει το τρίγωνο.

◆ Η γωνία $\hat{A}$ λέμε ότι **περιέχεται** μεταξύ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου.

◆ Ακόμα λέμε ότι η πλευρά ΒΓ είναι **απέναντι** στη γωνία $\hat{A}$, ενώ οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ είναι **προσκείμενες** της πλευράς ΒΓ.

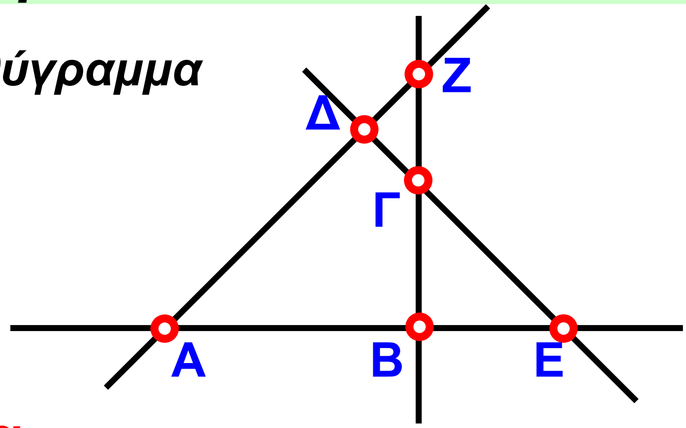
Γωνίες τετραπλεύρου



◆ Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τέσσερις γωνίες, που καθεμιά τους περιέχει το τετράπλευρο.Οι γωνίες αυτές είναι οι $Δ\hat{A}B$, $A\hat{B}Γ$, $B\hat{Γ}Δ$ και $Γ\hat{Δ}A$, που γράφονται απλά $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{Γ}$ και $\hat{Δ}$ αντίστοιχα.

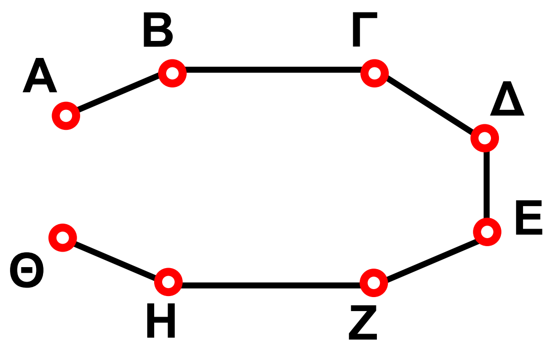
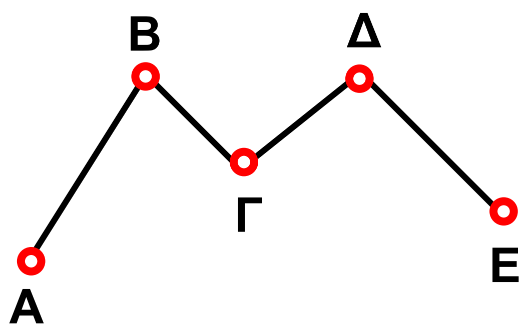
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ποιες γωνίες και ποια ευθύγραμμα σχήματα σχηματίζονται από τις ευθείες του διπλανού σχήματος;

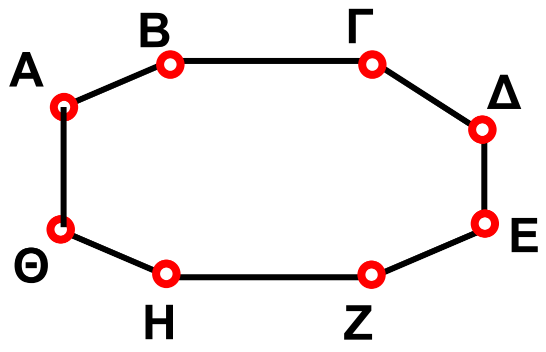


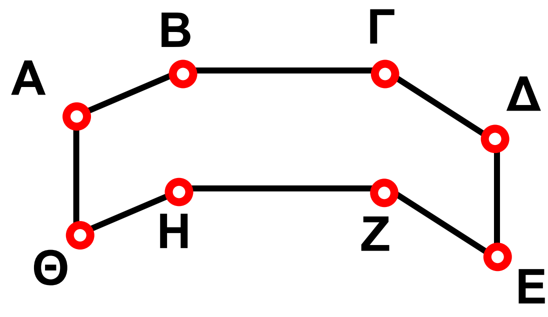
Ευθύγραμμα σχήματα

- **Τεθλασμένη γραμμή** είναι μια **πολυγωνική γραμμή**, που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
- **Ευθύγραμμο σχήμα** ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.
- Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται **κυρτή**, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο. Διαφορετικά λέγεται **μη κυρτή**.

Τεθλασμένη γραμμή	
Κυρτή	μη κυρτή
	

Ευθύγραμμο σχήμα	
Κυρτό	μη κυρτό



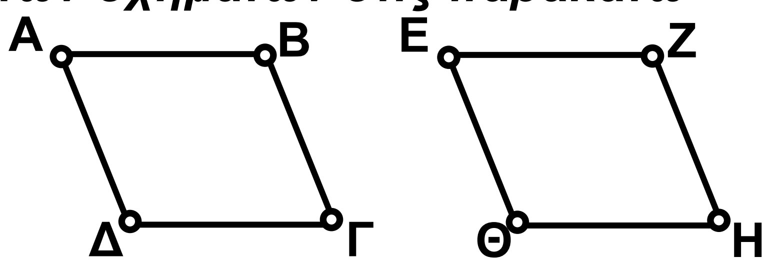


Ίσα σχήματα

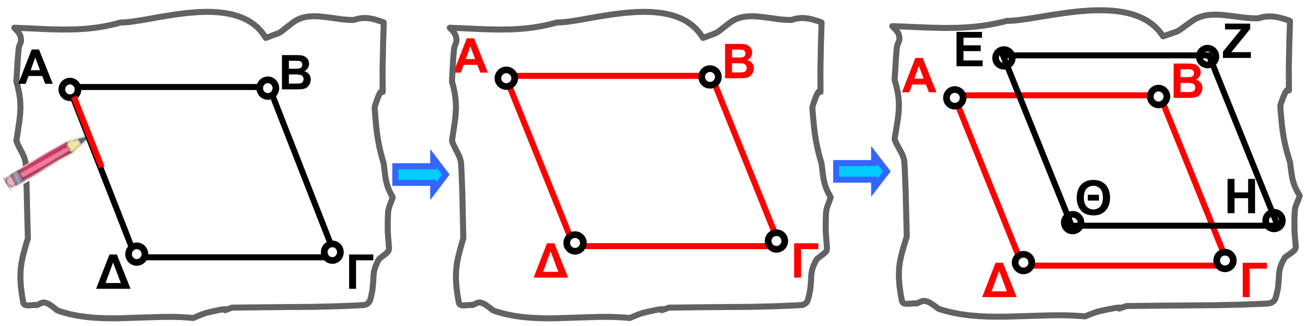
- Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται **ίσα**, αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.
- Στα ίσα σχήματα, τα στοιχεία που συμπίπτουν, δηλαδή οι κορυφές, οι πλευρές και οι γωνίες, ονομάζονται **αντίστοιχα στοιχεία** των σχημάτων αυτών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

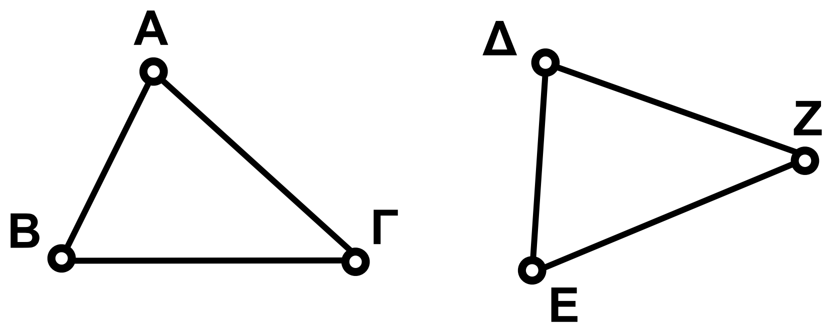
Να χρησιμοποιηθεί διαφανές χαρτί, για να διαπιστωθεί η ισότητα των σχημάτων στις παρακάτω περιπτώσεις:

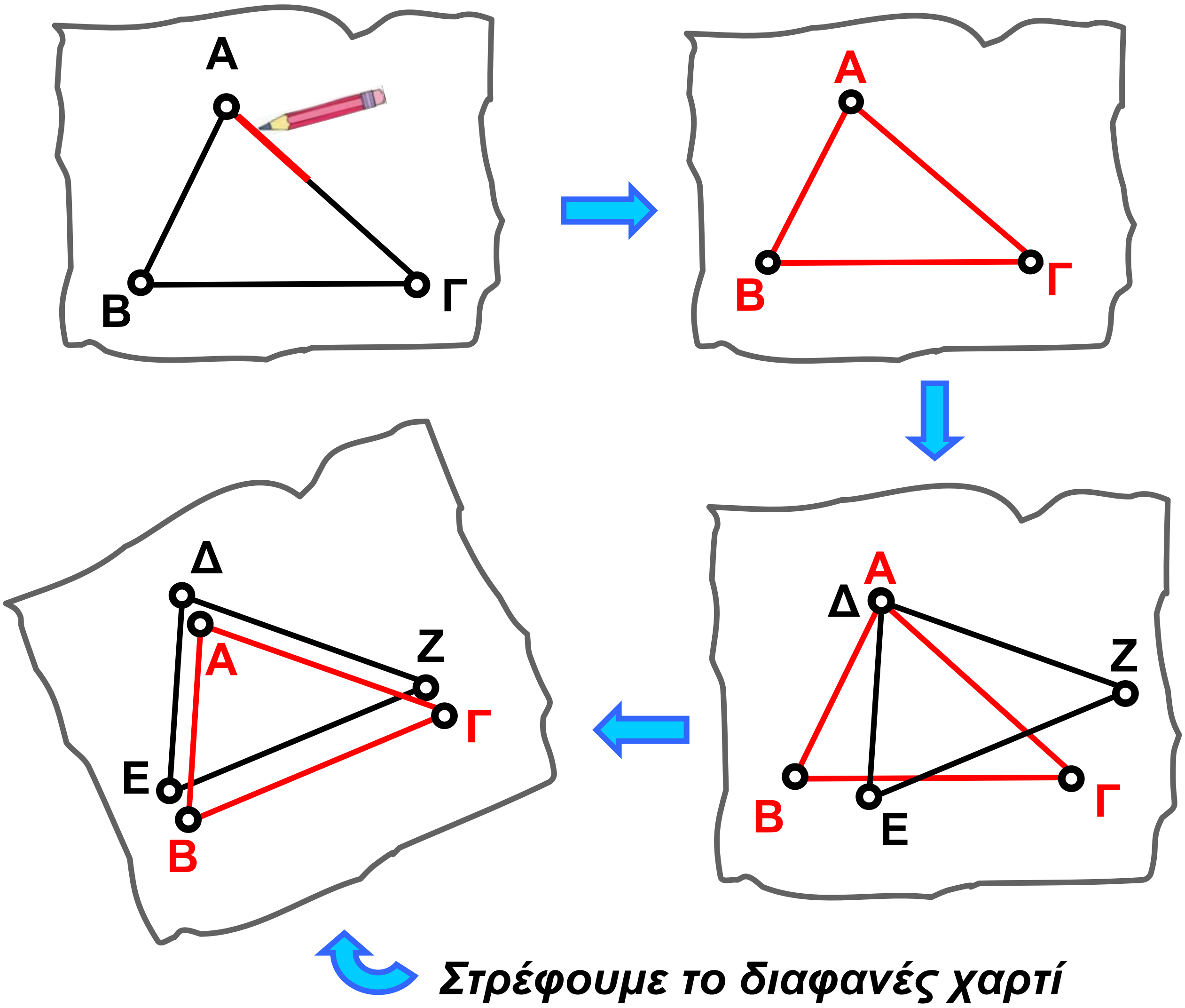


Περίπτωση 1η



Περίπτωση $2^{η}$





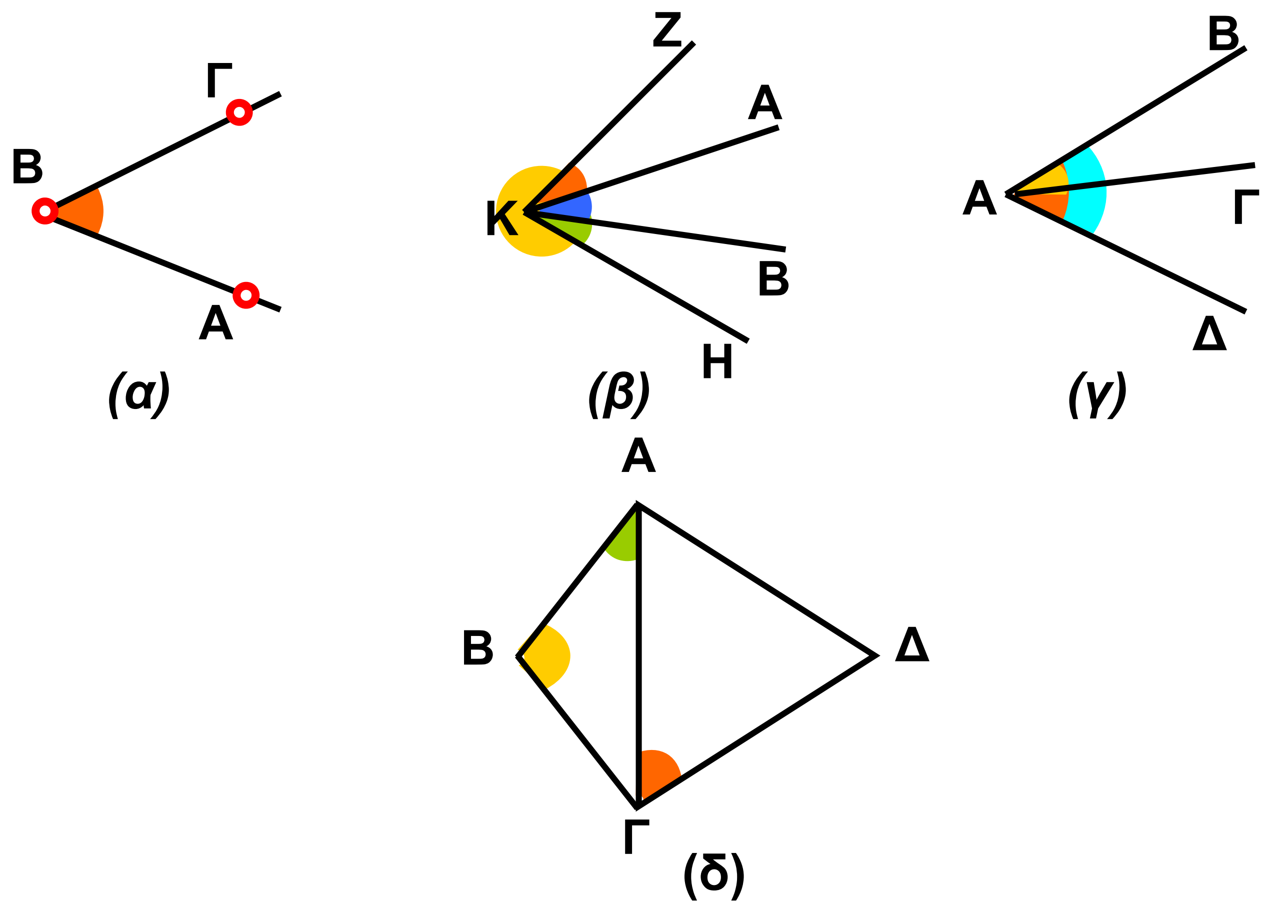
Στρέφουμε το διαφανές χαρτί

Παρατηρούμε ότι:

◆ **Οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες των ίσων σχημάτων είναι ίσες.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Να ονομάσεις με τρία γράμματα τις γωνίες που σημειώνονται στο σχήμα:*

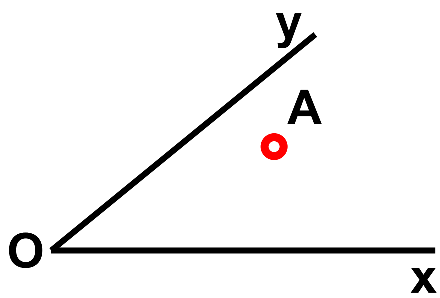


***2.** Να σχεδιάσεις ένα τρίγωνο ΑΒΓ. (α) Ποια γωνία του τριγώνου περιέχεται στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ;*

(β) Ποια πλευρά είναι απέναντι από τη γωνία $\hat{Γ}$;

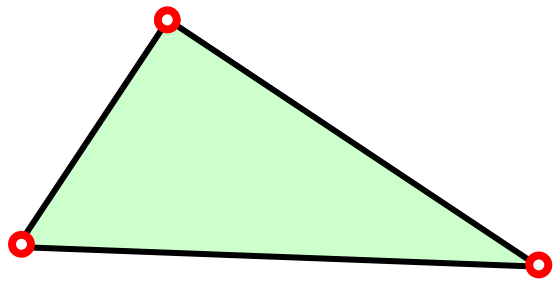
(γ) Ποιες γωνίες είναι προσκείμενες στην πλευρά ΑΓ;

***3.** Να γραμμοσκιάσεις και να ονομάσεις τη γωνία στην οποία ανήκει το σημείο Α.*



4. ***Στο παρακάτω τρίγωνο να ονομάσεις $\hat{A}$ τη γωνία που είναι απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά, $\hat{B}$ τη γωνία που είναι απέναντι στη μικρότερη πλευρά και $\hat{\Gamma}$ την τρίτη γωνία.***

(α) Ποιες γωνίες είναι προσκεί-μενες στην πλευρά ΒΓ;
(β) Ποια γωνία βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΒ;



5. ***Τοποθέτησε ένα "Χ" στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.***

(α)

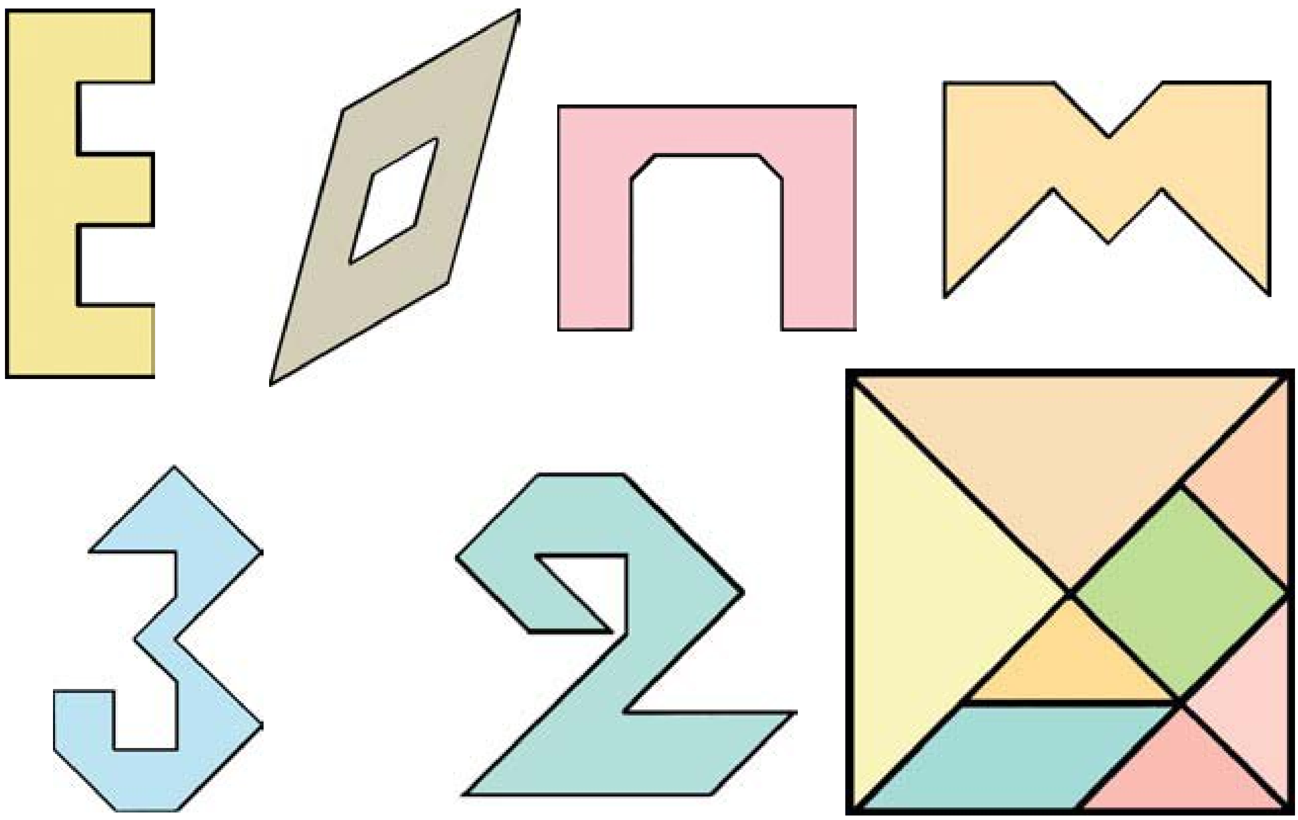
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ	ΚΟΡΥΦΕΣ					ΠΛΕΥΡΕΣ				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
ΓΩΝΙΑ										
ΤΡΙΓΩΝΟ										
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ										
ΠΕΝΤΑΠΛΕΥΡΟ										

(β)

ΑΡΙΘΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2															
3															
4															
5															
6															

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Έχεις παίξει ποτέ το TANGRAM; Σχεδίασε σ’ ένα χαρτί το παρακάτω τετράγωνο σχήμα με πλευρά 10 cm και μετά κόψε τα οκτώ κομμάτια. Προσπάθησε να φτιάξεις τα παρακάτω σχήματα χρησιμοποιώντας κατάλληλα κομμάτια απ’ αυτά.



Β.1.3. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

Στα προηγούμενα είδαμε τον τρόπο με τον οποίο διαπιστώνουμε την ισότητα δύο γεωμετρικών σχημάτων. Το απλούστερο σχήμα, του οποίου το μήκος μπορεί να μετρηθεί, είναι το ευθύγραμμο τμήμα και αποτελεί βασικό στοιχείο των άλλων ευθυγράμμων σχημάτων. Τι είναι όμως μέτρηση και μονάδες μήκους;

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Από τα πολύ παλιά χρόνια, οι ανάγκες της ζωής, υποχρέωσαν τους ανθρώπους να μετρήσουν διάφορα μεγέθη. Για να εξυπηρετούν οι μετρήσεις αυτές έπρεπε να χρησιμοποιηθούν σταθερά υποδείγματα, τα οποία να διαθέτει ο καθένας οποιαδήποτε στιγμή τα χρειαζόταν. Αρχικά στη μέτρηση χρησιμοποιήθηκαν τα μέλη του ανθρώπινου σώματος αλλά και ο βηματισμός, το άνοιγμα των χεριών και το ύψος. Έτσι, δημιουργήθηκαν οι μονάδες, όπως: οι **"δάκτυλοι"**, ***οι*** **"πόδες"** ***οι*** **"παλάμες"** ***κ.α. Αυτή την παλιά συνήθεια εξακολουθούμε να εφαρμόζουμε και σήμερα στις πρόχειρες μετρήσεις μας: "Το παντελόνι θέλει δυο δάκτυλα μάκρεμα", "Το χορτάρι ψήλωσε μια πιθαμή", "Το σκάφος έχει μήκος 40 πόδια", "Τα δίκτυα έφτασαν στις 50 οργιές", "Βάλε στο ποτήρι ένα δάκτυλο κρασί", "Το πέναλτι χτυπιέται στα 11 βήματα", κ.λπ. Οι μονάδες αυτές, αν και πολύ χρήσιμες, άρχισαν να χάνουν την αξία τους διότι δεν είναι ακριβείς, αφού όλοι οι άνθρωποι δεν έχουν το ίδιο ύψος, την ίδια παλάμη, το ίδιο πάχος δακτύλων και το ίδιο άνοιγμα στο βήμα τους. Όσο όμως αναπτύσσονταν***

οι ανθρώπινες κοινωνίες τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια χρειάζονταν ορισμένες μετρήσεις, όπως π.χ. για το κτίσιμο των σπιτιών, την κατασκευή αρδευτικών έργων, την καταμέτρηση της γης, κ.λπ. Στην αρχαία **Αίγυπτο**, *μετά από κάθε πλημμύρα του Νείλου, η λάσπη κάλυπτε τα σύνορα των κτημάτων. Υπήρχαν τότε ειδικοί υπάλληλοι, οι “αρπεδονάπτες”, οι οποίοι επόπτευαν την τήρηση του διαχωρισμού των εκτάσεων. Στις καταμετρήσεις αυτές λέγεται ότι έκαναν μ’ ένα ειδικό σχοινί με κόμπους, την* **“αρπεδόνη”.**

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, από την εποχή του βασιλέα **Σέσωστρη** *(κατά τον Ηρόδοτο), τηρούσαν στοιχεία μέτρησης των εκτάσεων που καλλιεργούσαν για να τα ξαναβρίσκουν μετά τις εποχιακές πλημμύρες του Νείλου ποταμού.*
Άλλωστε **Γεω - μετρία** *σημαίνει μέτρηση της Γης. Αλλά και οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν συγκεκριμένα υποδείγματα για να υπολογίσουν το εμβαδόν και τον όγκο σε πολλά πράγματα καθημερινής χρήσης.*

Όταν αναπτύχθηκε η επικοινωνία λαών και κρατών, με τα ταξίδια και το εμπόριο, δημιουργήθηκε η ανάγκη να καθιερωθούν κοινές μονάδες μέτρησης για καλύτερη συνεννόηση και αποφυγή της ταλαιπωρίας των μετατροπών απ’ τη μία μονάδα στην άλλη, όπως π.χ. στην αρχαία **Αθήνα** *από τον* **Σόλωνα**.

Το 1791, αμέσως μετά την Επανάσταση, η **Γαλλική Ακαδημία** *ανέθεσε σε μια ομάδα επιστημόνων, απ’ όλες τις χώρες της Ευρώπης, να βρουν ένα απλό σύστημα μονάδων μέτρησης. Οι μονάδες που υιοθετήθηκαν* *τελικά πάρθηκαν από τη φύση και για παράδειγμα η μέτρηση του μήκους καθιερώθηκε να έχει μονάδα το "μέτρο", που είναι το* **1 από τα 40.000.000 ίσα κομμάτια που χωρίστηκε ο γήινος μεσημβρινός που διέρχεται από το Παρίσι.** *Το σύστημα των μονάδων ακολουθεί το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, δηλαδή είναι ένα δεκαδικό μετρικό σύστημα. Μετά από ένα αργό ξεκίνημα, το σύστημα αυτό καθιερώθηκε και το* **1875** *ιδρύθηκε στη* **Σεβρ** *(στο Παρίσι) το* **Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών**, *όπου φυλάχτηκαν τα κατασκευασμένα από πλατίνα πρότυπα* **"μέτρο"** *και* **"χιλιόγραμμο"**.

Το σύστημα αυτό των μονάδων δεν υιοθετήθηκε αμέσως απ' όλους τους λαούς, που προτίμησαν να χρησιμοποιούν τα δικά τους συστήματα, όπως τα είχαν συνηθίσει, παρ' όλο που ήταν πιο πολύπλοκα. Στη νεώτερη **Ελλάδα**, *καθιερώθηκε με νόμο, το* **1959**, *το δεκαδικό μετρικό σύστημα και ισχύει μέχρι σήμερα.*

Στην **Αγγλία**, *την* **Αμερική** *και σε μερικές ακόμη χώρες, το σύστημα μέτρησης είναι δωδεκαδικό και η βασική μονάδα μήκους είναι η* **υάρδα** *ή* **γιάρδα** *(yd). Η* **1 γιάρδα (yd)** *διαιρείται σε* **3 πόδια (ft)**, *και το* **1 πόδι (ft)** *σε* **12 ίντσες (in).** *Οι σχέσεις των μονάδων αυτών μεταξύ τους αλλά και με το μέτρο είναι:*

1yd = 3 ft = 36 in — *1yd = 0,9144 m = 91,44 cm*
1 ft = 12 in — *1 ft = 0,3048 m = 30,48 cm*
1 in = 0,0254 m = 2,54 cm

Στις ίδιες χώρες για μέτρηση μεγάλων αποστάσεων χρησιμοποιούν το μίλι, που είναι:
1 μίλι = 1609 m = 1,609 Km.
Στη ναυτιλία χρησιμοποιούν για μονάδα μήκους το ναυτικό μίλι, που είναι: **1 ναυτικό μίλι = 1852 m.**

Μέτρηση και μονάδες μέτρησης

• Για να συγκρίνουμε μεταξύ τους ευθύγραμμα τμήματα οδηγηθήκαμε στην ανάγκη να χρησιμοποιούμε μια κοινή μονάδα σύγκρισης. Έτσι, κάθε σύγκριση ενός μεγέθους με την αντίστοιχη μονάδα λέγεται μέτρηση.

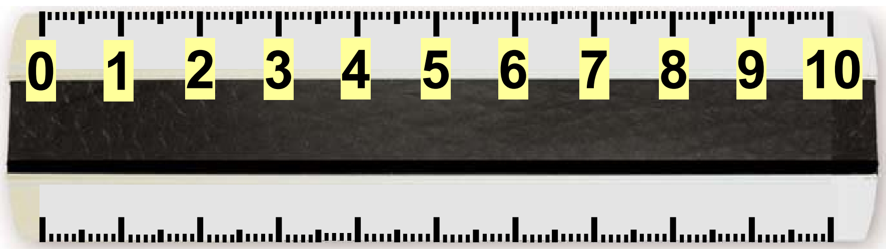
Έτσι, για το μήκος έχουμε ότι:

Μονάδα μήκους είναι το **"μέτρο" (m)**

► Για να μετρήσουμε, λοιπόν, ένα ευθύγραμμο τμήμα, χρησιμοποιούμε ένα αντίγραφο του μέτρου και κάνουμε τη σύγκριση μ' αυτό, όπως έχουμε μάθει.

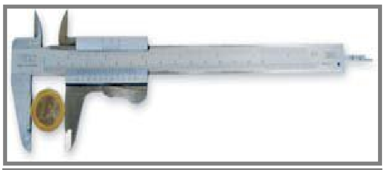
► Εάν όμως το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος είναι πολύ μεγαλύτερο ή πολύ μικρότερο από το μήκος του μέτρου, επιλέγουμε, για τη μέτρηση ένα πολλαπλάσιο ή μια υποδιαίρεση του μέτρου για το σκοπό αυτό.

◆ Για να μετρήσουμε σχετικά μικρά μήκη χρησιμοποιούμε, συνήθως, το υποδεκάμετρο, που είναι το ένα δέκατο ($\frac{1}{10}$) του μέτρου.



◆ Για μεγαλύτερα μήκη, όπως π.χ. έναν τοίχο ή τις διαστάσεις ενός οικοπέδου, χρησιμοποιούμε τη μετροταινία.

◆ Για πολύ μικρά μήκη π.χ. τη διάμετρο μιας βίδας ή το πάχος μιας λαμαρίνας, χρησιμοποιούμε το **παχύμετρο** ή το **μικρόμετρο**, αντίστοιχα.



ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ ΜΕΤΡΟΥ	
ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	Χιλιόμετρο
ΣΥΜΒΟΛΟ	Km
ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ	1 Km = 1000 m

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	ΜΕΤΡΟ
ΣΥΜΒΟΛΟ	m

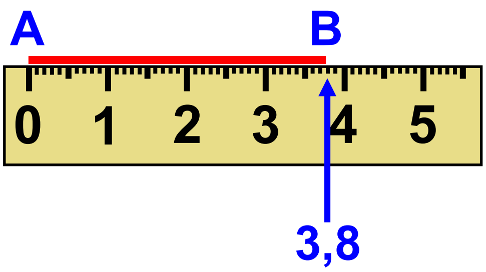
ΥΠΟΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ		
ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	Δεκατόμετρο ή παλάμη	Εκατοστόμετρο ή πόντος
ΣΥΜΒΟΛΟ	dm	cm
ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ	1 dm = $\frac{1}{10}$ m = 0,1 m	1 cm = $\frac{1}{100}$ m = 0,01 m

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΗΚΟΥΣ	Χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό
ΣΥΜΒΟΛΟ	mm
ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ	1 mm = $\frac{1}{1000}$ m = 0,001 m

Η σχέση μεταξύ των υποδιαιρέσεων του μέτρου είναι η εξής:

1 m	= 10 dm	= 100 cm	= 1000 mm
	1 dm	= 10 cm	= 100 mm
		1 cm	= 10 mm

Η έννοια της απόστασης σημείων είναι από τις πιο συνηθισμένες γεωμετρικές έννοιες, που συναντάμε στην ζωή π.χ. απόσταση δύο πόλεων κ.λ.π.
Πώς όμως ορίζεται η απόσταση δύο σημείων και πως την μετράμε;



◆ Έχουμε τα σημεία Α και Β. Χαράζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μετράμε με το υποδεκάμετρο. Βρίσκουμε ότι έχει μήκος 3,8 cm.

◆ Λέμε ότι η απόσταση των σημείων Α και Β είναι 3,8 cm και γράφουμε ΑΒ = 3,8 cm.

Συνεπώς:

• Απόσταση δύο σημείων Α και Β λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, που τα ενώνει.

Πρέπει, όμως, να προσέξουμε κάτι σημαντικό:

◆ Με το σύμβολο ΑΒ εννοούμε ταυτόχρονα δύο διαφορετικά πράγματα: Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, αλλά και το μήκος αυτού του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

◆ Για να ξεχωρίσουμε το μήκος, συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό (ΑΒ). Αλλά στο βιβλίο αυτό, για απλούστευση, θα γράφουμε απλά: μήκος ΑΒ.

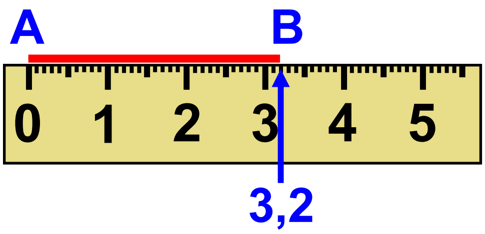
Συχνά ακούμε την φράση: «Βρισκόμαστε στο μέσο της διαδρομής» και καταλαβαίνουμε ότι απέχουμε την ίδια απόσταση από τα δύο άκρα.
Τι ονομάζουμε λοιπόν μέσο του ευθυγράμμου τμήματος;

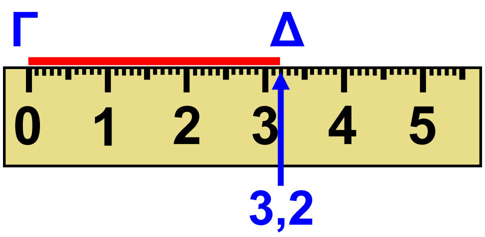
• Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζουμε το σημείο Μ του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του.

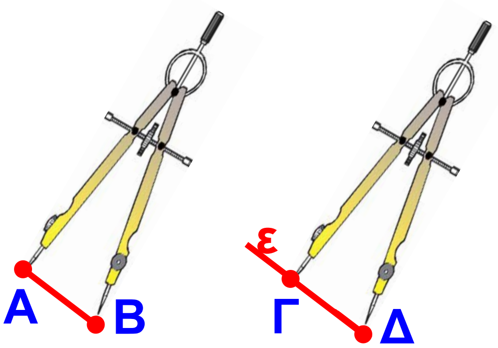
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

***1.** Να σχεδιαστεί το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι ίσο με το τμήμα ΑΒ:* **(α) με το υποδεκάμετρο και (β) με διαβήτη.**

Λύση







(α) Με το υποδεκάμετρο μετράμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και βρίσκουμε ότι ΑΒ = 3,2 cm. Στη συνέχεια πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με μήκος ίσο με 3,2 cm, όπως δείχνει το σχήμα.

(β) Ανοίγουμε το διαβήτη, ώστε η μία άκρη του να ακουμπάει στο Α και η άλλη στο Β. Μετακινούμε το διαβήτη, χωρίς να μεταβάλλουμε το άνοιγμα του.
Χαράζουμε μια ευθεία ε.
Τοποθετούμε τη μία άκρη

του διαβήτη σε ένα σημείο Γ της ε και με το άλλο άκρο, που έχει τη γραφίδα, βρίσκουμε το σημείο Δ της ε. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το ΑΒ

2. Να βρεθούν κατάλληλοι τρόποι σύγκρισης δύο ευθύγραμμων τμημάτων και να διατυπωθούν τα συμπεράσματα.

Ο 1ος τρόπος είναι να κάνουμε τη μέτρηση με το υποδεκάμετρο.

1η περίπτωση

ΑΒ < ΓΔ

2η περίπτωση

ΑΒ = ΓΔ

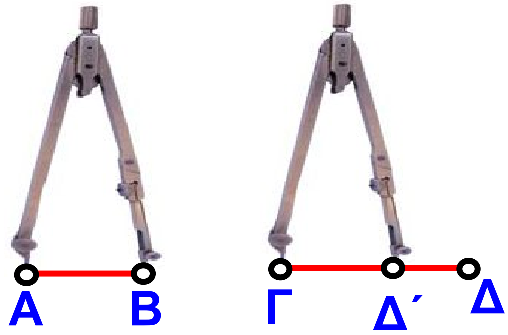
3η περίπτωση

ΑΒ > ΓΔ

***Ο 2ος τρόπος** είναι να τα συγκρίνουμε χρησιμοποιώντας το διαβήτη.*

Ακουμπάμε τη μία άκρη του διαβήτη στο Α και την άλλη στο Β. Μετακινούμε το διαβήτη, χωρίς να μεταβάλουμε το άνοιγμά του και τοποθετούμε το ένα άκρο του στο σημείο Γ και το άλλο επί της ημιευθείας ΓΔ. Ονομάζουμε Δ΄ το σημείο στο οποίο καταλήγει το δεύτερο άκρο του διαβήτη. Τότε έχουμε τρεις περιπτώσεις.

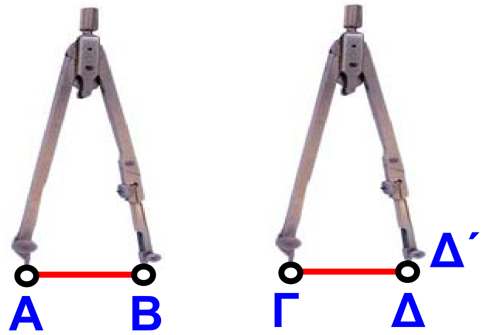
1η περίπτωση



Το Δ΄ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Γ και Δ.

Τότε λέμε ότι το ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ και γράφουμε ΑΒ < ΓΔ

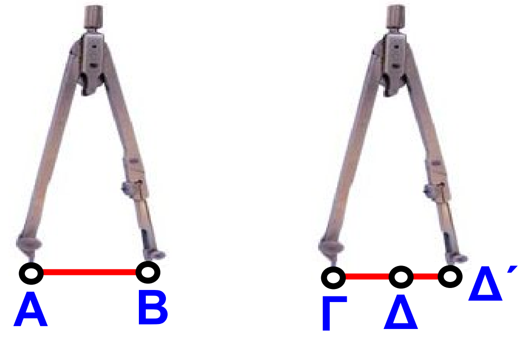
2η περίπτωση



Το Δ΄ συμπίπτει με το Δ.

Τότε λέμε ότι τα ΑΒ και ΓΔ έχουν το ίδιο μήκος και γράφουμε ΑΒ = ΓΔ

3η περίπτωση



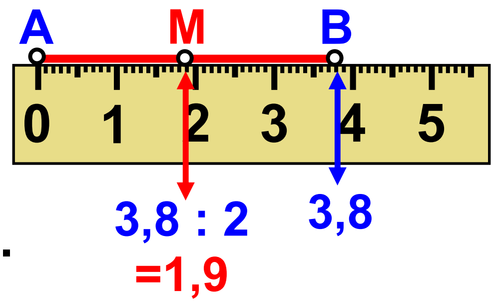
Το Δ΄ βρίσκεται στην προέκταση του ΓΔ προς το Δ.

Τότε λέμε ότι το ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ και γράφουμε ΑΒ > ΓΔ

3. Να βρεθεί το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Λύση

Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ένα σημείο Μ του ΑΒ, για το οποίο είναι: ΑΜ = 3,8 : 2 = 1,9 cm.
Αλλά τότε και ΜΒ = 3,8 : 2 = 1,9 cm.
Δηλαδή: ΑΜ = ΜΒ.



◆ **Οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει πάντα ένα μέσο Μ, που είναι και μοναδικό.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, που ενώνει δύο σημεία Α και Β λέγεται ……………………… των σημείων.

(β) Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζουμε το σημείο του Μ που …….………….…... από τα άκρα του.

2. Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

Από δύο σημεία μπορούν να περάσουν ☐ **Άπειρες ευθείες,** ☐ **Μία μόνο ευθεία,** ☐ **Δύο μόνο ευθείες.**

3. Ένα τόπι ύφασμα είναι 65 m. Πουλήθηκαν κομμάτια με μήκη: 3,5 m, 25 cm, 7,95 m και 3,74 m. Πόσα μέτρα ύφασμα έμεινε στο τόπι;

4. Το εμπορικό τρίγωνο μιας πόλης περικλείεται από τις οδούς Ιπποκράτους, μήκους 619 m, Κλεισθένους, μήκους 271 m και Περικλέους, μήκους 205 m. Πόσα βήματα θα κάνει ένας πεζός που κινείται περιμετρικά στο εμπορικό τρίγωνο, αν το κάθε του βήμα είναι 75 cm.

5. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει έναν αγρό σχήματος τετραγώνου και πλευράς 15,3 m. Διαθέτει συρματόπλεγμα, μήκους 60 m 3 dm 18 cm. Να βρεθεί, αν θα του φτάσει το συρματόπλεγμα ή αν πρέπει να αγοράσει και άλλο.

6. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την ακτίνα σε m και σε Km τεσσάρων πλανητών. Να συμπληρωθούν τα κενά:

Ακτίνα	σε m	σε Km
ΑΦΡΟΔΙΤΗ	6085000	
ΓΗ		6378
ΑΡΗΣ		3750
ΔΙΑΣ	71400000	

7. ***Οι αριθμοί που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα είναι τα μήκη των πέντε πλευρών του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, εκφρασμένα με διαφορετικές μονάδες. Να συμπληρωθεί ο πίνακας και να υπολογιστεί η περίμετρος του πολυγώνου σε cm, dm και m.***

	cm	dm	m
ΑΒ	517		
ΒΓ			4,2
ΓΔ			0,84
ΔΕ	1250		
ΕΑ		7,6	
Περίμετρος			

8. ***Πάρε ένα σημείο Α. Να βρεις τρία σημεία που το καθένα να απέχει 2,7 cm από το Α.***

9. ***Σχεδίασε δύο αντικείμενες ημιευθείες Αx και Αx΄. Να βρεις πάνω στην ημιευθεία Αχ δύο σημεία Β και Γ, έτσι ώστε ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 3,8 cm. Επίσης στην ημιευθεία Αx΄ να πάρεις ένα σημείο Δ έτσι, ώστε ΑΔ = 3 cm. Να συγκρίνεις (α) τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΑΔ και (β) τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΔ.***

10. ***Σε μία ευθεία ε, πάρε στη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε να είναι: ΑΒ = 2,5 cm, ΒΓ = 3 cm και ΓΔ = 2,5 cm. Εξέτασε αν τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα.***

11. ***Το μέσο Ο ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ απέχει 4,2 cm από το άκρο Α. Πόσο είναι το μήκος του ΑΒ;***

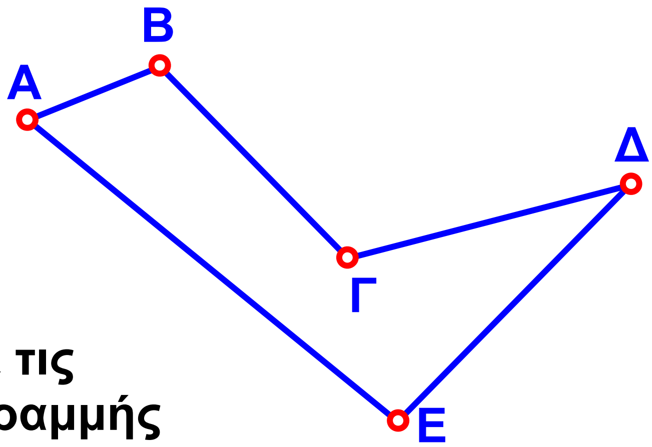
12. Σχεδίασε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρεις ένα σημείο Μ, το οποίο να απέχει 3,3 cm από το Α και να μη βρίσκεται στην ευθεία ΑΒ. Να φέρεις την ευθεία, η οποία περνάει από το Μ και από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Β.1.4. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Στο παρακάτω σχήμα, μεταξύ των διαδρομών ΑΒΓΔ και ΑΕΔ, να βρεθεί ποια διαδρομή από τις δύο είναι ο συντομότερος δρόμος, για να πάει κανείς από την πόλη Α στην πόλη Δ και στη συνέχεια να βρεθεί η διαφορά των διαδρομών αυτών;

Σκεφτόμαστε



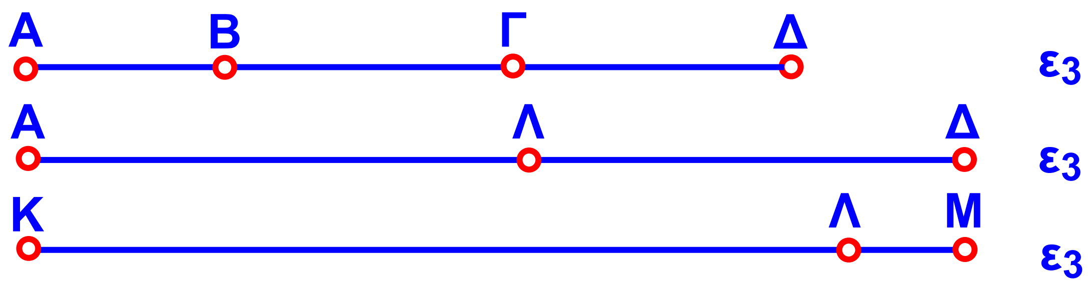
(α) Θεωρούμε τις ευθείες $ε_1$, και $ε_2$. Στην ευθεία $ε_1$ παίρνουμε, με τη βοήθεια του διαβήτη, διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ίσα με τις πλευρές της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔ, δηλαδή τα ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ.

Στην ευθεία $ε_2$ παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΕΔ ίσα με τις πλευρές της τεθλασμένης γραμμής ΑΕΔ.

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος, που προκύπτει από τη συνένωση των τμημάτων της ΑΒΓΔ αποτελεί το άθροισμα των τμημάτων της και επομένως το μήκος της γραμμής αυτής. Όμοια και για την ΑΕΔ. Συνεπώς, συγκρίνοντας τα παραπάνω μήκη, συμπεραίνουμε ότι η διαδρομή ΑΒΓΔ είναι μικρότερη από την ΑΕΔ.

(β) Για να υπολογίσουμε τη διαφορά των δύο διαδρομών τοποθετούμε σε μια άλλη ευθεία $ε_3$ τμήμα ΚΛ, ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ, που ανήκει στην ευθεία $ε_1$ και τμήμα ΚΜ, ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα

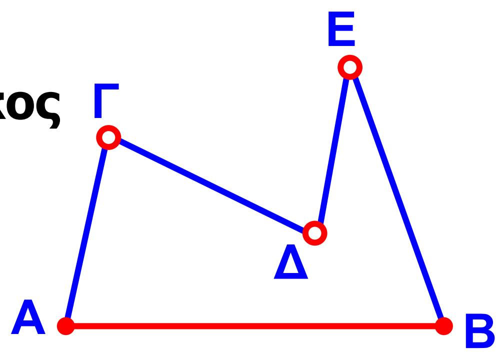
ΑΔ, που ανήκει στην ευθεία $ε_2$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΛΜ είναι η διαφορά των δύο διαδρομών ΑΒΓΔ και ΑΕΔ.



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

◆ **Για να προσθέσουμε ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετούμε διαδοχικά πάνω σε μια ευθεία. Το τμήμα που έχει άκρα την αρχή του πρώτου και το τέλος του τελευταίου είναι το άθροισμά τους.**

◆ **Για να αφαιρέσουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετούμε με κοινή αρχή στην ίδια ημιευθεία. Το τμήμα που αρχίζει από το τέλος του μικρότερου και καταλήγει στο τέλος του μεγαλύτερου αποτελεί τη διαφορά τους.**



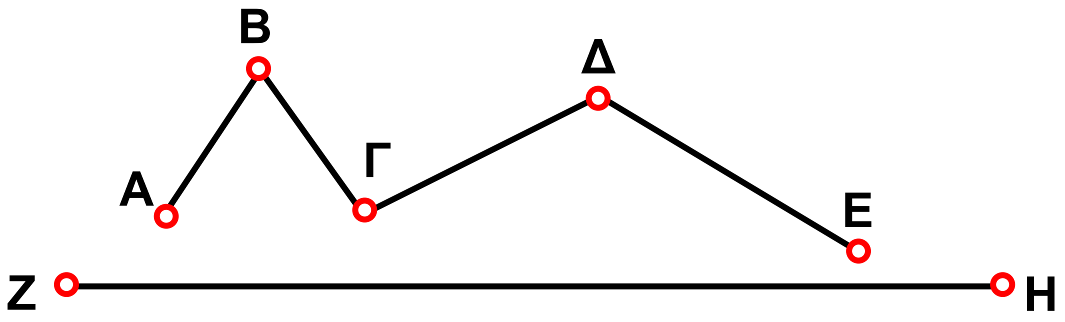
► **Η τεθλασμένη γραμμή έχει μήκος το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται.**

► **Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι μικρότερο από το μήκος κάθε τεθλασμένης γραμμής με τα ίδια άκρα Α και Β.**

• **Το άθροισμα των πλευρών ενός ευθύγραμμου σχήματος, θα το λέμε περίμετρο του σχήματος.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να συγκρίνεις το μήκος της γραμμής ΑΒΓΔΕ με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΖΗ, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



2. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με όλες τις πλευρές ίσες, με 2,5 cm. Βρες στην ημιευθεία ΒΓ, με αρχή το σημείο Β, ένα σημείο Ε έτσι, ώστε το μήκος ΒΕ να ισούται με την περίμετρο του τριγώνου.

3. Μια τεθλασμένη γραμμή αποτελείται από πέντε διαφορετικά ευθύγραμμα τμήματα. Τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΖ είναι αντίστοιχα 16 mm, 9 mm, 12 mm,14 mm και 2 cm. Να βρεις το μήκος της τεθλασμένης ΑΖ.

4. Να βρεις το μήκος μιας τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕ με πλευρές ΑΒ = 0,4 m, ΒΓ = 3 dm, ΓΔ = 50 cm και ΔΕ = 380 mm.

5. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν έτσι, ώστε: ΚΛ = 6 cm, ΚΜ = 16 cm και ΚΝ = 20 cm. Να βρεις τα μήκη των τμημάτων ΛΜ, ΛΝ και ΜΝ.

6. Σε μία ημιευθεία με αρχή το σημείο Ο παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε να είναι: ΑΒ = 3 cm,

ΒΔ =5,5 cm και ΑΓ = 4,6 cm. Να βρεθούν τα μήκη των τμημάτων:
(α) ΑΔ, (β) ΒΓ, (γ) ΑΓ + ΓΔ και (δ) ΑΔ – ΔΒ.

7. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι, ώστε: ΑΔ = 6 cm, ΑΒ = ΑΔ/6 και
ΒΓ = ΑΔ/3. Να βρεις το μήκος του ΓΔ.

8. Να πάρεις σε μια ευθεία με τη σειρά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι, ώστε το ΒΓ να είναι κατά 4 cm μεγαλύτερο από το ΑΒ και κατά 3 cm μικρότερο από το ΓΔ. Αν είναι ΑΔ = 14 cm , να βρεις τα μήκη των ΒΓ και ΓΔ.

9. Να πάρεις σε μια ευθεία τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε έτσι, ώστε να είναι: ΑΒ = 2 cm,
ΒΓ = 0,5 • ΑΒ και ΑΔ = 2,5 • ΑΒ. Να βρεις τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΒΔ και ΑΓ.

10. Πάρε σε μια ευθεία τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε έτσι, ώστε να είναι: ΑΒ = 2 cm, ΑΓ = 3 cm,
ΓΔ = 1,5 cm και ΑΕ = 6,2 cm. Να βρεθούν τα μήκη των ΑΔ και ΓΕ.

11. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4,5 cm. Πάνω στην ευθεία ΑΒ πάρε ένα σημείο Κ, τέτοιο ώστε
ΑΚ = 3 cm και ένα άλλο σημείο Λ, τέτοιο, ώστε να είναι ΒΛ = 3,5 cm.
(α) Να βρεις το μήκος του ΚΛ, (β) Σε ποια περίπτωση συμβαίνει να είναι ΚΛ = 11 cm; (γ) Να διερευνήσεις, σε ποιες περιπτώσεις το ΚΛ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από 11 cm.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Γιατί το αεροπλάνο μπορεί να διανύσει μικρότερη απόσταση από το πλοίο, για να πάει από την Αθήνα στη Σάμο;

Β.1.5. Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Ένας πατέρας και ο γιος του γυμνάζονται και κάνουν τις ίδιες ασκήσεις.

- ***Μπορείς να βρεις εάν οι γωνίες, που σχηματίζουν τα πόδια τους στην ίδια ακριβώς στάση που έχουν στο διπλανό σχήμα είναι ίσες;***

- ***Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου σχετικά με τη σύγκριση του ανοίγματος των ποδιών τους.***

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

► Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το **μοιρογνωμόνιο.**

► Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται **μέτρο της γωνίας.**

► Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η **μοίρα**, που γράφεται: 1^{o}.

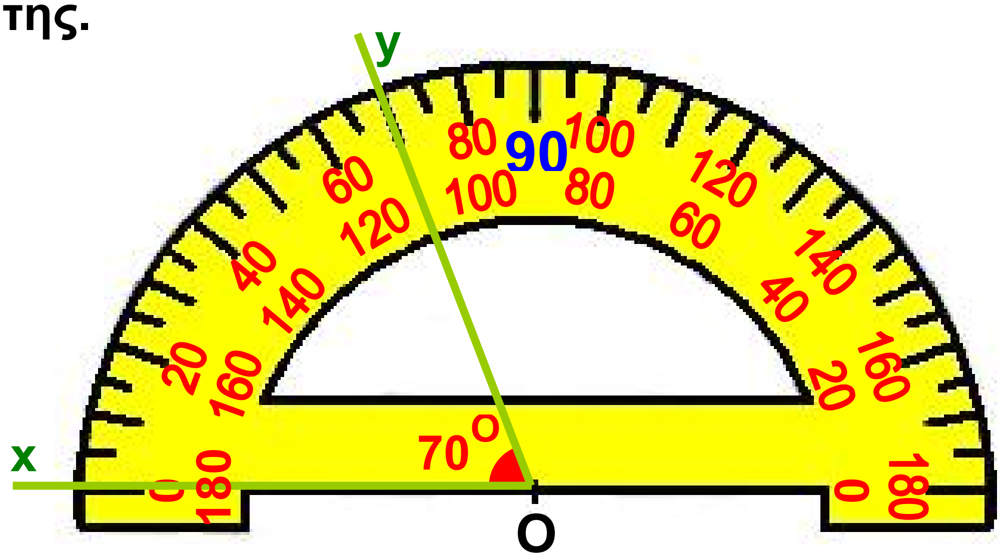
► Είναι: 1^{o} = 60΄ (πρώτα λεπτά) και 1΄ = 60΄΄ (δεύτερα λεπτά).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

• **Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο** που εξαρτάται μόνο από το **"άνοιγμα" των πλευρών της.**

- Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες.

- Στο εξής με $x\hat{O}y$ ή $\hat{\omega}$ θα συμβολίζουμε τη γωνία και το μέτρο της.



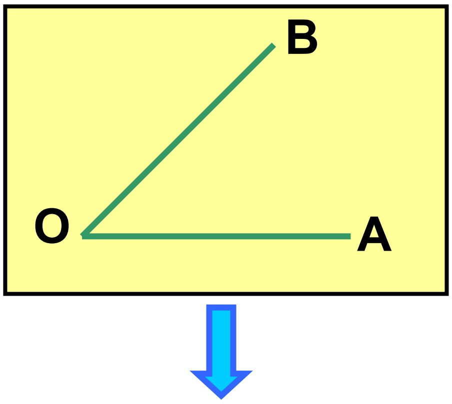
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

*Η μοίρα ανήκει σε **εξηνταδικό** σύστημα αρίθμησης (με βάση το **60**). Αυτό προέρχεται από τους Σουμέριους και στη συνέχεια από τους Βαβυλώνιους, δηλαδή χρονολογείται πριν από το **2100 π.Χ.** Ο λόγος επιλογής του συστήματος αυτού εικάζεται ότι είναι η προσπάθεια ενοποίησης των διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης, που υπήρχαν εκείνη την εποχή (με βάση το 5 και το 12). Άλλοι έχουν την άποψη ότι η βάση **60** καθιερώθηκε από την αστρονομία και άλλοι ότι έχει επιλεγεί για βάση ο αριθμός **60** επειδή έχει πολλούς διαιρέτες. Σημασία έχει ότι μέχρι σήμερα έχει επικρατήσει το εξηνταδικό σύστημα για τη μέτρηση των γωνιών, του χρόνου κ.λπ.*

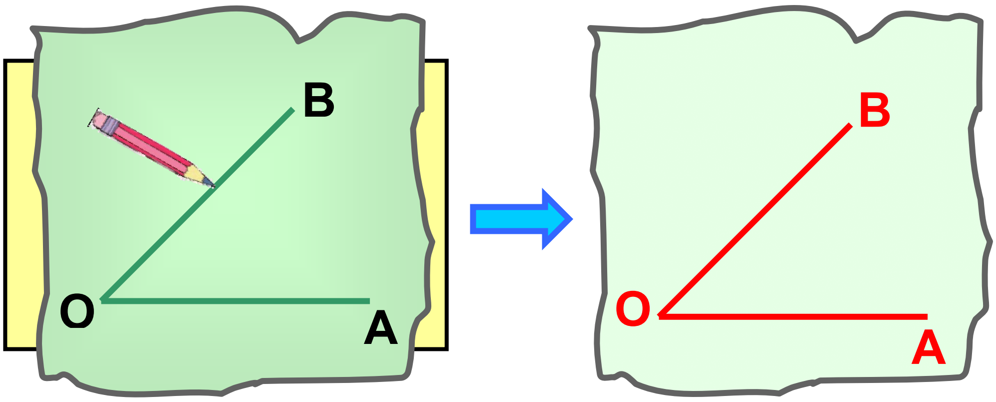
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

***1.** Να γίνει σύγκριση δύο γωνιών με ένα διαφανές χαρτί.*

Λύση

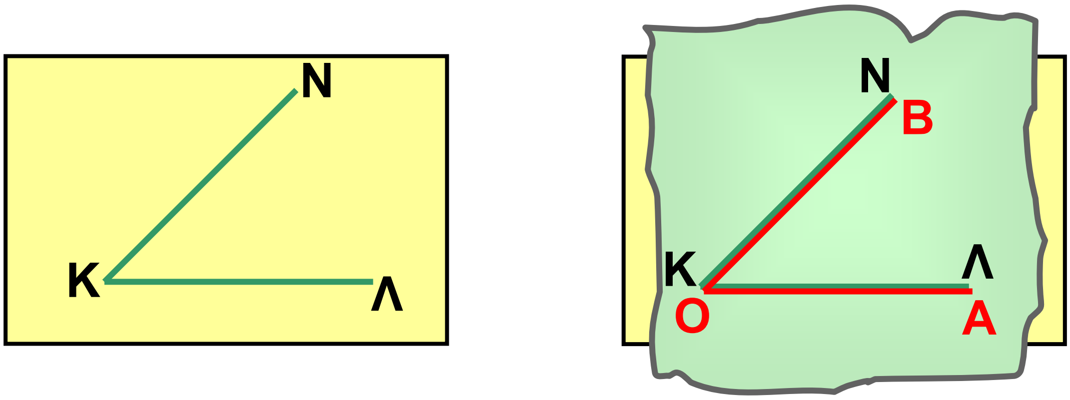


◆ **Αποτυπώνουμε τη γωνία $A\hat{O}B$ στο διαφανές χαρτί.**



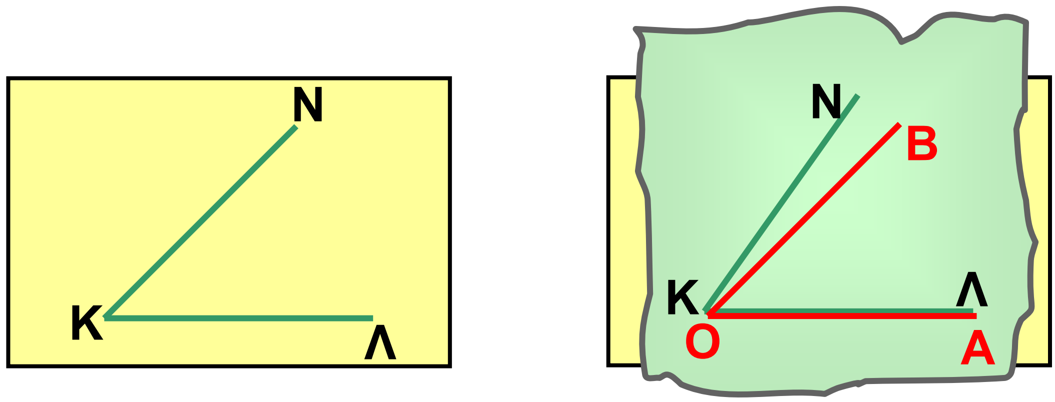
◆ **Τοποθετούμε το αποτύπωμα πάνω στη γωνία $Λ\hat{K}N$ έτσι, ώστε το Ο να ταυτιστεί με το Κ και η πλευρά ΟΑ με τη ΚΛ. Τότε μία μόνο από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις μπορεί να εμφανιστεί.**

1η περίπτωση



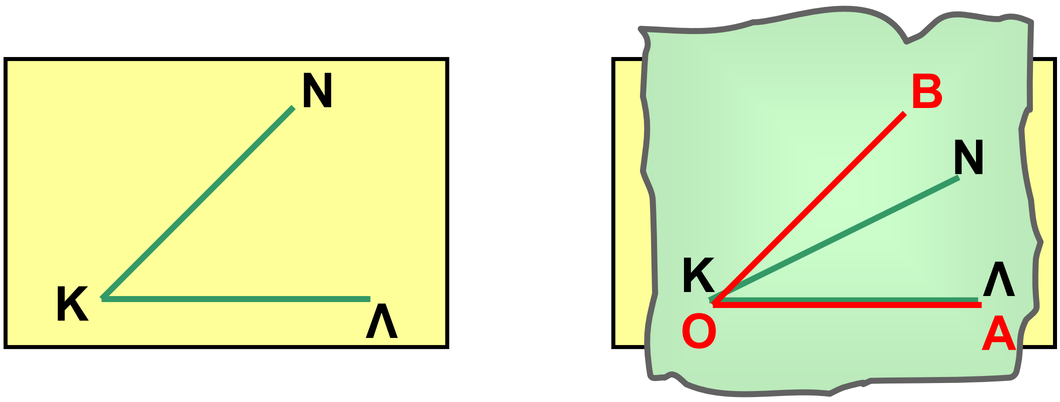
$A\hat{O}B = \Lambda\hat{K}N$

2η περίπτωση



$A\hat{O}B < \Lambda\hat{K}N$

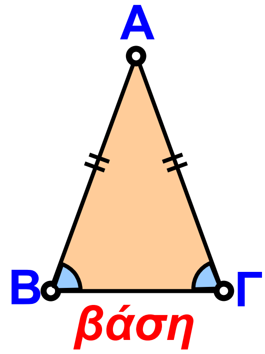
3η περίπτωση



$A\hat{O}B > \Lambda\hat{K}N$

2. ***Να συγκριθούν οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου.***

Λύση

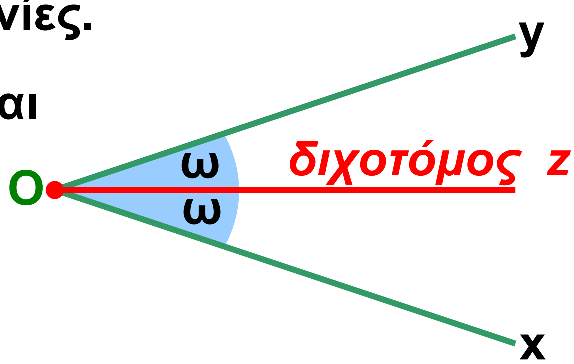


Το ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο πλευρές ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΑΓ. Με το διαφανές χαρτί συγκρίνουμε τις **προσκείμενες στη βάση** γωνίες Β και Γ.

Διαπιστώνουμε ότι:

► **Οι προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι ίσες.**

Όπως κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα σημείο, το μέσο του, που το διαιρεί σε δύο ίσα μέρη, και κάθε γωνία έχει μία ημιευθεία στο εσωτερικό της, τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.



• **Διχοτόμος γωνίας** ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε **δύο ίσες γωνίες**.

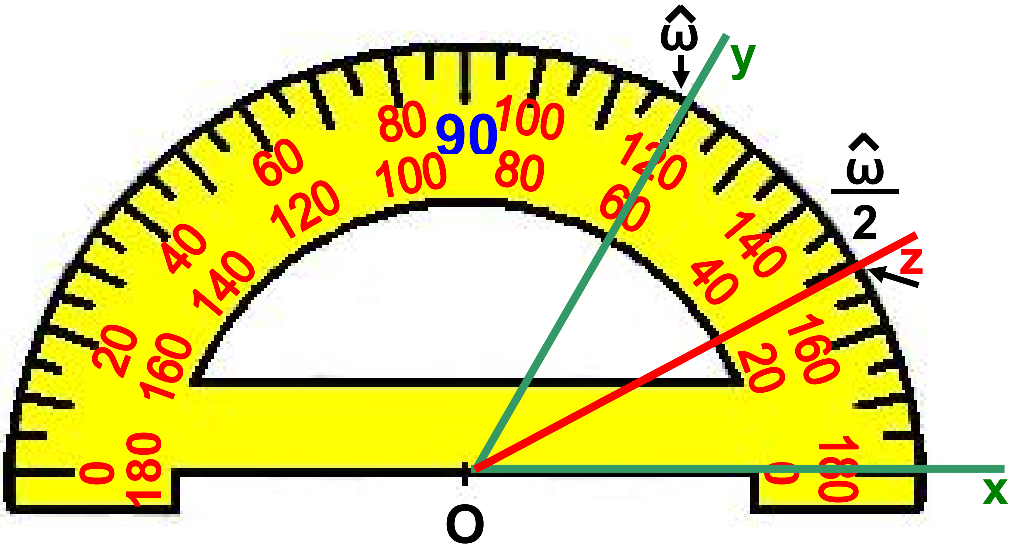
3. ***Δίνεται μια γωνία $x\hat{O}y$. Να κατασκευαστεί η διχοτόμος της.***

Λύση

1ος τρόπος: *Με το μοιρογνωμόνιο*

Μετράμε τη γωνία $x\hat{O}y$ και βρίσκουμε το μέτρο της $\hat{\omega}$. Σχεδιάζουμε μια ημιευθεία Oz, μέσα στη γωνία, ώστε να προκύψει η γωνία $x\hat{O}y$, που έχει την ίδια κορυφή O, κοινή πλευρά Ox και μέτρο $\frac{\hat{\omega}}{2}$.

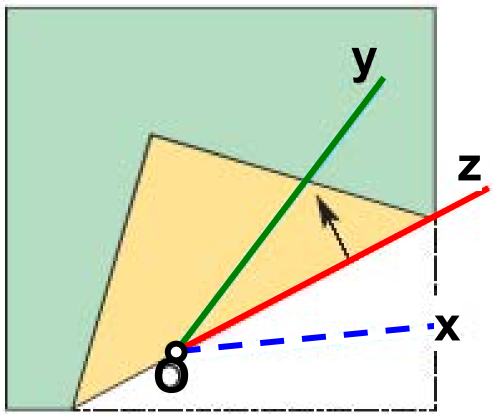
Τότε και η γωνία $z\hat{O}y$ θα έχει μέτρο: $\omega - \frac{\hat{\omega}}{2} = \frac{\hat{\omega}}{2}$



◆ Άρα η ημιευθεία Oz είναι η διχοτόμος της γωνίας, διότι τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

2ος τρόπος: *Με δίπλωση χαρτιού*

Σχεδιάζουμε τη γωνία σε ένα φύλλο χαρτιού σχεδίασης. Το διπλώνουμε με τέτοιο τρόπο, ώστε η ευθεία της τσάκισης να περάσει από την κορυφή της γωνίας και ταυτόχρονα η μία πλευρά της γωνίας να συμπέσει με την άλλη πλευρά της. Τότε η ευθεία της τσάκισης σχηματίζει με τις πλευρές της γωνίας δύο ίσες γωνίες, αφού με τη δίπλωση συνέπεσαν.



Άρα η ευθεία αυτή είναι η διχοτόμος της γωνίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

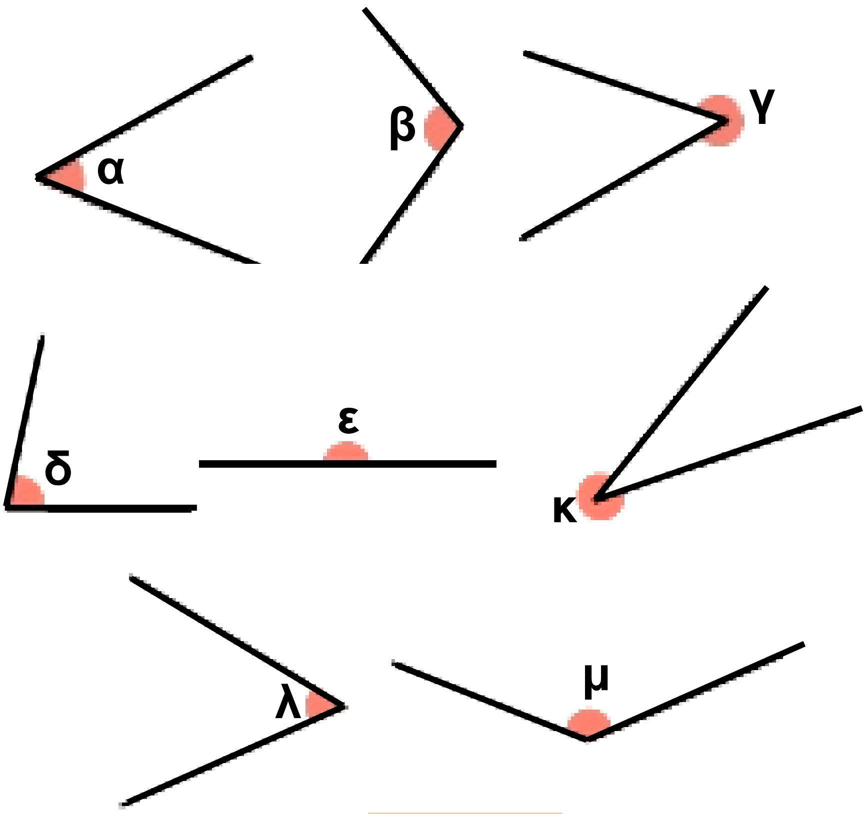
1. Από τι εξαρτάται το μέγεθος μιας γωνίας; (Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση).

- ☐ **Από το “άνοιγμα” των πλευρών της**
- ☐ **Από το μήκος των πλευρών**
- ☐ **Και από τα δύο παραπάνω.**

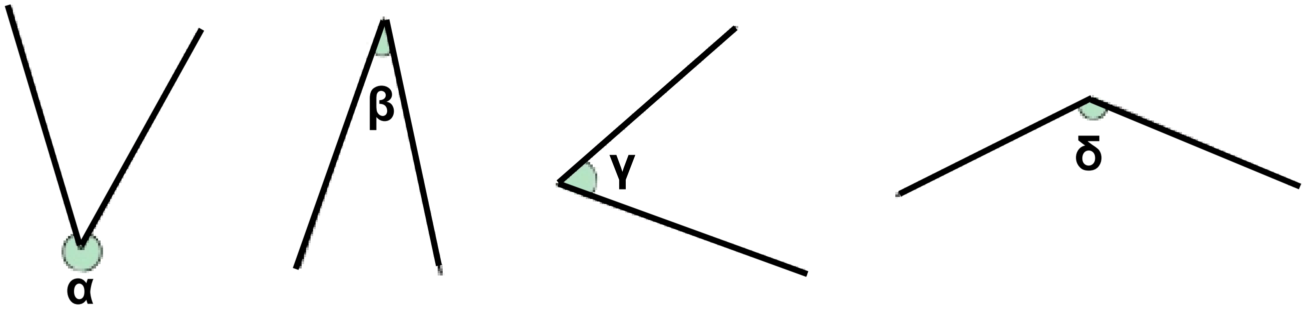
2. Σχεδίασε μια γωνία $x\hat{O}y = 76^o$. Να γράψεις μια ημιευθεία Oz που να χωρίζει τη γωνία $x\hat{O}y$ σε δύο γωνίες, από τις οποίες η μία να είναι 56^o.

3. Σχεδίασε τις γωνίες $\hat{\mu} = 48^o$, $\hat{\lambda} = 72^o$, $\hat{\kappa} = 17^o$, $\hat{\psi} = 6^o$, $\hat{\rho} = 90^o$, $\hat{\varphi} = 170^o$, $\hat{\omega} = 215^o$ και $\hat{\theta} = 318^o$.

4. Να βρεις το μέτρο των παρακάτω γωνιών:



5. *Να συγκρίνεις τις γωνίες και να τις γράψεις κατά σειρά από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη.*



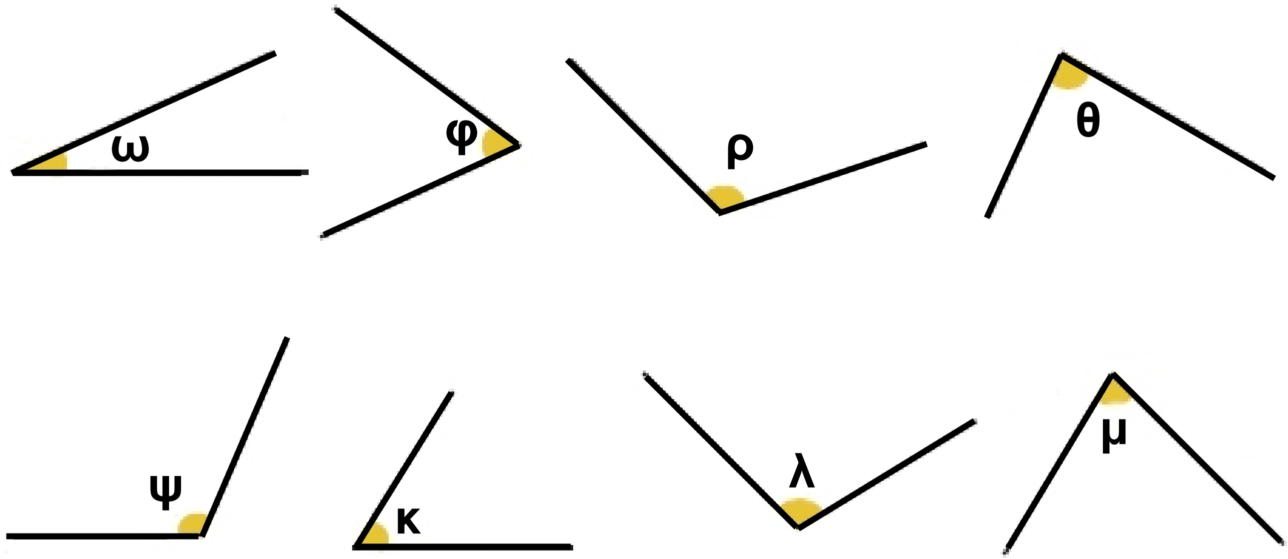
6. *Με το διαφανές χαρτί να συγκρίνεις τις γωνίες:*

(α) $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$, (β) $\hat{\varphi}$ και $\hat{\rho}$,

(γ) $\hat{\omega}$ και $\hat{\rho}$, (δ) $\hat{\psi}$ και $\hat{\kappa}$,

(ε) $\hat{\psi}$ και $\hat{\lambda}$, (στ) $\hat{\psi}$ και $\hat{\mu}$,

(ζ) $\hat{\rho}$ και $\hat{\theta}$.



7. *Σχημάτισε γωνίες (α) 48°, (β) 72° και (γ) 144° και σχεδίασε τις διχοτόμους αυτών.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Σχεδίασε την πορεία μιας ακτίνας φωτός, η οποία προσπίπτει σε καθρέπτη και αντανακλάται.

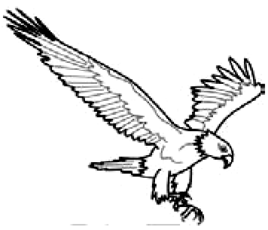
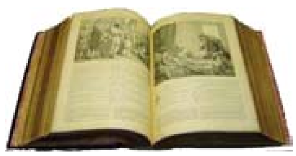
2. Σχεδίασε τη κίνηση μιας μπάλας μπιλιάρδου που κάνει μέχρι και τέσσερις ανακλάσεις στις πλευρές του μπιλιάρδου.

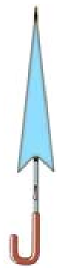
Β.1.6. Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

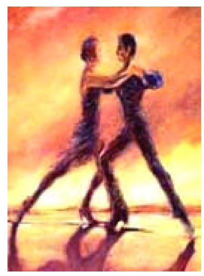
Σε όλα τα παρακάτω αντικείμενα σχηματίζονται διάφορες γωνίες ανάλογα με τη σχετική θέση, κάθε φορά, δύο ημιευθειών που έχουν ένα κοινό σημείο, όπως π.χ. είναι οι δείκτες του ρολογιού, τα πόδια των ανθρώπων, τα φτερά του αετού κ.λπ. Η σειρά που τοποθετήθηκαν τα διάφορα σκίτσα είναι τυχαία.

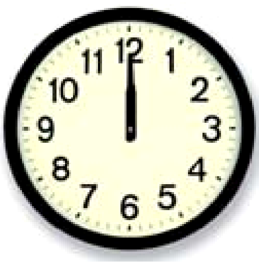
- ***Μπορείς να βρεις τη σωστή αντιστοιχία;***








Μηδενική


Οξεία


Ορθή


Αμβλεία


Ευθεία

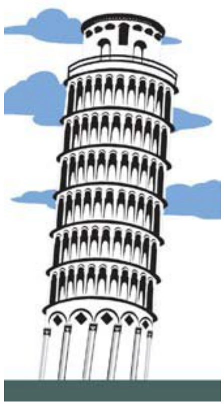

Μη Κυρτή


Πλήρης

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Το σπίτι της διπλανής εικόνας έχει δύο καμινάδες.

- ***Ποια είναι η μεταξύ τους διαφορά;***
- ***Ποια από τις δύο είναι κάθετη στη στέγη και γιατί;***
- ***Γενικότερα, είναι δυνατό να έχουμε κάθετες ευθείες, χωρίς απαραίτητα να είναι αυτές οριζόντιες και κατακόρυφες;***



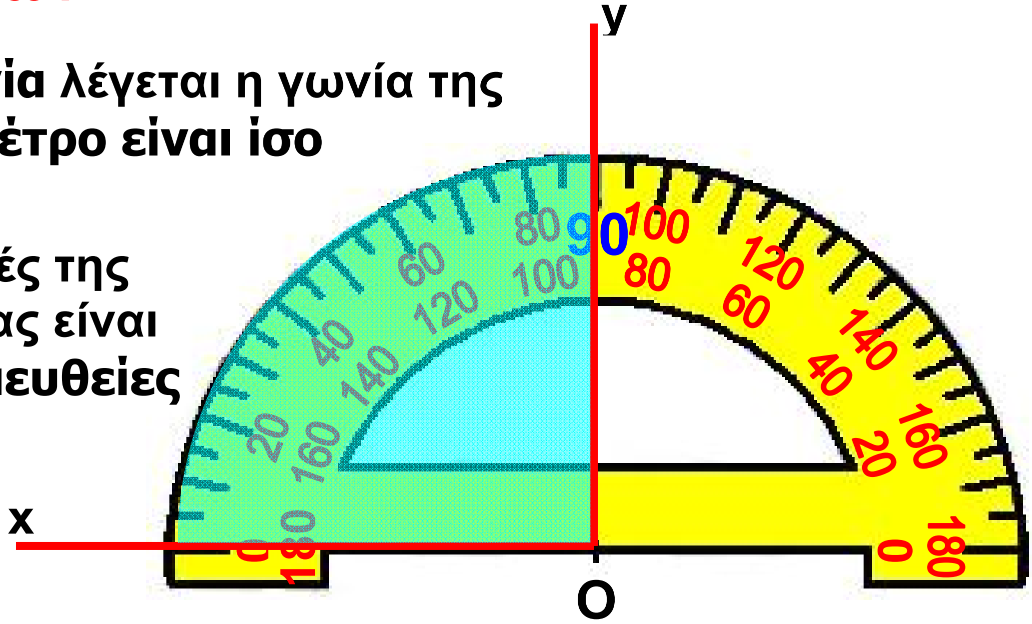
- ***Ξέρεις γιατί δε πέφτει ο πύργος της Πίζας;***
- ***Πώς βρίσκουμε την κατακόρυφο σε ένα τόπο;***
- ***Και πώς ελέγχουμε ότι ένα επίπεδο έχει οριζόντια θέση;***

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

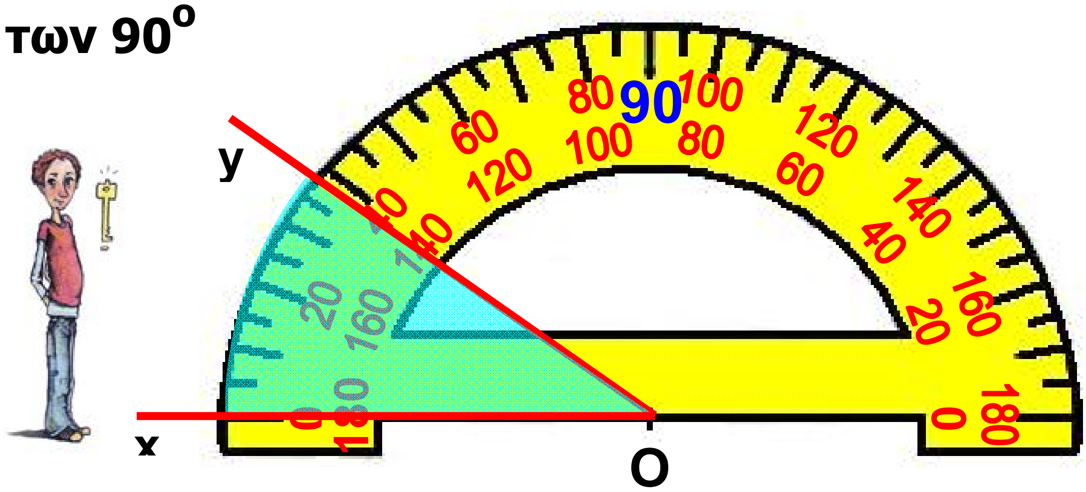
Είδη γωνιών

• **Ορθή γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το **μέτρο είναι ίσο με 90^o**

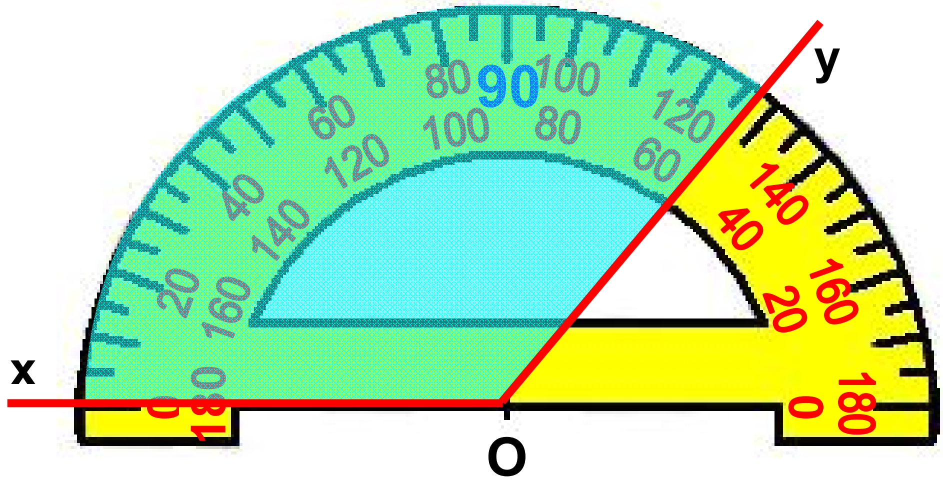
► Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι **κάθετες ημιευθείες**



• **Οξεία** γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο **μικρότερο των 90°**

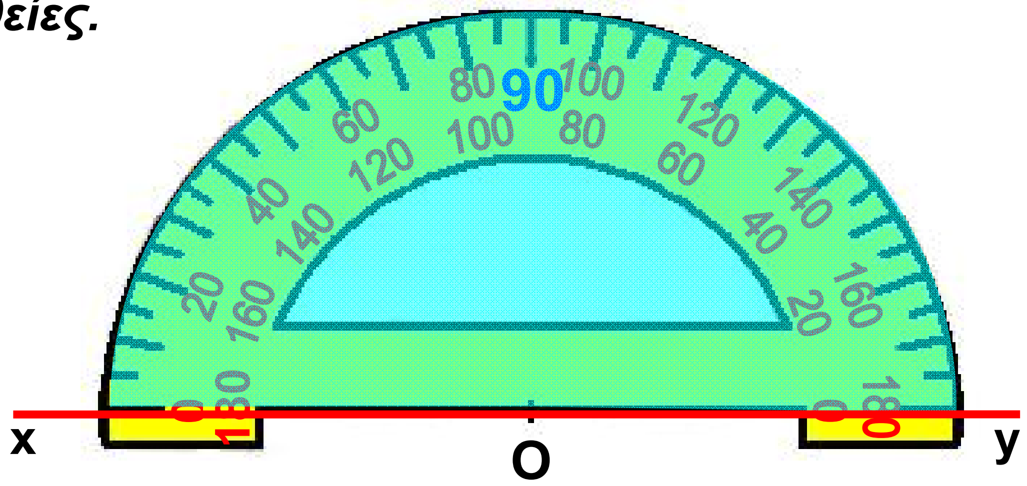


• **Αμβλεία** γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο **μεγαλύτερο των 90°** και μικρότερο των **180°**

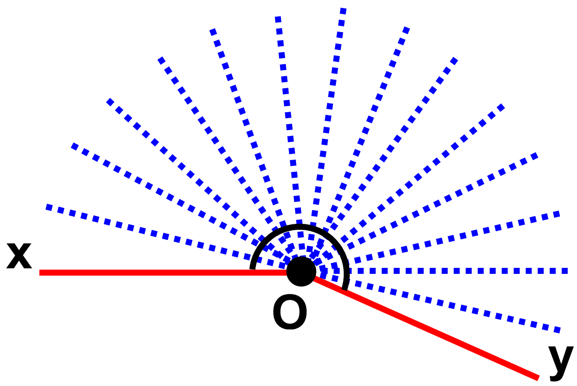


• **Ευθεία** γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το **μέτρο είναι ίσο με 180°**

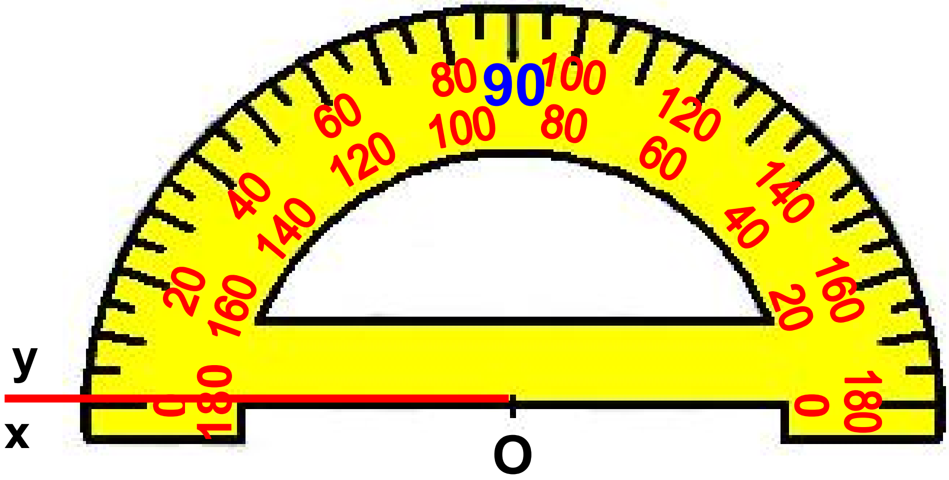
► *Οι πλευρές της ευθείας γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες.*



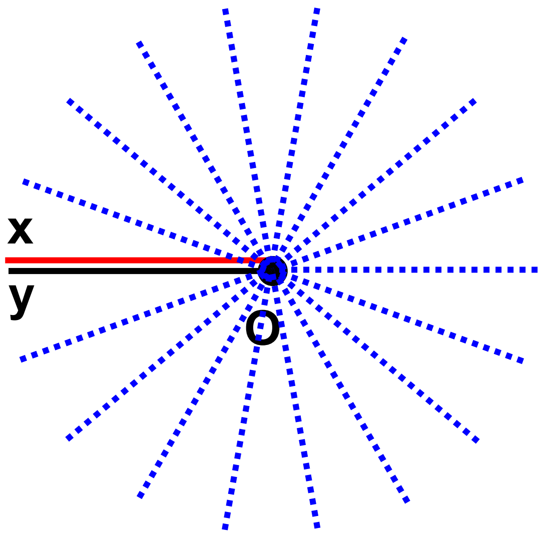
• **Μη κυρτή** γωνία λέγεται κάθε γωνία με **μέτρο μεγαλύτερο των 180°** και μικρότερο των **360°**



• **Μηδενική** γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 0°



• **Πλήρης** γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 360°

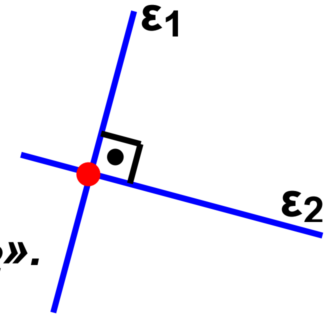


◆ Η **ημιευθεία** της τελικής πλευράς μιας μηδενικής και μιας **πλήρους γωνίας** ταυτίζεται με αυτή της αρχικής πλευράς.

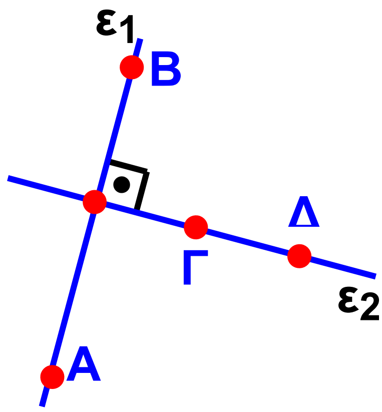
• **Δύο ευθείες είναι κάθετες όταν οι γωνίες που σχηματίζουν αυτές τεμνόμενες, είναι ορθές.**

Πώς συμβολίζουμε την καθετότητα δύο ευθειών

• **Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες χρησιμοποιούμε το σύμβολο « $\perp$ » ,γράφουμε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και διαβάζουμε *«η ε_1 είναι κάθετη στην ε_2».***



• **Δύο ευθύγραμμα τμήματα (ή δύο ημιευθείες) που βρίσκονται πάνω σε δύο κάθετες ευθείες, λέγονται κάθετα ευθύγραμμα τμήματα (ή κάθετες ημιευθείες).**



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

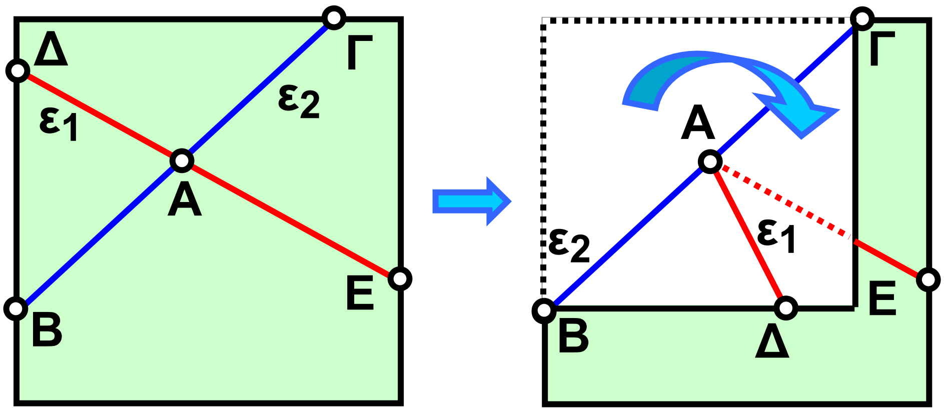
1. Πως μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι δύο τεμν ς ευθείες είναι κάθετες;

Λύση

Σχεδιάζουμε δύο τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 σε ένα φύλλο χαρτί.

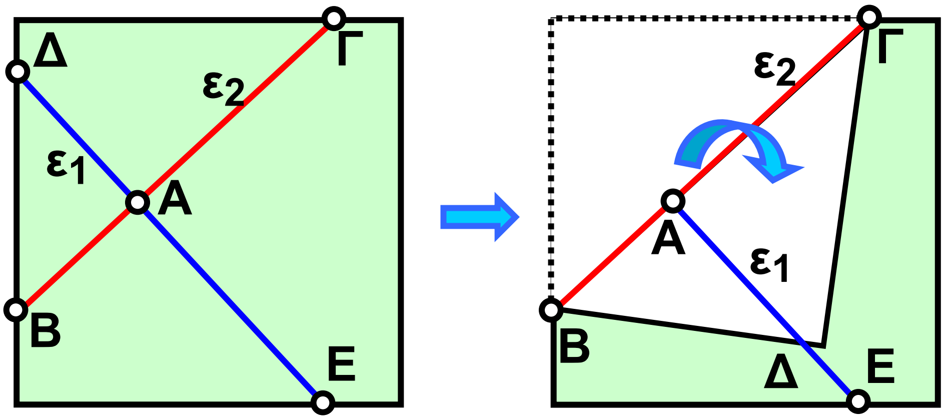
Διπλώνουμε το χαρτί κατά μήκος της ευθείας ε_2 και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α)



Οι ημιευθείες ΑΔ και ΑΕ δεν συμπίπτουν. Επομένως οι τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 δεν είναι κάθετες.

(β)

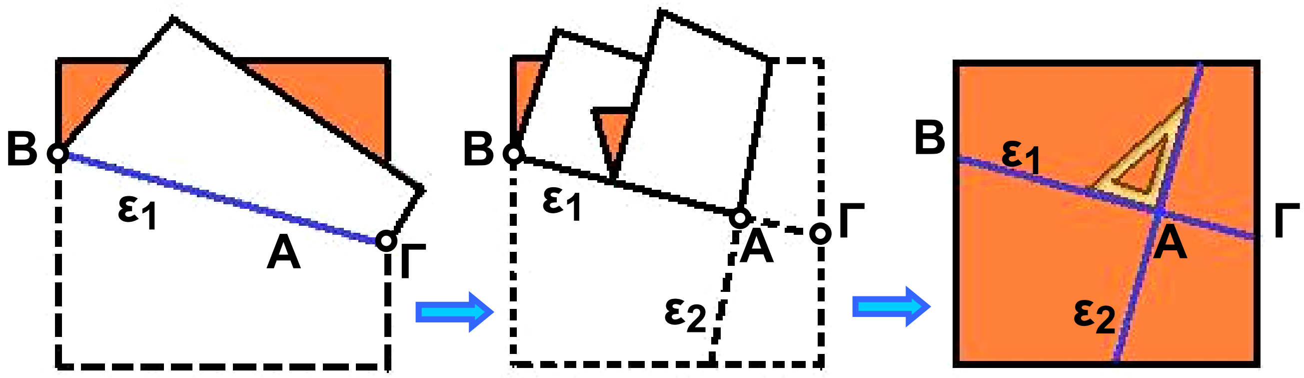


Οι ημιευθείες **ΑΔ και ΑΕ συμπίπτουν.** Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες ($\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$).

2. Πως μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο κάθετες ευθείες;

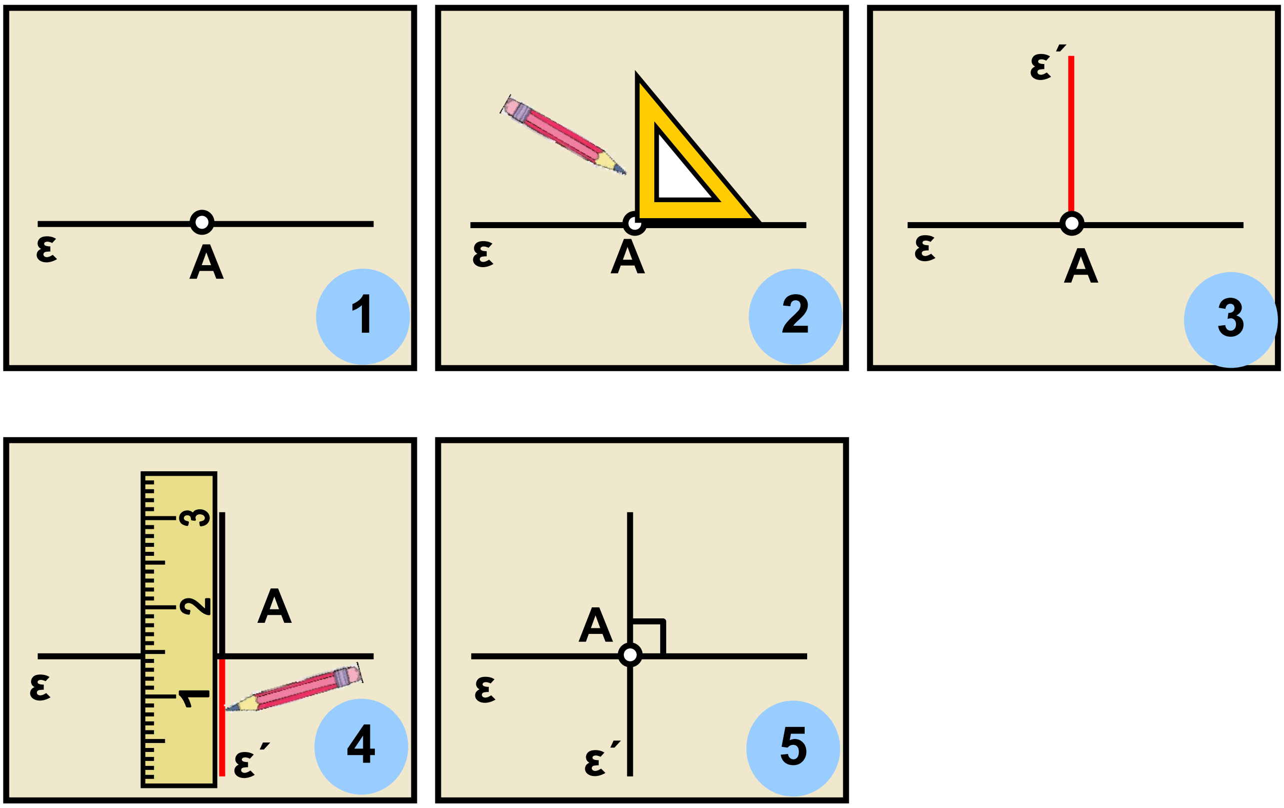
Λύση

Αν διπλώσουμε το φύλλο χαρτί δύο φορές, με τον τρόπο που φαίνεται στα παρακάτω σχήματα και μετά το ανοίξουμε, παρατηρούμε ότι τα τσακίσματα, που έγιναν πάνω στο χαρτί, παριστάνουν δύο κάθετες ευθείες ε_1, και ε_2.

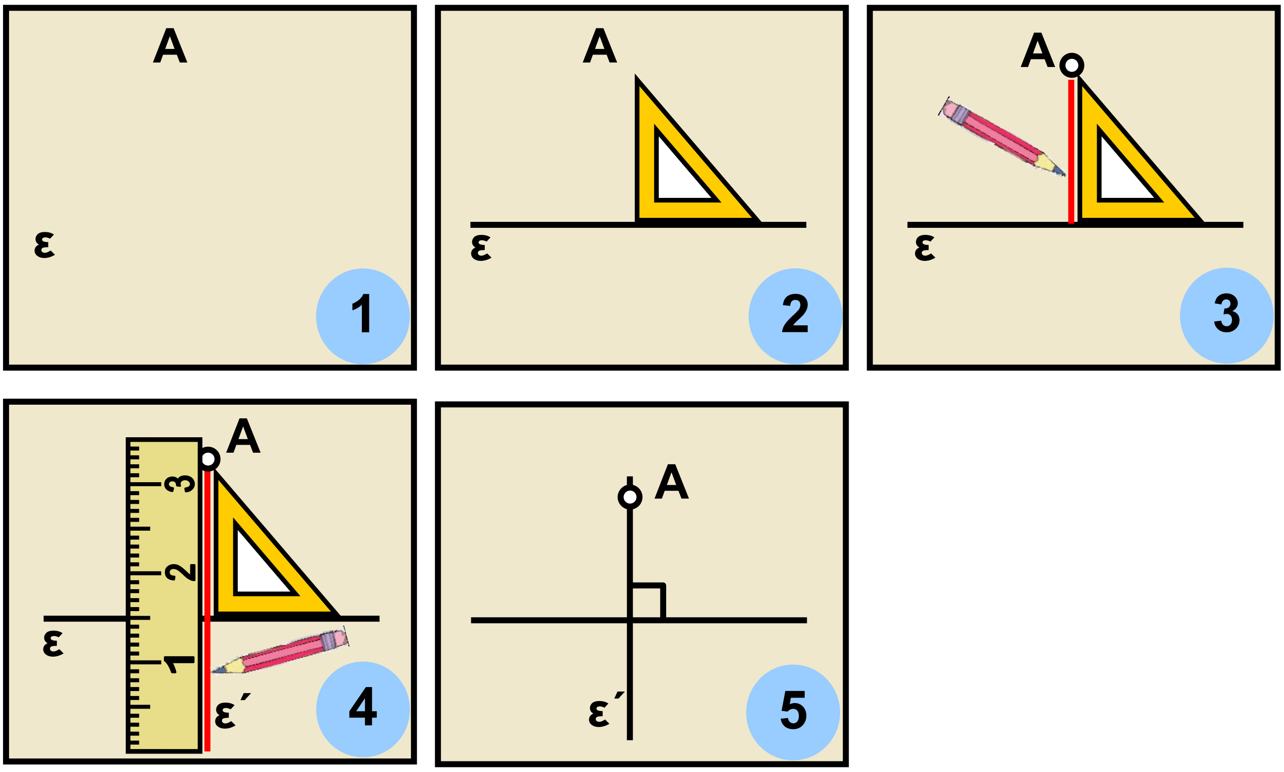


3. ***Να σχεδιαστεί ευθεία ε΄, που διέρχεται από σημείο Α και είναι κάθετη σε ευθεία ε.***

1η περίπτωση: Το σημείο Α ανήκει στην ε

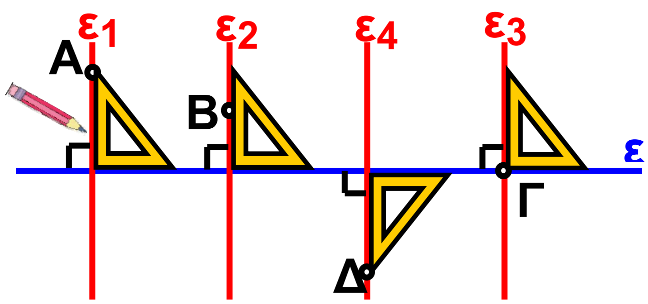


2η περίπτωση: Το σημείο Α δεν ανήκει στην ε



4. ***Δίνεται η ευθεία ε και τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Να σχεδιαστούν ευθείες $ε_1$ $ε_2$, $ε_3$ και $ε_4$, που διέρχονται από αυτά τα σημεία αντίστοιχα, κάθετες στην ε.***

Λύση



Τοποθετούμε τον γνώμονα πάνω στην ευθεία ε έτσι, ώστε η μία από τις δύο κάθετες πλευρές του να συμπίπτει με την ευθεία ε. Σύρουμε τον γνώμονα στην ευθεία ε, έως ότου η άλλη κάθετη πλευρά του να έρθει σε επαφή με ένα από τα δοσμένα σημεία. Από το σημείο αυτό χαράζουμε την ευθεία που είναι κάθετη στην ε. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή, για κάθε σημείο Α, Β, Γ και Δ και κατασκευάζουμε τις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ και $ε_4$ αντίστοιχα, που είναι κάθετες στην ευθεία ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

(α) Αν οι πλευρές μιας γωνίας είναι ημιευθείες κάθετες μεταξύ τους, τότε η γωνία λέγεται:

☐ *Οξεία* ☐ *Ορθή* ☐ *Αμβλεία.*

(β) Αν σε μια γωνία η τελική πλευρά της ταυτίζεται με την αρχική, αφού κάνει μια πλήρη στροφή, τότε η γωνία λέγεται:

☐ *Μηδενική γωνία* ☐ *Ευθεία γωνία*

☐ *Πλήρης γωνία.*

***2.** Σχεδίασε ημιευθεία Οx και χάραξε ευθεία που να διέρχεται από το Ο κάθετη στην Οx*

***3.** Σχεδίασε δύο ευθείες που να διέρχονται από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος και να είναι κάθετες σ’ αυτό.*

***4.** Σχεδίασε δύο ημιευθείες Οx και Οy που να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία. Σημείωσε στην Οx τρία σημεία Α, Β και Γ. Από κάθε σημείο από αυτά σχεδίασε ευθεία κάθετη προς την Οy.*

***5.** Σχεδίασε δύο ημιευθείες Οx και Οy που να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία. Στο σημείο Ο να φέρεις τις κάθετες ευθείες προς τις Οx και Οy. Τι παρατηρείς;*

***6.** Σχεδίασε ένα τρίγωνο και φέρε από κάθε κορυφή του την κάθετη προς την απέναντι πλευρά του.*

7. Σχεδίασε μια ευθεία ε και δύο σημεία Α και Β που δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή. Φέρε από τα Α και Β ευθείες κάθετες προς την ε και εξέτασε σε ποια περίπτωση οι δύο αυτές κάθετες συμπίπτουν.

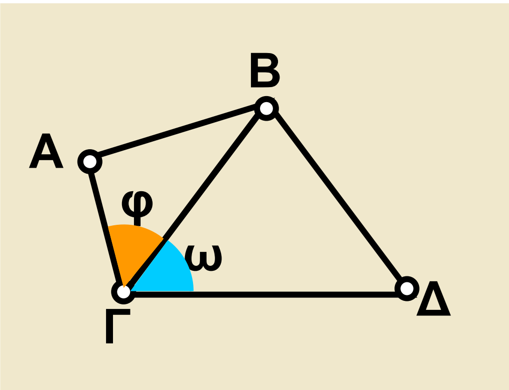
8. Τοποθέτησε τις παρακάτω ονομασίες γωνιών, με σειρά μεγέθους του μέτρου τους: Ορθή - Ευθεία - Πλήρης - Αμβλεία - Μηδενική - Μη κυρτή - Οξεία.

Β.1.7. Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών

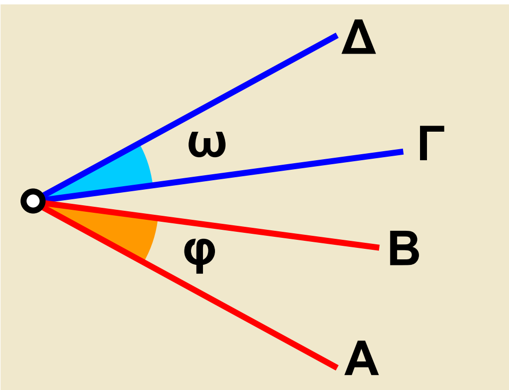
ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε καθένα από τα παρακάτω τρία σχήματα υπάρχουν δύο γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$.

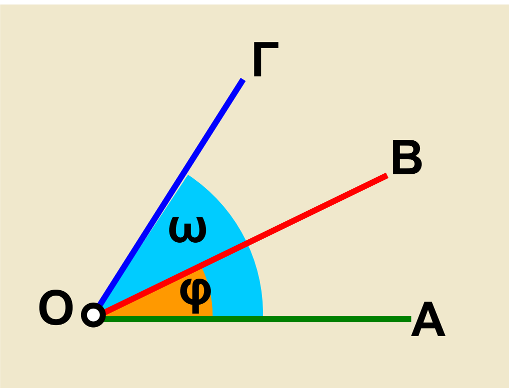
- ***Συμπλήρωσε τα κενά στην πρόταση που αντιστοιχεί σε καθένα από τα τρία σχήματα και δικαιολόγησε την απάντησή σου.***



Έχουν κοινή την ……………. και την ………….. και κανένα άλλο κοινό σημείο



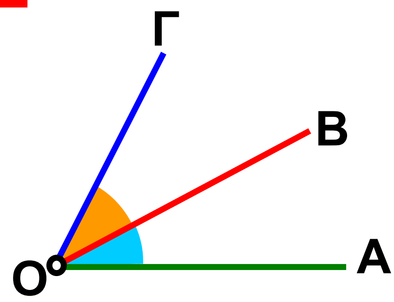
Έχουν μόνο κοινή ……………. και κανένα άλλο κοινό σημείο



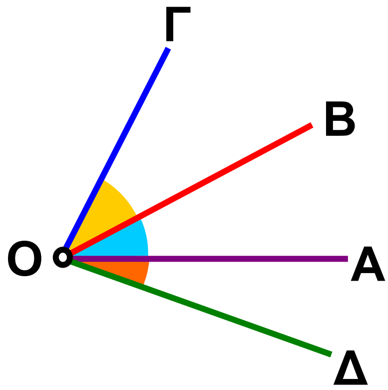
Έχουν κοινή την ………………… μία ………………………. και ……………………

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

• **Εφεξής** γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν **την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.**



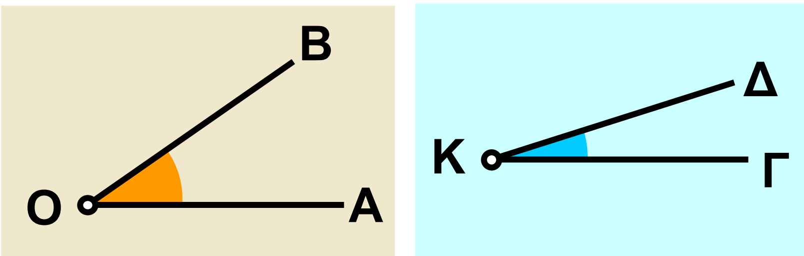
• **Διαδοχικές γωνίες** λέγονται περισσότερες από δύο γωνίες, που βρίσκονται στο **ίδιο επίπεδο** και καθεμιά από αυτές είναι **εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενή της.**



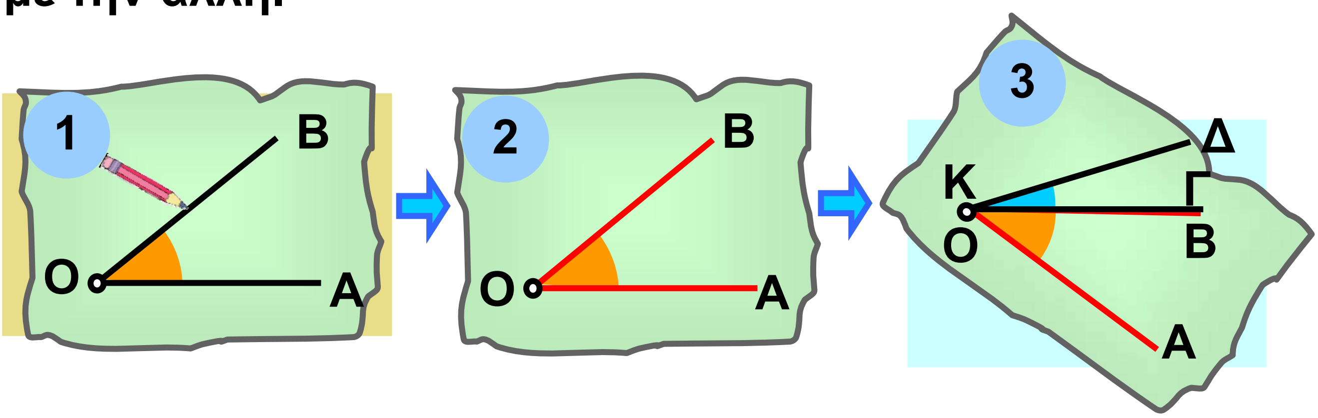
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Υπάρχει τρόπος για να γίνουν δύο γωνίες εφεξής;*

Λύση



Αποτυπώνουμε τη μία γωνία σε διαφανές χαρτί και τη μεταφέρουμε κατάλληλα έτσι, ώστε να γίνει εφεξής με την άλλη.

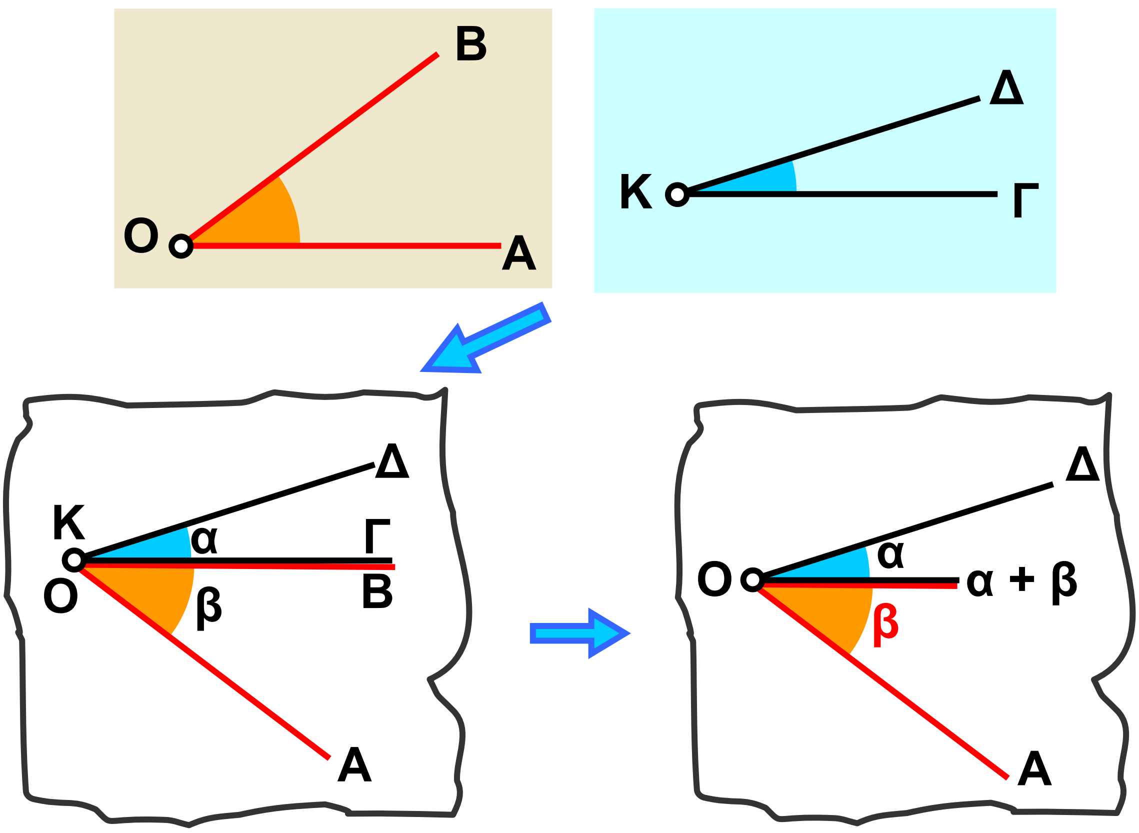


Σε αρκετές περιπτώσεις χρειάζεται να προσθέσουμε δύο γωνίες, δηλαδή να βρούμε μια τρίτη γωνία, που να είναι το άθροισμά τους. Ας δούμε πως γίνεται αυτό.

2. ***Να βρεθεί η γωνία, που είναι άθροισμα δύο γωνιών.***

Λύση

Με το διαφανές χαρτί, όπως κάναμε και προηγουμένως, φέρνουμε τις δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ σε θέση τέτοια, ώστε να γίνουν εφεξής. Τότε οι μη κοινές πλευρές ΟΑ και ΟΔ σχηματίζουν μια νέα γωνία την $O\hat{A}\Delta$, για την οποία διαπιστώνουμε, με το μοιρογνωμόνιο, ότι έχει μέτρο $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$, δηλαδή είναι το άθροισμα των μέτρων ($\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$) των δύο γωνιών.



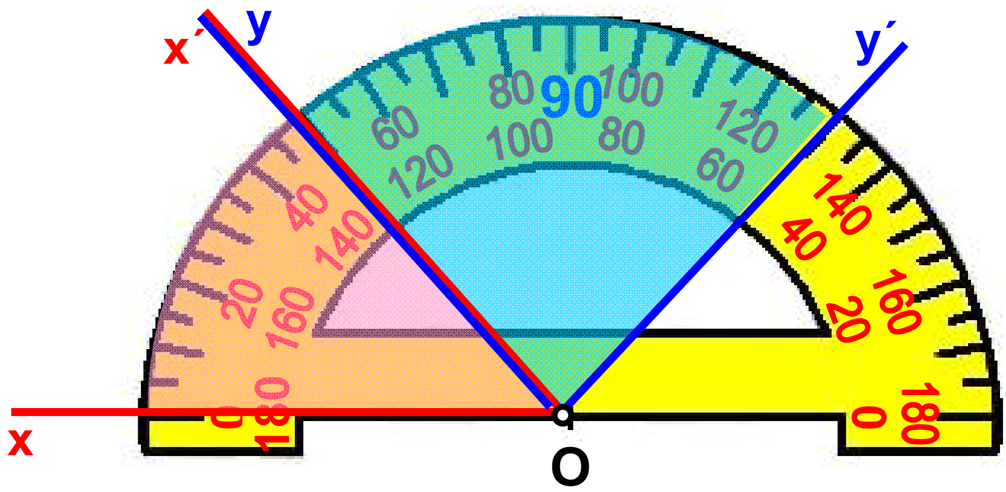
3. ***Να βρεθεί το άθροισμα δύο γωνιών με μέτρα 50^o και 82^o.***

Λύση

Έστω οι γωνίες $x\hat{O}x'$ και $y\hat{O}y'$ με μέτρα $\hat{\alpha} = 50^o$ και $\hat{\beta} = 82^o$ αντίστοιχα. Η γωνία $x\hat{O}y'$ που έχει άνοιγμα:

$x\hat{O}y' = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 50^o + 82^o = 132^o$,

είναι το άθροισμα των γωνιών αυτών.



4. ***Δίνεται ευθεία x΄x. Από ένα σημείο Ο της ευθείας φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της, δυο ημιευθείες Oy και Oz. Να βρεθεί το άθροισμα των τριών γωνιών, που σχηματίζονται, όπως φαίνεται στο σχήμα στην επόμενη σελίδα.***

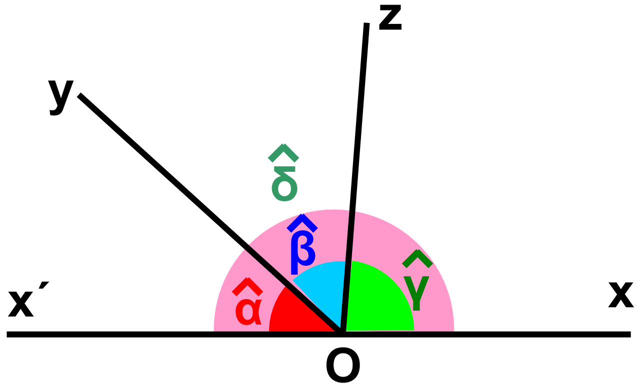
Λύση

Όπως παρατηρούμε, η γωνία $x\hat{O}x'$ είναι το άθροισμα των διαδοχικών γωνιών $y\hat{O}x'$, $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}x$. Άρα το μέτρο της $\hat{\delta}$ είναι το άθροισμα των αντίστοιχων μέτρων $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ των γωνιών αυτών, δηλαδή

$\hat{\delta} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}$.

Επειδή όμως οι πλευρές της γωνίας $x\hat{O}x'$ είναι αντικείμενες ημιευθείες, η γωνία αυτή έχει μέτρο $\hat{\delta} = 180^{o}$

Άρα, $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180^{o}$



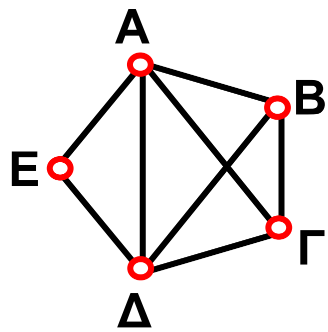
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

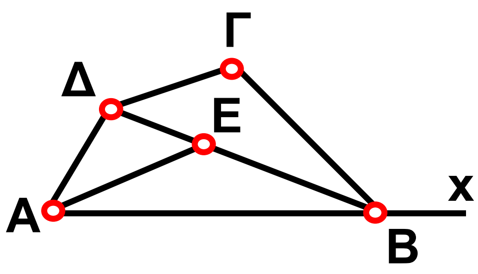
***(α)** Δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μια κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο ονομάζονται ....*

***(β)** Τρεις ή περισσότερες γωνίες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενή της λέγονται ....*

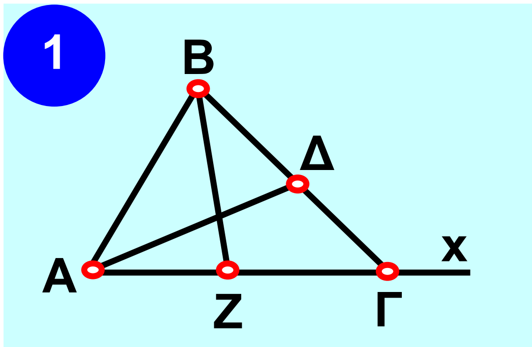
***2.** Να βρεις στο σχήμα και να ονομάσεις όλες τις εφεξής και όλες τις διαδοχικές γωνίες.*

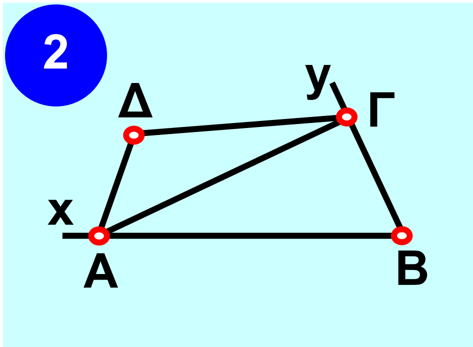


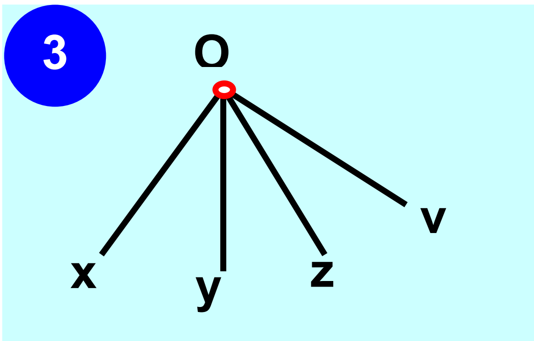
***3.** Να βρεις τα ζεύγη των εφεξής γωνιών στο σχήμα.*

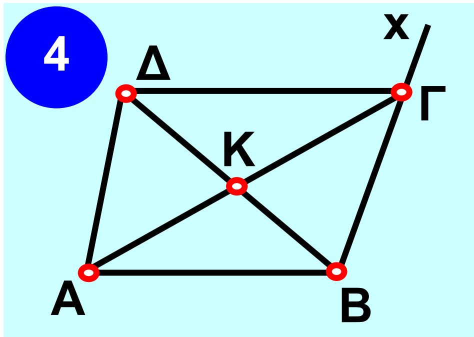


4. Να γράψεις τις εφεξής και τις διαδοχικές γωνίες που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα.









Β.1.8. Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατά κορυφήν γωνίες

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δύο γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ είναι εφεξής.
Οι μη κοινές πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.

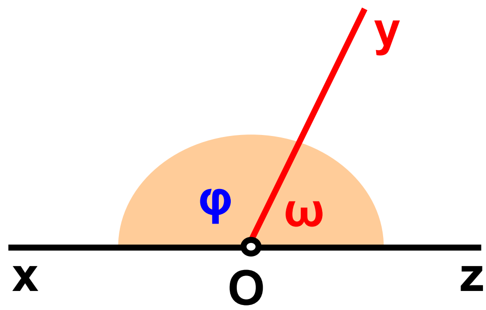
- ***Μπορείς να βρεις το άθροισμά τους;***

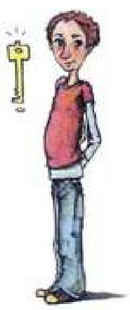
Δύο γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ είναι εφεξής. Οι μη κοινές πλευρές τους είναι κάθετες ημιευθείες.

- ***Μπορείς να βρεις το άθροισμά τους;***

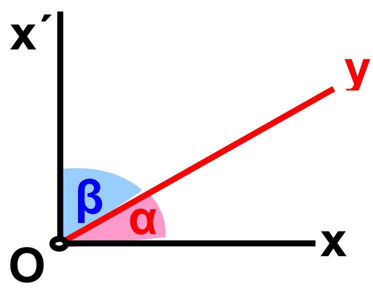
Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Παραπληρωματικές γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν **άθροισμα 180^{o}.** Η κάθε μία από αυτές λέγεται παραπληρωματική της άλλης.

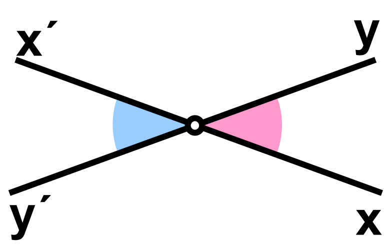




- **Συμπληρωματικές γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν **άθροισμα 90^{o}.** Η κάθε μία από αυτές λέγεται συμπληρωματική της άλλης.



- **Κατακορυφήν γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την **κορυφή τους κοινή** και τις πλευρές τους **αντικείμενες ημιευθείες.**



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται η γωνία $x\hat{O}y$ με μέτρο $\hat{\alpha} = 72^o$. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η παραπληρωματική της.

Λύση

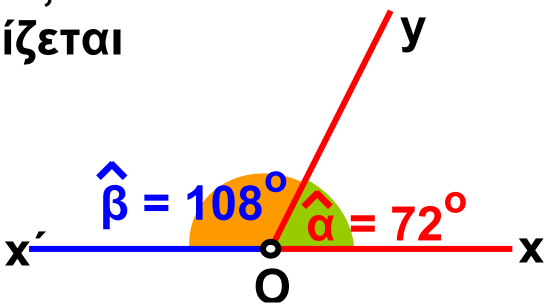
Έστω ότι η παραπληρωματική της $\hat{\alpha}$ έχει μέτρο $\hat{\beta}$.

Θα είναι τότε: $\hat{\beta} = 180^o - \hat{\alpha}$, δηλαδή θα είναι:

$\hat{\beta} = 180^o - 72^o = 108^o$

Για να σχεδιάσουμε την παραπληρωματική μιας γωνίας , προεκτείνουμε την πλευρά αυτής Οx προς το μέρος του Ο, οπότε έχουμε την ημιευθεία Οx΄, αντικείμενη της Οx. Έτσι σχηματίζεται η γωνία $y\hat{O}x΄$, που είναι παραπληρωματική της $x\hat{O}y$ και έχει μέτρο το $\hat{\beta}$, ώστε να είναι:

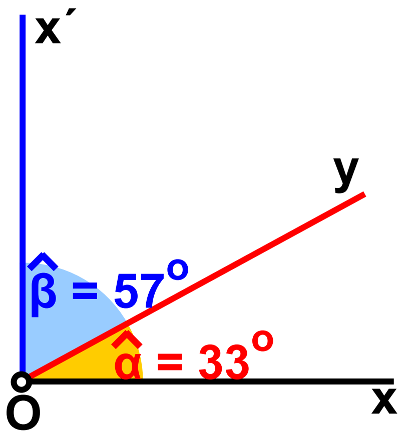
$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^o$.



2. Δίνεται η γωνία $x\hat{O}y$ με μέτρο $\hat{\alpha} = 33^o$. Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η συμπληρωματική της.

Λύση

Έστω ότι η συμπληρωματική της έχει μέτρο $\hat{\beta}$. Θα είναι τότε $\hat{\beta} = 90^o - \hat{\alpha}$, δηλαδή θα είναι: $\hat{\beta} = 90^o - 33^o = 57^o$. Για να σχεδιάσουμε τη συμπληρωματική μιας γωνίας $x\hat{O}y$ φέρνουμε

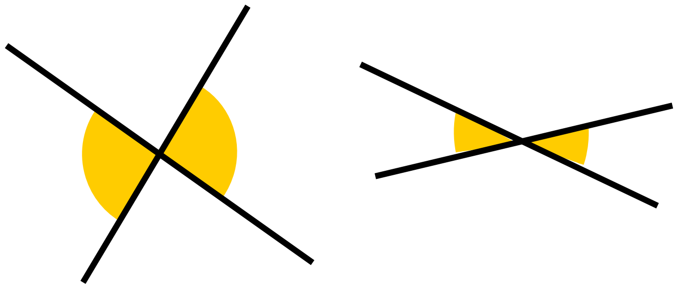


την ημιευθεία $Ox' \perp Ox$ προς το μέρος του ημιεπιπέδου που βρίσκεται η Oy. Έτσι σχηματίζεται η γωνία $y\hat{O}x'$, που είναι συμπληρωματική της $x\hat{O}y$ και έχει μέτρο το $\hat{\beta}$, ώστε να είναι: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^o$.

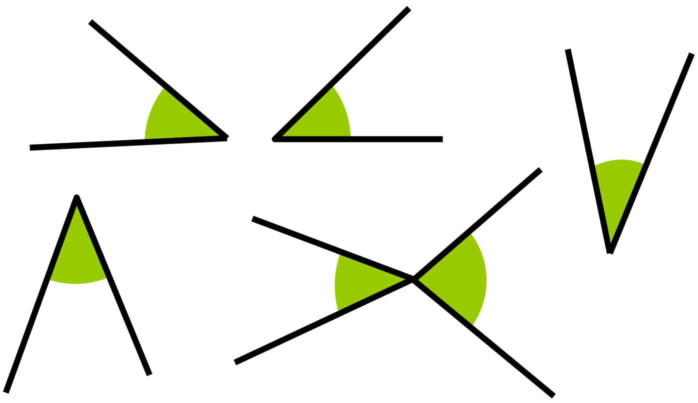
3. ***Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις οι γωνίες είναι κατακορυφήν και γιατί;***

Λύση

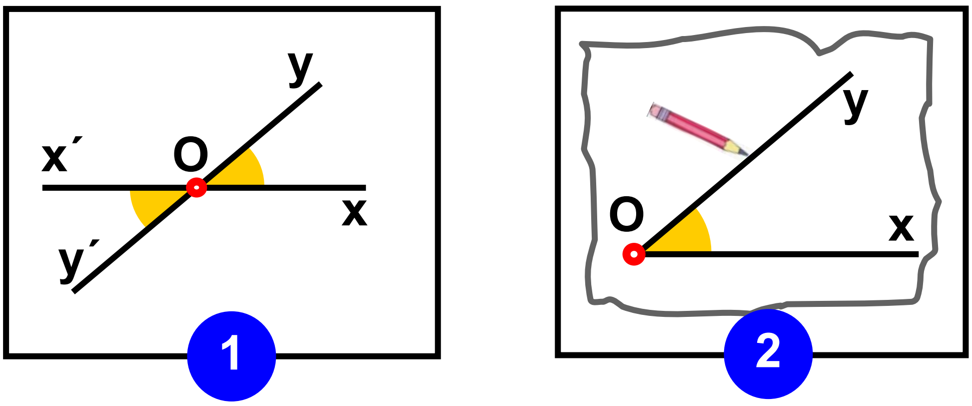
Είναι κατακορυφήν
Διότι έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.

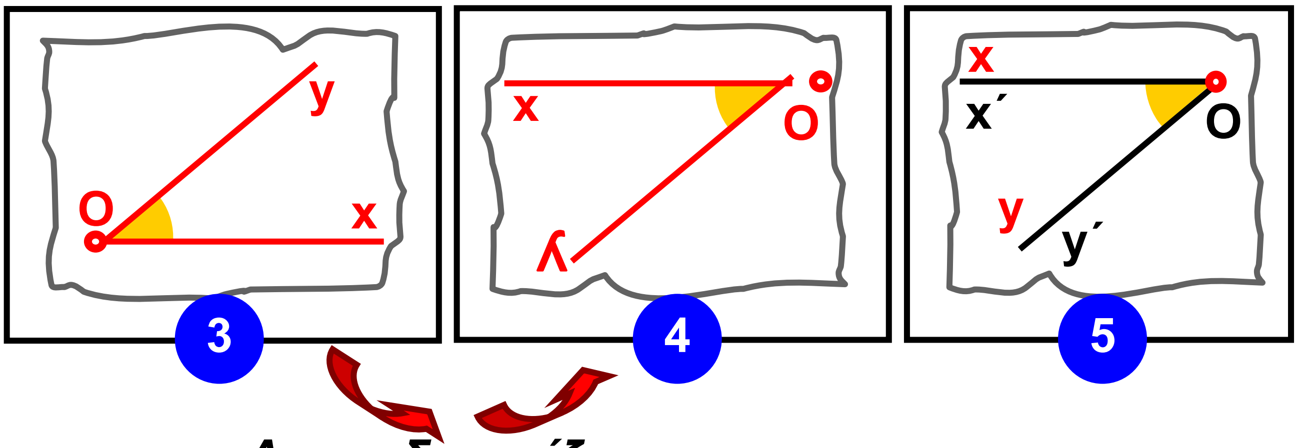


Δεν είναι κατακορυφήν
Διότι ή δεν έχουν κοινή κορυφή ή οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.



4. ***Να εξεταστεί με διαφανές χαρτί η σχέση δύο κατακορυφήν γωνιών.***





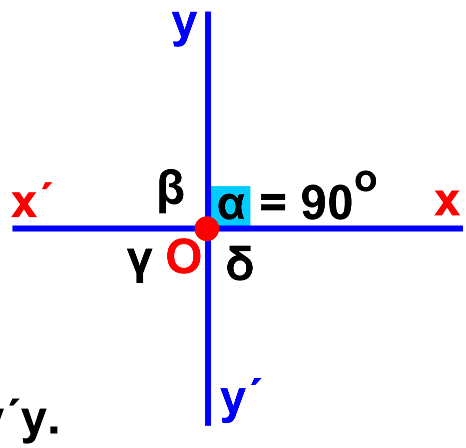
Αναποδογυρίζουμε το διαφανές χαρτί.

Διαπιστώνουμε, λοιπόν ότι:

• ***Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.***

5. ***Να δικαιολογηθεί γιατί δύο κάθετες ευθείες σχηματίζουν τέσσερις ορθές γωνίες.***

Λύση



Σχεδιάζουμε μια ορθή γωνία xOy (με μέτρο $\hat{\alpha} = 90^o$) και προεκτείνουμε τις πλευρές της προς το μέρος της κορυφής της, οπότε έχουμε δύο κάθετες ευθείες x΄x και y΄y.

Επειδή οι γωνίες x$\hat{O}$y και x΄$\hat{O}$y΄ είναι κατακορυφήν, θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 90^o$.

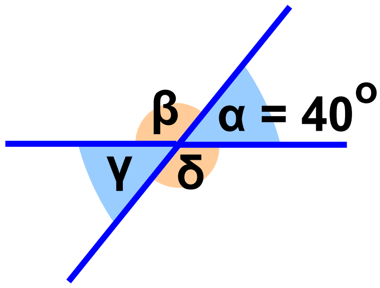
Οι γωνίες, όμως, x΄$\hat{O}$y και x$\hat{O}$y είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι: $\hat{\beta} = 180^o - 90^o = 90^o$

Αλλά οι γωνίες x΄$\hat{O}$y και x$\hat{O}$y΄ είναι κατακορυφήν, οπότε: $\hat{\delta} = \hat{\beta} = 90^o$

Επομένως βλέπουμε ότι: $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = \hat{\delta} = 90^o$.

6. *Να υπολογιστούν οι γωνίες του σχήματος, εάν είναι $\hat{\alpha} = 40^o$.*

Λύση



Επειδή οι γωνίες με μέτρα $\hat{\gamma}$ και $\hat{\alpha}$ είναι κατακορυφήν, επομένως θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 40^o$.
Οι γωνίες, όμως, με μέτρα $\hat{\beta}$ και $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι: $\hat{\beta} = 180^o - 40^o = 140^o$.
Αλλά οι γωνίες με μέτρα $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ είναι κατακορυφήν, οπότε: $\hat{\beta} = \hat{\delta} = 140^o$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Τοποθέτησε ένα “x” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

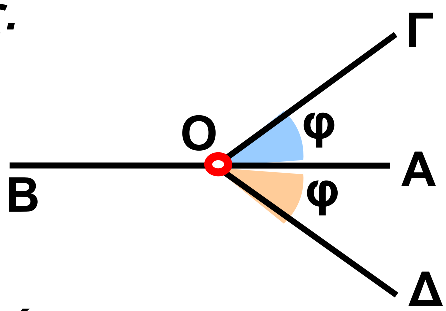
Αν δύο γωνίες έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε λέγονται:

- ☐ *Εφεξής γωνίες*
- ☐ *Διαδοχικές γωνίες*
- ☐ *Παραπληρωματικές γωνίες*
- ☐ *Συμπληρωματικές γωνίες*
- ☐ *Κατακορυφήν γωνίες.*

2. ***Να σχεδιάσεις μία γωνία 125^{o} και μετά να βρεις και να σχηματίσεις την παραπληρωματική της.***

3. ***Να βρεις τι είδους γωνία είναι η παραπληρωματική (α) μιας αμβλείας, (β) μιας ορθής και (γ) μιας οξείας γωνίας.***

4. ***Να σχεδιάσεις μια γωνία 35^{o} και μετά να βρεις και να σχηματίσεις τη συμπληρωματική της.***

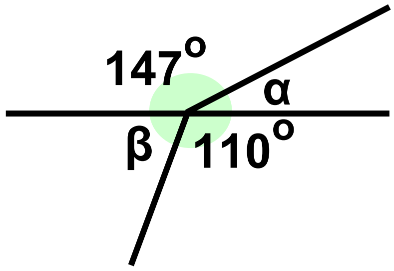


5. ***Στο διπλανό σχήμα είναι $Γ\hat{O}A = Δ\hat{O}A = \hat{φ}$. Να συγκρίνεις τις γωνίες $Γ\hat{O}B$, $Δ\hat{O}B$ και να δικαιολογήσεις το αποτέλεσμα της σύγκρισης.***

6. ***Οι γωνίες $\hat{α}$ και $\hat{β}$, είναι παραπληρωματικές. Η είναι γνωστή και το μέτρο της δίνεται στον παρακάτω πίνακα. (α) Να σχεδιάσεις την $\hat{α}$, (β) να σχεδιάσεις και να μετρήσεις τη $\hat{β}$, με το μοιρογνωμόνιο, (γ) να υπολογίσεις τη $\hat{β}$. Μετά να αντιγράψεις στο τετράδιο σου τον πίνακα και να τον συμπληρώσεις.***

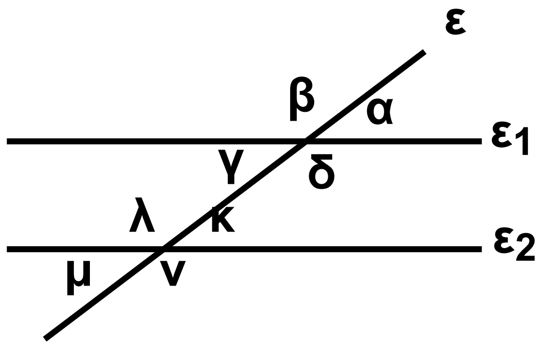
$\hat{α}$	$\hat{β}$ από μέτρηση	$\hat{β}$ από υπολογισμό
15^{o}		
18^{o}		
43^{o}		
77^{o}		
90^{o}		
116^{o}		
169^{o} 10΄		

***7.** Υπολόγισε τις γωνίες α και β, του σχήματος.*



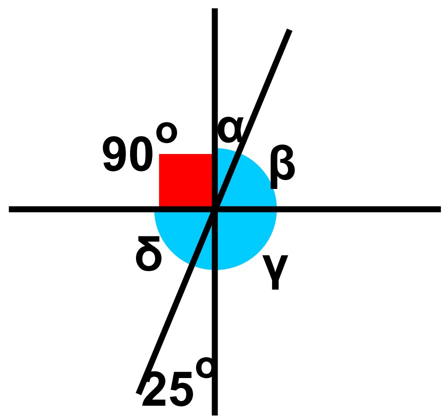
***8.** Σχεδίασε μια γωνία 37° και μετά σχεδίασε την κατακορυφήν της.*

9. Να βρεις όλα τα ζεύγη των κατακορυφήν γωνιών του διπλανού σχήματος.



***10.** Εάν γνωρίζεις ότι η μία γωνία από τις τέσσερις, που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι 57° υπολόγισε τις υπόλοιπες γωνίες.*

***11.** Να υπολογίσεις τις γωνίες του διπλανού σχήματος (χωρίς μοιρογνωμόνιο).*

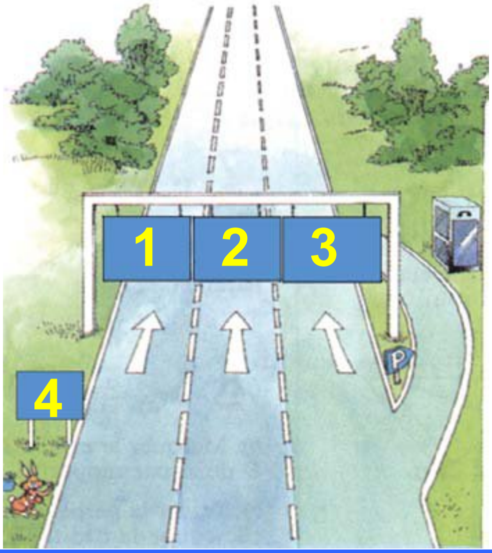


Β.1.9. Θέσεις ευθειών στο επίπεδο

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Οι διαγραμμίσεις του αυτοκινητόδρομου στη διπλανή εικόνα συναντώνται (τέμνονται) κάπου;

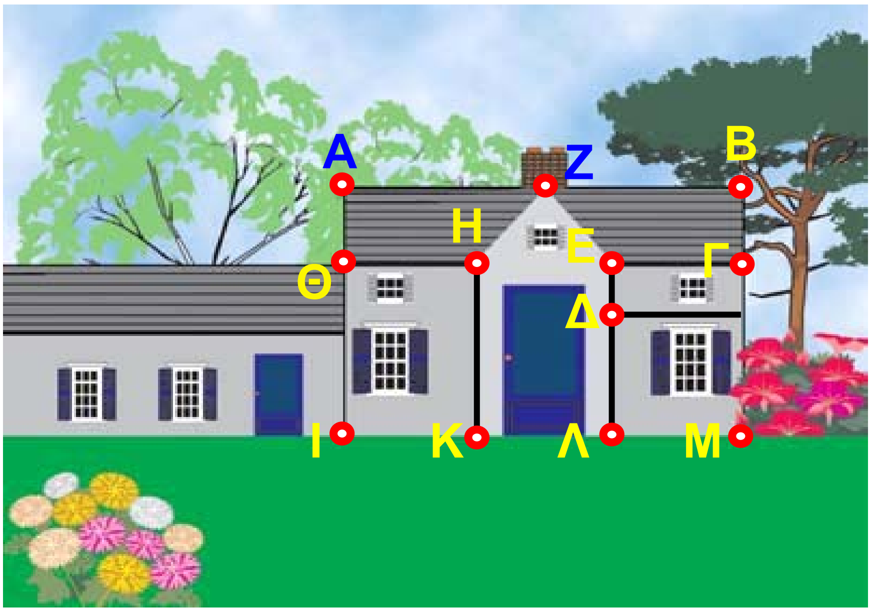
- ***Μπορείς να δικαιολογήσεις την απάντησή σου;***



1. ΦΑΡΣΑΛΑ *ΠΟΡΕΙΑ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ*
2. ΛΑΡΙΣΑ *ΠΟΡΕΙΑ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ*
3. ΒΟΛΟΣ *ΠΟΡΕΙΑ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ*
4. ΕΞΟΔΟΣ 500 m

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Στη διπλανή εικόνα προσπάθησε να βρεις τη σχετική θέση των ευθειών:
(α) ΑΒ και ΗΕ,
(β) ΑΒ και ΒΓ,
(γ) ΗΕ και ΚΛ,
(δ) ΗΖ και ΖΕ,
(ε) ΑΘ και ΒΓ.
(Δικαιολόγησε την απάντησή σου).



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

● **Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου λέγονται παράλληλες, αν δεν έχουν κοινό σημείο όσο κι αν προεκταθούν.**

● **Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο ονομάζονται τεμνόμενες και το κοινό τους σημείο λέγεται σημείο τομής των δύο ευθειών.**

Επομένως:

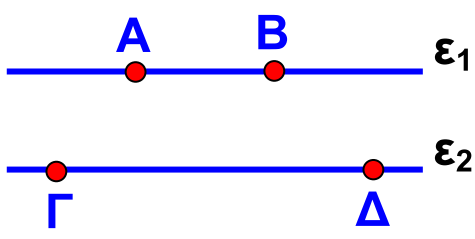
► **Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή θα τέμνονται.**

Πως συμβολίζουμε την παραλληλία δύο ευθειών

◆ **Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες ε_1, και ε_2 είναι παράλληλες, χρησιμοποιούμε το σύμβολο "//" και *γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.***

Για τα τμήματα των ευθειών και τις ημιευθείες, μπορούμε να πούμε ότι:

● **Δύο ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες, θα λέγονται παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα και γράφουμε ΑΒ//ΓΔ.**



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

***1.** Να βρεθούν ποιες από τις ευθείες του σχήματος είναι παράλληλες και ποιες τεμνόμενες.*

Λύση

Παράλληλες είναι οι ευθείες $δ_1$, και $δ_2$ ($δ_1 // δ_2$).

Τεμνόμενες είναι οι ευθείες:

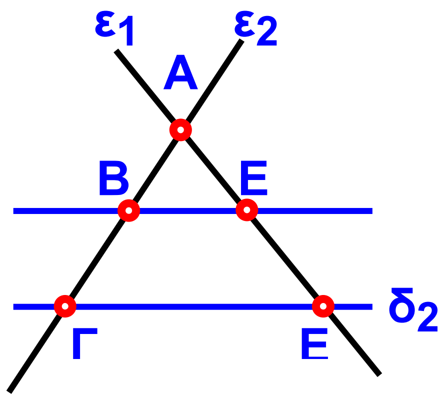
(α) $ε_1$ και $ε_2$ στο σημείο Α,

(β) $ε_1$ και $δ_1$ στο σημείο Δ,

(γ) $ε_1$ και $δ_2$ στο σημείο Ε,

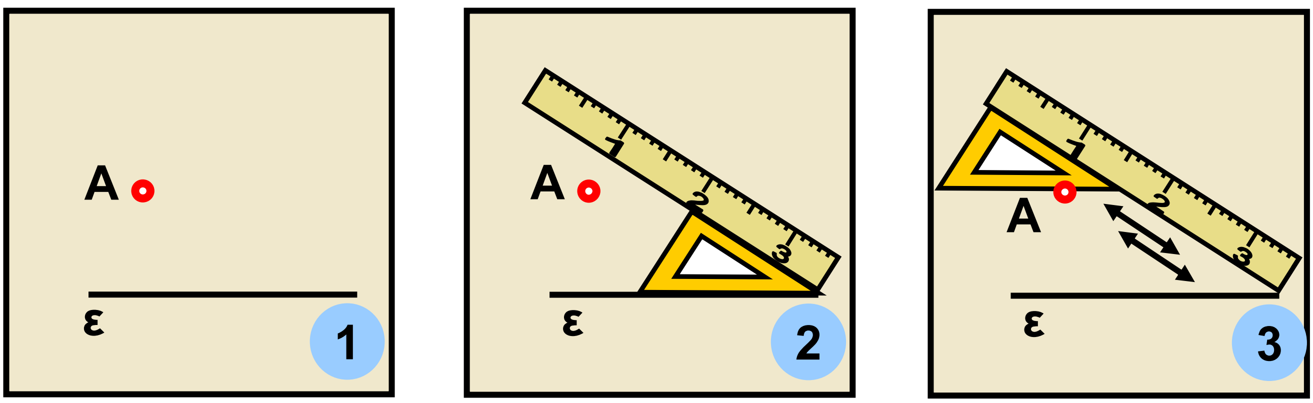
(δ) $ε_2$ και $δ_1$ στο σημείο Β και

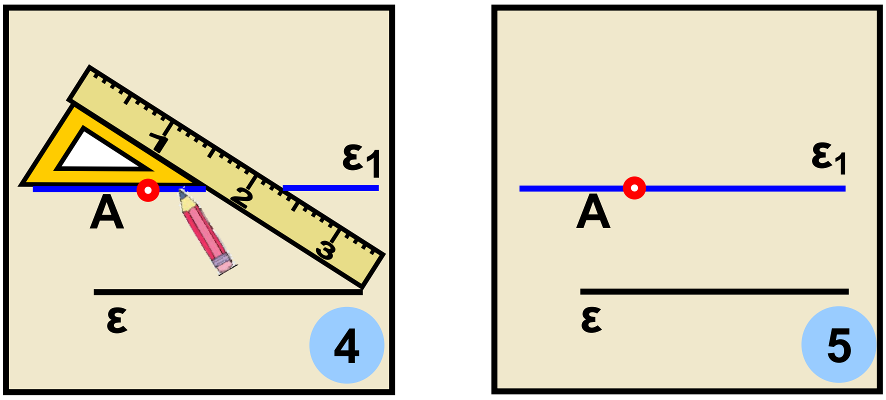
(ε) $ε_2$ και $δ_2$ στο σημείο Γ.



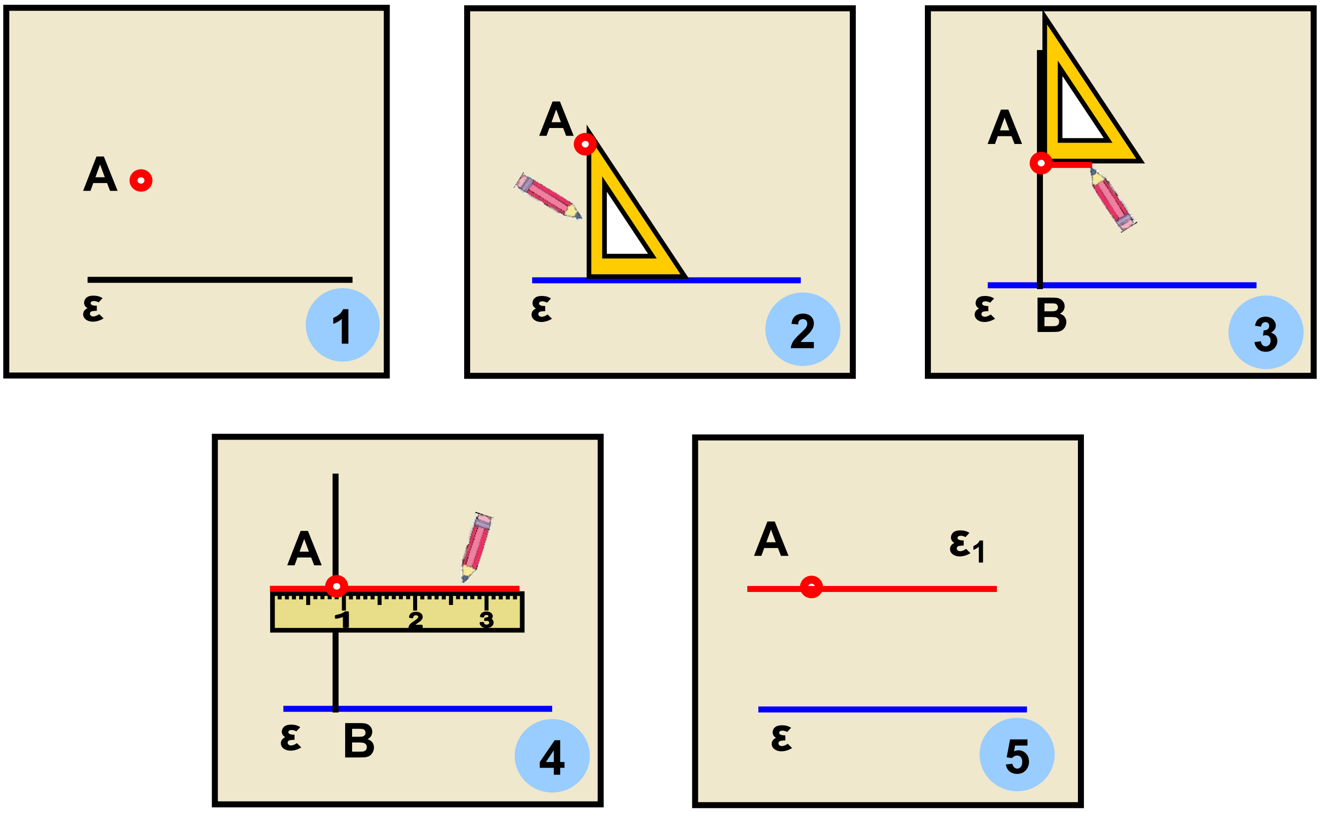
***2.** Να σχεδιαστεί ευθεία $ε_1$ που να είναι παράλληλη προς μια ευθεία ε και να διέρχεται από σημείο Α, το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία ε.*

1ος τρόπος: Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να σχεδιάσουμε με τον κανόνα και τον γνώμονα την ευθεία $ε_1$ που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την ε.





2ος τρόπος: **Χρησιμοποιούμε τον γνώμονα για να φέρουμε κάθετο ΑΒ από το σημείο Α στην ευθεία ε. Στη συνέχεια φέρνουμε την $ε_1$ κάθετη από το Α στην ΑΒ η οποία είναι η ζητούμενη παράλληλη της ε.**

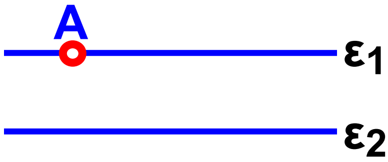


• **Δύο ευθείες** του επιπέδου **κάθετες σε μια ευθεία** είναι μεταξύ τους **παράλληλες.**

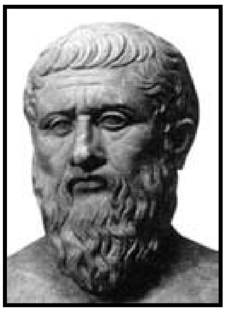
Μπορούμε άραγε να φέρουμε κι άλλη (διαφορετική) παράλληλη ευθεία από το Α προς την ε;

Δεχόμαστε ότι ισχύει η πρόταση:

► **Από ένα σημείο Α, εκτός ευθείας ε, διέρχεται μία και μοναδική ευθεία $ε_1$ παράλληλη στην ε.**



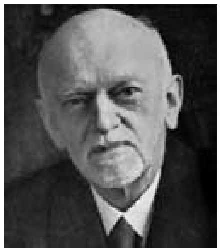
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ



Ο **Πλάτωνας** *έγραψε στην είσοδο της* **Ακαδημίας** *το ρητό: «ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ», δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στη σπουδή και τη γνώση της Γεωμετρίας. Το σημαντικότερο έργο Γεωμετρίας στην αρχαιότητα ήταν τα "***Στοιχεία***" (13 βιβλία) του* **Ευκλείδη** *(330 - 270 π.Χ.), που απετέλεσε σταθμό στη Γεωμετρία και αναδείχτηκε σε πρότυπο μαθηματικής σκέψης. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη αναγνωρίζονται διεθνώς ως ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρωπίνου πνεύματος. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι μαζί με τη Βίβλο είναι από τα συγγράμματα που είχαν τις περισσότερες εκδόσεις. Ο διάσημος Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonne, έγραψε για τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, ότι: "Η Γεωμετρία των Αρχαίων Ελλήνων είναι ίσως το πιο εκπληκτικό πνευματικό δημιούργημα του ανθρώπου. Χάρη στους Έλληνες μπορέσαμε να οικοδομήσουμε τη σύγχρονη επιστήμη".*

Ο **Ευκλείδης** *στα* **"Στοιχεία"** *του ορίζει ως παράλληλες:*
"ΤΙΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΕΚΕΙΝΕΣ ΠΟΥ ΕΥΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΙΔΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΠΡΟΕΚΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ ΚΙ ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ ΜΕΡΗ ΔΕ ΣΥΝΑΝΤΩΝΤΑΙ ΣΕ ΚΑΝΕΝΑ ΑΠ' ΑΥΤΑ" *(Ορισμός 23)*

και αμέσως μετά διατυπώνει το διάσημο «5ο Αίτημα», δηλαδή την πρόταση ότι:
"ΕΑΝ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΠΟΥ ΤΕΜΝΕΙ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ ΤΙΣ ΕΝΤΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ ΜΕΡΗ ΓΩΝΙΕΣ ΜΙΚΡΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΟΡΘΕΣ, ΤΟΤΕ ΟΙ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΡΟΕΚΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ ΣΥΝΑΝΤΩΝΤΑΙ ΣΤΟ ΜΕΡΟΣ ΠΟΥ ΟΙ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΟΡΘΕΣ"

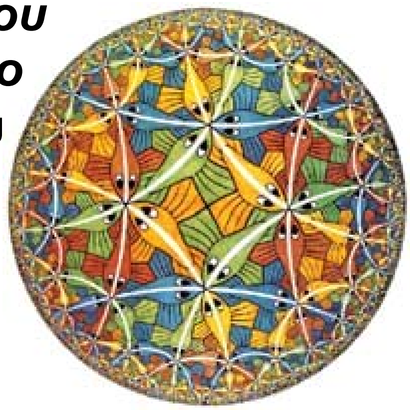


Σήμερα το 5ο αίτημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διατυπώνεται με την εξής μορφή:
"Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται προς αυτήν μία μόνο παράλληλη"*. Στη διατύπωση αυτή συνέβαλε σημαντικά το 1899 ο Γερμανός μαθηματικός* **David Hilbert***.*

Η αλήθεια της πρότασης αυτής φαίνεται να προκύπτει αβίαστα από την καθημερινή μας εμπειρία. Όμως, από την αρχαιότητα μέχρι τις αρχές του περασμένου αιώνα, έγιναν πολλές αποτυχημένες προσπάθειες να αποδειχθεί με βάση τις άλλες ισχύουσες προτάσεις της Γεωμετρίας. Η πλήρης αποτυχία των προσπαθειών, όμως, δεν πήγε χαμένη. Αποδείχθηκε ότι εκείνο που έφταιγε ήταν το πλαίσιο μέσα στο οποίο γινόντουσαν οι προσπάθειες αυτές, δηλαδή η συγκεκριμένη "Ευκλείδεια" Γεωμετρία. Έτσι αναπτύχθηκαν και άλλες γεωμετρίες στις οποίες δεν ισχύει το αίτημα αυτό.

Συγκεκριμένα ο Ρώσος μαθηματικός **Nikolai Lobatchevsky** *(1792-1856) προτείνει μία διαφορετικού τύπου Γεωμετρία, την "Υπερβολική", στην οποία το 5ο αίτημα αντικαθίσταται από την πρόταση ότι:*
"από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν

περισσότερες από δύο παράλληλες προς αυτήν”. *Η Γεωμετρία αυτή περιγράφει χώρους που έχουν παράξενες ιδιότητες, όπως ότι το* **άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές** *κ.α. Ένας τέτοιος χώρος είναι π.χ. το εσωτερικό του κύκλου στον παράπλευρο πίνακα του Ολλανδού ζωγράφου* **Escher.**



Επίσης, ο **Bernhard Riemann** *(1826-1866) θεμελίωσε την λεγόμενη “Ελλειπτική” Γεωμετρία, στην οποία ισχύει ότι:* **“από ένα σημείο εκτός ευθείας δεν υπάρχει καμία παράλληλη προς αυτήν”** *και στην οποία στηρίχθηκε ο* **Albert Einstein** *για να διατυπώσει την περίφημη θεωρία του, της* **Σχετικότητας**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθέτησε ένα “Χ” στη θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(α) Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο λέγονται:

☐ *Παράλληλες*

☐ *Τεμνόμενες*

☐ *Κάθετες*

(β) Από ένα σημείο Α, εκτός ευθείας ε, διέρχεται:

☐ *Μία και μοναδική κάθετη ευθεία στην ε.*

☐ *Δύο διαφορετικές κάθετες ευθείες στην ε.*

☐ *Καμία κάθετη ευθεία στην ε.*

(γ) Αν δύο ευθείες του επιπέδου είναι κάθετες σε μια ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους:

- [ ] Κάθετες
- [ ] Παράλληλες
- [ ] Τεμνόμενες

2. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Από ένα σημείο μπορούν να περάσουν .... ευθείες.

(β) Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή ....

(γ) Δύο ευθείες του επιπέδου κάθετες σε μια ευθεία είναι μεταξύ τους ....

(δ) Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου, που δεν έχουν κοινό σημείο είναι ....

(ε) Δύο ευθείες του ιδίου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο λέγονται …........................... και το κοινό τους σημείο λέγεται σημείο .... των δύο ευθειών.

3. *Να χαράξεις τρεις ευθείες $ε_1$ $ε_2$ και $ε_3$, ώστε:*
(α) οι ευθείες αυτές να μην τέμνονται, (β) η μία να τέμνει τις άλλες δύο, (γ) να τέμνονται ανά δύο και (δ) να έχουν κοινό σημείο.

4. *Να σχεδιάσεις δύο ευθείες που να διέρχονται από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος και να είναι κάθετες σ' αυτό.*

5. Να σχεδιάσεις δύο ημιευθείες Οχ και Ογ, οι οποίες να μην περιέχονται στην ίδια ευθεία Να σημειώσεις στην Οχ τρία σημεία Α, Β και Γ. Από κάθε σημείο από αυτά να σχεδιάσεις ευθεία παράλληλη προς την Ογ.

6. Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε και δύο σημεία Α και Β που δεν ανήκουν στην ευθεία αυτή. Να φέρεις από τα Α και Β ευθείες παράλληλες προς την ε και να εξετάσεις σε ποια περίπτωση οι δύο αυτές παράλληλες συμπίπτουν.

Β.1.10. Απόσταση σημείου από ευθεία - Απόσταση παραλλήλων

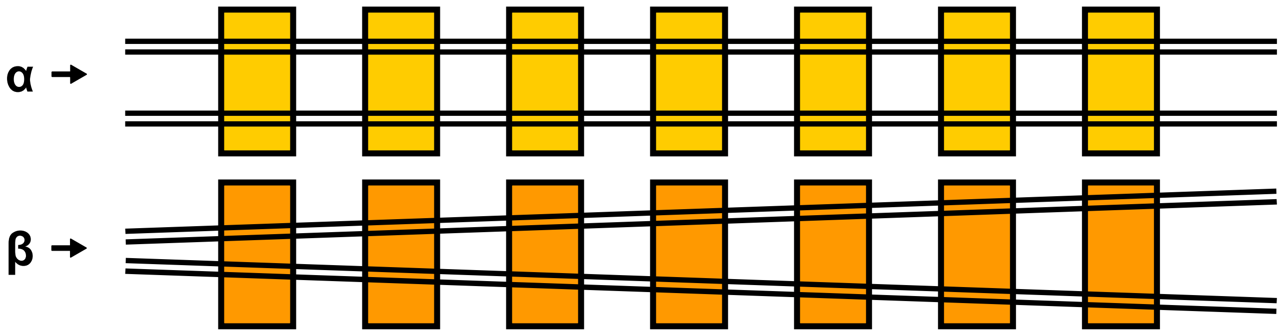
Στη Γεωμετρία, χρησιμοποιούμε την έννοια της απόστασης στις εξής περιπτώσεις:
– Απόσταση σημείου από σημείο, που είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος το οποίο τα ενώνει.
– Απόσταση σημείου από ευθεία.
– Απόσταση παραλλήλων ευθειών.
Ας αναζητήσουμε αυτή την έννοια στις παρακάτω δραστηριότητες.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

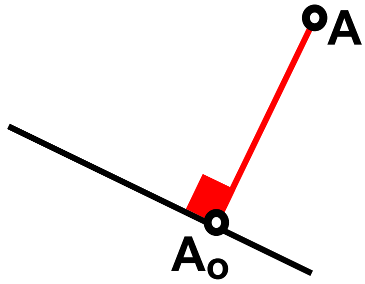
Να βρεις σε ποιο σημείο του δημόσιου αγωγού νερού, στο παρακάτω σχεδιάγραμμα, πρέπει να γίνει η σύνδεση με το σημείο Α του σπιτιού, ώστε ο σωλήνας να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Σε ποια από τις δύο σιδηροτροχιές (α και β) μπορεί να κινηθεί το τραίνο, χωρίς να εκτροχιαστεί; Μπορείς να δικαιολογήσεις την απάντησή σου;

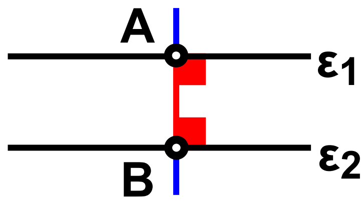


Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε



• **Απόσταση** του σημείου Α από την ευθεία ε ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος AA_O από το σημείο Α προς την ευθεία ε.

• **Απόσταση** δύο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ’ αυτές, π.χ. το ΑΒ.



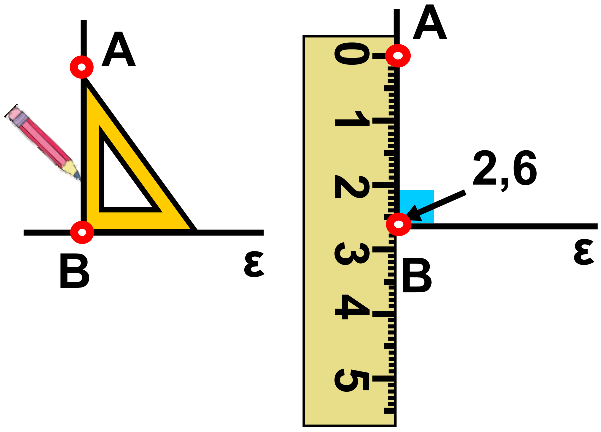
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

***1.** Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.*

Λύση

Με τη βοήθεια του γνώμονα σχεδιάζουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς την ευθεία ε. Με

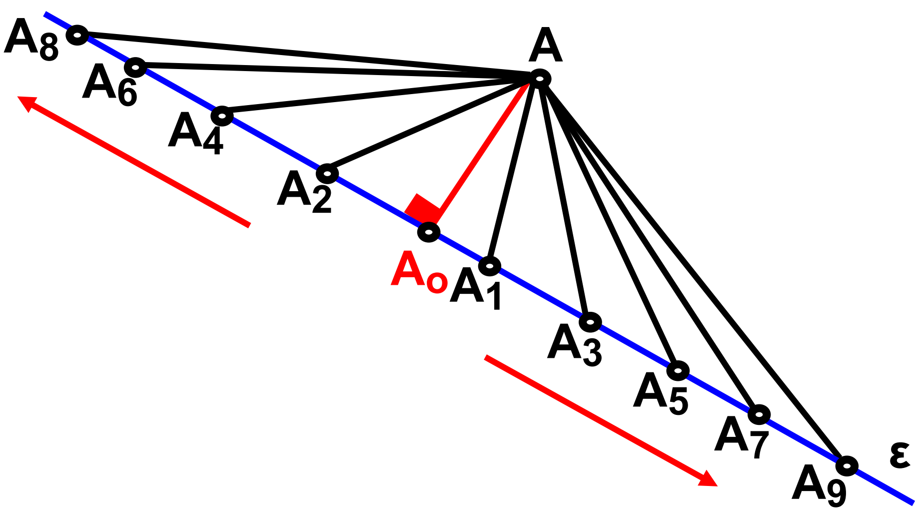
το υποδεκάμετρο μετράμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το βρίσκουμε π.χ. 2,6 cm.
Άρα, η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε είναι, στην περίπτωση αυτή, 2,6 cm.



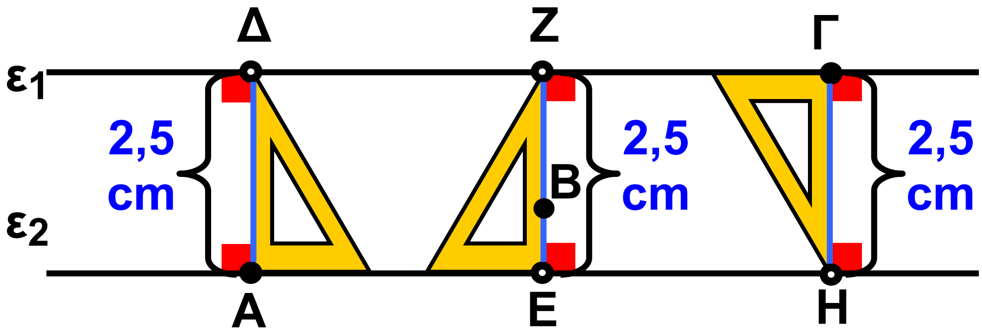
2. ***Να βρεθεί σημείο της ευθείας ε, η απόσταση του οποίου από ένα σημείο Α εκτός αυτής να είναι η ελάχιστη.***

Λύση

**Από το σημείο Α φέρνουμε το κάθετο τμήμα $ΑΑ_ο$ στην ευθεία ε και συνδέουμε το σημείο Α με διάφορα σημεία $Α_1$, $Α_2$, $Α_3$, $Α_4$, $Α_5$, $Α_6$, $Α_7$, $Α_8$ και $Α_9$ της ε.
Μετράμε τις αποστάσεις του Α από αυτά και παρατηρούμε ότι αυτές μεγαλώνουν συνεχώς όσο απομακρυνόμαστε αριστερά και δεξιά από το $Α_ο$, άρα η ελάχιστη απόσταση είναι το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΑ_ο$.
Επομένως το $Α_ο$, είναι το ζητούμενο σημείο και ονομάζεται ίχνος της κάθετης από το Α.**



3. Να σχεδιαστούν και να συγκριθούν τα ευθύγραμμα τμήματα που διέρχονται από τα σημεία Α, Β και Γ και εκφράζουν τις αποστάσεις των παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2.



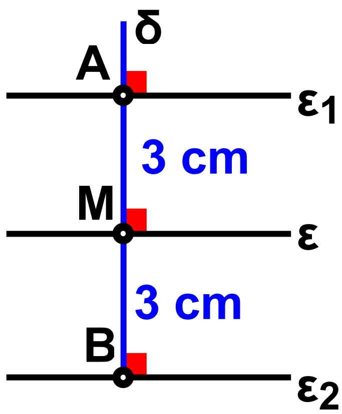
Λύση

Φέρνουμε τις κάθετες ΑΔ, ΕΒΖ και ΗΓ από τα σημεία Α, Β και Γ στις ευθείες ε_1 και ε_2. Μετράμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΕΖ και ΗΓ και βρίσκουμε ότι είναι όλα μεταξύ τους ίσα. Άρα η απόσταση των παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2 είναι σταθερή και ίση με 2,5 cm.

4. Να σχεδιαστούν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 παράλληλες προς μια ευθεία ε, που να απέχουν από αυτή 3 cm.

Λύση

Σε τυχαίο σημείο Μ της ε σχεδιάζουμε ευθεία δ κάθετη στην ε. Πάνω στην ευθεία δ βρίσκουμε με το υποδεκάμετρο δύο σημεία Α και Β έτσι, ώστε να είναι: ΜΑ = ΜΒ = 3 cm. Από τα Α και Β, με τον γνώμονα, σχεδιάζουμε ευθείες ε_1 και ε_2 κάθετες στην ε. Οι ευθείες αυτές είναι οι ζητούμενες, γιατί η απόσταση τους από την ε είναι 3 cm.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Το μήκος του καθέτου ευθυγράμμου τμήματος AA_o από το σημείο Α προς την ευθεία ε ονομάζεται .... του σημείου Α από την ευθεία.

(β) Το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος, που είναι κάθετο σε δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σ’ αυτές λέγεται .... των δύο παραλλήλων ευθειών.

2. Σημείωσε, πάνω σε μια ευθεία ε, με τη σειρά, τα σημεία Γ, Β και Δ, έτσι ώστε να είναι ΓΒ = ΒΔ = 3 cm. Χάραξε μια ευθεία, που να διέρχεται από το Β κάθετη στην ε. Πάνω στην κάθετη αυτή να σημειώσεις ένα σημείο Α, που να απέχει από το Β απόσταση ΑΒ = 4 cm. Να συγκρίνεις μετρώντας με το υποδεκάμετρο τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΑΔ.

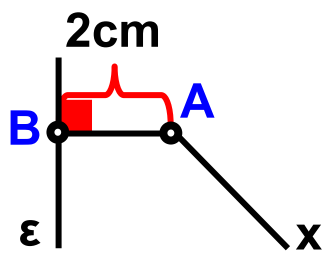
3. Να επαναλάβεις την προηγούμενη άσκηση, εάν είναι: ΓΒ = 6 cm, ΒΔ = 15 cm, ΑΒ = 8 cm.

4. Να σχεδιάσεις δύο μη αντικείμενες ημιευθείες Οx και Οy. Να πάρεις στην Οx, τα σημεία Α, Β και Γ, τέτοια ώστε να είναι: ΟΑ = ΑΒ = ΒΓ = 2 cm. Να ορίσεις στην Οy ένα σημείο Α΄, ώστε να είναι ΟΑ΄ = 1,6 cm και να σχεδιάσεις την ευθεία ΑΑ΄. Στη συνέχεια να φέρεις από τα Β και Γ παράλληλες προς την ΑΑ΄ και να ονομάσεις Β΄ και Γ τα σημεία στα οποία αυτές τέμνουν αντίστοιχα την Οy. Να μετρήσεις με το υποδεκάμετρο τα μήκη των τμημάτων Α΄ Β΄ και Β΄Γ΄. Τι παρατηρείς;

5. ***Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε και τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ, τα οποία να βρίσκονται στο ένα από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει η ε το επίπεδο, και το καθένα ν' απέχει απ' αυτή 3,2 cm. Να φέρεις από καθένα απ' αυτά τα σημεία ευθεία παράλληλη προς την ε. Πόσες παράλληλες ευθείες υπάρχουν στο σχήμα σου;***

6. ***Να σχεδιάσεις δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$, και $ε_2$ των οποίων η απόσταση να είναι 35 mm. Να βρεις πέντε σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε, που να ισαπέχουν από τις $ε_1$, και $ε_2$. Να σχεδιάσεις μια ευθεία ε από το Α παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$. Τα σημεία Β, Γ, Δ και Ε ανήκουν ή όχι στην ε;***

7. ***Να αντιγράψεις σε τετραγωνισμένο χαρτί το παρακάτω σχήμα και να βρεις ένα σημείο Γ της ημιευθείας Αx, που ν' απέχει 3 cm από την ευθεία ε.***

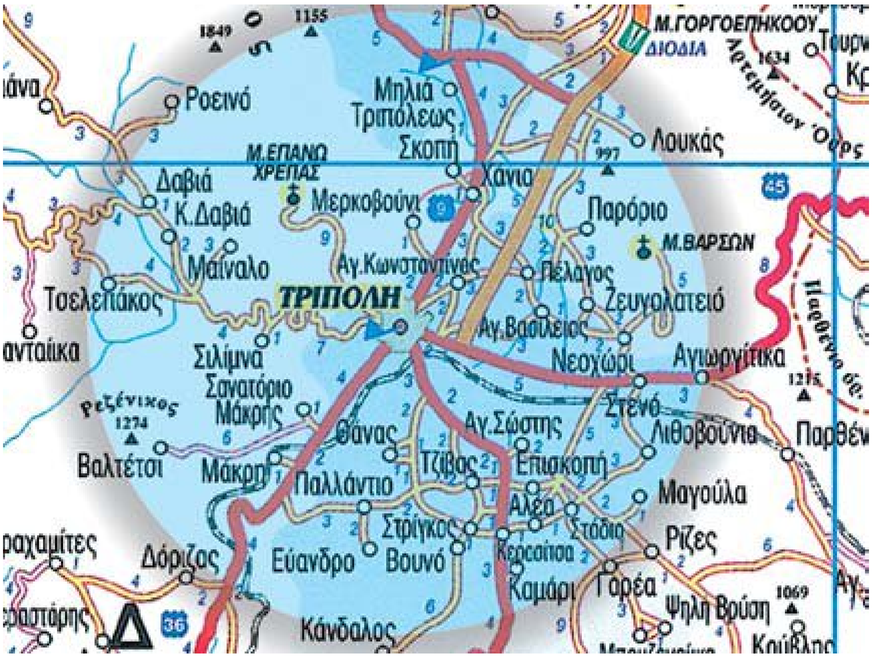


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ένα πλοίο ακολουθεί ευθεία πορεία ΑΒ, που είναι συνολικά 21Km. Όταν βρίσκεται στη θέση Α απέχει 10 Km από ένα φάρο Φ και όταν βρίσκεται στη θέση Β απέχει 17 Km από τον ίδιο φάρο. Να σχεδιάσεις το σχήμα ΦΑΒ παίρνοντας 1 cm για απόσταση ίση με 1 Km και να υπολογίσεις πόσο κοντά από το φάρο πέρασε το πλοίο

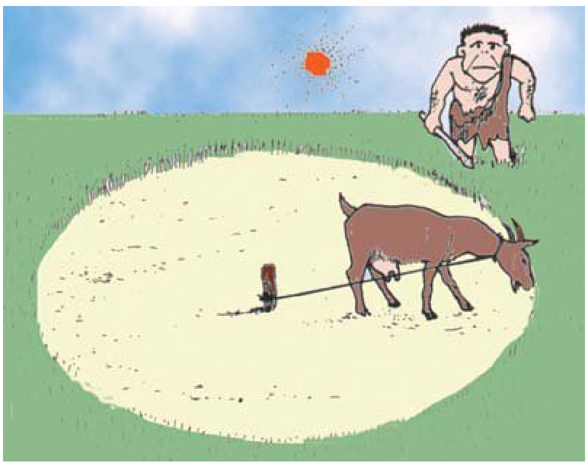
Β.1.11. Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η



Στην Τρίπολη της Αρκαδίας γίνεται μια γιορτή, στην οποία είναι καλεσμένοι οι κάτοικοι, που κατοικούν σε απόσταση μικρότερη των 6 Km. Ποιων χωριών οι κάτοικοι θα παρευρεθούν στη γιορτή;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η



Ο πρωτόγονος άνθρωπος για να μη χάσει την κατσίκα του την έδεσε με ένα σχοινί, σ' ένα ξύλινο πάσσαλο, μέσα στο λιβάδι.

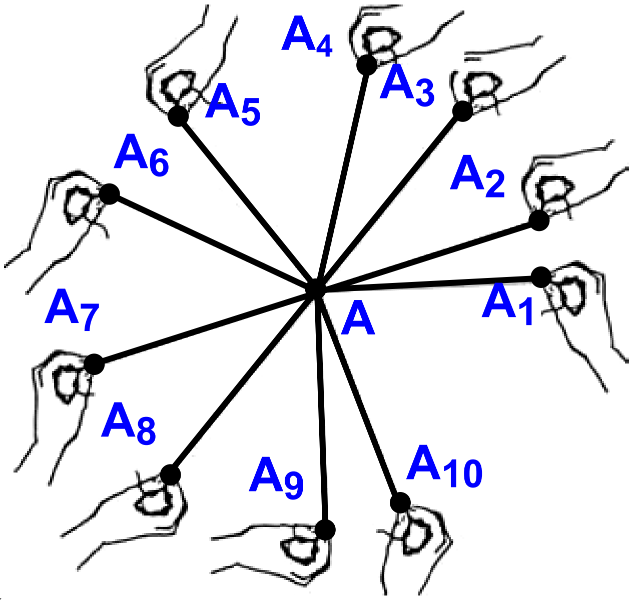
Όταν γύρισε να την πάρει είδε ότι η κατσίκα είχε βοσκήσει εκείνο το μέρος του λιβαδιού που της επέτρεπε το μήκος του σχοινιού να φθάσει. Έτσι, όλα τα χόρτα που απείχαν μικρότερη ή ίση

απόσταση από το σχοινί, που ήταν δεμένη, είχαν φαγωθεί.

➢ ***Ποια γεωμετρική έννοια χαρακτηρίζει την περιοχή της οποίας το χορτάρι φαγώθηκε;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Να βρεθούν δέκα διαφορετικά σημεία, που ν' απέχουν όλα 2 cm από ένα σημείο Α.



Με τη βοήθεια ενός υποδεκάμετρου μετράμε και βρίσκουμε το ακριβές μήκος των 2 cm σε ένα σχοινί. Μετά, κρατώντας με το ένα χέρι τη μία άκρη αυτού του σχοινιού στο σημείο Α και έχοντας πάντα τεντωμένο το σχοινί, κινούμε με το άλλο χέρι την άλλη άκρη του μήκους αυτού, των 2 cm, σε δέκα διαφορετικές θέσεις A_1 A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 και A_{10}, που επιλέγουμε στην τύχη, βρίσκοντας τα αντίστοιχα δέκα ζητούμενα διαφορετικά σημεία. Βλέπουμε ότι τα σημεία, που απέχουν μια συγκεκριμένη απόσταση από σταθερό σημείο, είναι πάρα πολλά.

➢ ***Τι σχήμα φτιάχνουν, λοιπόν, όλα αυτά τα σημεία με την κοινή αυτή ιδιότητα;***

Μέσα από την καθημερινή ζωή μπορούμε να βρούμε αρκετά παραδείγματα καμπυλών. Όπως π.χ. ο ήλιος στη δύση του, ο τροχός ενός ποδηλάτου η στεφάνη της μπασκέτας, ένα μεταλλικό νόμισμα, το ρολόι μας, μια τούρτα γενεθλίων, ένας δίσκος μουσικής κλ.π

Το πρώτο σχήμα που μπορούσε να επινοήσει ή να ανακαλύψει στη γη ο άνθρωπος είναι φυσικά, ο κύκλος. Ο ήλιος και το φεγγάρι αρκούν για να δώσουν στο μάτι το σχήμα και στην ψυχή την ομορφιά της τελειότητας. Και όταν φθάσει η ώρα της σκέψης, τότε η Γεωμετρία αποκτά το πιο πολύτιμο σχήμα της.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο.**
- **Η απόσταση αυτή συμβολίζεται με ρ και λέγεται ακτίνα του κύκλου. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο του κύκλου.**

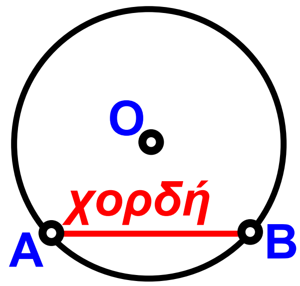
◆ **Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ, συμβολίζεται με συντομία (Ο, ρ).**

◆ **Για να σχεδιάσουμε ένα κύκλο χρησιμοποιούμε το διαβήτη.**

► **Δύο κύκλοι με ακτίνες ίσες είναι ίσοι.**

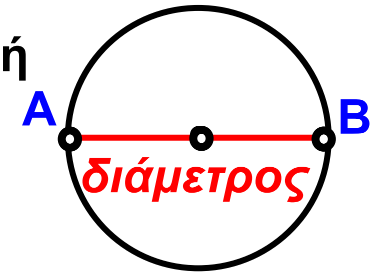
Επίσης:

- **Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συνδέει δύο σημεία Α και Β του κύκλου, λέγεται χορδή του κύκλου.**

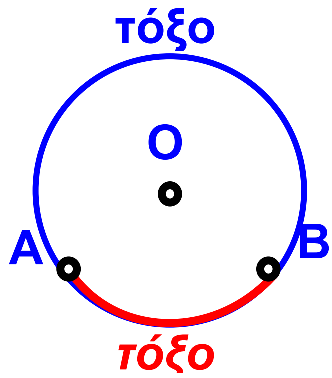


- **Ειδικά η χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου λέγεται διάμετρος του κύκλου.**

► **Η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου, είναι διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου και χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη (ημικύκλια).**

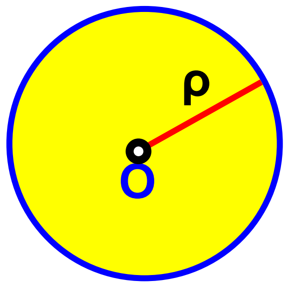


- **Δύο σημεία Α και Β του κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη που το καθένα λέγεται τόξο του κύκλου με άκρα τα Α και Β.**



- **Κυκλικός δίσκος (Ο, ρ) είναι ο κύκλος (Ο, ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.**

► **Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο Ο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ.**



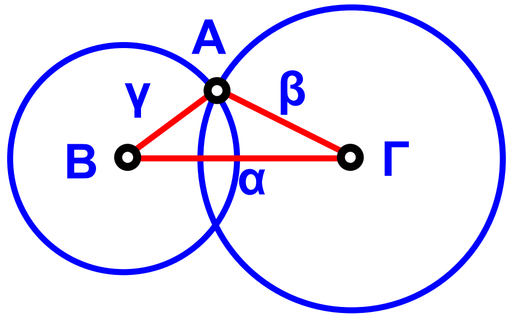
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να σχεδιαστεί ένα τρίγωνο, αν γνωρίζουμε τα μήκη των πλευρών του.

γ = 1,5 cm **β = 2 cm** **α = 3 cm**

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα α = 3 cm, β = 2 cm και γ = 1,5 cm είναι οι πλευρές του τριγώνου που πρέπει να σχεδιάσουμε. Ακολουθούμε την εξής διαδικασία:



Παίρνουμε ένα από αυτά και το ονομάζουμε πλευρά ΒΓ = α. Μετά χαράζουμε τους κύκλους (Β,γ = 1,5 cm) (Γ,β = 2 cm). Οι δύο αυτοί κύκλοι τέμνονται στο σημείο Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο διότι έχει πλευρές: ΒΓ = 3 cm, ΑΒ = 1,5 cm, ως ακτίνα του κύκλου (Β,1,5 cm) και ΑΓ = 2 cm, ως ακτίνα του κύκλου (Γ,2 cm), αφού το Α ανήκει και στους δύο κύκλους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Με κέντρο ένα σημείο Μ να σχεδιάσεις κύκλους με ακτίνες 2,4 cm, 2 cm και 15 mm.*

***2.** Να σχεδιάσεις τον κύκλο που έχει διάμετρο ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 3,8 cm.*

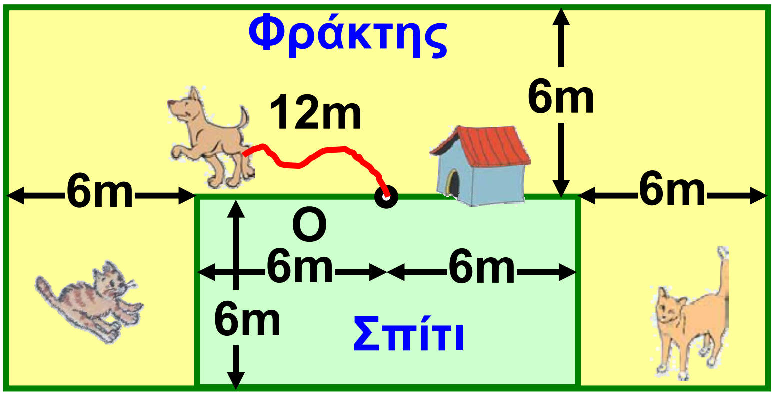
***3.** Να σχεδιάσεις ομόκεντρους κύκλους με κέντρο σημείο Μ και διαμέτρους 4 cm, 5 cm και 48 mm. (Δύο κύκλοι λέγονται ομόκεντροι, αν έχουν το ίδιο κέντρο και διαφορετικές ακτίνες)*

***4.** Να σχεδιάσεις έναν κύκλο με κέντρο σημείο Κ και ακτίνα 3,4 cm. Να πάρεις ένα σημείο Μ του κύκλου αυτού και να χαράξεις δύο χορδές του: ΜΑ = 2,4 cm και ΜΒ = 4,1 cm.*

5. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4 cm. (α) Να βρεις τα σημεία του επιπέδου που απέχουν: 3 cm από το Α και 2 cm από το Β. (β) Ποια σημεία απέχουν ταυτόχρονα 3 cm από το Α και 2 cm από το Β;

6. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 3,2 cm. Να σχεδιάσεις τους κύκλους (Α, ΑΒ) και (Β, ΑΒ) και να ονομάσεις Μ και Ν τα σημεία στα οποία τέμνονται οι κύκλοι αυτοί Να βρεις τις αποστάσεις του Μ από τα άκρα Α και Β καθώς και τις αποστάσεις του Ν από τα Α και Β. Στη συνέχεια να συγκρίνεις τις αποστάσεις αυτές.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ



1. Ένας σκύλος είναι δεμένος με μια αλυσίδα μήκους 12 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να μεταφέρεις το παραπάνω σχήμα στο τετράδιό σου και να βρεις, χρωματίζοντας την περιοχή την οποία μπορεί να κινηθεί ο σκύλος. Επίσης, να βρεις σε ποιες περιοχές της αυλής του σπιτιού μπορούν να σταθούν οι γάτες, χωρίς να κινδυνεύουν από το σκύλο;

2. Προσπάθησε να σχεδιάσεις τρίγωνο με πλευρές που είναι: α) α = 10 cm, β = 6 cm και γ = 3 cm,
β) α = 12 cm, β = 5 cm και γ = 7 cm. Τι παρατηρείς;

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Β΄ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ