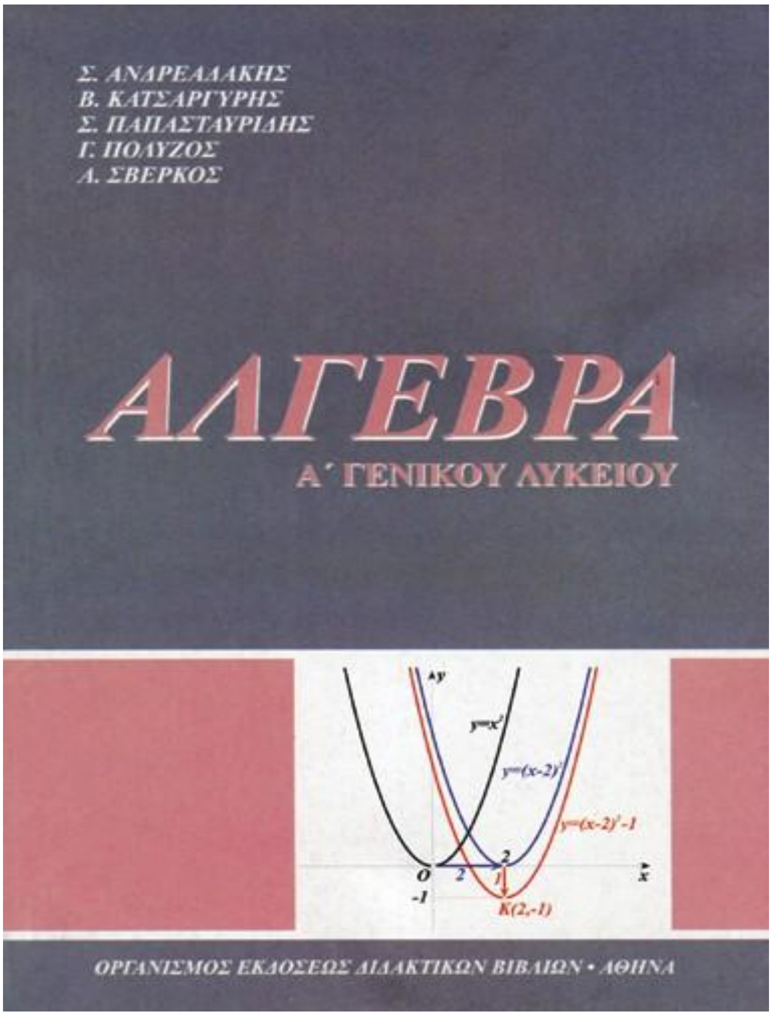
Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος



ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός,
Κατσαργύρης Βασίλειος,
Παπασταυρίδης Σταύρος,
Πολύζος Γεώργιος,
Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

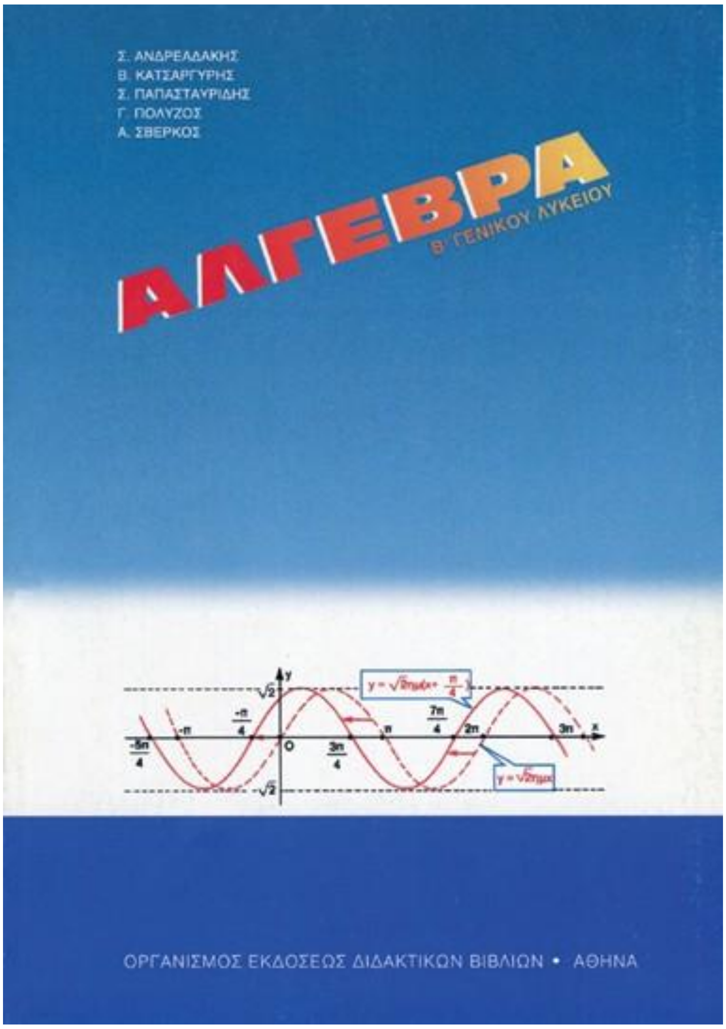
Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος, Καθηγητής Βαρβακείου, Πειραματικού Λυκείου Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.
Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π. Ι.

Σκούρας Αθανάσιος,
Σύμβουλος του Π. Ι.
Πολύζος Γεώργιος,
Μόνιμος Πάρεδρος του Π. Ι.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ελευθερόπουλος Ιωάννης Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π. Ι.
Ζώτος Ιωάννης Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π. Ι.
Καλλιπολίτου Ευρυδίκη Καθηγήτρια Μαθηματικών, Αποσπασμένη στο Π. Ι.



ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Ομοτ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος, Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου
Παπασταυρίδης Σταύρος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας
Πολύζος Γεώργιος, Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.
Σβέρκος Ανδρέας, Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ: 1991
ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998
Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Αδαμόπουλος Λεωνίδας,
Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Δαμιανού Χαράλαμπος,
Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Σβέρκος Ανδρέας,
Σχολικός Σύμβουλος

ΚΡΙΤΕΣ:
Κουνιάς Στρατής,
Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών Μακρής
Κωνσταντίνος, Σχολικός Σύμβουλος
Τσικαλουδάκης Γεώργιος, Καθηγητής Β/θμιας
Εκπαίδευσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
Μπουσούνη Λία Καθηγήτρια Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΔΑΚΤΥΛΟΓΡΑΦΗΣΗ:
Μπολιώτη Πόπη

ΣΧΗΜΑΤΑ:
Μπούτσικας Μιχάλης

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ
Ομάδα εργασίας για το Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προσαρμογή: Αϊδινόπουλος Βασίλειος, Εκπαιδευτικός
Επιμέλεια: Τερζούδη Κορτέσα, Εκπαιδευτικός

Επιστημονικός υπεύθυνος: Βασίλης Κουρμπέτης, Σύμβουλος Α΄ του Υ.ΠΟ.ΠΑΙ.Θ

Υπεύθυνη του έργου: Μαρία Γελαστοπούλου, M.Ed. Ειδικής Αγωγής

Τεχνική υποστήριξη: Κωνσταντίνος Γκυρτής, Δρ. Πληροφορικής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας και των Πιθανοτήτων που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Α’ τάξης του Γενικού Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της Α’ έκδοσης (2010) του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α’ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ.Ανδρεαδάκης, Β.Κατσαργύρης, Σ.Παπασταυρίδης, Γ.Πολύζος και Α.Σβέρκος. Προστέθηκαν επίσης δυο ακόμα κεφάλαια: το κεφάλαιο «Πιθανότητες» και το κεφάλαιο «Πρόοδοι».

Το κεφάλαιο «Πιθανότητες» είναι μέρος του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ’ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010) του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Λ.Αδαμόπουλος, Χ.Δαμιανού και Α.Σβέρκος. Το κεφάλαιο «Πρόοδοι» είναι μέρος του αντίστοιχου κεφαλαίου από το βιβλίο ΑΛΓΕΒΡΑ Β’ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ.Ανδρεαδάκης, Β.Κατσαργύρης, Σ.Παπασταυρίδης, Γ.Πολύζος και Α.Σβέρκος.

Το περιεχόμενο του βιβλίου περιλαμβάνει σε γενικές γραμμές τα εξής:
Στο 1ο Κεφάλαιο **γίνεται μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πιθανοτήτων. Η απόδειξη των ιδιοτήτων της πιθανότητας ενός ενδεχομένου γίνεται μόνο στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ασχολείται με καταστάσεις όπου υπάρχει αβεβαιότητα, και αυτό την κάνει ιδιαίτερα σημαντική στις εφαρμογές της καθημερινής ζωής.**

Στο 2ο Κεφάλαιο επαναλαμβάνονται, συμπληρώνονται και επεκτείνονται οι βασικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.
Στο 3ο Κεφάλαιο επαναλαμβάνονται, επεκτείνονται και εξετάζονται συστηματικά όσα είναι γνωστά από το Γυμνάσιο για τις εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Επίσης εξετάζονται εξισώσεις που, για να επιλυθούν, ανάγονται σε 1ου και 2ου βαθμού.
Στο 4ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται ανισώσεις 1ου και 2ου βαθμού καθώς και ανισώσεις που, για να επιλυθούν, ανάγονται σε 1ου και 2ου βαθμού.
Στο 5ο Κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών, και εξετάζονται η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος ως ειδικές περιπτώσεις κανονικότητας (pattern) σε ακολουθίες.
Στο 6ο Κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της συνάρτησης. Η συνάρτηση είναι μια θεμελιώδης έννοια που διαπερνά όλους τους κλάδους των Μαθηματικών και έχει κεντρική σημασία για την περαιτέρω ανάπτυξη και εφαρμογή τους.
Στο 7ο Κεφάλαιο γίνεται μελέτη των συναρτήσεων
$f(x)=\alpha x^2$,

$$f(x)=\frac{a}{x}$$

και
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Η μελέτη της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι ο κεντρικός στόχος του κεφαλαίου αυτού.

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Στη παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ. Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β. Είναι γνωστό ότι:

Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνα τους θα είναι ίσα.

Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ο ισχυρισμός «α = β» είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός «$α^2 = β^2$» θα είναι αληθής.

Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός «$α^2 = β^2$» συνεπάγεται τον ισχυρισμό « α = β » και γράφουμε:. $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$

Γενικά:

> **Ρ και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο Ρ να αληθεύει και ο Q, τότε λέμε ότι ο Ρ συνεπάγεται τον Q και γράφουμε Ρ $\Rightarrow$ Q**

Ο ισχυρισμός «Ρ $\Rightarrow$ Q» λέγεται συνεπαγωγή και πολλές φορές διαβάζεται «αν Ρ, τότε Q». Ο Ρ λέγεται

υπόθεση της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται **συμπέρασμα** αυτής[1].

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας από το Γυμνάσιο συνεπαγωγές:

$$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^2=\beta^2 \qquad (1)$$

και

$$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma \qquad (2),$$

που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς α, β και γ.

Παρατηρούμε ότι:

✓ Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αφού για παράδειγμα είναι $(-3)^2=3^2$ ενώ $-3\neq 3$.

---

(1) Στην καθημερινή πράξη, συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση. Αλλά και η μαθηματική επιστήμη δεν έχει ανάγκη τέτοιου είδους συνεπαγωγών. Όμως, για τεχνικούς λόγους που συνδέονται με την ευκολία της έκφρασης μαθηματικών ζητημάτων, θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» να είναι αληθής και στην περίπτωση που η υπόθεση P είναι ψευδής. Έτσι, η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» είναι ψευδής, μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Εκ πρώτης όψεως η σύμβαση αυτή φαίνεται περίεργη, αλλά στο πλαίσιο του παρόντος βιβλίου δεν μπορούν να εξηγηθούν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτή.

✓ **Για τη δεύτερη, όμως, συνεπαγωγή ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει και η συνεπαγωγή:**

$$\alpha+\gamma=\beta+\gamma \Rightarrow \alpha=\beta$$

Γι' αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι και γράφουμε:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P, να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q, να αληθεύει και ο P, τότε λέμε ότι ο P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως ή, αλλιώς, ότι ο P είναι ισοδύναμος με τον Q και γράφουμε $P \Leftrightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός «$P \Leftrightarrow Q$» λέγεται ισοδυναμία και αρκετές φορές διαβάζεται «P αν και μόνο αν Q».

Ο σύνδεσμος «ή»

Γνωρίζουμε ότι:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν.

Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε α = 0 ή β = 0. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P ή Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός «P ή Q» λέγεται διάζευξη των P και Q. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$$

αληθεύει, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $x^2 - x$ και $x^2 - 1$ είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η διάζευξη:

$$x^2 - x = 0 \;\text{ ή }\; x^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι:

- ✓ **Για x = 1 αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, ενώ**
- ✓ **Για x = 0 αληθεύει μόνο η πρώτη και για x = -1 αληθεύει μόνο η δεύτερη.**

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

«Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνον αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός».

Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P και Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός «P και Q» λέγεται σύζευξη των P και Q. Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x - 1) = 0 \text{ και } (x - 1)(x + 1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για x = 1.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1. $\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$	**Α**	**Ψ**
2. $\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$	**Α**	**Ψ**
3. $\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$	**Α**	**Ψ**
4. $\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$	**Α**	**Ψ**
5. $\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$	**Α**	**Ψ**
6. $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$	**Α**	**Ψ**
7. $\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$	**Α**	**Ψ**
8. $\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$	**Α**	**Ψ**
9. $\alpha < 2$ **και** $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$	**Α**	**Ψ**

ΙΙ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους ισχυρισμούς της ομάδας Α' με τον ισοδύναμό του ισχυρισμό από τη ομάδα Β'.

Α΄ ΟΜΑΔΑ	
1	$x(x - 2) = 0$
2	$x(x - 2) \neq 0$
3	$x^2 = 4$
4	$x^2 = 4$ και $x < 0$
5	$x(x- 2) = 0$ και $x(x-1) = 0$
6	$x^2 = 4$ και $x > 0$

Β΄ ΟΜΑΔΑ	
Α	$x \neq 0$ και $x \neq 2$
Β	$x = 2$
Γ	$x = -2$ ή $x = 2$
Δ	$x = 0$
Ε	$x = 0$ ή $x = 2$
Ζ	$x = -2$

Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του συνόλου

Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ.
Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π. χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.
Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά σύνολα. Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

> **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

ΣΧΟΛΙΟ
Ένα σύνολο πρέπει να είναι, όπως συνηθίζουμε να λέμε, «καλώς ορισμένο». Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι σύνολο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, διότι δεν

υπάρχει κανόνας που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 1000000, τότε αυτοί αποτελούν σύνολο.
Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:

- ✓ **με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,**
- ✓ **με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών,**
- ✓ **με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και**
- ✓ **με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.**

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου Α, γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο Α», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο Α». Για παράδειγμα

$\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$, $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, $-2 \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ **κτλ.**

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:
α) **Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο Α έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:**

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο Β των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του».

β) Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με:

$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\right\}$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$, όπου x > 0». Ομοίως το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται

$\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ άρτιος}\right\}$

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$\left\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } \mathrm{I}\right\}$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \Omega$, όπου x έχει την ιδιότητα Ι». Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα:

$$A=\{1,\ 2\} \quad \text{και} \quad B=\{x\in\mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)=0\}$$

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης (x - 1)(x - 2) = 0 είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο Β έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το Α. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα Α και Β είναι ίσα.

Γενικά:

> Δύο σύνολα Α και Β λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια:
«Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α».
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε Α = Β.

Υποσύνολα συνόλου

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$$A=\{1, 2, 3, \dots , 15\} \quad \text{και} \quad B=\{1, 2, 3, \dots , 100\}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το Α είναι υποσύνολο του Β.

Γενικά:

> Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A \subseteq B$. Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:

i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο Α.

ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.

iii) Αν Α   Β και Β   Α, τότε Α = Β.

Το κενό σύνολο

Ας αναζητήσουμε τα στοιχεία του συνόλου $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = -1 \right\}$. Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση $x^2 = -1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό, που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με Ø ή { }.

Δηλαδή:

Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

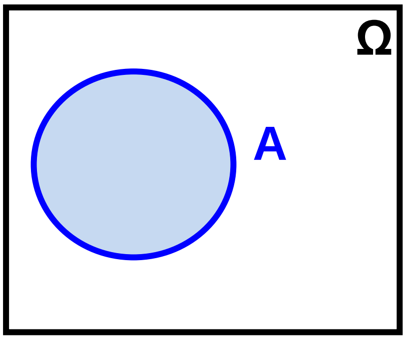
Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Διαγράμματα Venn

Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

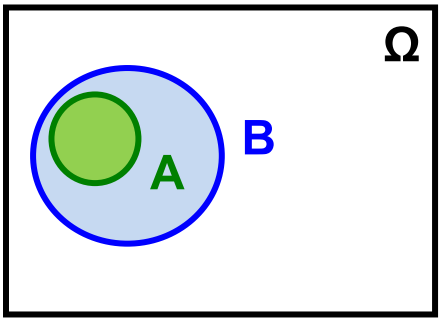
- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με Ω. Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$,, είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \mathbb{R}$.

  Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού



συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

- Αν $A \subseteq B$, τότε το Α παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Β.



Πράξεις με σύνολα

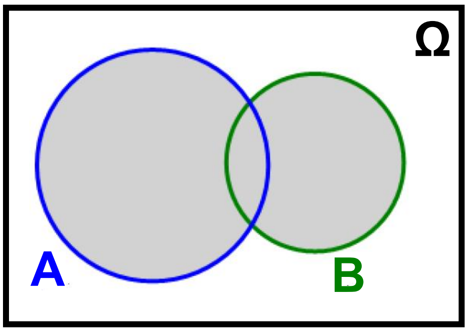
Έστω Ω = {1, 2, 3, ...,10} ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του:

Α = {1, 2, 3, 4}   και   Β = {3, 4, 5, 6}.

- Το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5, 6}, που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των Α και Β, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα Α και Β λέγεται ένωση των συνόλων Α και Β.

Γενικά:

Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με $A \cup B$.



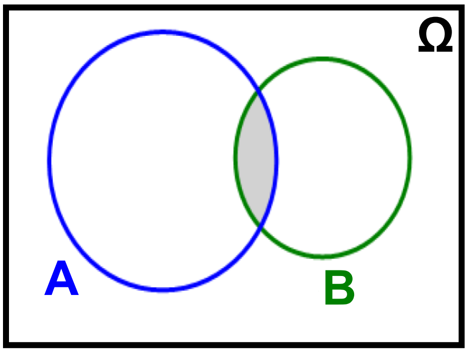
Δηλαδή είναι:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

- Το σύνολο {3, 4} που έχει ως στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των Α και Β λέγεται τομή των Α και Β.

Γενικά:

Τομή δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα Α, Β και συμβολίζεται με $A \cap B$



Δηλαδή είναι:

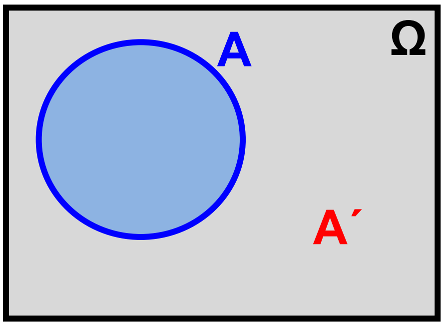
$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Στην περίπτωση που δύο σύνολα Α και Β δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \varnothing$, τα δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους.

- **Το σύνολο {5, 6, 7, 8, 9, 10} που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α, λέγεται συμπλήρωμα του συνόλου Α.**

Γενικά:

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με Α΄.



Δηλαδή είναι:

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. 1. Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο "✓" εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

2. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγωνάκια μόνο της τελευταίας γραμμής;

3. Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ και να τοποθετήσετε μέσα σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.

	$\in \mathbb{N}$	$\in \mathbb{Z}$	$\in \mathbb{Q}$	$\in \mathbb{R}$
-3,5				
0				
$\sqrt{10}$				
$-\frac{13}{5}$				
π				
2,3				
$\frac{20}{5}$				
$\sqrt{100}$				
-5				

ΙΙ. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Αν $A=\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 16\}$ **και** $B=\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 24\}$**, τότε:**

α) $A \cup B=$**..................β)** $A \cap B=$**................**

2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολά του

$A=\{x \in \Omega \mid x \text{ φωνήεν}\}$ **και** $B=\{x \in \Omega \mid x \text{ σύμφωνο}\}$**.**

Τότε:

α) $A \cup B=$**.......** **β)** $A \cap B=$**......**

γ) $A'=$**......** **δ)** $B'=$**......**

ΙΙΙ. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.

1. Έστω δύο σύνολα Α και Β. Τότε:

α) $A \subseteq A \cap B$ **β)** $B \subseteq A \cap B$

γ) $A \cap B \subseteq A$ **δ)** $A \cap B \subseteq B$

2. Έστω δύο σύνολα Α και Β. Τότε:

α) $A \subseteq A \cup B$ **β)** $A \cup B \subseteq B$

γ) $A \cup B \subseteq A$ **δ)** $A \cup B \subseteq B$

IV. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο, Ø το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$**.Τότε:**

α) $\varnothing' =$ **......** **β)** $\Omega' =$ **......** **γ)** $(A')' =$**.....**

2. Έστω $A \subseteq B$**.Τότε**

α). $A \cap B =$**.....** **β)** $A \cup B$**.......**

1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Εισαγωγή

Υπάρχει σε πολλούς η εντύπωση ότι το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Σημαντική μάλιστα ώθηση στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών αποτέλεσε η γόνιμη αλληλογραφία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους Pascal και Fermat το 17ο αιώνα με αφορμή διάφορα προβλήματα που προέκυψαν από την ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια.

Μολονότι όμως τα τυχερά παιχνίδια ήταν ευρέως διαδεδομένα και στους Αρχαίους Έλληνες και στους Ρωμαίους, η Θεωρία των Πιθανοτήτων δεν αναπτύχθηκε κατά την αρχαιότητα, όπως συνέβη με άλλους κλάδους των Μαθηματικών, αλλά πολύ αργότερα, το 16ο και 17ο αιώνα μ.Χ. Γι' αυτό πολλοί απορρίπτουν την άποψη ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων οφείλει τη γένεσή της στην ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια και την αποδίδουν στις ανάγκες να λυθούν προβλήματα που παρουσιάστηκαν με την ανάπτυξη του εμπορίου, των ασφαλίσεων, της συλλογής εσόδων του κράτους κτλ. Η ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων οφείλεται επίσης και στις ανάγκες των Φυσικών Επιστημών όπως η εφαρμογή της Θεωρίας Σφαλμάτων σε αστρονομικές παρατηρήσεις.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο το 18ο αιώνα με τις αξιοσημείωτες εργασίες των μαθηματικών Bernoulli, De Moivre, Laplace και Gauss. Ιδιαίτερα ο Laplace με τις εργασίες του άνοιξε μια καινούργια εποχή για τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Γιατί ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιγνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Έτσι, με αφορμή τη μελέτη των σφαλμάτων που προκύπτουν στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου αστρονομικού μεγέθους ανακαλύπτεται η περίφημη κανονική κατανομή του Gauss. Κατόπιν αποδεικνύεται ότι η κανονική κατανομή απεικονίζει όχι μόνο την κατανομή των σφαλμάτων των αστρονομικών παρατηρήσεων αλλά και την κατανομή πολλών βιολογικών, κοινωνικών και φυσικών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.

Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή κλάδο των καθαρών Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

1.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα Τύχης

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε 100^{o} Κελσίου στην επιφάνεια της θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο t. Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται αιτιοκρατικό (deterministic) πείραμα.

Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης (random experiment). Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα

σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.

Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

1. **Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.**
2. **Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.**
3. **Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.**
4. **Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε “γράμματα” αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.**
5. **Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.**
6. **Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.**
7. **Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετράται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.**
8. **Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετράται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.**
9. **Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.**

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των

δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Αν δηλαδή $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\kappa\}.$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με Κ συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε "κεφαλή" και με Γ το αποτέλεσμα να φέρουμε "γράμματα", τότε ο δειγματικός χώρος είναι Ω={Κ,Γ}. Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι Ω={1,2,3,4,5,6}.

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα Α={2,4,6},Β={1,3,5} και Γ={6} είναι ενδεχόμενα. Το Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το Β να φέρουμε περιττό αριθμό και το Γ να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το Γ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα Α και Β είναι σύνθετα ενδεχόμενα. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται ή συμβαίνει.** Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και

ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο Α={2,4,6} έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

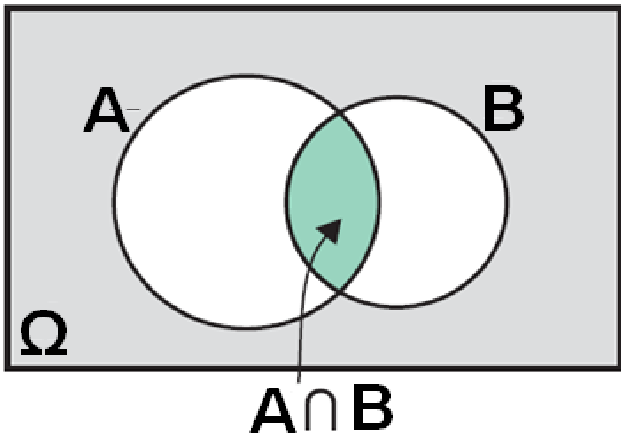
Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο ∅ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι'αυτό λέμε ότι το ∅ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου Α θα το συμβολίζουμε με Ν(Α). Επομένως, αν Ω={1,2,3,4,5,6} και Α={2,4,6} έχουμε Ν(Α)=3, Ν(Ω)=6 και Ν(∅)=0.

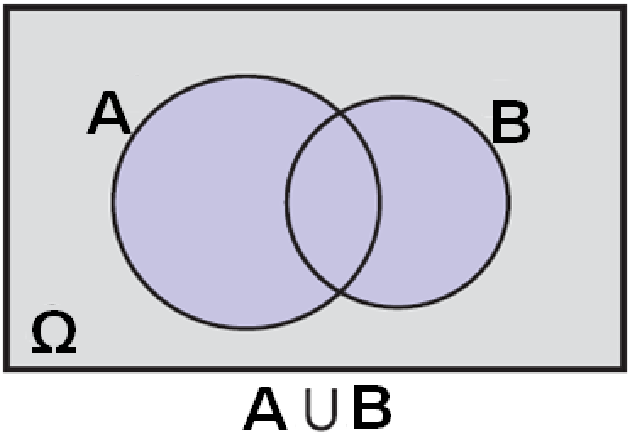
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω. Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα. Έτσι, αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

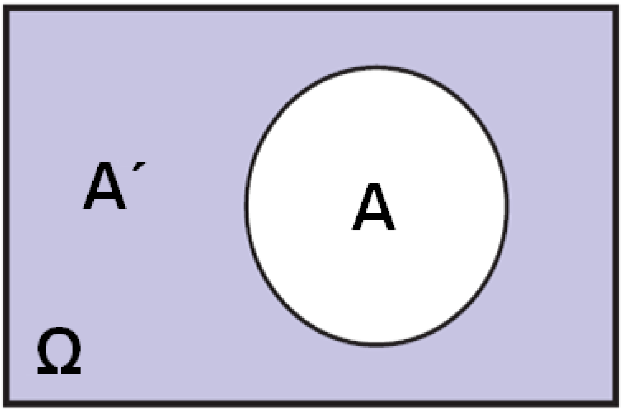
- **Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται "A τομή B" ή "A και B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B.**



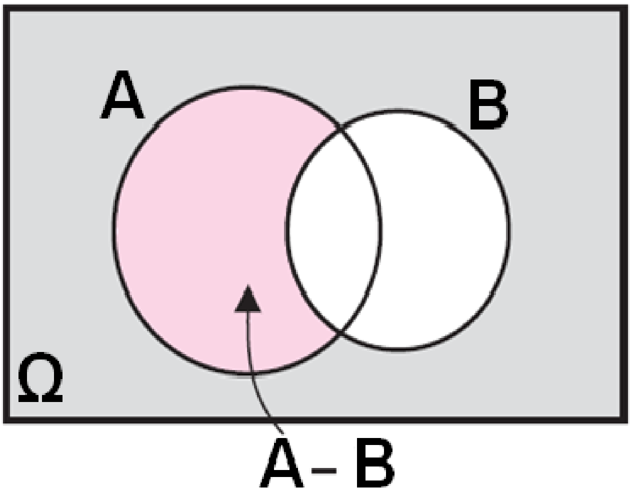
- **Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται "A ένωση B" ή "A ή B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.**



- **Το ενδεχόμενο Α', που διαβάζεται "όχι Α" ή "συμπληρωματικό του Α" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το Α. Το Α' λέγεται και "αντίθετο του Α".**



- **Το ενδεχόμενο Α - Β, που διαβάζεται "διαφορά του Β από το Α" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.**



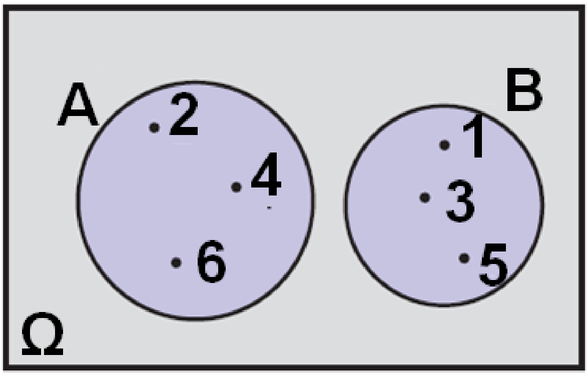
Στον παρακάτω πίνακα τα Α και Β συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα Α και Β διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα Α και Β	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β	$\omega \in (A \cup B)$
Πραγματοποιείται μόνο το Α	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β	$A \subseteq B$

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού έστω τα ενδεχόμενα Α={1,2,3,4} και Β={2,4,6}. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 1, τότε τα ενδεχόμενα A, $A \cup B$, $A - B$, B', πραγματοποιούνται, ενώ τα A', B, $(A \cup B)'$, $(A - B)$, $A \cap B$ δεν πραγματοποιούνται.

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στη ρίψη ενός ζαριού αν Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και Β το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό, έχουμε Α={2,4,6} και Β={1,3,5}. Παρατηρούμε ότι τα Α και Β δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή τα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα.



$A \cap B = \varnothing$

Γενικά: **Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα, όταν** $A \cap B = \varnothing$. **Δύο ασυμβίβαστα** ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.

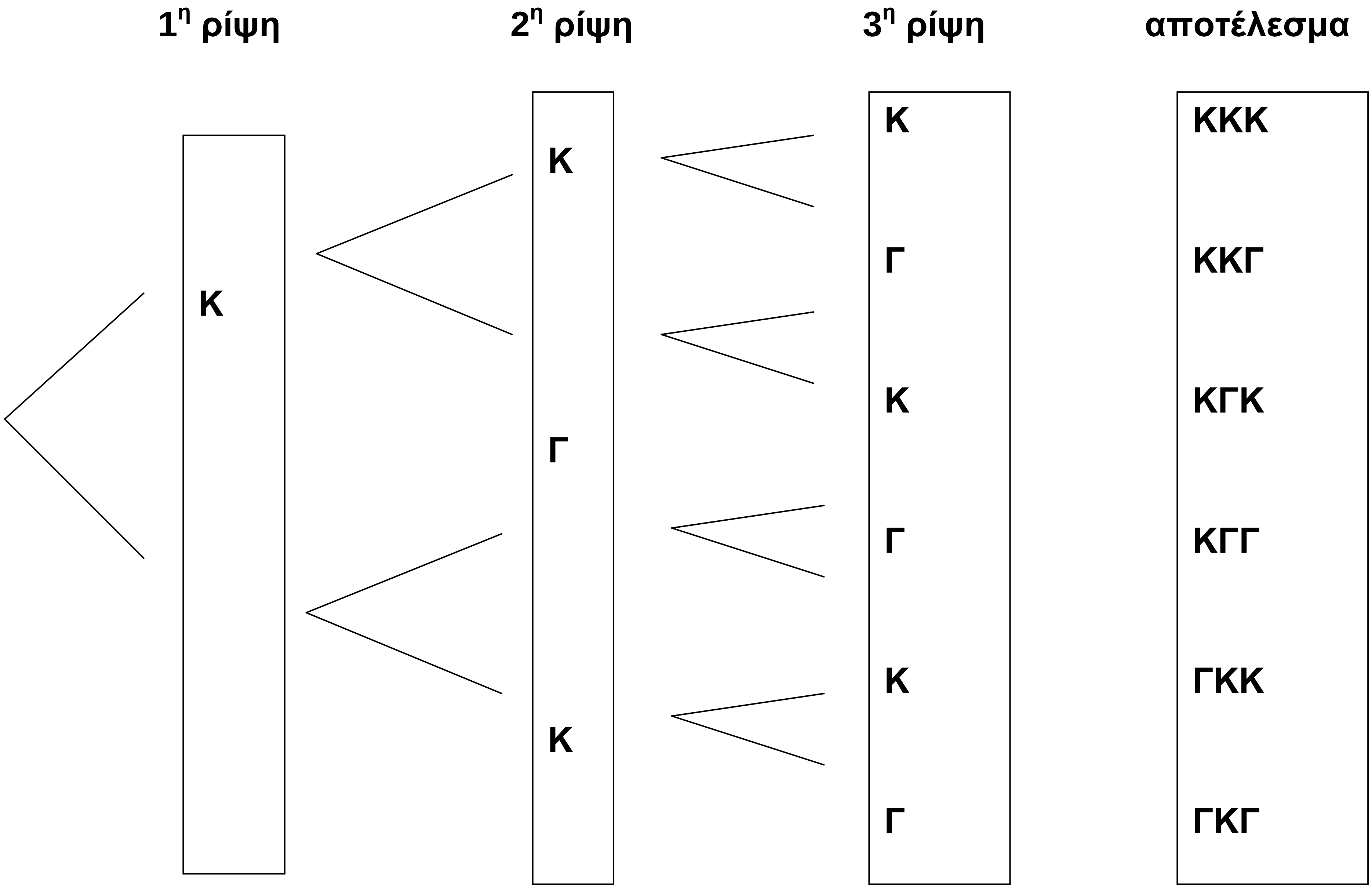
i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.
ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α1: "Ο αριθμός των Κ υπερβαίνει τον αριθμό των Γ"
Α2: "Ο αριθμός των Κ είναι ακριβώς 2"
Α3: "Ο αριθμός των Κ είναι τουλάχιστον 2"
Α4: "Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις"
Α5: "Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε Κ".

iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα
A_3', $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$.

ΛΥΣΗ

i) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:


1η ρίψη
2η ρίψη
3η ρίψη
αποτέλεσμα
Κ
Κ
Γ
Κ
Κ
Γ
Κ
Γ
Κ
Γ
ΚΚΚ
ΚΚΓ
ΚΓΚ
ΚΓΓ
ΓΚΚ
ΓΚΓ

Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το Κ και το Γ και είναι

Ω={ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}.

ii) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο Ω και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

A_1={ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}.

A_2={ΚΚΚ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}.

A_3={ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}. (Παρατηρούμε ότι $A_3=A_1$)

A_4={ΚΚΚ, ΓΓΓ}.

A_5={ΚΚΚ, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ}.

iii) Το A'_3 περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το A_3, περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο αριθμός των Κ είναι μικρότερος από 2. Επομένως, A'_3={ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_2, δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς Κ, εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση. Επομένως,
$A_5 \cap A_2 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ\}$.

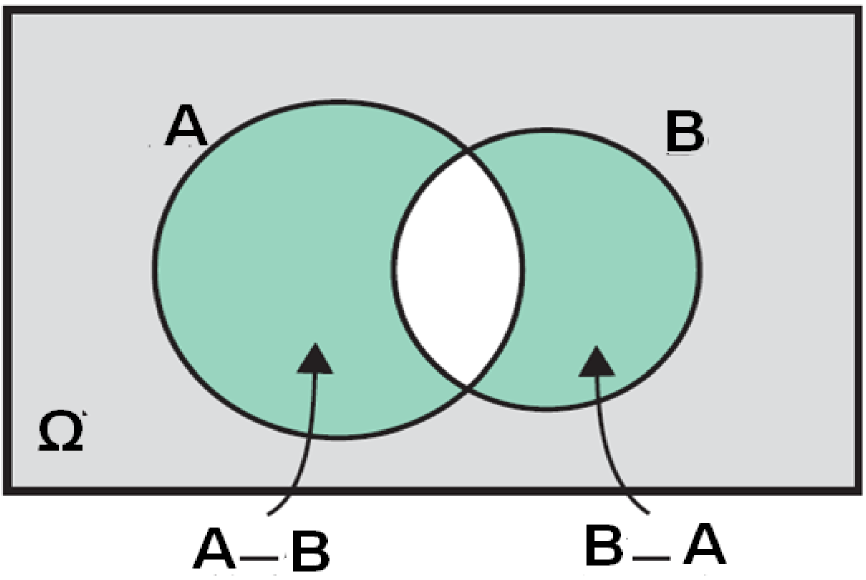
Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν Κ ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις. Επομένως,
$A_5 \cup A_4 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$.

2^{η} Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος με δειγματικό χώρο Ω. Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:

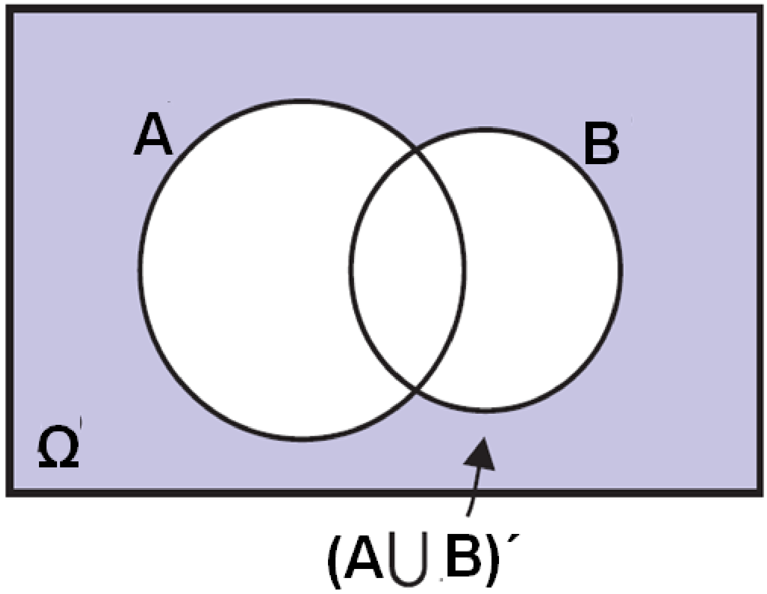
i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα Α και Β.
ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β, γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των Α και Β με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.
Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α-Β και Β-Α. Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A-B)\cup(B-A)$ ή ισοδύναμα το $(A\cap B')\cup(A'\cap B)$.



ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των Α και Β. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$.



Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).
   i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
   ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη”;
   iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”;

2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης.
   (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση).

3. Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:
   i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Α: "Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της".

4. Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο.

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος

ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Α: "το άτομο επιλέγει παγωτό"

iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο Β: "το άτομο επιλέγει κοτόπουλο"

iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο $A \cap B$

v) Αν Γ το ενδεχόμενο: "το άτομο επιλέγει ρύζι", να βρείτε το ενδεχόμενο $(A \cap B) \cap \Gamma$

5. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και

στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α, β, γ ή δ, ανάλογα με το αν η κατάστασή του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:

i) Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

ii) Το ενδεχόμενο Α: "η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη
και είναι ανασφάλιστος".

iii) Το ενδεχόμενο Β: "η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια".

iv) Το ενδεχόμενο Γ: "ο ασθενής είναι ασφαλισμένος".

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα:

i) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Α είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και Β είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.

ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και Β το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.

iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα. Α είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και Β το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.

iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. Α είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και Β το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

7. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:
Α: "Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης".
Β: "Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός"
Γ: "Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5"
Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα

$$A \cap B,$$
$$A \cap \Gamma,$$
$$B \cap \Gamma,$$
$$(A \cap B) \cap \Gamma.$$

Εισαγωγή

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης, όπως είδαμε, είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν Α είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το Α θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ενδεχόμενο Α έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του Α και τον συμβολίζουμε με P(A). Πώς όμως θα προσδιορίσουμε για κάθε ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης την πιθανότητά του; Δηλαδή πώς θα βρούμε μια διαδικασία με την οποία σε κάθε ενδεχόμενο θα αντιστοιχίζουμε την πιθανότητά του; Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά.

Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

Αν σε ν εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται σχετική συχνότητα του Α και συμβολίζεται με f_A. Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\lambda\}$ και σε ν εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\},\{\omega_2\},...,\{\omega_\lambda\}$ πραγματοποιούνται $\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες

$$f_1 = \frac{\kappa_1}{v}, f_2 = \frac{\kappa_2}{v}, \ldots, f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{v}$$

των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

1. $0 \le f_i \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \lambda$

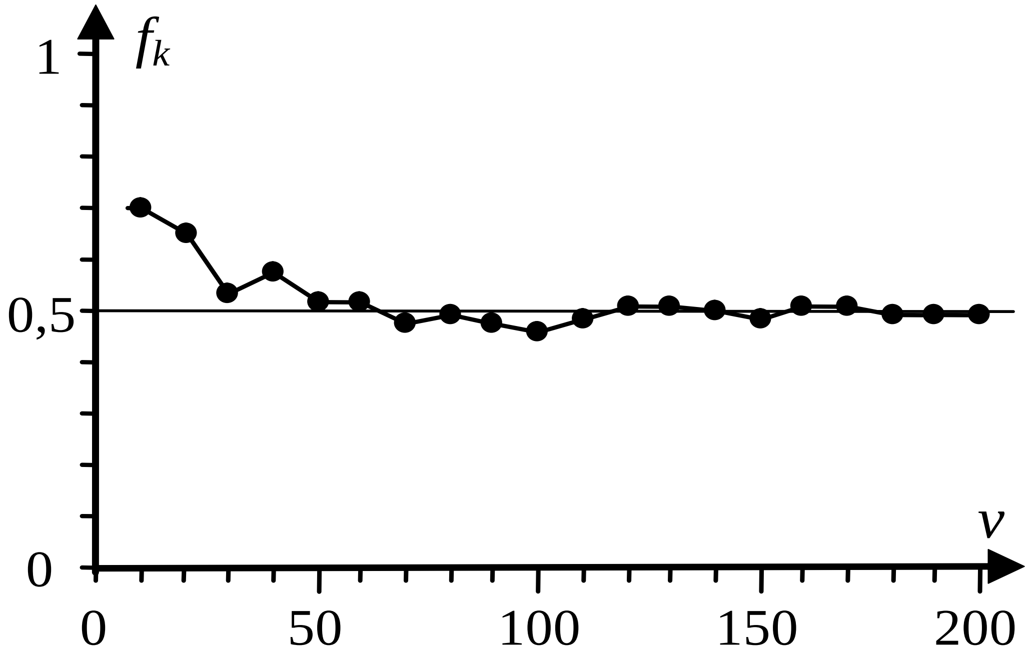
(αφού $0 \le \kappa_i \le v$**)**

2. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\lambda = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\lambda}{v} = \dfrac{v}{v} = 1$

Ας εκτελέσουμε τώρα το ακόλουθο πείραμα: Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με Κ το αποτέλεσμα “κεφαλή” και με Γ το αποτέλεσμα “γράμματα”.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται το πλήθος των Κ και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες στις 10, 20, 30,…,200 ρίψεις του νομίσματος ενώ στο σχήμα 1 παριστάνεται το αντίστοιχο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων Πίνακας ρίψεων ενός νομίσματος		
ν	κ	f_k
10	7	0,700
20	13	0,650
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,520
60	31	0,517
70	33	0,471
80	39	0,488
90	43	0,478
100	46	0,460
110	53	0,482
120	61	0,508
130	66	0,508
140	70	0,500
150	73	0,486
160	81	0,506
170	87	0,512
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495



Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός ν των ρίψεων η σχετική συχνότητα f_{κ} εμφάνισης της “κεφαλής” σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή, όπως λέμε “τείνει” στον αριθμό 0,5. Αυτό επιβεβαιώνει την “προσδοκία” μας ότι στη ρίψη ενός συμμετρικού και ομογενούς νομίσματος ή, όπως λέμε, ενός “αμερόληπτου” νομίσματος, οι σχετικές συχνότητες των ενδεχομένων {Κ},{Γ} είναι ίσες. Ανάλογα παραδείγματα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή **νόμος των μεγάλων αριθμών.**

Θα προσπαθήσουμε τώρα στηριζόμενοι στις προηγούμενες διαπιστώσεις να ορίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Ας εξετάσουμε την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου νομίσματος. Ρίχνουμε ένα τέτοιο νόμισμα και παρατηρούμε την όψη που θα εμφανιστεί. Όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα {Κ},{Γ} τείνει στον αριθμό $\frac{1}{2}$.

Ομοίως θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε ότι στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα {1},{2},{3},{4},{5} και {6} τείνει στον αριθμό $\frac{1}{6}$.

Σε πειράματα όπως τα προηγούμενα λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Ας δούμε τώρα ποια αναμένουμε να είναι η σχετική συχνότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα.

Έστω για παράδειγμα, το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό στη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Επειδή το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι 2 ή 4 ή 6 και καθένα από τα αποτελέσματα αυτά εμφανίζεται με σχετική συχνότητα $\frac{1}{6}$ η συχνότητα εμφάνισης του ζυγού αριθμού αναμένεται να είναι $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$.

Γενικά, σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$.

Γι' αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.
Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega)=\dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$

2. $P(\varnothing)=\dfrac{0}{N(\Omega)}=0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0\leq P(A)\leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν όμως πολλά πειράματα τύχης, των οποίων ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Όπως για παράδειγμα ο αριθμός των αυτοκινητιστικών δυστυχημάτων μια ορισμένη εβδομάδα, η ρίψη ενός ζαριού που δεν είναι συμμετρικό

κτλ. Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική συχνότητα.

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

$0 \leq P(\omega_i) \leq 1$

$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_\nu) = 1$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$. Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\kappa\} \neq \emptyset$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+\ldots+P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\emptyset$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset)=0$.

Αν $P(\omega_i)=\frac{1}{\nu}$, $i=1,2,\ldots,\nu$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\nu\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση “παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω”, εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα

$$P(\omega_i)=\frac{1}{\nu},\ i=1,2,\ldots,\nu.$$

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως "κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων". Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν Ν(Α)=κ και Ν(Β)=λ, τότε το $A \cup B$ έχει κ+λ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα Α και Β δε θα ήταν ασυμβίβαστα.

Δηλαδή, έχουμε

$N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.

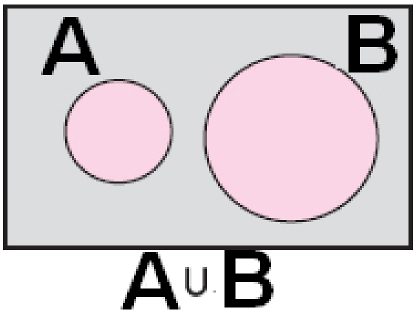
Επομένως:

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)}$$

$$= \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)}$$

$$= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$= P(A) + P(B).$$



Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως απλός προσθετικός νόμος (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α' ισχύει:

P(A')=1 - P(A)

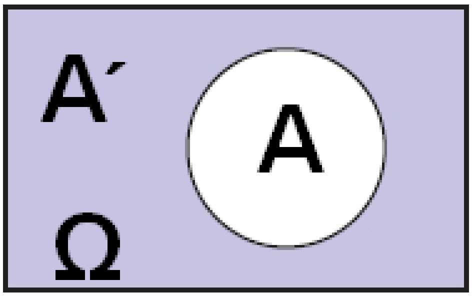
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$ δηλαδή τα Α και Α' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$
$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$
$$1 = P(A) + P(A').$$

Οπότε :

$$P(A')=1-P(A).$$



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα N(A)+N(B)το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

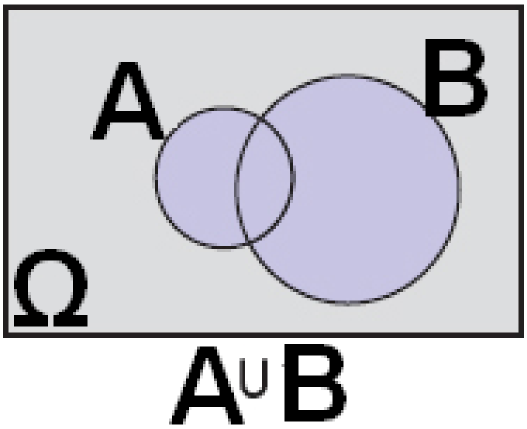
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με N(Ω) έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως προσθετικός νόμος (additive law).



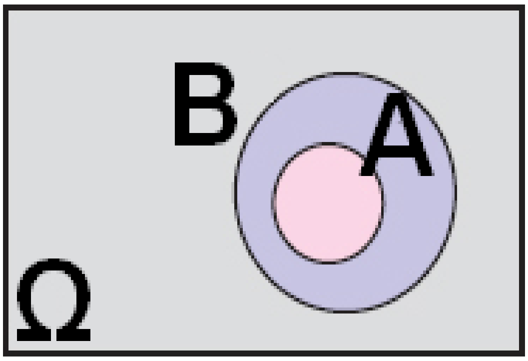
4.

Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$
$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$
$$P(A) \leq P(B).$$



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

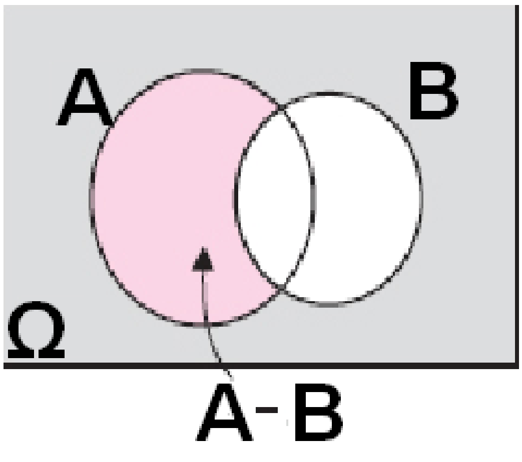
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα A-B και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και

$(A-B)\cup(A\cap B)=A$, έχουμε:

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$$

Άρα $\quad P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Ρίχνουμε δύο “αμερόληπτα” ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.

ΛΥΣΗ

- **Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος, χρησιμοποιούμε έναν πίνακα “διπλής εισόδου”, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.**

2ο / 1ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Από τον πίνακα αυτόν έχουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω έχει 36 ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα, δηλαδή N(Ω)=36.

Το ενδεχόμενο Α: "να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς", είναι το

Α={(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)}

δηλαδή Ν(Α)=10

Επομένως,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Άρα, η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς είναι ή

$$\frac{5}{18} \approx 0,28$$

στη γλώσσα των ποσοστών, περίπου 28%.

2η Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται Ρ(Α)=0,5, Ρ(Β)=0,4 και $P(A \cap B) = 0,2$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β.
ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

ΛΥΣΗ

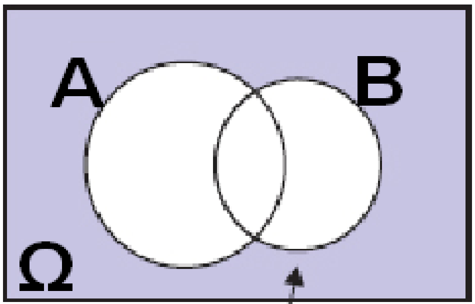
i) Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β είναι το $(A \cup B)'$. Επομένως

$$P((A\cup B)') = 1 - P(A\cup B)$$
$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B))$$

$$= 1 - (0,5 + 0,4 - 0,2)$$

$$= 1 - 0,7$$

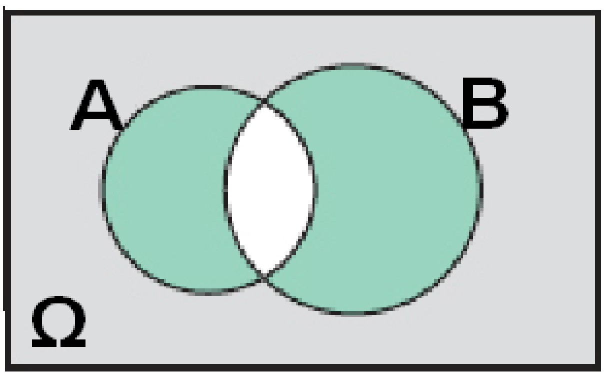
$$= 0,3$$



(A∪B)

ii) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β είναι το $(A - B)\cup(B - A)$. Επειδή τα ενδεχόμενα Α-Β και Β-Α είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$$P((A - B)\cup(B - A)) = P(A - B) + P(B - A)$$
$$= P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$$
$$= 0,5 + 0,4 - 2\cdot 0,2$$
$$= 0,5.$$



(A-B)∪(B-A)

3η Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν P(A)=0,6 και P(B)=0,5.

i) Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$0,1 \le P(A \cap B) \le 0,5.$$

ΛΥΣΗ

i) Αν τα A και B ήταν ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα είχαμε:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6 + 0,5 = 1,1$

ισχύει, δηλαδή, $P(A \cup B) > 1$, που είναι άτοπο. Άρα, τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή $A \cap B \subseteq B$ και $A \cap B \subseteq A$, έχουμε

$P(A \cap B) \le P(B)$ **και** $P(A \cap B) \le P(A)$,

επομένως $P(A \cap B) \le 0,5$ **(1)**

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - P(A \cap B)$

Όμως

$P(A \cup B) \le 1.$

Επομένως:

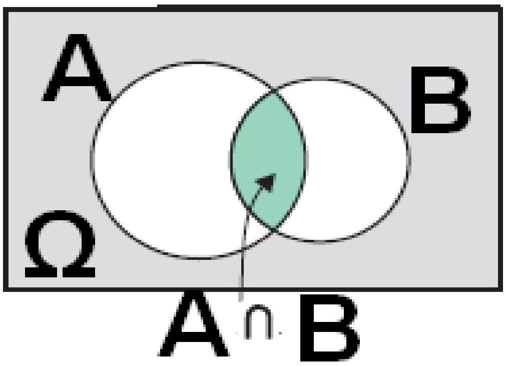
0,6 + 0,5 - P(A∩B)≤ $0,6 + 0,5 - P(A \cap B) \le 1$

$0,6 + 0,5 - 1 \le P(A \cap B)$

$0,1 \le P(A \cap B)$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0{,}1 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}5$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων i) το χαρτί να είναι πέντε ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.

2. Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο "γράμματα".

3. Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:

   i) μαύρη ii) άσπρη ή μαύρη iii) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.

4. Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται

στον επόμενο πίνακα:

Αριθμός μαθητών	**4**	**11**	**9**	**3**	**2**	**1**
Αριθμός αδελφών	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.

5. Έστω τα σύνολα Ω={$\omega \in N$ /10 ≤ ω ≤20}, Α={$\omega \in \Omega$ / ω πολλαπλάσιο του 3} και Β={$\omega \in \Omega$ / ω πολλαπλάσιο του 4}. Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα στοιχείο του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες i) να ανήκει στο Α ii) να μην ανήκει στο Β.

6. Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα i) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος ii) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.

7. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A) = \frac{17}{30}$$

$$P(B) = \frac{7}{15}$$

και

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

Να βρείτε την $P(A \cap B)$.

8. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cup B)=\frac{5}{6}$$

και

$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

Να βρείτε την P(B).

9. Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι P(A)=P(B), P(A∪B)=0,6 και P(A∩B)=0,2. Να βρείτε την P(A).

10. Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

$$P(B')=\frac{2}{3}$$

και

$$P(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

Να βρείτε την $P(A\cup B)$.

11. **Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.**

12. **Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;**

13. **Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει**
α) τουλάχιστον μία ασθένεια;   β) μόνο μία ασθένεια;

14. **Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.**

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. **Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε P(A)=κ, P(B)=λ και $P(A \cap B) = \mu$, να βρείτε τις πιθανότητες:**

i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α και Β.

ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β

iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β.

2. **Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.**

3. **Αν**

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$$

να βρείτε τις πιθανότητες P(A) και P(A').

4. **Αν 0< P(A)< 1, να αποδείξετε ότι**

$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4$$

5. **Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με P(A)=0,6 και P(B)=0,7, να δείξετε ότι $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$.**

6. **Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B)$**

1. Αν ρίξουμε δύο νομίσματα τα αποτελέσματα μπορεί να είναι δύο “κεφαλές”, μια “κεφαλή” και μια “γράμματα”, η δύο “γράμματα”, και επομένως, καθένα από αυτά τα ενδεχόμενα έχει πιθανότητα

$$\frac{1}{3}$$

Τι είναι λάθος στο επιχείρημα αυτό; Ποιο είναι το σωστό;

2. Ένα νόμισμα ρίχνεται 5 φορές και έρχεται κάθε φορά “κεφαλή”. Επομένως, η πιθανότητα να φέρουμε “κεφαλή” σε μια ρίψη του νομίσματος είναι

$$\frac{5}{5}=1$$

Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα αυτό.

3. Τρία συνηθισμένα ζάρια, ένα άσπρο, ένα μαύρο και ένα κόκκινο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Ένα πείραμα συνίσταται στην τυχαία επιλογή ενός ζαριού από το κουτί, στη ρίψη του ζαριού αυτού και στην παρατήρηση του χρώματος και της ένδειξης της άνω έδρας του.

(α) Τι σημαίνει εδώ η λέξη “τυχαία”;

(β) Το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι

(i) $3\cdot6$ (ii) 3^6 (iii) 6^3 (iv) $3\cdot6^3$.

(Σε καθεμιά από τις ερωτήσεις 4-6 μία μόνο από τις

συνοδευτικές απαντήσεις είναι σωστή. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση).

(Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση)

4. Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι 0,4, ποια είναι η πιθανότητα της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου αυτού;

(α) 0,2 (β) 0,8 (γ) 0,6

(δ) 1,4.

5. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι τέτοια ώστε

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

ποια είναι η $P(A \cup B)$;

(α) 1

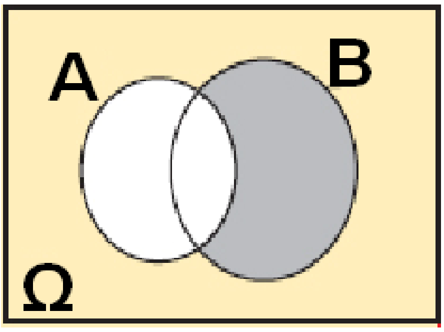
(β) $\frac{3}{4}$

(γ) $\frac{1}{4}$

(δ) $\frac{1}{16}$

(ε) τίποτα από τα προηγούμενα.

6. **Ποιο ενδεχόμενο παριστάνει στο διπλανό διάγραμμα Venn το σκιασμένο εμβαδόν;**



(α) Β (β) Α' (γ) Α-Β (δ) Β-Α.

(Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις 7-9 είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, κυκλώστε το Λ).

7. **Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους.**

Σ Λ

8. **Δύο ενδεχόμενα ξένα μεταξύ τους είναι αντίθετα.**

Σ Λ

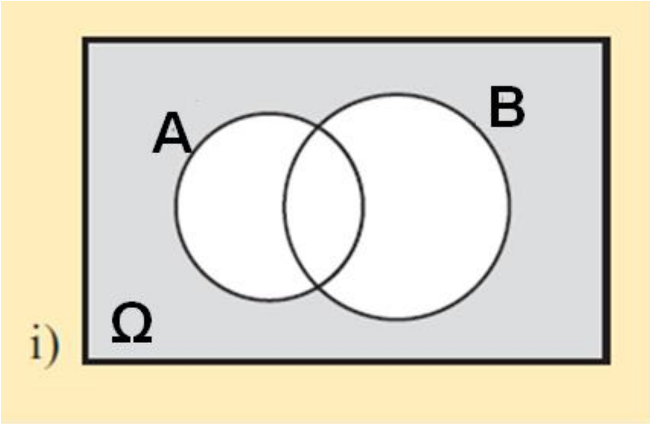
9. **Αν δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, τότε και τα συμπληρωματικά τους Α' και Β' είναι ξένα μεταξύ τους**

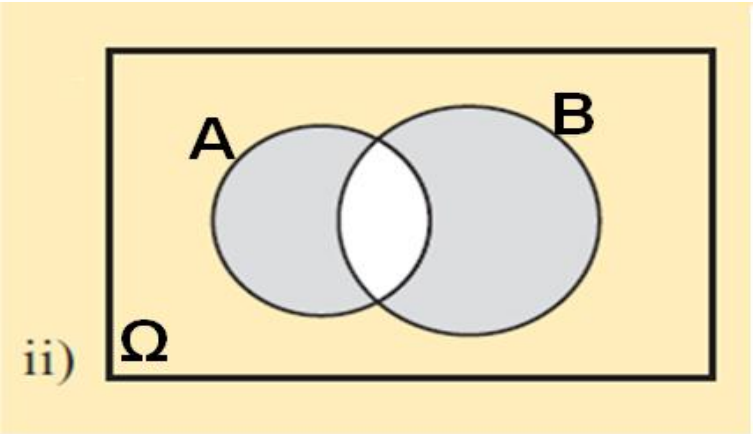
Σ Λ

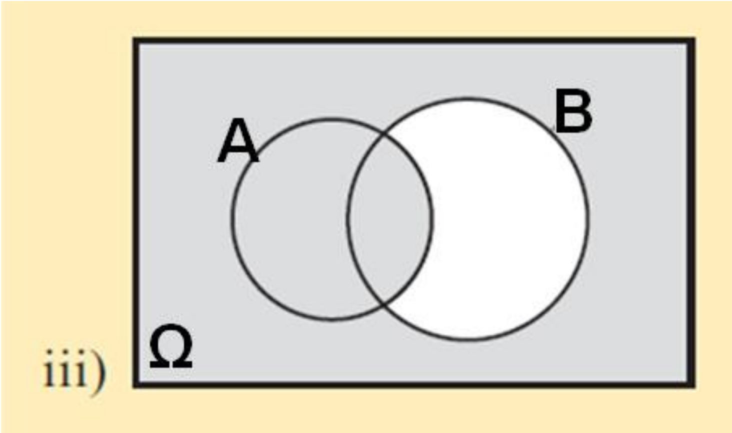
10. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους, μπορεί να ισχύει P(A) + P(B) = 1,3;

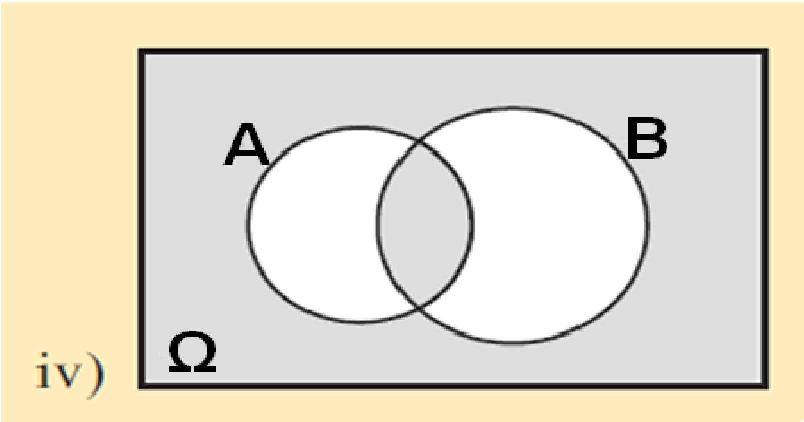
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

11. Να γράψετε με τη βοήθεια των πράξεων των συνόλων το ενδεχόμενο που παριστάνει το σκιασμένο εμβαδόν σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn:






A
B
Ω
iii)

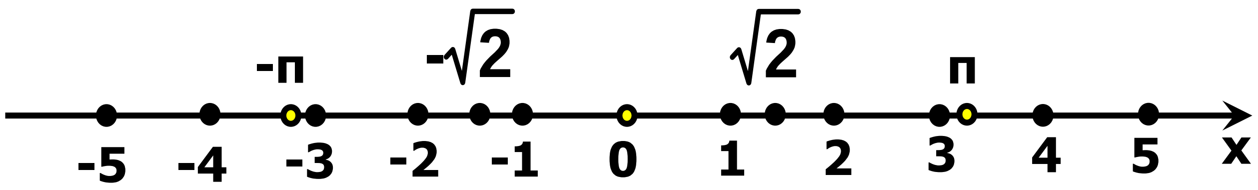

A
B
Ω
iv)

2 ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ (Επαναλήψεις - Συμπληρώσεις)

Εισαγωγή

Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους **άρρητους** αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, **του άξονα των πραγματικών αριθμών.**



Θυμίζουμε ότι:

✓ Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

✓ Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή. Για παράδειγμα,

$$\frac{14}{5} = 2{,}8, \quad -\frac{9}{8} = -1{,}25, \quad \frac{60}{11} = 5{,}\overline{45}$$

$$2{,}25 = \frac{225}{100} \quad \text{και} \quad 2{,}\overline{32} = \frac{230}{99}$$

Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

Υπάρχουν όμως και αριθμοί, όπως οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, κτλ.,

που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β

ακέραιοι, με β ≠ 0 (ή, με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

Πράξεις

Στους πραγματικούς αριθμούς ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και, με τη βοήθειά τους, η αφαίρεση και η διαίρεση.

• Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα, οι οποίες και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	α + β = = β + α	αβ = βα
Προσεταιριστική	α + (β + γ) = = (α + β) + γ	α(βγ) = (αβ)γ
Ουδέτερο Στοιχείο	α + 0 = α	α · 1 = α
Αντίθετος/ Αντί-στροφος Αριθμού	α + (-α) = 0	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \quad \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	α (β + γ) = αβ + αγ	

Στον πίνακα αυτόν, αλλά και στη συνέχεια του βιβλίου, τα γράμματα που χρησιμοποιούνται παριστάνουν οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά.
Ο αριθμός 0 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Επίσης ο αριθμός 1 λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

ΣΧΟΛΙΟ

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης έχουν ως συνέπεια, κάθε άθροισμα με περισσότερους από δυο προσθετέους, να ισούται με οποιοδήποτε άλλο άθροισμα που σχηματίζεται από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε. Για παράδειγμα,

$$-3+2+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}+5-2=-3+3+2-2+5+\sqrt{2}-\sqrt{2}=5$$

Ομοίως, ένα γινόμενο με περισσότερους από δυο παράγοντες ισούται με οποιοδήποτε άλλο γινόμενο που μπορεί να σχηματισθεί από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε. Για παράδειγμα,

$$(-3)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-6)4\left(-\frac{5}{2}\right)=(-3)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-6)4=-24$$

(Η απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών είναι αρκετά πολύπλοκη και παραλείπεται).

• Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής:

$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ **και** $\alpha : \beta = \dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \dfrac{1}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$

Δηλαδή:
Για να βρούμε τη διαφορά α - β, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, ενώ για να βρούμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, με β ≠ 0, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Επειδή διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται, όπου στο εξής συναντάμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, εννοείται ότι β ≠ 0 και δεν θα τονίζεται ιδιαίτερα.

• Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:

1.

$$(\alpha = \beta \ \ \textbf{και} \ \ \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

2.

$$(\alpha = \beta \ \ \textbf{και} \ \ \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3.

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

4.

Αν $\gamma \neq 0$, τότε:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$$

δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

5.

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη:

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν από την ισότητα α + γ = β + γ ή από την ισότητα α • γ = β • γ μεταβαίνουμε στην ισότητα α = β, τότε λέμε ότι **διαγράφουμε** τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο παράγοντα αντιστοίχως. Όμως στην περίπτωση που διαγράφουμε τον ίδιο παράγοντα πρέπει να ελέγχουμε μήπως ο παράγοντας αυτός είναι ίσος με μηδέν, οπότε ενδέχεται να οδηγηθούμε σε λάθος, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω α = 1. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha = 1$$
$$\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot 1$$
$$\alpha^2 = \alpha$$
$$\alpha^2 - 1 = \alpha - 1$$
$$(\alpha + 1)(\alpha - 1) = (\alpha - 1) \cdot 1$$
$$\alpha + 1 = 1$$
$$\alpha = 0$$

Όμως έχουμε και α = 1, οπότε το 1 θα είναι ίσο με το 0. Οδηγηθήκαμε στο λανθασμένο αυτό συμπέρασμα, διότι στην ισότητα (α + 1)(α - 1) = (α - 1) • 1 διαγράψαμε τον παράγοντα (α - 1) ο οποίος, λόγω της υπόθεσης, ήταν ίσος με μηδέν.

Δυνάμεις

Είναι γνωστή από το Γυμνάσιο η έννοια της δύναμης αριθμού με εκθέτη ακέραιο. Συγκεκριμένα, αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}, \quad \text{για } \nu > 1 \text{ και}$$

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \text{για } \nu = 1.$$

Αν επιπλέον είναι α ≠ 0, τότε ορίσαμε ότι:

$$\alpha^0 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$$

ΣΧΟΛΙΟ
Ενώ είναι φανερό ότι, αν α = β, τότε $α^ν = β^ν$, δεν ισχύει το αντίστροφο, αφού για παράδειγμα είναι $(-2)^2 = 2^2$, αλλά $-2 \neq 2$.

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

$$α^κ \cdot α^λ = α^{κ+λ} \qquad \frac{α^κ}{α^λ} = α^{κ-λ}$$

$$α^κ \cdot β^κ = (αβ)^κ \qquad \frac{α^κ}{β^κ} = \left(\frac{α}{β}\right)^κ$$

$$\left(α^κ\right)^λ = α^{κλ}$$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Η έννοια της ταυτότητας είναι γνωστή από το Γυμνάσιο. Συγκεκριμένα, κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται ταυτότητα.

Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται οι γνωστές μας πιο αξιοσημείωτες ταυτότητες:

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$
$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$$
$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$$
$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

Μέθοδοι απόδειξης

1η) Ευθεία Απόδειξη

Έστω ότι για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει η συνθήκη $\alpha+\beta+\gamma=0$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$, δηλαδή έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

«Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$».

Επειδή $\alpha+\beta+\gamma=0$, είναι $\alpha=-(\beta+\gamma)$, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= \left[-(\beta+\gamma)\right]^3+\beta^3+\gamma^3\\ &=-(\beta+\gamma)^3+\beta^3+\gamma^3\\ &=-\beta^3-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2-\gamma^3+\beta^3+\gamma^3\\ &=-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2\\ &=-3\beta\gamma(\beta+\gamma)\\ &=3\alpha\beta\gamma, \qquad (\text{αφού } \beta+\gamma=-\alpha).\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της παραπάνω συνεπαγωγής ξεκινήσαμε με την υπόθεση $α + β + γ = 0$ και με διαδοχικά βήματα καταλήξαμε στο συμπέρασμα $α^3 + β^3 + γ^3 = 3αβγ$. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται **ευθεία απόδειξη.**

ΣΧΟΛΙΑ

1ο) Ευθεία απόδειξη χρησιμοποιήσαμε και στο Γυμνάσιο για την απόδειξη των γνωστών μας ταυτοτήτων. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ταυτότητας $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$, με $α, β \in R$, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
(α+β)^2 &= (α+β)(α+β) && [\text{Ορισμός δύναμης}] \\
&= α(α+β)+β(α+β) && [\text{Επιμεριστική ιδιότητα}] \\
&= α^2+αβ+βα+β^2 && [\text{Επιμεριστική ιδιότητα}] \\
&= α^2+2αβ+β^2 && [\text{Αναγωγή όμοιων όρων}]
\end{aligned}$$

2ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.

Για παράδειγμα, έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y θέλουμε να αποδείξουμε την ταυτότητα:

$$\left(α^2+β^2\right)\left(x^2+y^2\right) = (αx+βy)^2 + (αy-βx)^2$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
&(α^2 + β^2)(x^2 + y^2) = (αx + βy)^2 + (αy - βx)^2 \\
\Leftrightarrow\ &α^2x^2 + α^2y^2 + β^2x^2 + β^2y^2 = \\
&= α^2x^2 + 2αβxy + β^2y^2 + α^2y^2 - 2αβxy + β^2x^2 \\
\Leftrightarrow\ &α^2x^2 + α^2y^2 + β^2x^2 + β^2y^2 = α^2x^2 + α^2y^2 + β^2x^2 + β^2y^2,
\end{aligned}$$

που ισχύει.

3ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα.** Έτσι ο ισχυρισμός

«για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha^2 > \alpha$»

δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε $\alpha^2 = \frac{1}{4}$, δηλαδή $\alpha^2 < \alpha$.

2η) Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό: «Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι άρτιος», δηλαδή

«Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός»

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεπτόμαστε ως εξής:

Έστω ότι ο α δεν είναι άρτιος. Τότε ο α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή $\alpha = 2\kappa + 1$, όπου κ ακέραιος, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= (2\kappa+1)^2 \\ &= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 \\ &= 2\left(2\kappa^2 + 2\kappa\right) + 1 \\ &= 2\lambda + 1 \qquad \text{(όπου } \lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa\text{).}\end{aligned}$$

Δηλαδή $\alpha^2 = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, που σημαίνει ότι ο α^2 είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο α^2 είναι άρτιος. Επομένως, η παραδοχή ότι α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. Άρα **ο α είναι άρτιος.**

Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε **άτοπο.**
Η μέθοδος αυτή απόδειξης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Αρχαίους Έλληνες και λέγεται **απαγωγή σε άτοπο.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να αποδειχθούν οι εξής ιδιότητες των αναλογιών:

i) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$ $\quad$ (εφόσον $\beta\delta\neq 0$)

ii) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}$ $\quad$ (εφόσον $\beta\gamma\delta\neq 0$)

iii) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\delta}$ $\quad$ (εφόσον $\beta\delta\neq 0$)

iv) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ $\quad$ (εφόσον $\beta\delta(\beta+\delta)\neq 0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Για $\beta\delta\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \beta\delta\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\beta\delta\cdot\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma.$$

ii) **Για** $\beta\gamma\delta \neq 0$ **έχουμε:**

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta} = \frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}.$$

iii) **Για** $\beta\delta \neq 0$ **έχουμε:**

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\gamma}{\delta} + 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

iv) **Για** $\beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$, **αν θέσουμε** $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, **έχουμε:**

$\alpha = \lambda\beta$ **και** $\gamma = \lambda\delta$, **οπότε** $\alpha + \gamma = \lambda(\beta + \delta)$.

Επομένως, $\lambda = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, **δηλαδή** $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

2η Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Στη συνέχεια, με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη, να παρασταθούν οι $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}$ όπου κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ **ανάγωγο κλάσμα** (δηλαδή κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις). Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2$$

$$2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

$$\kappa^2 = 2\lambda^2$$

που σημαίνει ότι ο κ^2 είναι άρτιος, οπότε (σελ. 77-78) και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή είναι της μορφής κ = 2μ. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\kappa^2 = 2\lambda^2$$

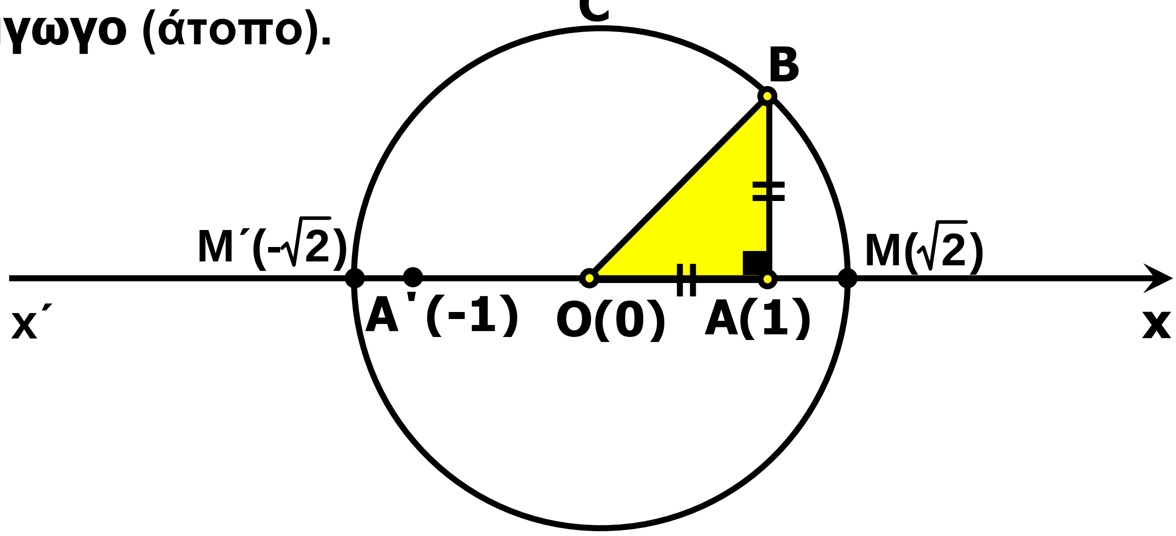
$$(2\mu)^2 = 2\lambda^2$$

$$4\mu^2 = 2\lambda^2$$

$$\lambda^2 = 2\mu^2$$

Που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ είναι άρτιος.

Αφού λοιπόν οι κ, λ είναι άρτιοι, το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ δεν είναι ανάγωγο (άτοπο).



Στο σημείο Α του πραγματικού άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ με μήκος 1. Τότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ = $\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Μ και Μ΄ που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η παράσταση

$$A=\left[\left(x^2y^3\right)^{-2}\cdot\left(xy^3\right)^4\right]:\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$$

i) Να δείξετε ότι $A=x^9\cdot y^9$

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x=2010$ και $y=\frac{1}{2010}$

2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\left[\left(xy^{-1}\right)^2:\left(x^3y^7\right)^{-1}\right]^2$$

για $x=0,4$ και $y=-2,5$.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $1001^2 - 999^2$ ii) $99 \cdot 101$ iii) $\dfrac{(7{,}23)^2 - (4{,}23)^2}{11{,}46}$

4. i) Να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2$$

5. i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - (\alpha-1)(\alpha+1) = 1$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(1{,}3265)^2 - 0{,}3265 \cdot 2{,}3265$$

6. Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών (του μικρότερου από του μεγαλύτερου) ισούται με το άθροισμά τους.

7. Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $2^{\nu} + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha}$ ii) $\dfrac{(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1}$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \dfrac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha+1)^3}$ ii) $\dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1}$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $(x+y)^2 \cdot \left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-2}$ ii) $\dfrac{x+y}{x-y} \cdot \dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$

4. Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right) : \left(\dfrac{x^2}{x-y}-y\right) = 1$

5. Έστω α, β και γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ ii). $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha$

6. Να δείξετε ότι, αν ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $L = 4\alpha$ και εμβαδόν $E = \alpha^2$, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με α.

7. Να δείξετε ότι:

i) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε $\alpha+\beta$ άρρητος.

ii) Αν α ρητός, με $\alpha \neq 0$, και β άρρητος, τότε $\alpha \cdot \beta$ άρρητος.

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έννοια της διάταξης

Οι έννοιες «μεγαλύτερος από», «μικρότερος από», που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, ορίστηκαν ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

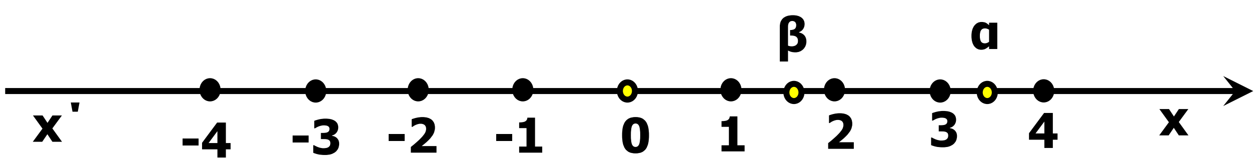
> Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α - β** είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι μικρότερος του α και γράφουμε β < α
Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:
- **Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.**
- **Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.**

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Γεωμετρικά η ανισότητα α > β σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β.



Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει α > β ή α = β, τότε γράφουμε α > β και διαβάζουμε: «α μεγαλύτερος ή ίσος του β».

Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

$$(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$
$$(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

- α, β **ομόσημοι** $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$

  α, β **ετερόσημοι** $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$

- $\alpha^2 \geq 0$, **για κάθε** $\alpha \in \mathbb{R}$

  (**Η ισότητα ισχύει μόνο όταν** $\alpha = 0$)

Από την τελευταία εύκολα προκύπτουν και οι ισοδυναμίες:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$
$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

Ιδιότητες των ανισοτήτων

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$, μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων:

1. $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

3.

- $(\alpha > \beta \;\; \text{και} \;\; \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- **Για θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η συνεπαγωγή:**

$(\alpha > \beta \;\; \text{και} \;\; \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Η ιδιότητα 3. ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Συγκεκριμένα:

✓ $(\alpha_1 > \beta_1 \;\; \text{και} \;\; \alpha_2 > \beta_2 \; \text{και} ... \text{και} \;\; \alpha_\nu > \beta_\nu)$

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\nu$

✓ **Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί, τότε:**

$(\alpha_1 > \beta_1 \;\; \text{και} \;\; \alpha_2 > \beta_2 \; \text{και} ... \text{και} \;\; \alpha_\nu > \beta_\nu)$

$\Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot ... \cdot \beta_\nu$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε και την παρακάτω ιδιότητα.

4.

Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- **Έστω α > β. Τότε, από τη (*), για** $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu = \alpha > 0$ **και** $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_\nu = \beta > 0$**, προκύπτει ότι:** $\alpha^\nu > \beta^\nu$.
- **Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι** $\alpha^\nu > \beta^\nu$ **και** $\alpha \leq \beta$**. Τότε:**

✓ **αν ήταν α = β, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε** $\alpha^\nu = \beta^\nu$ **(άτοπο), ενώ**

✓ αν ήταν $\alpha < \beta$, θα είχαμε $\alpha^{\nu} < \beta^{\nu}$ (άτοπο).
Άρα, $\alpha > \beta$.
Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας θα αποδείξουμε τώρα ότι:

Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω α = β. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει, όπως είπαμε και προηγουμένως, ότι $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$.
- Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$ και $\alpha \neq \beta$. Τότε:

✓ αν ήταν α > β, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$ (άτοπο), ενώ

✓ αν ήταν α < β, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^{\nu} < \beta^{\nu}$ (άτοπο).

Άρα, α = β.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση. Για παράδειγμα, είναι
$10 > 6$ και $7 > 2$, αλλά $10 - 7 < 6 - 2$

2ο Επίσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς με θετικούς, όμως, όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τη διαίρεση. Για παράδειγμα, είναι
$24 > 10$ και $6 > 2$, αλλά $\frac{24}{6} < \frac{10}{2}$

Διαστήματα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \le x \le \beta$ λέγεται **κλειστό διάστημα από α μέχρι β** και συμβολίζεται με [α, β].
Αν τώρα από το κλειστό διάστημα [α, β] παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β** που συμβολίζεται με (α, β).
Οι αριθμοί **α** και **β** λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των **α** και **β** λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.
Η διαφορά δηλαδή μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.
Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:

✓ Το **ανοικτό δεξιά διάστημα** [α, β) που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\alpha \le x < \beta$ και

✓ Το **ανοικτό αριστερά διάστημα** (α, β] που αποτελείται από τους αριθμούς με x για τους οποίους ισχύει $\alpha < x \le \beta$.

Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,

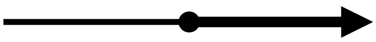
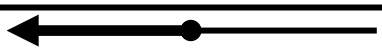
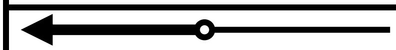
✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει **α ≤ x** συμβολίζεται με [α, +∞), ενώ

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει **x ≤ α** συμβολίζεται με (-∞, α].

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα

(α, +∞) και **(-∞, α)**. Τα σύμβολα **+∞** και **-∞**, που διαβάζονται «**συν άπειρο**» και «**πλην άπειρο**» αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους:

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
 x α β x	α ≤ x ≤ β	[α, β]
 x α β x	α ≤ x ≤ β	[α, β)
 x α β x	α < x ≤ β	(α, β]
 x α β x	α < x ≤ β	(α, β)
 x α x	x ≥ α	[α, +∞)
 x α x	x > α	(α, +∞)
 x α x	x ≤ α	(-∞, α]
 x α x	x < α	(-∞, α)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να αποδειχθεί ότι :

i) Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

ii) Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$

iii) Αν α > 0, τότε $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αφού α, β είναι ομόσημοι αριθμοί έχουμε αβ > 0. Επομένως ισχύει: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha\beta}<\dfrac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta}<\dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$

ii) Έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

που ισχύει

iii) Έχουμε:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2 \Leftrightarrow \alpha^2+1\geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1-2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \geq 0$$

που ισχύει.

2η Αν $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{4}$ **και** $-\dfrac{2}{3}<y<\dfrac{5}{6}$**, να αποδειχθεί ότι:** $-11<8x-12y+3<17$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ανισότητα $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{4}$ **έχουμε διαδοχικά:**

$$8\left(-\frac{1}{2}\right)<8x<8\cdot\frac{3}{4}$$

$$-4<8x<6 \qquad (1)$$

Ομοίως από την $-\frac{2}{3} < y < \frac{5}{6}$ έχουμε διαδοχικά:

$$12\left(-\frac{2}{3}\right) < 12y < 12 \cdot \frac{5}{6}$$

$$-8 < 12y < 10$$

$$8 > -12y > -10$$

$$-10 < -12y < 8 \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), που έχουν την ίδια φορά, και έχουμε:

$$-14 < 8x - 12y < 14,$$

οπότε θα ισχύει:

$$-14 + 3 < 8x - 12y + 3 < 14 + 3$$

Άρα

$$-11 < 8x - 12y + 3 < 17$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$ ii) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

2. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$

ii) Αν $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

4. Αν $4,5 < x < 4,6$ και $5,3 < y < 5,4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $x + y$ ii) $x - y$ iii) $\frac{x}{y}$ iv) $x^2 + y^2$

5. Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές:
i) της περιμέτρου
ii) του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

6. Αν $0 < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$

7. Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:
Έστω $x > 5$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} x &> 5 \\ 5x &> 25 \\ 5x - x^2 &> 25 - x^2 \\ x(5-x) &> (5+x)(5-x) \\ x &> 5 + x \\ 0 &> 5. \end{aligned}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ με θετικούς όρους και ένας θετικός αριθμός γ. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} > \frac{\alpha}{\beta}$

ii) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta}$

2. Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$

3. Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \geq 4$$

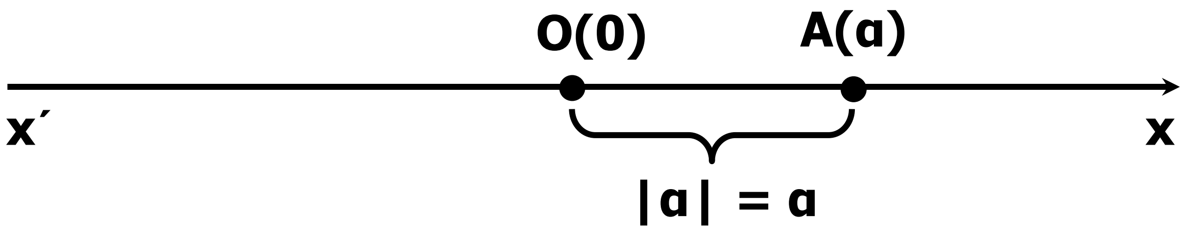
4. Να αποδείξετε ότι:

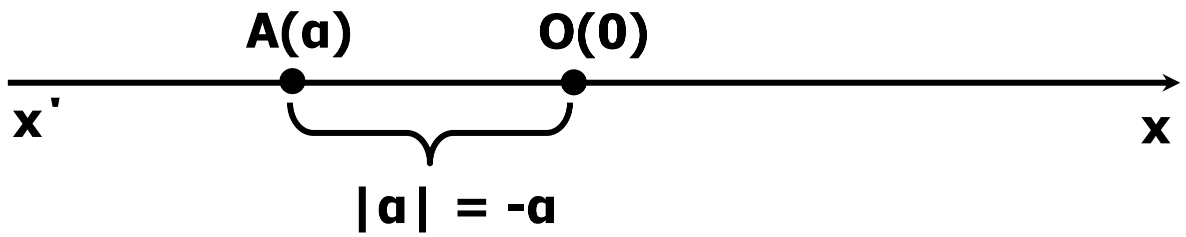
i) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ **ii)** $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε έναν άξονα.





Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι η απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, ονομάζεται απόλυτη τιμή του αριθμού α και την συμβολίζεται με |α|.

Από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε ο άξονας προκύπτει ότι:

$|2| = 2$, $\left|\frac{13}{5}\right| = \frac{13}{5}$, $\left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$ **και γενικά:** $|\alpha| = \alpha$, **για κάθε α > 0.**

Δηλαδή:

Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

$|-2| = 2$, $\left|-\frac{13}{5}\right| = \frac{13}{5}$, $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$ **και γενικά** $|\alpha| = -\alpha$, **για κάθε α < 0.**

Δηλαδή:
Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

- $|0| = 0$

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν} \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν θ > 0, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Για παράδειγμα,

✓ $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

✓ $|\alpha - \beta| = |2\alpha - 3\beta| \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2\alpha - 3\beta$ ή $\alpha - \beta = 3\beta - 2\alpha$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta \quad \text{ή} \quad \alpha = \frac{4}{3}\beta$$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Οι ιδιότητες αυτές, όμως, μπορούν να αποδειχθούν και με τη βοήθεια των προηγούμενων συμπερασμάτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ **είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:**

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2$$
$$\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2$$
$$\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$$ **, που ισχύει.**

2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ **είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:**

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta|$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta||$$ **, που ισχύει.**

Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΣΧΟΛΙΟ

- **Η ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Συγκεκριμένα:**

$$|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \ldots \cdot |\alpha_\nu|$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha$, έχουμε:

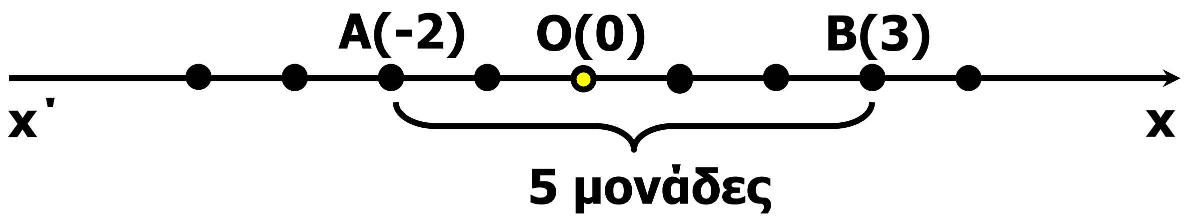
$$|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$$

- **Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους. Συγκεκριμένα:**

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|$$

Απόσταση δυο αριθμών

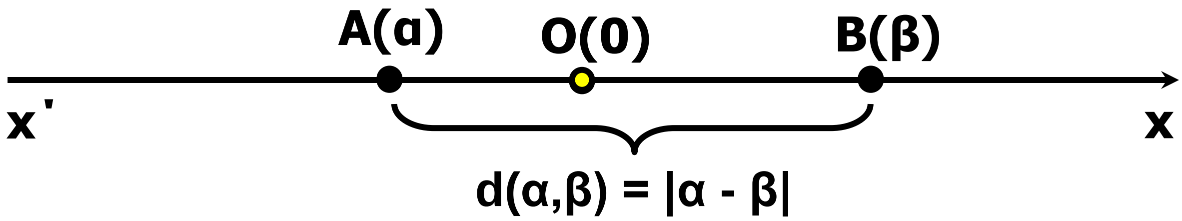
- **Ας πάρουμε τώρα δυο αριθμούς, για παράδειγμα τους -2 και 3, που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.**



Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών -2 και 3. Παρατηρούμε ότι

$$(AB) = 5 = |(-2) - 3| = |3 - (-2)|.$$

Γενικότερα, ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.

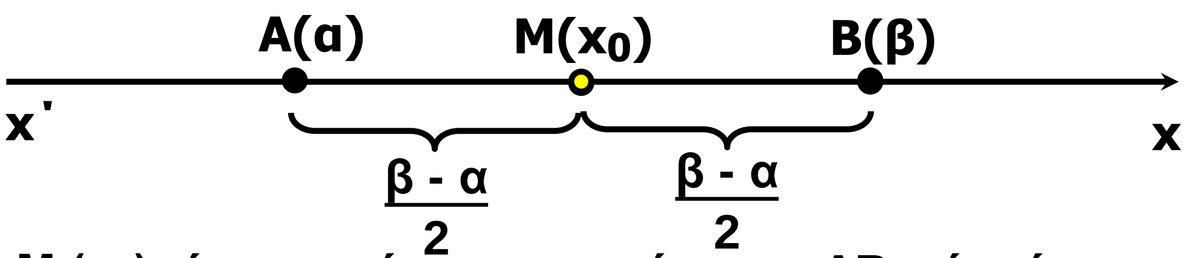


Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με d(α,β) και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$. Είναι δηλαδή:

$$\boxed{d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|}$$

Προφανώς ισχύει $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$. Στην περίπτωση μάλιστα που είναι α < β, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με β - α και λέγεται **μήκος** του διαστήματος [α, β].

• Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα [α, β] και ας ονομάσουμε Α και Β τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



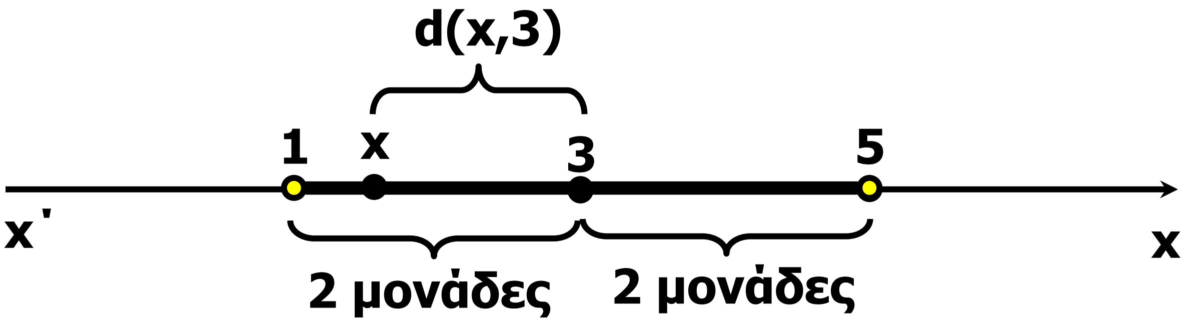
Αν Μ (x_0) είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
(MA)=(MB) &\Leftrightarrow d(x_0,\alpha)=d(x_0,\beta)\\
&\Leftrightarrow |x_0-\alpha|=|x_0-\beta|\\
&\Leftrightarrow x_0-\alpha=\beta-x_0 \quad (\text{αφού } \alpha<x_0<\beta)\\
&\Leftrightarrow 2x_0=\alpha+\beta\\
&\Leftrightarrow x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}
\end{aligned}$$

Ο αριθμός $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον Μ του τμήματος ΑΒ λέγεται **κέντρο** του διαστήματος [α, β], ενώ ο αριθμός $\rho=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ λέγεται **ακτίνα** του [α, β].

Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β), [α, β) και (α, β] ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος [α, β].

- Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-3|<2$.



Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$$|x-3|<2 \Leftrightarrow d(x,3)<2$$
$$\Leftrightarrow 3-2<x<3+2$$
$$\Leftrightarrow x\in(3-2,\ 3+2)$$

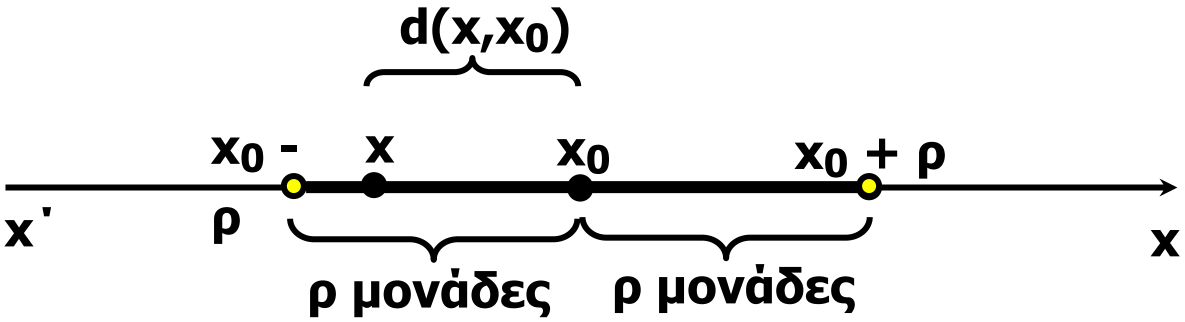
Γενικά:

Για $x_0\in\mathbb{R}$ και $\rho>0$, ισχύει:

$$|x-x_0|<\rho \Leftrightarrow x\in(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$$
$$\Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho$$

Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| < \rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος

$(x_0 - \rho,\ x_0 + \rho)$ που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ.



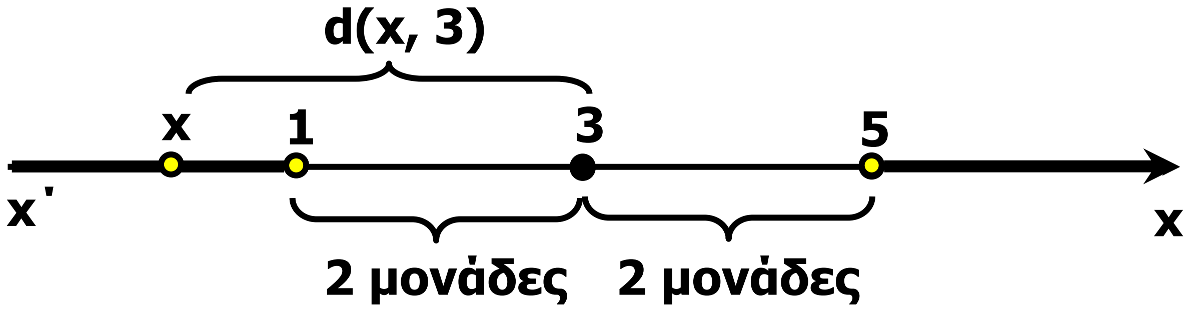
Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, έχουμε:

$$|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho,\ \rho) \Leftrightarrow -\rho < x < \rho.$$

Για παράδειγμα,

$$|x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2,\ 2) \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

- Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3| > 2$.



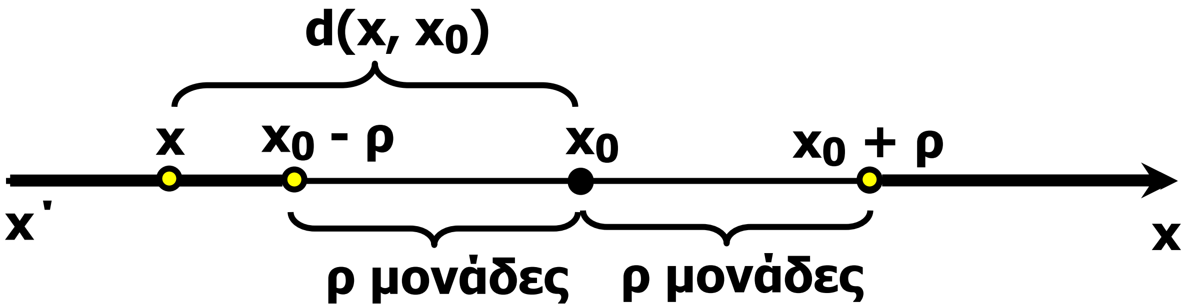
Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$$|x - 3| > 2 \Leftrightarrow d(x,3) > 2$$
$$\Leftrightarrow x < 3 - 2 \ \text{ή}\ x > 3 + 2$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,\ 3-2) \cup (3+2,\ +\infty).$$

Γενικά:

> Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:
>
> $$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty,\ x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho,\ +\infty)$$
> $$\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \ \text{ή}\ x > x_0 + \rho$$

Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| > \rho$ αντιστοιχούν σε σημεία Μ(x) του άξονα x΄x που απέχουν από το σημείο Κ(x_0) απόσταση μεγαλύτερη του ρ.



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, η τελευταία ισοδυναμία παίρνει τη μορφή:

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad ή \quad x > \rho$$

Για παράδειγμα:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \quad ή \quad x > 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi - 3|$ ii) $|\pi - 4|$

iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi|$ iv) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$

2. Αν $3 < x < 4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$|x - 3| + |x - 4|$$

3. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x - 3| - |4 - x|$, όταν:

i) $x < 3$ ii) $x > 4$.

4. Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha}\right|$.

5. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση $A = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{|y|}{y}$

6. Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:

i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D.

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

ΠΙΝΑΚΑΣ

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x-4\| \leq 2$	$d(x,4) \leq 2$	$[2,\ 6]$
$\|x+3\| < 4$		
$\|x-4\| > 2$		
$\|x+3\| \geq 4$		
	$d(x,5) < 1$	
	$d(x,-1) > 2$	
	$d(x,5) \geq 1$	
	$d(x,-1) \leq 2$	
		(-2, 2)
		[-5, 1]
		$(-\infty,\ -2] \cup [2,\ +\infty)$
		$(-\infty,\ -5) \cup (1,\ +\infty)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι $|\alpha-\beta| \leq |\alpha-\gamma| + |\gamma-\beta|$.

2. Αν α > β, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$ **ii)** $\beta = \dfrac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$

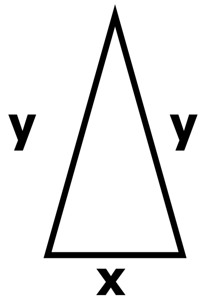
3. Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y :
i) Η ισότητα $|x| + |y| = 0$;   ii) Η ανισότητα $|x| + |y| > 0$;

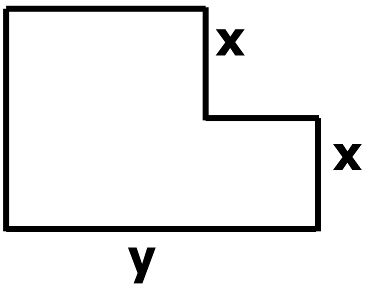
4. Έστω 0 < α < β.

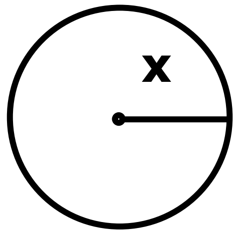
i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς 1, $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$.

ii) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ότι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$.

5. Αν $|x - 2| < 0{,}1$ και $|y - 4| < 0{,}2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:







2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

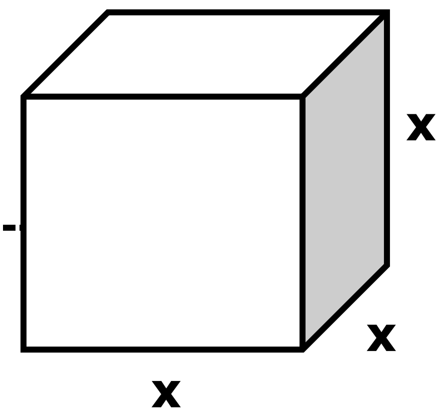
Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν α > 0, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Για τις τετραγωνικές ρίζες μη αρνητικών αριθμών γνωρίσαμε τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$$
$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$$
$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού



Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κυβική δεξαμενή χωρητικότητας 64 κυβικών μέτρων και ζητάμε την πλευρά της. Αν x μέτρα

είναι η πλευρά της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα είναι x^3 κυβικά μέτρα και επομένως θα ισχύει: $x^3 = 64$. Αναζητούμε λοιπόν έναν αριθμό x που, όταν υψωθεί στον κύβο, θα μας δώσει 64. Ο αριθμός αυτός, αφού παριστάνει μήκος, πρέπει να είναι θετικός. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 4, διότι $4^3 = 64$.

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, bend left, "4^3"] & 64 \arrow[l, bend left, "\sqrt[3]{64}"] \end{tikzcd}$$

Ο αριθμός 4 λέγεται **τρίτη ρίζα** του 64 και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{64}$. Δηλαδή $\sqrt[3]{64} = 4$. Η τρίτη ρίζα ενός αριθμού λέγεται και **κυβική ρίζα** του αριθμού αυτού. Γενικεύοντας τώρα τα παραπάνω για κάθε **θετικό ακέραιο ν**, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

> Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός[(1)] που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Επίσης γράφουμε

$$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

[(1)] Αποδεικνύεται ότι υπάρχει και είναι μοναδικός

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι $10^4 = 10000$, οπότε $\sqrt[4]{10000} = 10$. Είναι επίσης και $(-10)^4 = 10000$. Όμως, δεν επιτρέπεται να γράφουμε $\sqrt[4]{10000} = -10$, αφού, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η $\sqrt[4]{10000}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^4 = 10000$.

Ιδιότητες των ριζών

Από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α, συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- **Αν α ≥ 0, τότε:**

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha \quad \textbf{και} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$$

- **Αν α ≤ 0 και ν άρτιος, τότε:**

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$$

Για παράδειγμα:

$$\sqrt[6]{2^6} = 2 \quad \textbf{ενώ} \quad \sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$$

Ισχύουν όμως και οι ακόλουθες ιδιότητες, από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας:

Αν α, β ≥ 0, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ **(εφόσον $\beta\neq 0$)**

3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}$

4. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}\Leftrightarrow\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}\right)^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}=\alpha\cdot\beta$$

$$\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta,$$ **πουισχύει.**

2. Αποδεικνύεται όπως και η 1.

3. Έχουμε:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}\Leftrightarrow\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu}=\left(\sqrt[\mu\nu]{\alpha}\right)^{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu}=\alpha$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\alpha,$$ **που ισχύει.**

4. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\left(\alpha^{\mu}\right)^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η ιδιότητα 1. ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa}$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\kappa = \alpha > 0$, ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa}$$

οπότε, λόγω της ιδιότητας 1, για α, β ≥ 0 έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου α > 0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τις οποί-ες θα ονομάσουμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι γνω-στές μας ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη.

Τι θα πρέπει, για παράδειγμα, να σημαίνει το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $\left(\alpha^{p}\right)^{q} = a^{pq}$ και για

δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα είναι $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^5 = 3^{\frac{2}{5}\cdot 5} = 3^2$

Άρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^5 = 3^2$.

Δηλαδή πρέπει να είναι $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

> **Αν α > 0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:**
>
> $$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε

$0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$. Για παράδειγμα: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ και

$$27^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{27^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{3^4}$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά. Έτσι έχουμε για παράδειγμα είναι:

$$\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{4}}\cdot\alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{\alpha^7}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Αν α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} < \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}$$

$\Leftrightarrow \alpha < \beta$, **που ισχύει.**

2η Να τραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ριζικά στους παρονομαστές:

i) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$ **ii) i** $\dfrac{10}{\sqrt{5}-1}$ **iii)** $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

i) $$\frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$$

ii) $$\frac{10}{\sqrt{5}-1} = \frac{10\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{10\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2} = \frac{10\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}$$

$$= \frac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$$

iii) $$\frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{6\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}=\frac{6\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$=\frac{6\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{7-5}=3\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$$

3η Να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40}=10$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40}=10^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot40^{\frac{1}{6}}=(2\cdot5)^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2^3\cdot5\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{3}{6}}\cdot5^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{6}}$$

$$=2^1\cdot5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2\cdot5=10$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[5]{100000}$.

ii) $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$.

iii) $\sqrt{0,01}$, $\sqrt[3]{0,001}$, $\sqrt[4]{0,0001}$, $\sqrt[5]{0,00001}$.

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά

i) $\sqrt{(\pi-4)^2}$ ii) $\sqrt{(-20)^2}$ iii) $\sqrt{(x-1)^2}$ iv) $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}}$

3. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}=1$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}\right)=-8$$

5. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=2$

ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=2$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=2$

ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=2$

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$ ii) $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3\cdot\sqrt[12]{3}$ ii) $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2\cdot\sqrt[18]{2^{13}}$

iii) $\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[18]{2^{13}}$

9. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{25 \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{75}} = 10$ ii) $\dfrac{\sqrt{216} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{50}} = 18$

10. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές:

i) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}$ ii) i$\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ ii) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}} = 16$ ii) $\sqrt{\dfrac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^{6}}} = 3$

αφού αναλύσετε τα υπόριζα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 5+\sqrt{6}$$

ii) Αν α, β > 0 να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=(\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}$$

2. i) Να βρείτε τα αναπτύγματα των $\left(3+2\sqrt{7}\right)^2$ και $\left(3-2\sqrt{7}\right)^2$

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{37+12\sqrt{7}}-\sqrt{37-12\sqrt{7}}=6$$

3. i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός

ii) Αν α θετικός ρητός, να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός.

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4$

ii) $\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=8\sqrt{3}$

5. **Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του**

είναι $AB = \sqrt{\alpha}$ **και** $A\Gamma = \sqrt{\beta}$

i) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.

ii) Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha + \beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

iii) Για μη αρνητικούς αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha + \beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$**. Πότε ισχύει η ισότητα;**

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι α-ληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ και δ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1.	$(\alpha=\beta$ **και** $\gamma=\delta) \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$	**Α Ψ**
2.	**Αν** $\alpha^2 = \alpha\beta$**, τότε** $\alpha = \beta$.	**Α Ψ**
3.	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$.	**Α Ψ**
4.	**Το άθροισμα** $\alpha + \beta$ **δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός**	**Α Ψ**
5.	**Το γινόμενο** $\alpha \cdot \beta$ **δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός.**	**Α Ψ**
6.	**Αν** $\alpha > \beta$ **και** $\gamma < \delta$**, τότε** $\alpha - \gamma > \beta - \delta$.	**Α Ψ**
7.	**Αν** $\alpha^2 > \alpha\beta$**, τότε** $\alpha > \beta$.	**Α Ψ**
8.	**Αν** $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ **τότε** $\alpha > \beta$	**Α Ψ**
9.	**Αν** $\alpha > \beta$ **και** $\alpha > -\beta$**, τότε** $\alpha > 0$.	**Α Ψ**
10.	**Αν** $\alpha > \frac{1}{\alpha}$**, τότε** $\alpha > 1$	**Α Ψ**
11.	**Αν** $\alpha < \beta < 0$**, τότε** $\alpha^2 > \beta^2$.	**Α Ψ**
12.	**Αν** $\alpha > -2$ **και** $\beta > -3$**, τότε** $\alpha\beta > 6$.	**Α Ψ**
13.	**Αν** $\alpha < -2$ **και** $\beta < -3$**, τότε** $\alpha\beta > 6$.	**Α Ψ**
14.	$4\alpha^2 - 20\alpha\beta + 25\beta^2 \geq 0$.	**Α Ψ**
15.	$(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$.	**Α Ψ**
16.	$(\alpha^2 - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$.	**Α Ψ**

17.	$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$	Α Ψ

18.	Αν α • β > 0, τότε $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$.	Α Ψ
19.	Αν $\alpha^2 = \beta$, τότε $\alpha=\sqrt{\beta}$	Α Ψ
20.	$\sqrt{\alpha^2}=\alpha$	Α Ψ
21.	Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$	Α Ψ
22.	Αν α • β ≥ 0, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$	Α Ψ
23.	Αν $\beta \geq 0$,τότε $\sqrt{\alpha^2\cdot\beta}=\alpha\cdot\sqrt{\beta}$	Α Ψ
24.	$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta$	Α Ψ
25.	Αν α ≥ 0, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[6]{\alpha^3}=\sqrt{\alpha}$	Α Ψ
26.	Μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[4]{\alpha^2}=\sqrt{\alpha}$	Α Ψ
27.	$5^{25} > 25^{5}$.	Α Ψ
28.	$11^{22} > 22^{11}$.	Α Ψ

ΙΙ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν 2 < x < 5 τότε η παράσταση |x - 2| + |x - 5| είναι ίση με:

Α) 2x - 7 Β) 7 - 2x Γ) -3 Δ) 3.

2. Αν 10 < x < 20 τότε η τιμή της παράστασης

$$\frac{|x-10|}{x-10}+\frac{|x-20|}{x-20}$$ είναι ίση με:

Α) 2 Β) -2 Γ) 10 Δ) 0.

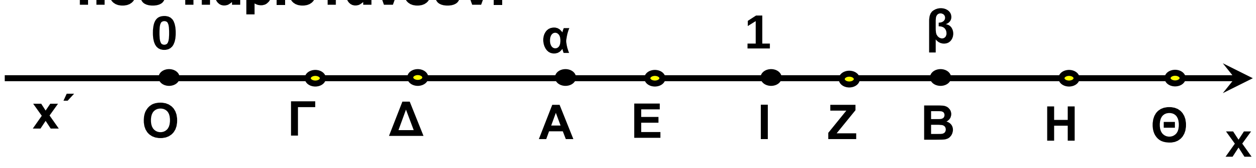
3. Αν $\alpha=\sqrt[6]{10}$, $\beta=\sqrt{2}$ και $\gamma=\sqrt[3]{3}$ τότε

Α) α < β < γ Β) α < γ < β Γ) γ < α < β Δ) β < γ < α.

4. Ο αριθμός $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ είναι ίσος με:

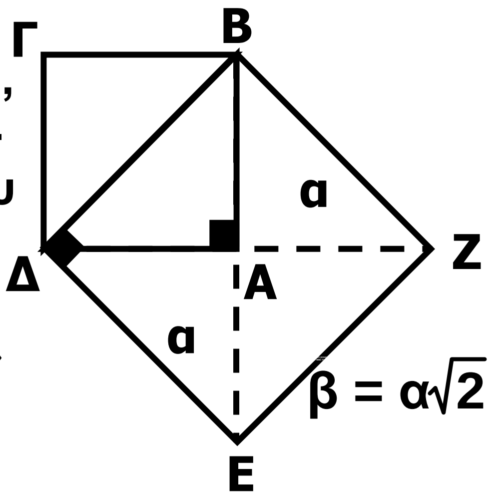
Α) $3+2\sqrt{5}$ Β) $3+2\sqrt[4]{5}$ Γ) $2+\sqrt{5}$ Δ) $2+\sqrt[4]{5}$.

ΙΙΙ. Στον παρακάτω άξονα τα σημεία Ο, Ι, Α και Β παριστάνουν τους αριθμούς 0, 1, α και β αντιστοίχως, με 0 < α < 1 και β > 1, ενώ τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, α^2, β^2, α^3 και β^3, όχι όμως με την σειρά που αναγράφονται. Να αντιστοιχίσετε τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ με τους αριθμούς που παριστάνουν.



Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



Ο «διπλασιασμός του τετραγώνου», δηλαδή η κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδό διπλάσιο ενός άλλου δοθέντος τετραγώνου, μπορεί να γίνει με μια απλή «γεωμετρική» κατασκευή. Λέγοντας «γεωμετρική» κατασκευή εννοούμε κατασκευή με χάρακα και διαβήτη.
Ωστόσο, η πλευρά β, του τετραγώνου με το διπλάσιο εμβαδό, δεν προκύπτει από την πλευρά α με πολλαπλασιασμό επί ρητό αριθμό. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα (ως μονάδα μέτρησης) με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε ακριβώς τα δυο αυτά τμήματα, πλευρά και διαγώνιο τετραγώνου. Η απόδειξη της ύπαρξης άρρητων αριθμών θεωρείται μια από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις των Πυθαγορείων. (Πυθαγόρας: 6ος π. Χ. αιώνας). Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν μια βαθειά πίστη ότι πάντοτε δυο ευθύγραμμα τμήματα έχουν κοινό μέτρο. Γι' αυτό, στα πλαίσια της εποχής εκείνης, η ανακάλυψη αυτή των Πυθαγορείων δεν ήταν απλά και μόνο μια ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόταση, αλλά σήμαινε την ανατροπή θεμελιωδών φιλοσοφικών αντιλήψεων για τον κόσμο και τη φύση. Ήταν κεντρική αντίληψη των Πυθαγορείων ότι η ουσία κάθε όντος μπορεί να αναχθεί σε φυσικούς αριθμούς. Ο νεοπυθαγόρειος Φιλόλαος γύρω στα 450 π.Χ., έγραφε:

«Πραγματικά το καθετί που γνωρίζουμε έχει έναν αριθμό (δηλαδή φυσικό). Αλλιώς θα ήταν αδύνατο να το γνωρίσουμε και να το καταλάβουμε με τη λογική. Το ένα είναι η αρχή του παντός».

Η ανακάλυψη λοιπόν ότι υπάρχουν μεγέθη και μάλιστα απλά, όπως η υποτείνουσα τετραγώνου, τα οποία δεν

μπορούν να εκφραστούν στα πλαίσια των φυσικών αριθμών, θεωρήθηκε αληθινή συμφορά για την πυθαγόρεια φιλοσοφία. Χαρακτηριστικοί είναι οι θρύλοι που περιβάλλουν το γεγονός αυτό. Κατά έναν από αυτούς, η ανακάλυψη της ύπαρξης των άρρητων αριθμών έγινε από τον πυθαγόρειο Ίπασσο, όταν αυτός και άλλοι Πυθαγόρειοι ταξίδευαν με πλοίο. Η αντίδραση των Πυθαγορείων ήταν να πνίξουν τον Ίπασσο και να συμφωνήσουν μεταξύ τους να μη διαδοθεί η ανακάλυψη προς τα έξω.
Η υπέρβαση των «δυσκολιών» που φέρνει στα Μαθηματικά η ύπαρξη άρρητων αριθμών, κατέστη δυνατή από τον Εύδοξο (360 π.Χ.) με την ιδιοφυή «θεωρία των Λόγων». Η απόδειξη για το ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι άρρητος είναι ένα πρόβλημα που απαιτεί πολλές φορές πολύπλοκους συλλογισμούς.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ