**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

**ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ**

ΤΟΜΟΣ 1ος

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Βλάμος Παναγιώτης
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος
Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός ,
Επίκουρος Καθηγητής, ΤομέαΜαθηματικών
Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολυχρόνης
Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα: Βανδουλάκης Ιωάννης,
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια: Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων: Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση: Αλεξοπούλου Καίτη

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα εργασίας του Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η «Ευκλείδεια Γεωμετρία» έχει ένα διπλό ρόλο να εκπληρώσει: να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό - επαγωγικό σύστημα του Ευκλείδη και να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Το βιβλίο αυτό, σύμφωνο με τα πλαίσια συγγραφής που έθεσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ευελπιστεί ότι θα οδηγήσει τους μαθητές του Λυκείου να γνωρίσουν την αυστηρή αλλά και λιτή μαθηματική γλώσσα, ελπίζοντας ότι θα συνεισφέρει στη μαθηματική παιδεία του τόπου, αναπτύσσοντας το ρεαλισμό της μαθηματικής λογικής και σκέψης.

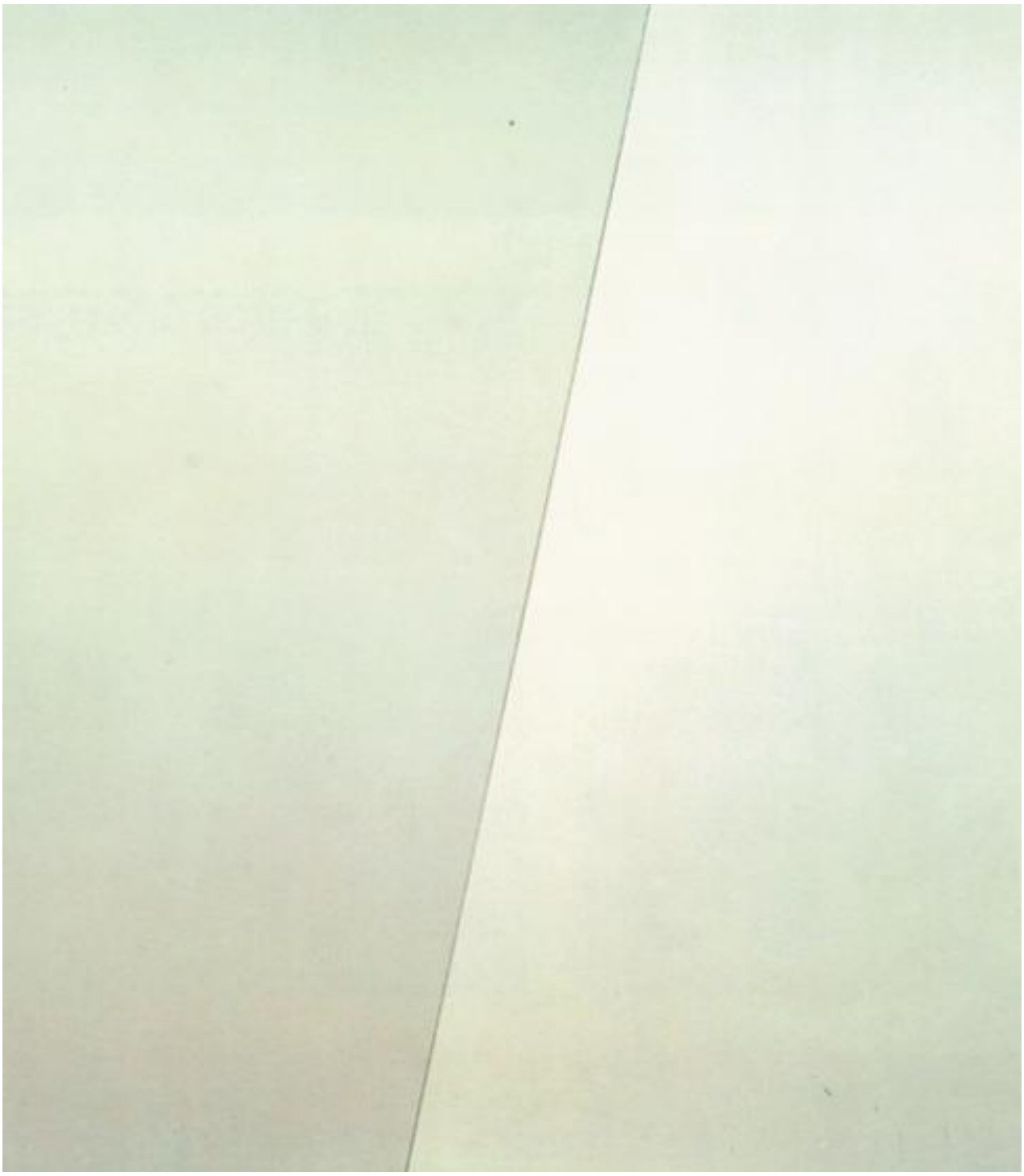
Το έργο αυτό είναι αποτέλεσμα της συλλογικής προσπάθειας μιας ομάδας μαθηματικών, οι οποίοι αποδεχόμενοι την πρόσκληση του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας εργάστηκαν συστηματικά για την πραγματοποίησή του.

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά: το Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας για τη βοήθεια που μας πρόσφερε σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής του έργου, τον Καθηγητή του Ε.Μ. Πολυτεχνείου κ. Ευγένιο Αγγελόπουλο για τις σημαντικές του παρατηρήσεις στη διαμόρφωση του βιβλίου και τα μέλη της επιτροπής κρίσης που με τις εύστοχες παρατηρήσεις τους βοήθησαν στην τελική μορφή αυτού του έργου.

Οι συγγραφείς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία



Ellsworth Kelly (Αμερικανός,1923)
«Γκρι πανό 2»
2 πανό, λάδια σε καμβά, 1974

1.1 Τα αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η μελέτη του χώρου και των σχημάτων, επίπεδων και στερεών, που μπορούν να υπάρξουν μέσα σε αυτόν. Μέσα στο χώρο βρίσκεται ο φυσικός κόσμος, στον οποίο ζούμε, και όλα τα αντικείμενα, μεγάλα ή μικρά, έμψυχα ή άψυχα.

Στο χώρο διακρίνουμε τις επιφάνειες, τις γραμμές και τα σημεία. Οι επιφάνειες έχουν δύο διαστάσεις, οι γραμμές μία, τα σημεία καμία. Οι επιφάνειες διαχωρίζουν τα αντικείμενα μεταξύ τους ή από το περιβάλλον. Πάνω σε μια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμές, οι οποίες μάλιστα μπορεί να την οριοθετούν. Εδώ χρειάζεται μια διευκρίνιση. Στην καθημερινή γλώσσα μιλάμε για «γραμμές» της ασφάλτου ή για σιδηροδρομικές «γραμμές», επειδή το πλάτος στη μία περίπτωση, το πλάτος και το ύψος στην άλλη είναι αμελητέα ως προς το μήκος. Γενικά, όλα τα υλικά αντικείμενα εκτείνονται σε τρεις διαστάσεις. Στην καθημερινή γλώσσα δεχόμαστε τις προσεγγίσεις, στη Γεωμετρία όχι. Λειτουργούμε αναγκαστικά με αφηρημένες έννοιες, που τις αποκαλούμε όρους της Γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε ως επιστήμη και επί αιώνες ο μόνος. Το αντικείμενό της, ο χώρος και τα σχήματα, είναι και προσιτό και πλούσιο, πρόσφορο για θεωρητική μελέτη αλλά και για πρακτικές εφαρμογές. Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται. Για τα σπίτια που ζούμε, τα καράβια που ταξιδεύουμε ή τις επεξεργασμένες εικόνες της τηλεόρασης είναι αναγκαία η χρήση της Γεωμετρίας, άμεση ή έμμεση.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στο Γυμνάσιο. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, για την οποία χρησιμοποιούσαμε το διαβαθμισμένο κανόνα (υποδεκάμετρο) και το μοιρογνωμόνιο. Η μέτρηση όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δε γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της Πρακτικής Γεωμετρίας από τη Θεωρητική ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε στο Λύκειο, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για το χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα. Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο – οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Πώς προχωράει αυτή η διαδικασία; Ας δούμε λίγο το τετράγωνο. Το τετράγωνο, όσο απλό και αν φαίνεται, είναι σύνθετη έννοια. Έχει ίσες πλευρές και μάλιστα ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες και μάλιστα όλες ορθές. Πρέπει, επομένως, πρώτα να ξεκαθαρίσουμε τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα (πλευρών ή γωνιών), τι παραλληλία και τι ορθή γωνία (ή καθετότητα). Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του. **Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο.**

Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία** και **επίπεδο** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε **αξιώματα**. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Για την Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν προταθεί πάρα πολλά αξιωματικά συστήματα, δηλαδή διαφορετικές επιλογές αξιωμάτων (βλ. Παράρτημα Α). Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα**, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα**.

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.

Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία.

Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επανατοποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.

Είναι λοιπόν φανερό ότι οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια ανακάλυψης εκείνων των ιδιοτήτων που θα μας οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.

1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας

Η γένεση των πρώτων εννοιών της Γεωμετρίας είναι μια διαδικασία που κράτησε πολλούς αιώνες. Η διαμόρφωσή τους ήταν αποτέλεσμα νοητικής αφαίρεσης όλων των άλλων ιδιοτήτων και σχέσεων των αντικειμένων του κόσμου που μας περιβάλλει, εκτός από τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης και του μεγέθους. Οι ιδιότητες αυτές εκφράζονται με την ιδέα ότι δύο αντικείμενα είναι «κοντά» ή ότι «άπτονται» το ένα του άλλου, τη σχέση τους όταν το ένα είναι «μέρος» του άλλου ή όταν ένα αντικείμενο βρίσκεται «μεταξύ» δύο άλλων ή το ένα «μέσα» στο άλλο, και την ιδέα της σύγκρισης δύο αντικειμένων, της εξακρίβωσης ότι το ένα είναι «μεγαλύτερο», «μικρότερο» ή «ίσο» με ένα άλλο. Στη διαμόρφωση των γεωμετρικών εννοιών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν ως μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων. Η διαδικασία αυτή όμως δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά.

Οι πρώτες γραπτές μαρτυρίες γεωμετρικών γνώσεων ανάγονται στην τρίτη με δεύτερη χιλιετία π.Χ. και προέρχονται από τους λαούς της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας. Αν και οι μαρτυρίες αυτές δεν είναι πλούσιες, ωστόσο μπορούμε να σχηματίσουμε μια ιδέα για το χαρακτήρα της Γεωμετρίας στους πολιτισμούς αυτούς. Οι γεωμετρικές γνώσεις των λαών αυτών συνίστανται, κατά κύριο λόγο, στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια «αλγοριθμική» διαδικασία, έναν κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Με μικρές εξαιρέσεις, τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι εμπειρικής

προέλευσης και η λύση που δίνεται δε συνιστά λογική απόδειξη, αν και σε μεμονωμένες περιπτώσεις προβλημάτων αναπτύσσονται μέθοδοι γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ένα είδος αποδεικτικής διαδικασίας. Αυτή η μορφή Γεωμετρίας διήρκεσε πολλούς αιώνες χωρίς να σημειωθεί αισθητή πρόοδος.

Μία νέα περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί ως μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι εμφανίζονται οι πρώτες συστηματικές γεωμετρικές πραγματείες, όπως του Ιπποκράτη του Χίου και, περί το 440 π.Χ., τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, που αποτέλεσαν το επιστέγασμα της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης, αλλά και πρότυπο επιστημονικού ιδεώδους για πολλούς αιώνες. Από μελέτη της θέσης, του μεγέθους και της μορφής των γεωμετρικών σχημάτων για άμεσες πρακτικές εφαρμογές η Γεωμετρία μεταμορφώνεται σε επιστήμη που μελετά αφηρημένα νοητικά αντικείμενα, οι σχέσεις των οποίων αποδεικνύονται με τη βοήθεια μιας λογικής ακολουθίας προτάσεων, ξεκινώντας από ορισμένες υποθέσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη.

Την Ελληνιστική ακόμα περίοδο αναπτύσσονται θεμελιακά νέες μέθοδοι υπολογισμού επιφανειών και όγκων (π.χ. η μέθοδος της εξάντλησης στα έργα του Αρχιμήδη), που στηρίζονται σε αφηρημένες θεωρητικές προσεγγίσεις και βαθιές μαθηματικές θεωρίες. Επίσης, εμφανίζονται αφηρημένες θεωρίες για νέα γεωμετρικά αντικείμενα, η δυνατότητα εφαρμογής των οποίων θα διευκρινιστεί πολλούς αιώνες μετά, όπως π.χ. η θεωρία των κωνικών τομών του Απολλώνιου, που θα βρει

εφαρμογή στη Φυσική μόλις το 17ο αιώνα. Την ίδια περίπου εποχή φαίνεται ότι άρχισαν και οι έρευνες στα θεμέλια της Γεωμετρίας με τις προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη (των παραλλήλων), οι οποίες συνεχίστηκαν από πολλούς μαθηματικούς του Αραβικού κόσμου.

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας. Ένα νέο βήμα πραγματοποιείται με την εισαγωγή της μεθόδου των συντεταγμένων από τον Ντεκάρτ το πρώτο μισό του 17ου αι. Ο νέος μετασχηματισμός της Γεωμετρίας συνίσταται στη σύνθεση της αναπτυσσόμενης τότε Άλγεβρας με την Ανάλυση που βρισκόταν στο στάδιο της γένεσής της και τη δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, η οποία μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των μεθόδων της Άλγεβρας.

Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του διαφορικού λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της Γεωμετρίας. Το 18ο αι. διαμορφώνεται η Διαφορική Γεωμετρία στα έργα του Όυλερ και του Μόνζ, αντικείμενο της οποίας αρχικά γίνονται οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες και οι μετασχηματισμοί τους. Στα μέσα του 17ου αι. αναπτύσσεται και η Προβολική Γεωμετρία στις μελέτες του Ντεζάργκ και του Πασκάλ πάνω στην απεικόνιση σωμάτων στο επίπεδο. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον Πονσελέ (1822) στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο, ενώ η καθαυτό θεωρία της γεωμετρικής απεικόνισης (σε συνδυασμό με τα προβλήματα σχεδίασης) οδήγησε στο σύστημα της Παραστατικής Γεωμετρίας του Μόνζ.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από

την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Άλλαζε το πεδίο των γεωμετρικών αντικειμένων που μελετόνταν και οι μέθοδοι που εφαρμόζονταν. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του 19ου αι. με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ν. Λομπατσέφσκι (1829) και τον Γ. Μπόλυαϊ (1832). Ο Λομπατσέφσκι, ξεκινώντας από την άρνηση του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, κατασκεύασε ένα λογικά άψογο σύστημα Γεωμετρίας, παρά το γεγονός ότι οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων στο σύστημα που περιέγραφε βρίσκονταν σε κατάφωρη αντίθεση με τη συνήθη εποπτική αντίληψη του χώρου.

Η νέα περίοδος που εγκαινιάζεται με τον Λομπατσέφσκι χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών (νέων «Γεωμετρικών»), την αλλαγή του αντικειμένου της Γεωμετρίας (αντικείμενο της Γεωμετρίας γίνονται τώρα «χώροι» διάφορων ειδών) και το διαχωρισμό της έννοιας του «μαθηματικού» από την έννοια του «πραγματικού» χώρου. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται σαφώς από τον Ρήμαν το 1854 και ανοίγει νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας οδηγώντας στη δημιουργία της λεγόμενης Ρημάνειας Γεωμετρίας, η οποία βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία της σχετικότητας. Με τη δύση του 19ου αι. τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και των άλλων (μη Ευκλείδειων) «Γεωμετριών» αποσαφηνίζονται και εκτίθενται με τη μορφή συστήματος αξιωμάτων.

2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η εμπέδωση και η συστηματική μελέτη των πρωταρχικών εννοιών: σημείο, ευθεία, επίπεδο καθώς και των βασικών γεωμετρικών σχημάτων: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα. Όπως είδαμε, οι πρωταρχικές έννοιες σημείο, ευθεία, επίπεδο δίνονται χωρίς ορισμό και με βάση αυτές ορίζονται τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, τα οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Andrea Mantegna (Ιταλός, περίπου 1431 - 1506). Οροφή από την "Camera degli Sposi" (Δωμάτιο των Συζύγων), τοιχογραφία από το Δουκικό Παλάτι , στη Μάντοβα της Ιταλίας.

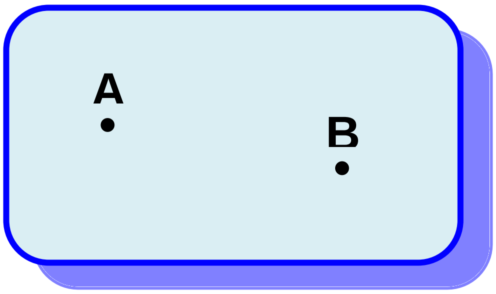
Οι πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες

Όπως αναφέραμε ήδη στην Εισαγωγή, η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινά από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες σημείο, ευθεία και επίπεδο τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

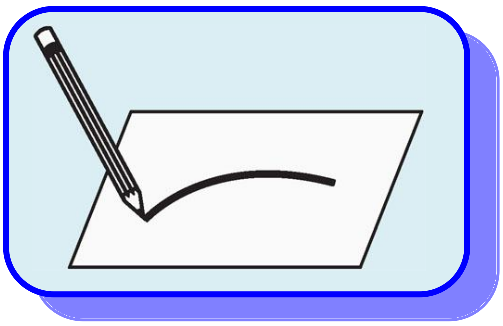
2.1 Σημεία, γραμμές και επιφάνειες

Ένα **σημείο** δεν έχει διαστάσεις. Το παριστάνουμε με μια τελεία και το ονομάζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ. Σημείο Α, Σημείο Β (σχ.1)).



Σχήμα 1

Αν μετακινήσουμε χωρίς διακοπή τη μύτη του μολυβιού πάνω σε ένα χαρτί, τότε το ίχνος της γράφει μία **γραμμή** (σχ.2). Σε κάθε θέση του μολυβιού το ίχνος της μύτης του παριστάνει ένα σημείο.

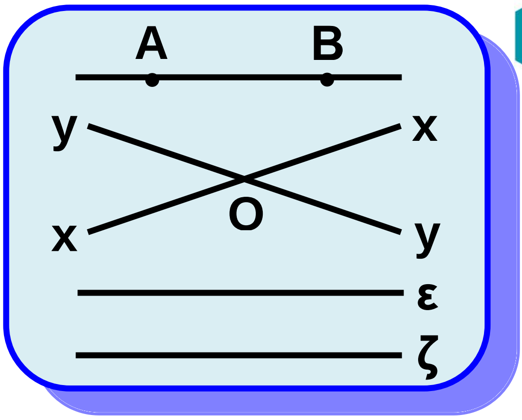

Σχήμα 2

Επομένως, η γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής σειρά θέσεων που παίρνει ένα κινητό σημείο.

Τη μορφή (σχήμα) κάθε στερεού σώματος την αντιλαμβανόμαστε από την **επιφάνειά** του. Το σύνολο των σημείων τα οποία το χωρίζουν από το περιβάλλον του ονομάζεται επιφάνεια του σώματος.
Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη μελέτη σχημάτων ή γραμμών, που βρίσκονται σε μια ειδικού τύπου επιφάνεια, το **επίπεδο**.

2.2 Το επίπεδο

Η απλούστερη από όλες τις επιφάνειες είναι η επίπεδη επιφάνεια ή απλά το **επίπεδο**. Η επιφάνεια του πίνακα, η επιφάνεια ενός λείου δαπέδου, η επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης κτλ. μας δίνουν την εικόνα ενός επιπέδου. Στο πρώτο μέρος της Γεωμετρίας, που λέγεται επιπεδομετρία δε θα ορίσουμε το επίπεδο ούτε τα αξιώματα που το χαρακτηρίζουν, αλλά θα το μελετήσουμε εξετάζοντας τις ιδιότητες των σχημάτων, των οποίων όλα τα στοιχεία περιέχονται στο ίδιο επίπεδο. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται **επίπεδα σχήματα**.

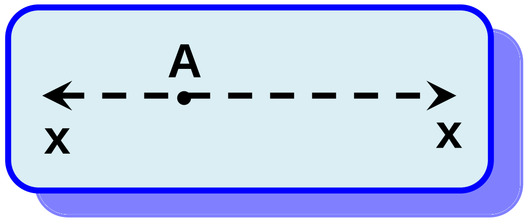


Σχήμα 3

2.3 Η ευθεία

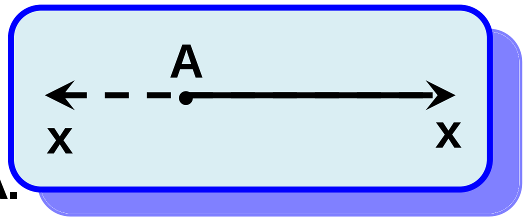
Γνωρίζουμε ότι από δύο διαφορετικά σημεία A,B διέρχεται μοναδική ευθεία. Την ευθεία αυτή ονομάζουμε ευθεία AB ή BA (σχ.3). Επίσης μία ευθεία συμβολίζεται είτε με ένα μικρό γράμμα (ε, ζ, ...) του ελληνικού αλφαβήτου είτε ως x'x. Προφανώς δύο διαφορετικές ευθείες δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία. Άρα θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή κανένα. Δύο ευθείες που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο λέγονται **τεμνόμενες** ευθείες και το κοινό σημείο τους λέγεται **τομή** των δύο ευθειών, ενώ δύο ευθείες που δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται **παράλληλες**.

2.4 Η ημιευθεία



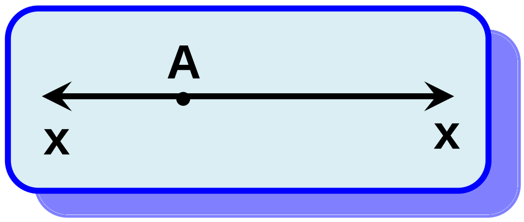
Σχήμα 4

Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα χωρίς διακοπές και κενά. Έστω μία ευθεία x'x και σημείο της A (σχ.4). Τότε το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε Ax και Ax' και τα ονομάζουμε **ημιευθείες με αρχή** το σημείο A.



Σχήμα 5

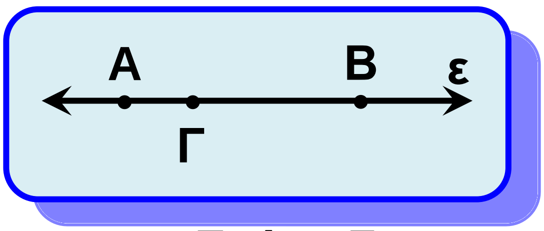
Η ευθεία x'x λέγεται **φορέας** της ημιευθείας Ax (σχ.5). Δύο ημιευθείες Ax, Ay με μόνο κοινό σημείο την αρχή τους A, όταν έχουν τον ίδιο φορέα λέγονται **αντικείμενες** (σχ.6).



Σχήμα 6

2.5 Το ευθύγραμμο τμήμα

Σε ευθεία ε θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία A,B. **Ευθύγραμμο τμήμα** AB ή BA (σχ.7) λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα δύο σημεία A, B και τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ τους.



Σχήμα 7

Τα σημεία A και B λέγονται **άκρα** του ευθύγραμμου τμήματος, ενώ η ευθεία ε λέγεται **φορέας** του τμήματος.

Τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος, εκτός των άκρων του, λέγονται **εσωτερικά** σημεία του τμήματος. Αν π.χ. το Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ (σχ.7), λέμε ότι τα Α,Β βρίσκονται **εκατέρωθεν** του Γ, ενώ τα Β, Γ είναι **προς το ίδιο μέρος** του Α. Δύο τμήματα, που έχουν κοινό ένα άκρο και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγονται διαδοχικά.

Σημείωση:
Όταν λέμε ότι προεκτείνουμε το τμήμα ΑΒ, θα εννοούμε προς το μέρος του Β, ενώ το ΒΑ προς το μέρος του Α.

2.6 Μετατοπίσεις στο επίπεδο

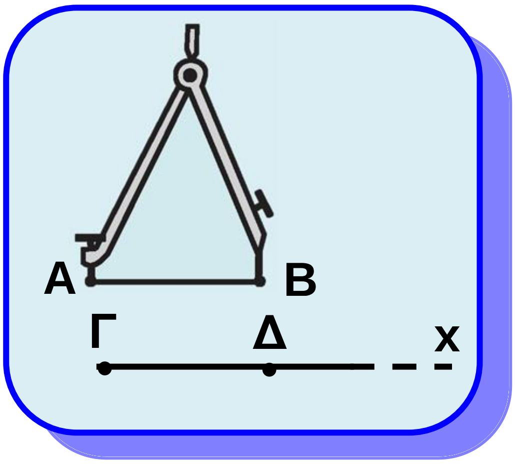
Για κάθε επίπεδο σχήμα δεχόμαστε ότι **μπορεί να μετατοπισθεί μέσα στο επίπεδο πηγαίνοντας από την αρχική του θέση σε μια οποιαδήποτε άλλη θέση και να παραμένει αναλλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος.**
Το τελικό σχήμα που προκύπτει (δηλαδή το αρχικό σχήμα στην τελική θέση) λέγεται **ομόλογο** (ή **εικόνα**) του αρχικού.

2.7 Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων

- **Ίσα ευθύγραμμα τμήματα**

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.
Για την ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων δεχόμαστε το παρακάτω αξίωμα:
Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Τότε για κάθε ημιευθεία Γx υπάρχει μοναδικό σημείο της Δ, ώστε ΑΒ = ΓΔ (σχ.8). Άμεση συνέπεια

του παραπάνω αξιώματος είναι η επόμενη κατασκευή.



Σχήμα 8

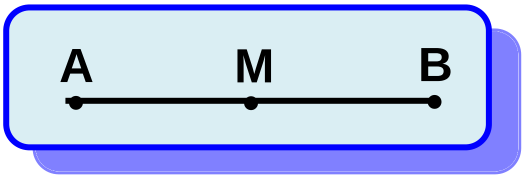
• Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος ίσου προς δοσμένο

Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η ημιευθεία Γx. Εφαρμόζουμε τη μια ακίδα του διαβήτη στο Α και την άλλη στο Β και, στη συνέχεια, κρατώντας σταθερό το άνοιγμα του διαβήτη τοποθετούμε το ένα άκρο του στο Γ, οπότε το άλλο άκρο του ορίζει το σημείο Δ της Γx (σχ.8). Τότε το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το αρχικό.

• Γεωμετρικές κατασκευές

Η παραπάνω διαδικασία λέγεται **γεωμετρική κατασκευή**. Θα λέμε ότι ένα σχήμα κατασκευάζεται γεωμετρικά, όταν μπορούμε να το σχεδιάσουμε χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τα **γεωμετρικά όργανα**, δηλαδή τον **κανόνα** (χωρίς υποδιαιρέσεις) και το **διαβήτη**.

• Μέσο ευθύγραμμου τμήματος

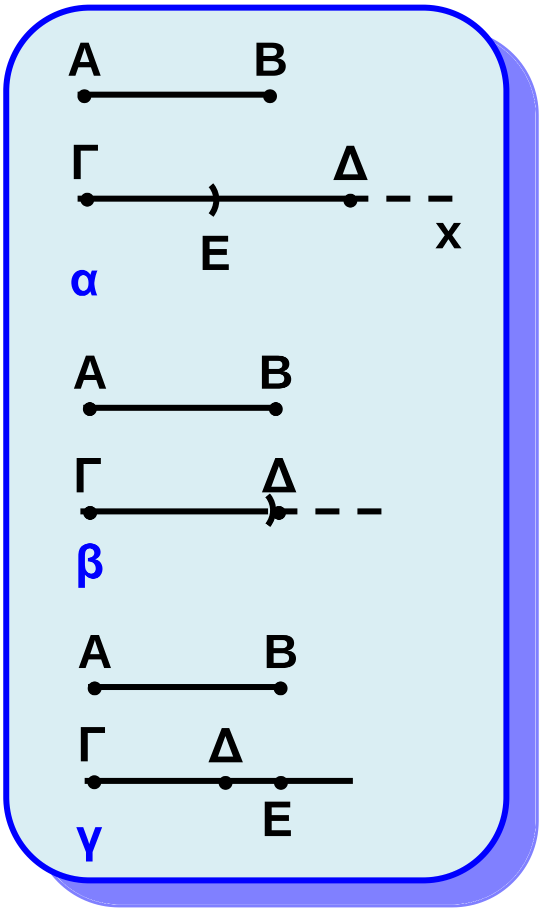


Σχήμα 9

Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζεται ένα εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο, ώστε ΑΜ = ΜΒ (σχ.9). Δεχόμαστε ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο.

• Άνισα ευθύγραμμα τμήματα

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Προεκτείνουμε το ΓΔ οπότε προκύπτει η ημιευθεία Γx.

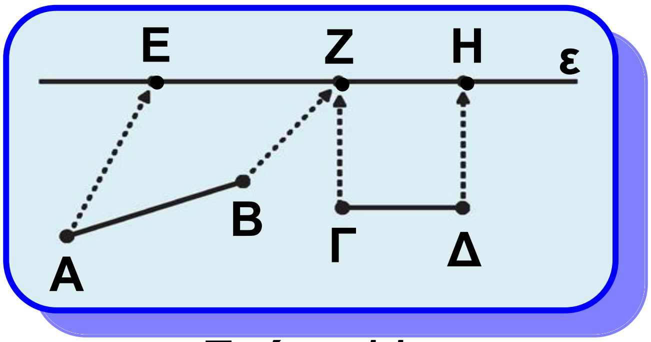


Σχήμα 10

Μετατοπίζουμε το ΑΒ ώστε το Α να ταυτιστεί με το Γ. Τότε θα υπάρχει μοναδικό σημείο Ε της Γx, ώστε ΑΒ = ΓΕ.

- Αν το Ε είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ < ΓΔ (σχ. 10α).
- Αν το Ε ταυτίζεται με το Δ, τότε ΑΒ=ΓΔ, όπως προηγούμενα (σχ.10β).
- Αν το Ε δεν είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΓΔ, θα λέμε ότι το τμήμα ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ. Συμβολίζουμε ΑΒ>ΓΔ (σχ.10γ).

2.8 Πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων



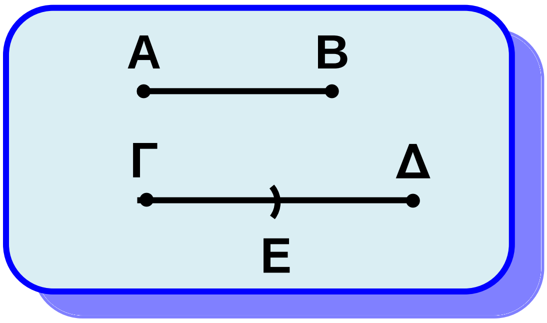
Σχήμα 11

Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ.

i) Με τη βοήθεια του διαβήτη ορίζουμε πάνω σε μία ευθεία ε τα διαδοχικά τμήματα ΕΖ = ΑΒ και ΖΗ = ΓΔ (σχ.11).

Έτσι κατασκευάζουμε το τμήμα ΕΗ, που λέγεται **άθροισμα** των ΑΒ και ΓΔ και γράφουμε **ΕΗ = ΑΒ + ΓΔ**. Η διαδικασία αυτή λέγεται **πρόσθεση** δύο ευθύγραμμων τμημάτων. Στην πρόσθεση ευθύγραμμων τμημάτων ισχύουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές που ισχύουν στην πρόσθεση αριθμών (βλ. Δραστηριότητα).

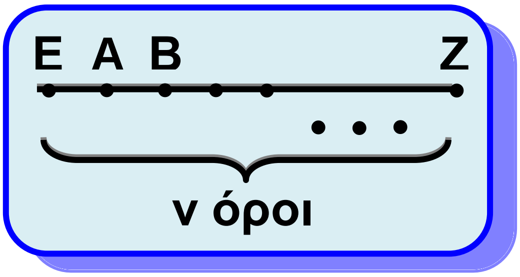
(ii) Αν ΑΒ < ΓΔ τότε υπάρχει εσωτερικό σημείο Ε του ΓΔ, ώστε ΓΕ = ΑΒ (σχ.12). Το τμήμα ΕΔ λέγεται διαφορά του ΑΒ από το ΓΔ και συμβολίζεται ΕΔ = ΓΔ - ΑΒ.



Σχήμα 12

(iii) Αν ν φυσικός αριθμός, τότε ονομάζεται γινόμενο του τμήματος ΑΒ επί το φυσικό αριθμό ν το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ, το οποίο είναι το άθροισμα ν διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το ΑΒ (σχ.13). Γράφουμε

$$ΕΖ = ν \cdot ΑΒ \text{ ή ισοδύναμα } ΑΒ = \frac{ΕΖ}{ν}$$



Σχήμα 13

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν ΑΒ = ΓΑ, τότε η διαφορά ΓΑ - ΑΒ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, τα άκρα του οποίου συμπίπτουν. Το τμήμα αυτό λέγεται **μηδενικό** ευθύγραμμο τμήμα.

Δραστηριότητα

Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες που ισχύουν στην πρόσθεση των ευθύγραμμων τμημάτων:

i) ΑΒ + ΓΔ = ΓΔ + ΑΒ (αντιμεταθετική)

ii) (ΑΒ+ΓΔ) + ΕΖ = ΑΒ + (ΓΔ +ΕΖ) (προσεταιριστικη).

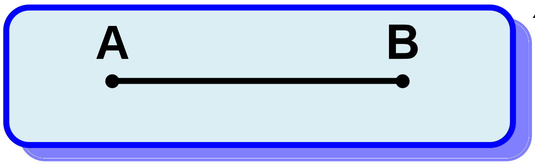
2.9 Μήκος ευθυγράμμου τμήματος - Απόσταση δυο σημείων

• Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Είπαμε παραπάνω ότι μπορούμε να συγκρίνουμε κάθε ευθύγραμμο τμήμα με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα. Ένα τμήμα με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα λέγεται **μονάδα μήκους**. Θα δούμε στη συνέχεια (Κεφάλαιο 7) ότι για δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΑΒ υπάρχει ένας θετικός αριθμός ρ (όχι απαραίτητα φυσικός), ώστε ΓΔ = ρΑΒ. Έτσι, αν θεωρήσουμε ως μονάδα μήκους το ΑΒ, τότε ο αριθμός ρ λέγεται **μήκος** του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Το μήκος του τμήματος ΑΒ θα συμβολίζεται με (ΑΒ) ή απλούστερα με ΑΒ, όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

• Απόσταση δύο σημείων

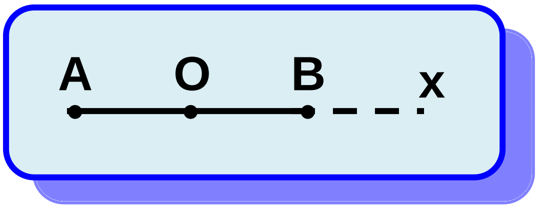


Σχήμα 14

Έστω δύο σημεία Α,Β (σχ.14). Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των σημείων Α και Β.

2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο

Έστω Ο σημείο του επιπέδου. Τότε για κάθε σημείο Α, υπάρχει μοναδικό σημείο Β τέτοιο, ώστε το Ο να είναι το μέσο του ΑΒ. Πράγματι αρκεί να προεκτείνουμε το τμήμα ΑΟ και στην ημιευθεία Οx να πάρουμε τμήμα ΟΒ = ΟΑ (σχ.15). Το σημείο Β λέγεται συμμετρικό του Α ως προς Ο. Προφανώς και το Α είναι συμμετρικό του Β ως προς το Ο. Τα σημεία Α και Β λέγονται συμμετρικά σημεία ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο.



Σχήμα 15

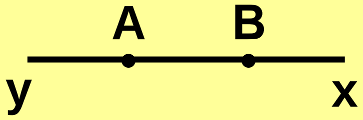
Παρατηρούμε ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι συμμετρικά ως προς το μέσο του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

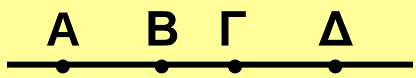
1. Δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν:
i) κανένα κοινό σημείο ii) ένα κοινό σημείο
iii) δύο κοινά σημεία iv) άπειρα κοινά σημεία
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Στο παρακάτω σχήμα ποιες ημιευθείες ορίζονται:
i) με αρχή το Α, ii) με αρχή το Β.

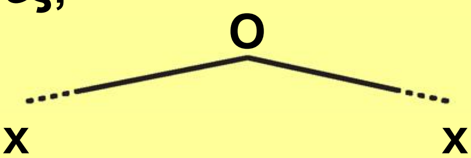


Ποιες από αυτές είναι αντικείμενες;

3. Τα σημεία Α,Β,Γ και Δ είναι συνευθειακά. Αν το Β είναι μεταξύ των Α, Γ και το Γ μεταξύ των Α, Δ, να δικαιολογήσετε γιατί το Γ είναι μεταξύ των Β, Δ.



4. Οι ημιευθείες Οx' και Οx του παρακάτω σχήματος είναι αντικείμενες;

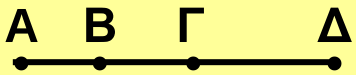


5. Πόσες ευθείες ορίζουν τρία διαφορετικά σημεία;

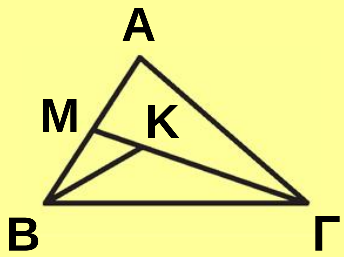
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από όλα τα σημεία των παρακάτω σχημάτων:

i)



ii)



2. **Σχεδιάστε τρεις ευθείες, οι οποίες να τέμνονται ανά δυο, χωρίς να διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και βρείτε:**

i) πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών,

ii) πόσες ημιευθείες και πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται.

3. **Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε ΑΒ = ΓΔ. Να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = ΒΔ.**

4. **Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = 2ΜΝ.**

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. **Σε ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:**

i) $ΕΖ = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$ ii) $ΑΓ + ΒΔ = ΑΔ + ΒΓ$

2. **Σε ευθεία ε θεωρούμε τμήμα ΑΒ, το μέσο του Μ, Γ τυχαίο εσωτερικό σημείο του τμήματος ΜΒ και Δ τυχαίο σημείο εξωτερικό του τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:**

i) $ΓΜ = \dfrac{ΓΑ - ΓΒ}{2}$ ii) $ΔΜ = \dfrac{ΔΑ + ΔΒ}{2}$

3. **i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων Α, Β, Γ, ισχύει ΑΒ ≤ ΑΓ + ΓΒ.**

ii) Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι ΑΔ ≤ ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ.

Σύνθετα θέματα

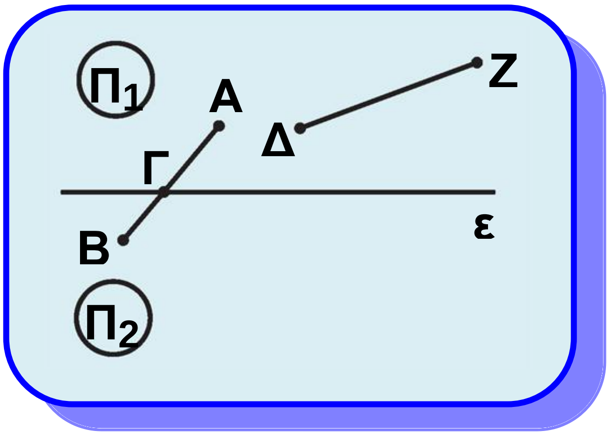
1. Αν Α, Β, Γ είναι τρία συνευθειακά σημεία και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι
$$ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$$
2. Από μια περιοχή διέρχονται τέσσερις ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά τρεις να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξετασθεί το ίδιο πρόβλημα για ν δρόμους (ν ≥ 2).

Γωνίες

2.11 Ημιεπίπεδα

Για το επίπεδο δεχόμαστε ότι: Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου Π χωρίζει το επίπεδο αυτό σε δύο μέρη $Π_1$ και $Π_2$, τα οποία βρίσκονται **εκατέρωθεν** αυτής.

Τα σημεία του $Π_ρ$ μαζί με τα σημεία της ε (σχ.16) αποτελούν ένα σχήμα που λέγεται **ημιεπίπεδο**.



Σχήμα 16

Για να καθορισθεί ένα ημιεπίπεδο, αρκεί να ξέρουμε, εκτός από την ευθεία ε, ένα ακόμα σημείο του. Έστω Α αυτό το σημείο (σχ.16), τότε το $Π_1$ συμβολίζεται και (ε,Α). Όμοια το $Π_2$ συμβολίζεται (ε,Β).

Για τα ημιεπίπεδα $Π_1$ και $Π_2$ δεχόμαστε ότι:

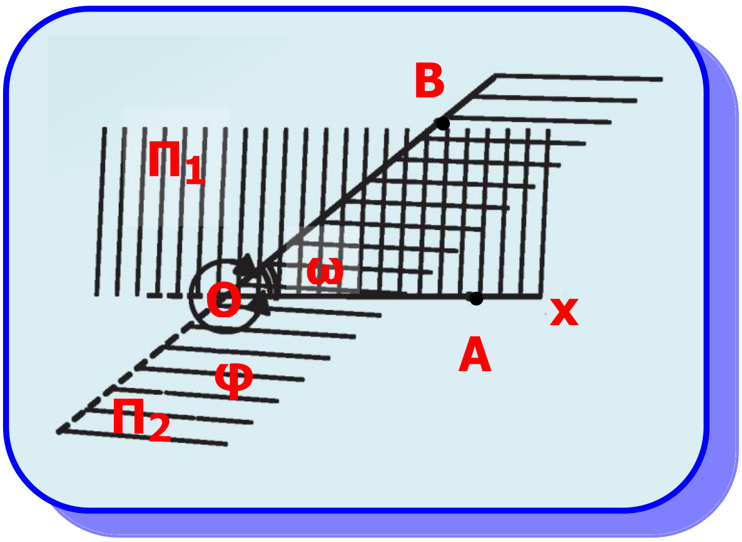
Αν δύο σημεία του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν μίας ευθείας ε, τότε η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία.

Έτσι η ε τέμνει το ΑΒ στο σημείο Γ, που βρίσκεται μεταξύ των Α και Β, ενώ δεν τέμνει το ΔΖ (σχ.16).

2.12 Η γωνία

Από τυχαίο σημείο Ο ενός επιπέδου φέρουμε δύο ημιευθείες Οx και Οy (σχ.17), οι οποίες δεν έχουν τον ίδιο φορέα. Έστω σημεία Α, Β των ημιευθειών Οx, Οy αντίστοιχα. Το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Οx, Β) και (Οy, Α) λέγεται κυρτή γωνία με κορυφή Ο και πλευρές Οx και Οy.

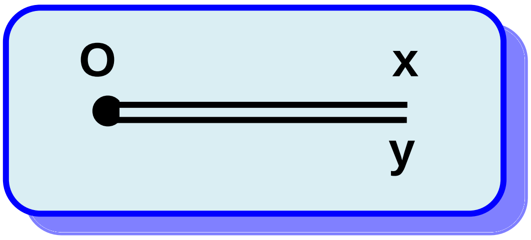
Συμβολίζεται με $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$ ή $\hat{O}$ ή $A\hat{O}B$ ή $B\hat{O}A$ (σχ.17) και είναι φανερό ότι καθορίζεται από τις πλευρές της. Τα σημεία του επιπέδου, που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία $x\hat{O}y$, μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Οx και Οy λέγεται μη κυρτή γωνία με κορυφή Ο και πλευρές Οx και Οy.



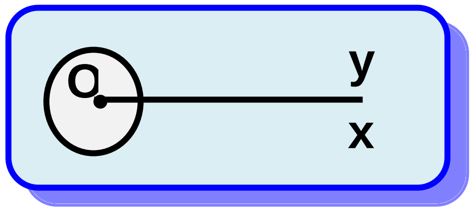
Σχήμα 17

Τα σημεία μίας γωνίας, που δεν ανήκουν στις πλευρές της λέγονται εσωτερικά σημεία της και αποτελούν το εσωτερικό της γωνίας. Τα σημεία που δεν ανήκουν στη γωνία λέγονται εξωτερικά σημεία της και αποτελούν το εξωτερικό της γωνίας. Στην ειδική περίπτωση που οι ημιευθείες Οx και Οy έχουν τον ίδιο φορέα τότε:

- **Αν οι ημιευθείες Οx και Οy ταυτίζονται, τότε ορίζουν μία μόνο ημιευθεία Οx (σχ.18) και η κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ λέγεται μηδενική γωνία, ενώ η μη κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ ταυτίζεται με όλο το επίπεδο (σχ.19) και λέγεται πλήρης γωνία.**

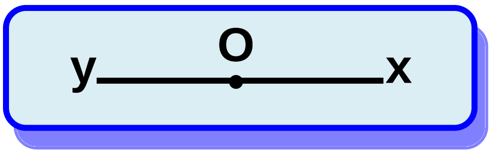


Σχήμα 18



Σχήμα 19

- **Αν οι ημιευθείες Οx, Οy είναι αντικείμενες (σχ.20), τότε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία xy λέγεται ευθεία γωνία.**



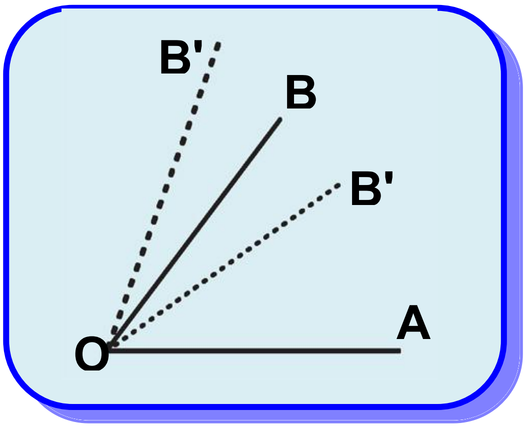
Σχήμα 20

Στα επόμενα, όταν θα λέμε απλώς γωνία, θα εννοούμε κυρτή γωνία.

2.13 Σύγκριση γωνιών

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $A\hat{O}B'$ που έχουν κοινή κορυφή Ο, την ΟΑ κοινή πλευρά και τις ΟΒ, ΟΒ' προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς το φορέα της ΟΑ (σχ.21α). Τότε:

(i) Αν οι πλευρές ΟΒ και ΟΒ' συμπίπτουν, λέμε ότι οι γωνίες είναι ίσες και γράφουμε $A\hat{O}B = A\hat{O}B'$.



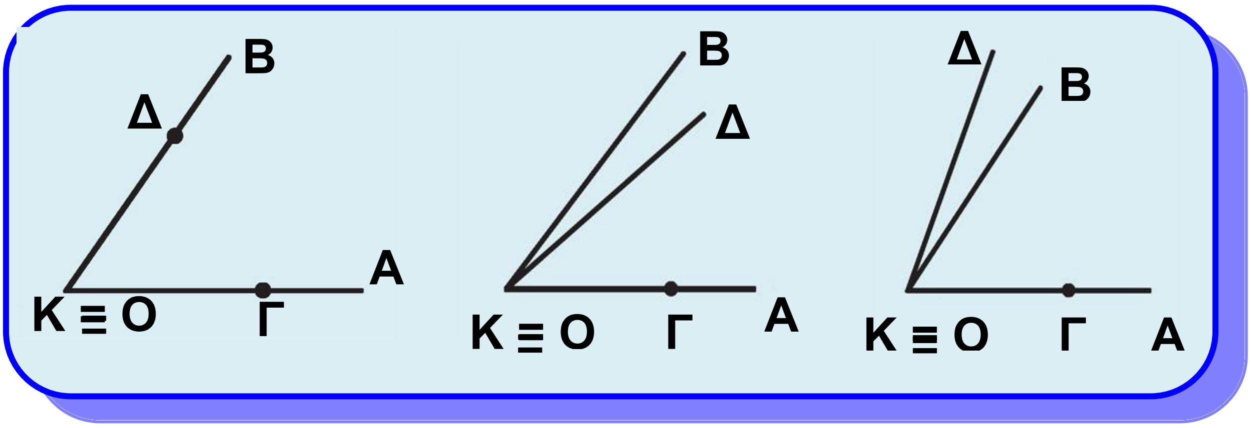
Σχήμα 21α

(ii) Αν η πλευρά ΟΒ' βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μικρότερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B' < A\hat{O}B$.

(iii) Αν η πλευρά ΟΒ' βρίσκεται εκτός της γωνίας $A\hat{O}B$, λέμε ότι η γωνία $A\hat{O}B'$ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $A\hat{O}B$ και γράφουμε $A\hat{O}B > A\hat{O}B$. Για να συγκρίνουμε δύο γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$ που βρίσκονται σε τυχαία θέση μετατοπίζουμε την $\Gamma\hat{K}\Delta$ έτσι ώστε, η κορυφή της Κ να ταυτισθεί με το Ο και η μία της πλευρά ΓΚ να συμπέσει με την πλευρά ΟΑ της γωνίας $A\hat{O}B$.

Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- **Αν η πλευρά ΚΔ συμπίπτει με την ΟΒ, τότε οι γωνίες είναι ίσες: $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$ (σχ.21 β)**

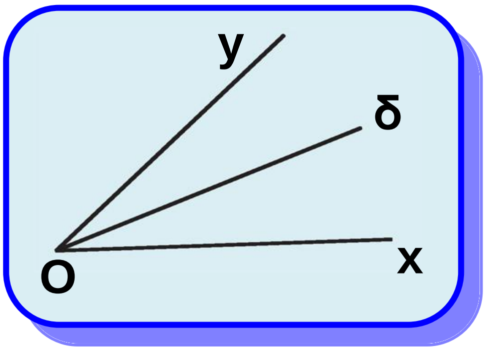


Σχήμα 21β Σχήμα 21γ Σχήμα 21δ

- **Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μικρότερη της**

$A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta < A\hat{O}B$ (σχ.21γ).

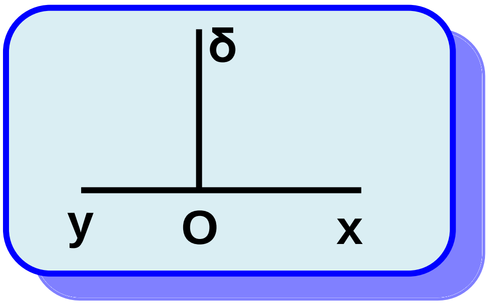
- Αν η πλευρά ΚΔ βρίσκεται στο εξωτερικό της γωνίας $A\hat{O}B$, τότε η γωνία $\Gamma\hat{K}\Delta$ είναι μεγαλύτερη της $A\hat{O}B$: $\Gamma\hat{K}\Delta > A\hat{O}B$ (σχ.21 δ).



Σχήμα 22

Διχοτόμος γωνίας

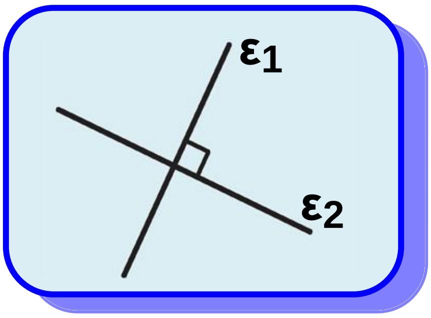
Διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία Οδ, που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες, δηλαδή $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y$ (σχ.22). Δεχόμαστε ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο.



Σχήμα 23

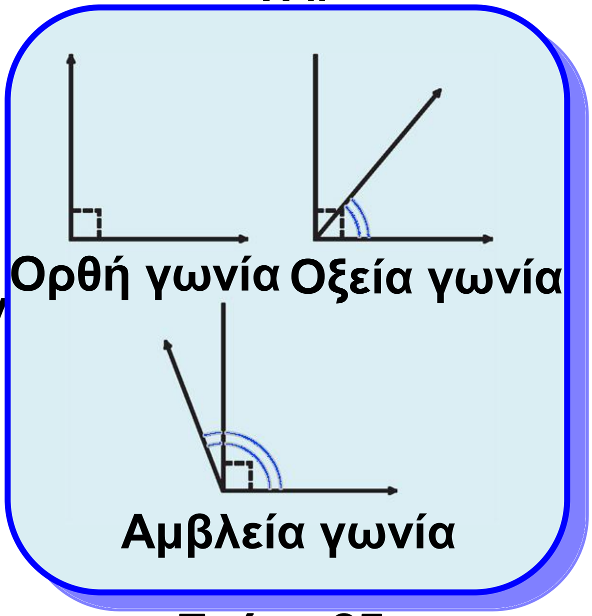
Κάθετες ευθείες - Είδη γωνιών

Έστω $x\hat{O}y$ μια ευθεία γωνία και Οδ η διχοτόμος της (σχ.23).



Σχήμα 24

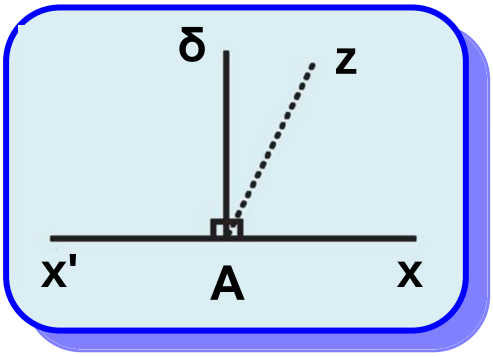
Καθεμία από τις ίσες γωνίες $x\hat{O}\delta$ και $\delta\hat{O}y$ που προκύπτουν λέγεται **ορθή** γωνία, και θα τη συμβολίζουμε L. Οι φορείς των πλευρών μίας ορθής γωνίας ονομάζονται ευθείες **κάθετες** μεταξύ τους. Δύο κάθετες ευθείες ε_1, ε_2 τις συμβολίζουμε με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (σχ.24).



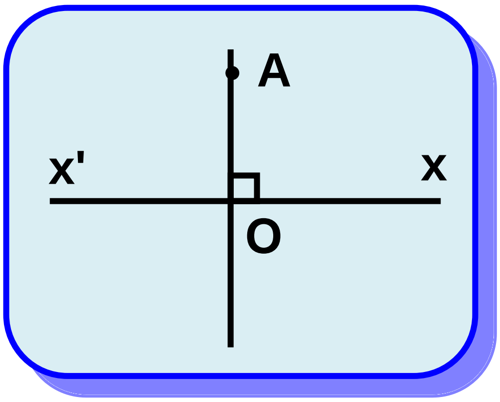
Σχήμα 25

Μια κυρτή γωνία θα λέγεται **οξεία** αν είναι μικρότερη από ορθή γωνία, ενώ θα λέγεται **αμβλεία** αν είναι μεγαλύτερη από ορθή γωνία (σχ.25).

2.14 Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία



Σχήμα 26



Σχήμα 27

Ας θεωρήσουμε ευθεία x'x και ένα σημείο Α (σχ.26). Αν το Α είναι σημείο της ευθείας και Αδ η διχοτόμος της ευθείας γωνίας $x\hat{A}x'$, τότε από τον ορισμό της ορθής γωνίας προκύπτει ότι $Aδ \perp x'x$. Αν υποθέσουμε ότι και μια άλλη ευθεία Αz (σχ.26), διαφορετική της Αδ, είναι κάθετη στην xx', τότε θα είναι $x\hat{A}z = z\hat{A}x' = 1$ L, δηλαδή η Αz είναι διχοτόμος της $x\hat{A}x'$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί η διχοτόμος είναι μοναδική.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Από κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή. Το ίδιο συμβαίνει (σχ.27) όταν το Α δεν είναι σημείο της ευθείας. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιούμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της καθέτου, έννοιες τις οποίες θα διαπραγματευθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω (βλ. §.3.5), όπου και θα γίνει η κατασκευή της καθέτου με χρήση κανόνα και διαβήτη.

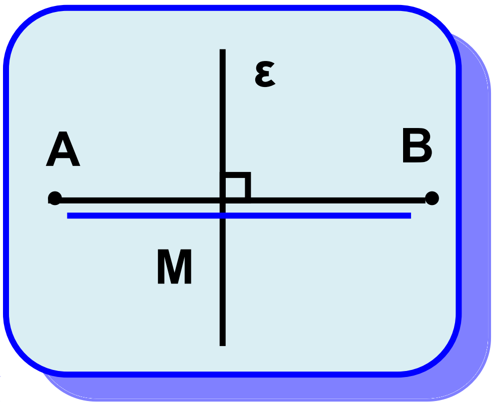
Το μήκος του μοναδικού κάθετου ευθύγραμμου τμήματος ΑΟ που άγεται από το σημείο Α στην ευθεία x'x λέγεται **απόσταση** του σημείου Α από την ευθεία x'x (σχ.27).

ΣΧΟΛΙΟ

Μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο»
Στην απόδειξη της μοναδικότητας της καθέτου σε ευθεία, από σημείο Α της ευθείας, υποθέσαμε ότι εκτός της Αδ υπάρχει και άλλη κάθετος προς τη x'x (δηλαδή ότι το συμπέρασμα δεν είναι ακριβές) και καταλήξαμε ότι η γωνία $x'\hat{A}x$ έχει δύο διχοτόμους, το οποίο είναι «άτοπο» (δηλαδή έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ή άλλη γνωστή πρόταση). Ο παραπάνω τρόπος απόδειξης λέγεται μέθοδος της «απαγωγής σε άτοπο».

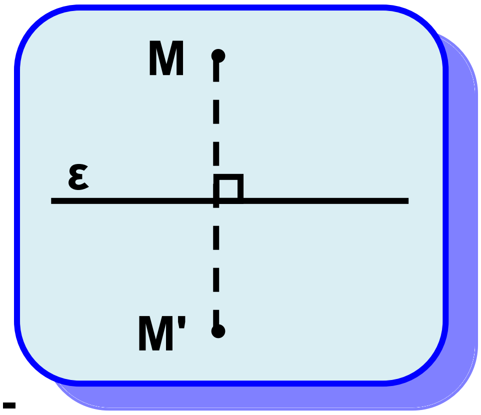
- **Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος - Σημεία συμμετρικά ως προς άξονα**

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του λέγεται μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ (σχ.28).

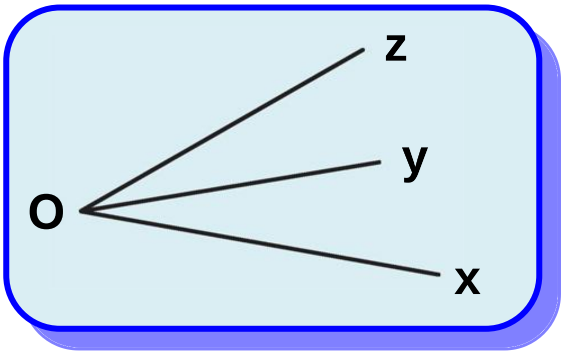


Σχήμα 28

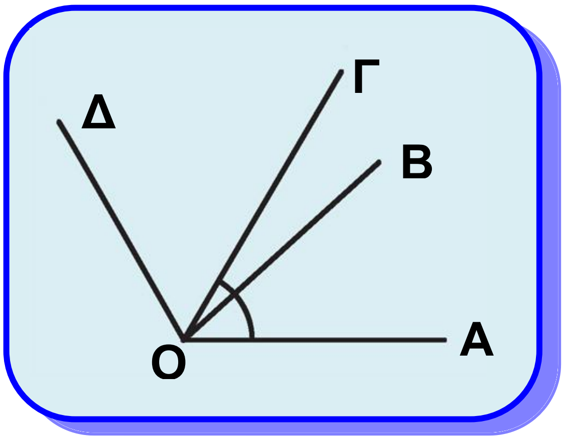
Τα σημεία Α, Β λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε. Η ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας.
Για να βρούμε επομένως το συμμετρικό ενός σημείου Μ ως προς μια ευθεία ε, φέρουμε το κάθετο τμήμα από το Μ προς την ευθεία και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα. Το άκρο Μ' της προέκτασης αυτής είναι το συμμετρικό του Μ (σχ.29). Το συμμετρικό ως προς την ευθεία ε κάθε σημείου της ορίζεται να είναι το ίδιο το σημείο.



Σχήμα 29



Σχήμα 30



Σχήμα 31

2.15 Πράξεις μεταξύ γωνιών

• Εφεξής γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής**, αν έχουν κοινή κορυφή, μία πλευρά κοινή και τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής, π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ (σχ.30) είναι εφεξής.
Η γωνία $A\hat{O}B$ (σχ. 31) είναι εφεξής με τη $B\hat{O}\Gamma$, και η $B\hat{O}\Gamma$ είναι εφεξής με τη $\Gamma\hat{O}\Delta$. Οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ λέγονται **διαδοχικές**.

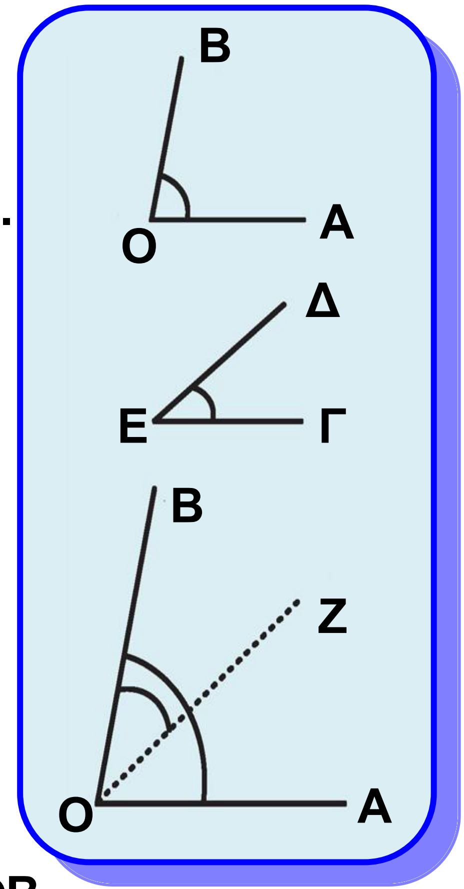
• Πρόσθεση γωνιών - Γινόμενο γωνίας επί φυσικό αριθμό

(i) **Άθροισμα** δύο εφεξής γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ λέγεται η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ με πλευρές τις δύο μη κοινές πλευρές των εφεξής γωνιών (σχ.31).
Αν οι γωνίες δεν είναι εφεξής τις μετατοπίζουμε ώστε να γίνουν. Αν έχουμε παραπάνω από δύο γωνίες, τις καθιστούμε διαδοχικές, π.χ. $A\hat{O}\Delta = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta$ (σχ.31).

(ii) Έστω $A\hat{O}B > \Gamma\hat{E}\Delta$ (σχ.32). Μετατοπίζουμε τη γωνία $\Gamma\hat{E}\Delta$, ώστε η πλευρά της ΕΓ να συμπέσει με την ΟΑ ενώ η πλευρά της ΕΔ μετατοπίζεται σε ημιευθεία ΟΖ στο εσωτερικό της $A\hat{O}B$ (σχ.32). Η γωνία $Z\hat{O}B$ λέγεται

διαφορά της γωνίας $\hat{\Gamma E \Delta}$ από την $A\hat{O}B$ και συμβολίζεται $A\hat{O}B$ - $\Gamma\hat{E}\Delta$.

Είναι φανερό ότι $\Gamma\hat{E}\Delta + Z\hat{O}B = A\hat{O}B$. Η διαφορά δύο ίσων γωνιών είναι η μηδενική γωνία.



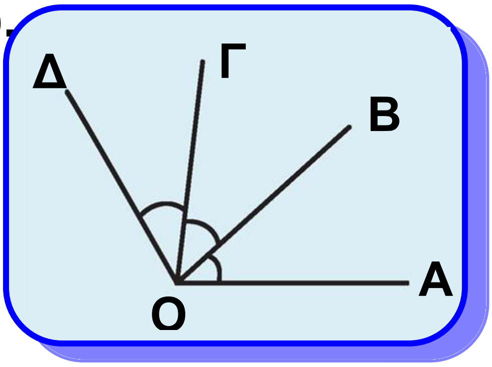
Σχήμα 32

(iii) **Γινόμενο** της γωνίας $A\hat{O}B$ επί το φυσικό αριθμό ν ονομάζεται το άθροισμα ν διαδοχικών γωνιών ίσων με $A\hat{O}B$. Γράφουμε

$$\nu \bullet A\quad B = \underbrace{A\hat{O}B + A\hat{O}B + \ldots + A\hat{O}B}_{\nu \text{ όροι}},$$

π.χ. $A\hat{O}\Delta = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta = 3\,A\hat{O}B$

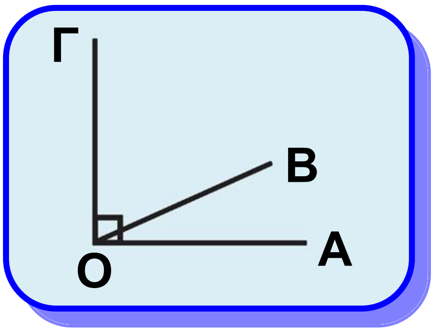
ή ισοδύναμα $A\hat{O}\Delta = \dfrac{A\hat{O}\Delta}{3}$ (σχ.33).



Σχήμα 33

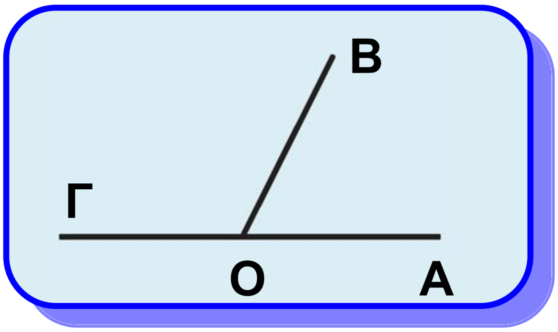
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Το άθροισμα γωνιών ή το γινόμενο γωνίας με φυσικό αριθμό μπορεί να ξεπεράσει την πλήρη γωνία.

2.16 Είδη και απλές σχέσεις γωνιών



Σχήμα 34

• Συμπληρωματικές γωνίες
Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και **συμπλήρωμα** της άλλης, π.χ. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.34) είναι συμπληρωματικές.



Σχήμα 35

• Παραπληρωματικές γωνίες
Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και παραπλήρωμα της άλλης (σχ.35).

Προφανώς τα παραπληρώματα ή συμπληρώματα της ίδιας γωνίας (ή ίσων γωνιών) είναι ίσες γωνίες.

Θεώρημα

Δυο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους Α Γ είναι μία ευθεία γωνία. Επομένως, από τον ορισμό της ευθείας γωνίας οι πλευρές ΟΑ και ΟΓ είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Αντίστροφα. Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε από τον ορισμό του αθροίσματος δύο γωνιών προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι η ευθεία γωνία $A\hat{O}\Gamma$.
Άρα, οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

ΣΧΟΛΙΟ

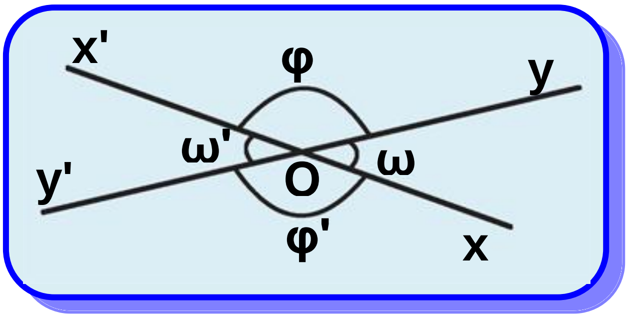
Αντίστροφα Θεωρήματα λέγονται αυτά στα οποία η υπόθεση του ενός είναι συμπέρασμα του άλλου. Όταν αποδείξουμε ένα θεώρημα (ευθεία πρόταση) δεν προκύπτει ότι και το αντίστροφο είναι αληθές, π.χ.:

Ευθεία Πρόταση: Αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες.

Αντίστροφη Πρόταση: Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι ορθές. Προφανώς η πρόταση αυτή δεν αληθεύει.

● Κατακορυφήν γωνίες

Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.



Σχήμα 36

Π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ καθώς και οι γωνίες $y\hat{O}x'$ και $x\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν (σχ.36).

Θεώρημα Ι

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ισες.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ (σχ.36).

Παρατηρούμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες ως παραπληρωματικές της ίδιας γωνίας $y\hat{O}x'$.

Θεώρημα ΙΙ

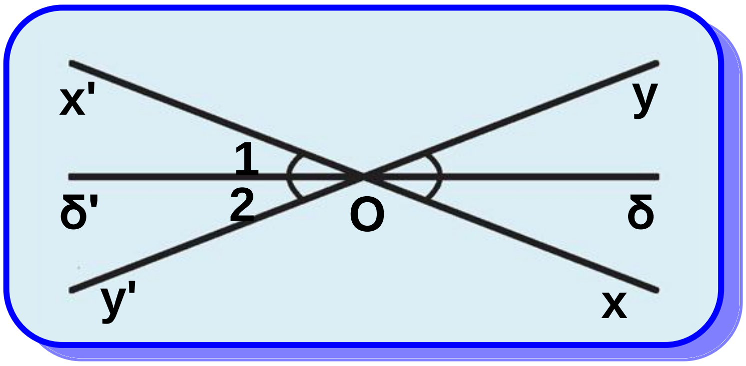
Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.

Απόδειξη

Έστω οι κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ και η διχοτόμος Οδ της $x\hat{O}y$. Τότε $\delta\hat{O}x = \delta\hat{O}y$.
Αν Οδ' είναι η προέκταση της Οδ,

τότε $O_1 = \delta\hat{O}x$ και $O_2 = \delta\hat{O}y$ (ως κατακορυφήν) .

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η Οδ' είναι διχοτόμος της $x'\hat{O}y'$.

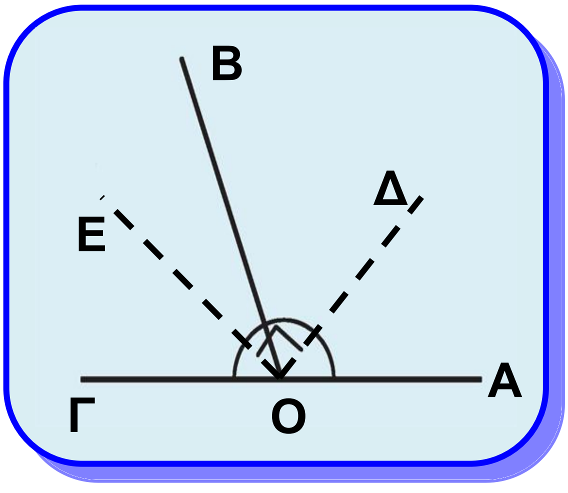


Σχήμα 37

Θεώρημα ΙΙΙ

Οι διχοτόμοι δυο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Απόδειξη



Σχήμα 38

Έστω $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους (σχ.38).

Τότε $A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 2L$ ή

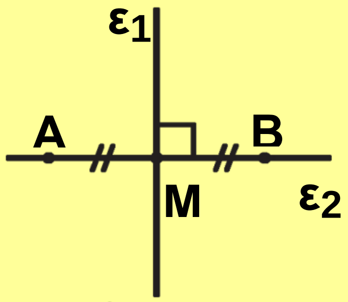
$2\Delta\hat{O}B + 2B\hat{O}E = 2L$ ή

$\Delta\hat{O}B + B\hat{O}E = 1L$ ή $\Delta\hat{O}E = 1L$.

Άρα $O\Delta \perp OE$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

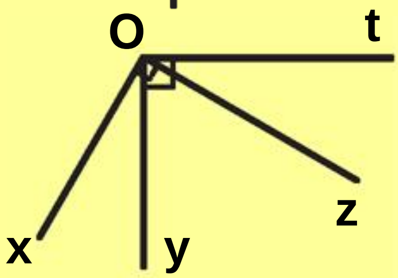


1. Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:

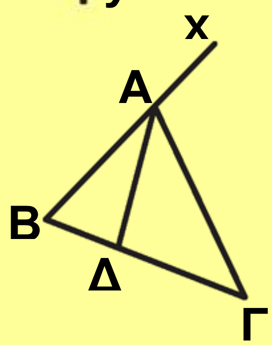
i) την ευθεία ε_1,   ii) την ευθεία ε_2,

iii) το σημείο Μ.

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



2. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις οξείες, τις ορθές και τις αμβλείες γωνίες που υπάρχουν.

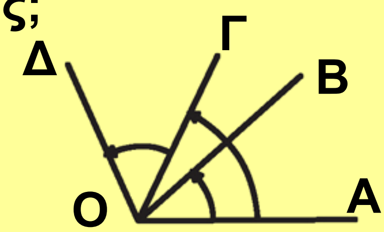


3. Να γράψετε τρία ζεύγη εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών που υπάρχουν στο διπλανό σχήμα.

4. i) Οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι εφεξής;

ii) Οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}B$ είναι διαδοχικές;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



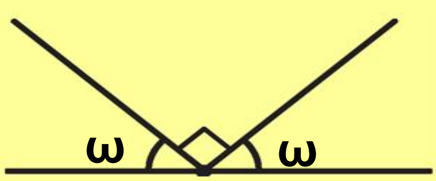
5. Υπάρχει περίπτωση η συμπληρωματική μιας γωνίας να είναι ίση με την παραπληρωματική της;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}t$, ώστε $x\hat{O}z = y\hat{O}t$.

Να δικαιολογήσετε ότι $x\hat{O}y = z\hat{O}t$.

2. Να υπολογίσετε, σε μέρη ορθής, τη γωνία ω του διπλανού σχήματος.



3. **Ένα ρολόι τοίχου δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς. Τι γωνία σχηματίζουν οι δείκτες του ρολογιού; Μετά από πόσες ώρες (φυσικό αριθμό) οι δείκτες του ρολογιού θα σχηματίζουν ίση γωνία;**

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. **Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών**

2. **Θεωρούμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας Α'   Β, όπου ΟΑ' η αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ. Να αποδείξετε ότι**

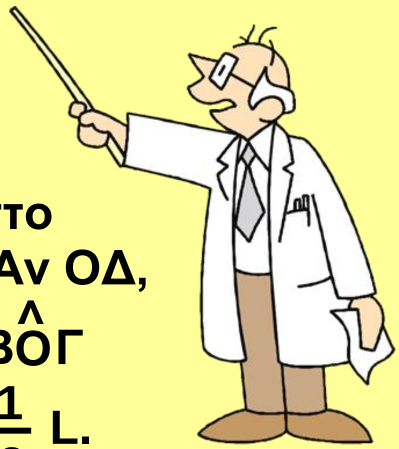
$$\Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}$$

3. **Θεωρούμε κυρτή γωνία Α   Β, τη διχοτόμο της ΟΔ και τυχαία ημιευθεία ΟΓ εσωτερική της γωνίας $\Delta\hat{O}B$. Να αποδείξετε ότι** $\Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}$

Σύνθετα θέματα

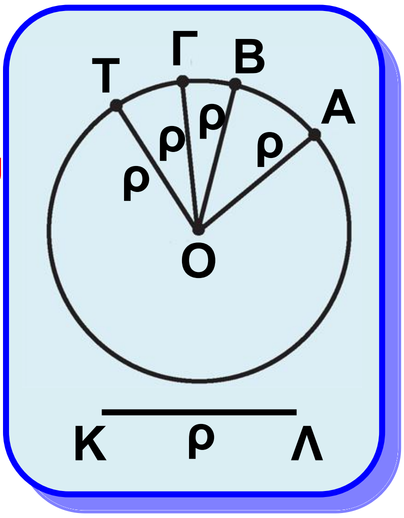
1. **Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες Α   Β, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν Οx, Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι** x   y $= \frac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}$

2. **Θεωρούμε αμβλεία γωνία $A\hat{O}B$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $O\Gamma \perp OA$. Αν ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{O}E = -\frac{1}{2}$ L.**



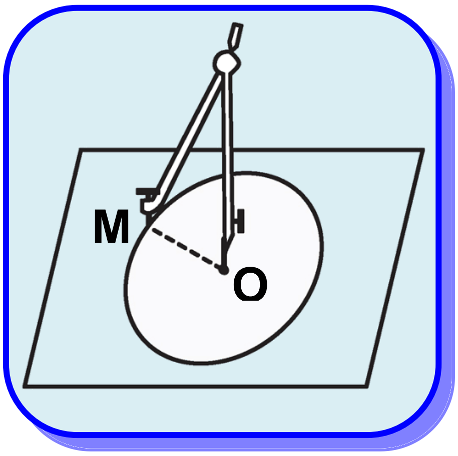
Κύκλος

2.17 Έννοια και στοιχεία του κύκλου



Σχήμα 39

Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Ο και ένα τμήμα ΚΛ = ρ (σχ.39).
Κύκλος με **κέντρο** Ο και ακτίνα ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ. Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μία κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά. Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (Ο,ρ) ή με (Ο) αν δεν είναι απαραίτητη η αναφορά της ακτίνας και σχεδιάζεται με το γνωστό μας διαβήτη (σχ.40). Κάθε τμήμα ΟΜ, όπου Μ σημείο του κύκλου (Ο,ρ) (σχ.40), λέγεται επίσης ακτίνα του κύκλου. Για τα σημεία Μ ενός κύκλου (Ο,ρ) και μόνο γι' αυτά ισχύει ΟΜ=ρ.
Η ισότητα αυτή είναι, επομένως, «χαρακτηριστική» για τα σημεία του.

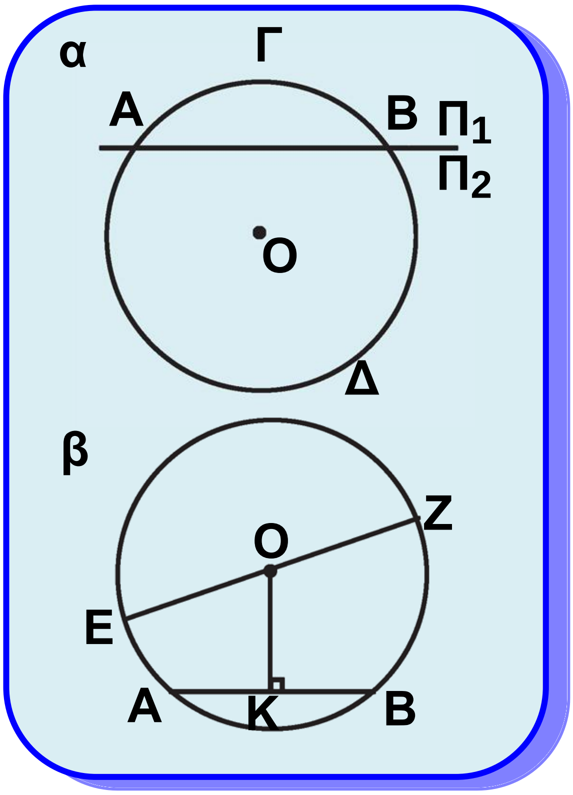


Σχήμα 40

Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται γεωμετρικός τόπος. Έτσι ο κύκλος (Ο,ρ) είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία, και μόνο γι' αυτά, ισχύει ΟΜ = ρ.

• Τόξα - Χορδές

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο, κέντρου Ο και δύο σημεία του Α και Β (σχ.41α). Τα σημεία αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη. Το ένα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο Π_1, που ορίζει η ευθεία ΑΒ, και το άλλο στο Π_2.



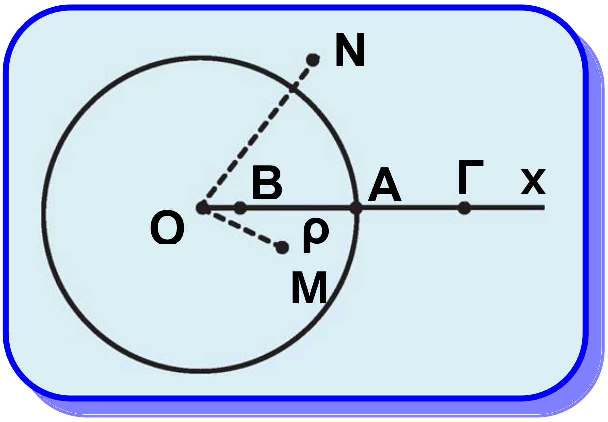
Σχήμα 41

Καθένα από τα μέρη αυτά λέγεται τόξο του κύκλου με άκρα Α και Β και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}$. Κάθε σημείο ενός τόξου, διαφορετικό από τα άκρα του λέγεται εσωτερικό σημείο του τόξου. Για να αναφερθούμε στο ένα από τα τόξα με άκρα τα Α και Β, χρησιμοποιούμε και ένα εσωτερικό σημείο. Έτσι, τα τόξα του σχ.41α με άκρα Α,Β συμβολίζονται με $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ το ένα και με $\overset{\frown}{A\Delta B}$ το άλλο.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.41β) που ορίζεται από τα άκρα Α,Β ενός τόξου λέγεται χορδή του τόξου. Η χορδή ενός τόξου λέγεται και χορδή του κύκλου.
Το μοναδικό κάθετο τμήμα ΟΚ (σχ.41β) που άγεται από το κέντρο Ο προς τη χορδή ΑΒ λέγεται απόστημα της χορδής. Μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται διάμετρος του κύκλου.
Τα άκρα μιας διαμέτρου λέγονται αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. Για παράδειγμα, το τμήμα ΕΖ (σχ. 41β) είναι μια διάμετρος του κύκλου και τα σημεία Ε, Ζ είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Είναι φανερό ότι η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας και το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της.
Επειδή το μέσο ενός τμήματος είναι μοναδικό, προκύπτει ότι **το κέντρο κάθε κύκλου είναι μοναδικό.**

• Θέση σημείου ως προς κύκλο

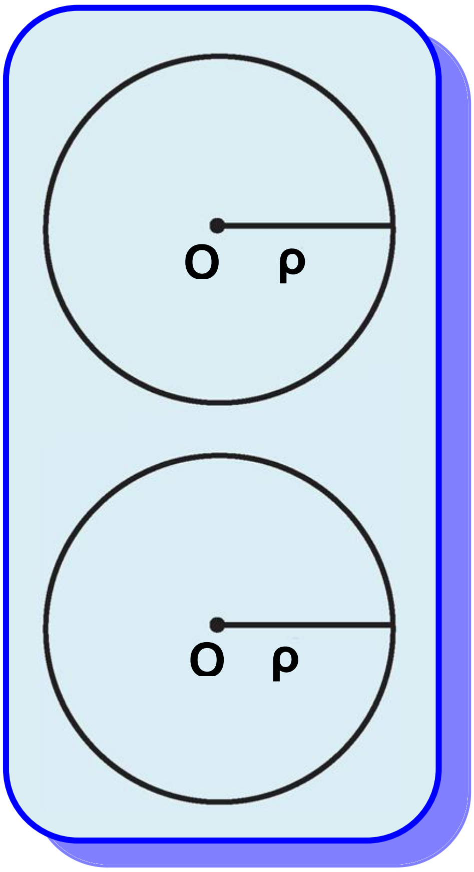
Έστω ένας κύκλος (Ο,ρ) και μία ημιευθεία Οx που τον τέμνει στο σημείο Α. Για κάθε σημείο Β (σχ.42) της ακτίνας ΟΑ, διαφορετικό του Α ισχύει ΟΒ < ρ, ενώ για κάθε σημείο Γ της προέκτασης της ΟΑ ισχύει ΟΓ > ρ.
Τα σημεία Β,Γ λέγονται αντίστοιχα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του κύκλου. Γενικά, ένα σημείο Μ του επιπέδου ενός κύκλου (Ο,ρ) (σχ.42) λέγεται εσωτερικό σημείο του κύκλου, όταν ΟΜ < ρ, ενώ ένα σημείο Ν λέγεται εξωτερικό του κύκλου, όταν ΟΝ > ρ.



Σχήμα 42

• Ίσοι κύκλοι

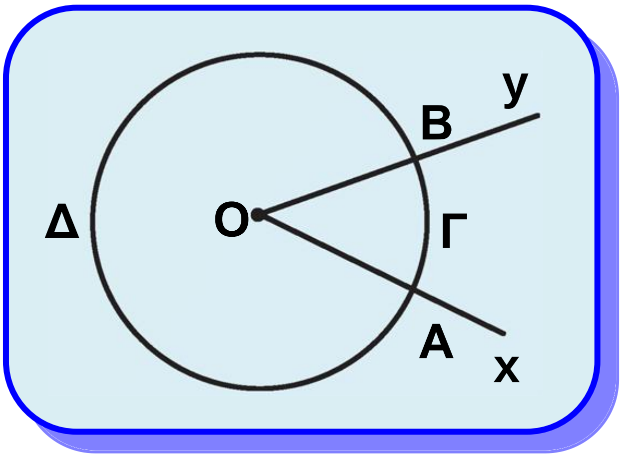
Δύο κύκλοι λέγονται ίσοι, όταν ο ένας με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζεται με τον άλλον (σχ.43). Είναι φανερό ότι δύο κύκλοι είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσες ακτίνες.



Σχήμα 43

2.18 Επίκεντρη γωνία - Σχέση επίκεντρης γωνίας και τόξου

Μία γωνία λέγεται επίκεντρη όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.



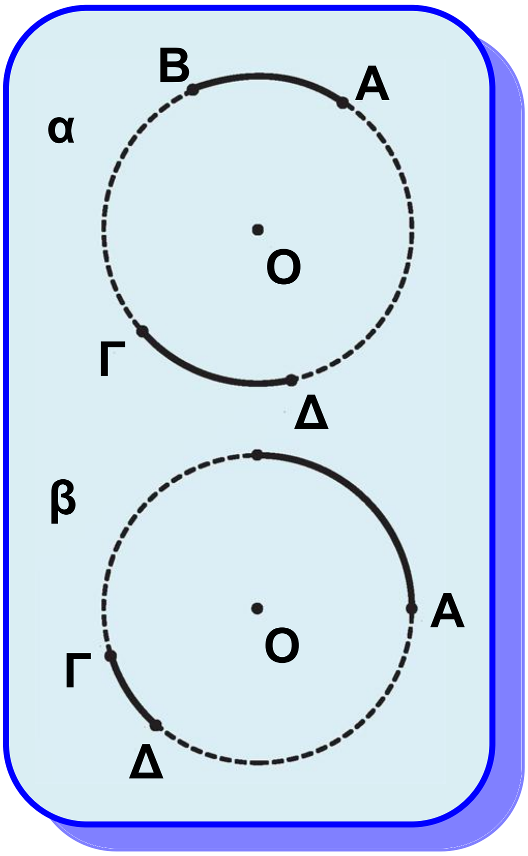
Σχήμα 44

Για παράδειγμα, στο σχ.44 η $x\hat{O}y$ είναι μία επίκεντρη γωνία.
Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΓΒ}}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα Α, Β λέγεται αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας. Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Β}$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΓΒ}}$.

● Σύγκριση τόξων

Η σύγκριση δύο τόξων γίνεται όπως και η σύγκριση των ευθύγραμμων τμημάτων.

Δύο τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$ του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων λέγονται ίσα, όταν με κατάλληλη μετατόπιση το ένα ταυτίζεται με το άλλο και γράφουμε $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}} = \overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$ (σχ.45α). Το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ λέγεται μεγαλύτερο από το



Σχήμα 45

τόξο $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$ (ή το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$ μικρότερο του $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$) και γράφουμε $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}} > \overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$ όταν μετά από κατάλληλη μετατόπιση το $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$ ταυτίζεται με μέρος του $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ (σχ.45β).
Επισημαίνουμε ότι τα τόξα άνισων κύκλων δεν είναι συγκρίσιμα.

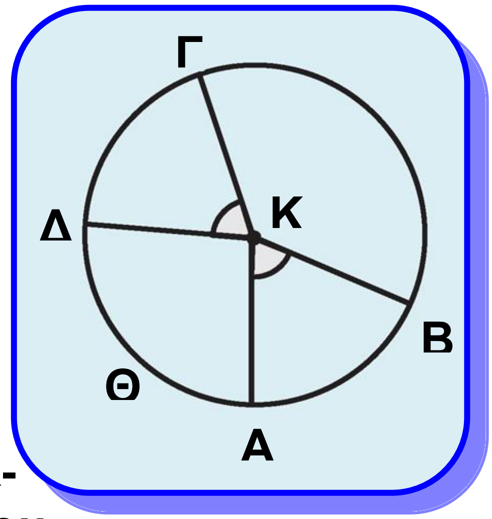
• Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

Η σύγκριση δύο τόξων μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των επίκεντρων γωνιών που βαίνουν σε αυτά, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

Απόδειξη



Σχήμα 46

Έστω $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και ΓΔ δύο τόξα ενός κύκλου (Κ) (σχ.46). Τα τόξα ΑΒ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, αφού είναι ίσα μετά από κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν, οπότε το Γ συμπίπτει με το Α και το Δ με το Β. Επομένως η ΚΓ θα συμπέσει με την ΚΑ και η ΚΔ με την ΚΒ, που σημαίνει ότι οι γωνίες $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{K}}\Delta$ είναι ίσες.

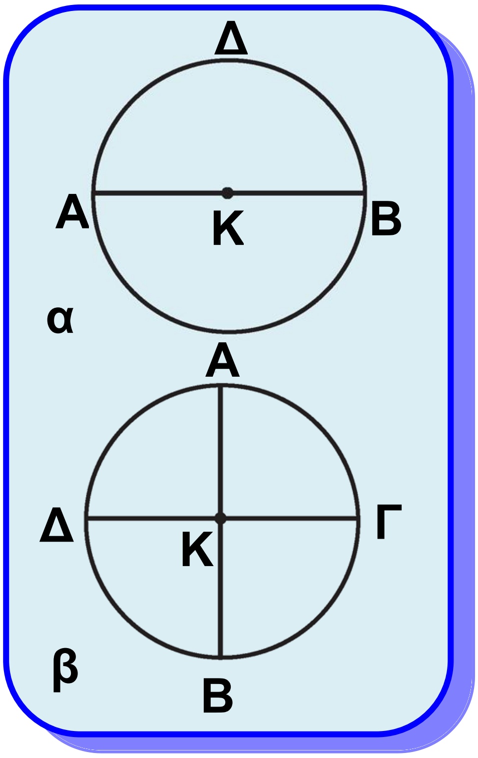
Αντίστροφα. Έστω δύο ίσες επίκεντρες γωνίες $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}$ και Γ Δ στον κύκλο (Κ). Τότε, αφού τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι σημεία του ίδιου κύκλου, μετά από μετατόπιση της $\Gamma\hat{\mathrm{K}}\Delta$ η γωνία αυτή θα ταυτισθεί με την $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}$, το Γ θα ταυτισθεί με το Α και το Δ με το Β. Έτσι τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ έχουν τα ίδια άκρα και επειδή βρίσκονται στο εσωτερικό των γωνιών που ταυτίζονται θα είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Πορίσματα

(i) Κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα.

(ii) Δύο κάθετες διάμετροι ενός κύκλου τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.

(iii) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ομοιοτρόπως άνισες.

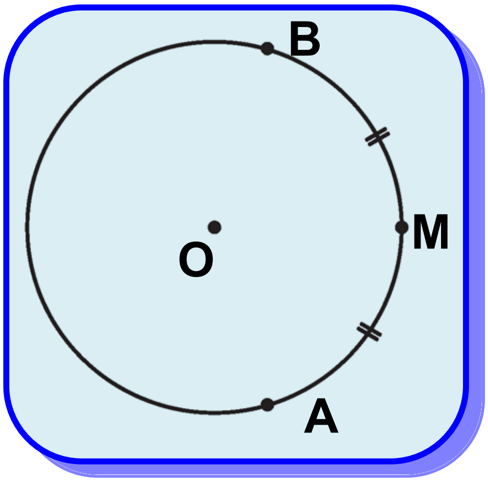


Σχήμα 47

Καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΓΒ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΒΔΑ}}$ (σχ.47α) στα οποία διαιρείται ο κύκλος (Κ) από την διάμετρο του ΑΒ, λέγεται **ημικύκλιο**, ενώ το καθένα από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΓΒ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΔΑ}}$ (σχ.47β) στα οποία διαιρείται από τις κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ, λέγεται **τεταρτοκύκλιο**.

● Μέσο τόξου

Ένα εσωτερικό σημείο Μ ενός τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ (σχ.48) λέγεται **μέσο** του, όταν τα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΜ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΜΒ}}$ είναι ίσα, δηλαδή όταν $\overset{\frown}{\text{ΑΜ}} = \overset{\frown}{\text{ΜΒ}}$.



Σχήμα 48

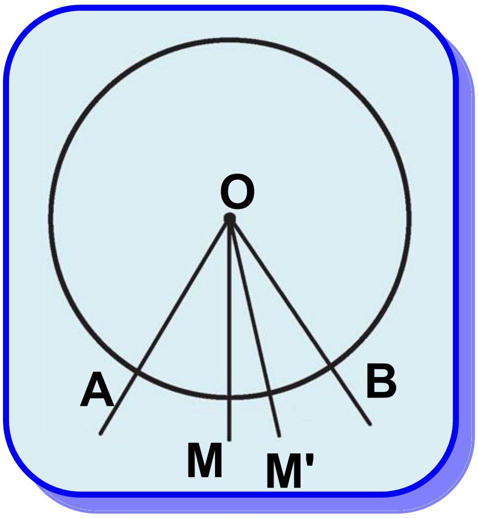
Θεώρημα ΙΙ

Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ τόξο κύκλου, κέντρου Ο, και Μ το μέσο του (σχ.49). Επειδή $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$, οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}M$ και Μ   Β είναι ίσες και επομένως η ΟΜ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$. Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει και δεύτερο μέσο το Μ', τότε η ΟΜ' είναι διχοτόμος της

Α   Β, που είναι άτοπο γιατί η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.



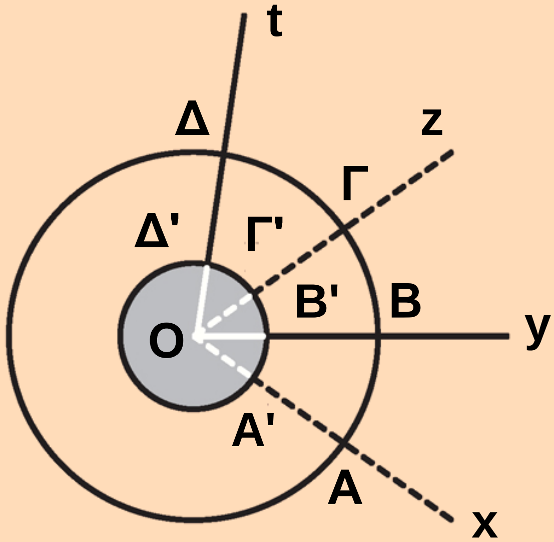
Σχήμα 49

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $z\hat{O}t$ του παρακάτω σχήματος είναι επίκεντρες σε δύο ομόκεντρους κύκλους, (δηλαδή κύκλους με το ίδιο κέντρο), (Ο,R) και (Ο,R') με R' < R. Αν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, να αποδείξετε ότι και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$ (σχ.50).

Απόδειξη

Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, θα είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε και $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να δώσετε τον ορισμό του κύκλου (Ο,ρ) . Πότε δύο κύκλοι λέγονται ίσοι; Πώς ελέγχεται η ισότητα δύο κύκλων;

2. Πότε ένα σημείο λέγεται εσωτερικό σημείο ενός κύκλου και πότε εξωτερικό;

3. Τι λέγεται γεωμετρικός τόπος;

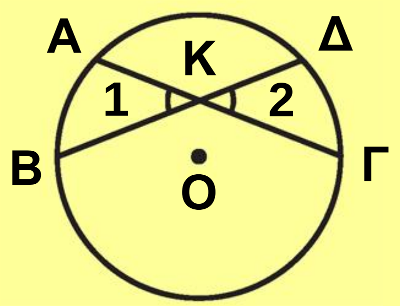
4. Τι λέγεται διάμετρος ενός κύκλου και ποια η σχέση της με την ακτίνα του κύκλου;

5. Τι λέγεται τόξο κύκλου με άκρα Α,Β και τι χορδή του; Πώς ορίζεται η ισότητα και η ανισότητα δύο τόξων ενός κύκλου;

6. Τι λέγεται επίκεντρη γωνία και τι αντίστοιχο τόξο της; Ποια σχέση ισότητας - ανισότητας υπάρχει μεταξύ επίκεντρων γωνιών και αντίστοιχων τόξων;

7. Τι λέγεται μέσο τόξου; Αν τα σημεία Μ,Ν είναι μέσα ενός τόξου Α Β, τι συμπεραίνετε γι’ αυτά;

8. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$;



Ασκήσεις Εμπέδωσης

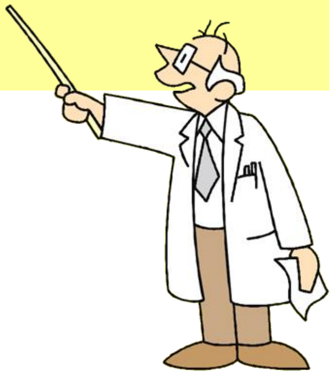
1. Σχεδιάστε έναν κύκλο ακτίνας ρ, που να διέρχεται από σταθερό σημείο Κ. Πόσους τέτοιους κύκλους μπορούμε να χαράξουμε στο επίπεδο; Πού βρίσκονται τα κέντρα τους;

2. Σχεδιάστε δύο κύκλους (Ο,ρ) και (Ο, R) με R > ρ. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο, R) και εξωτερικά του κύκλου (Ο, ρ).

Αποδεικτικές Ασκήσεις

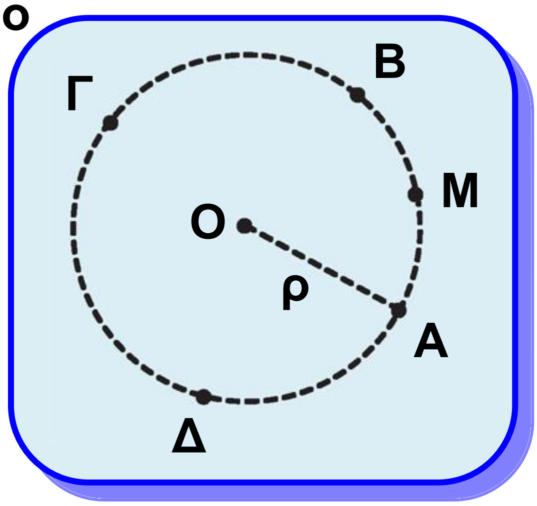
1. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R) και (Ο,ρ) με R > ρ. Μία ευθεία ε διέρχεται από το Ο και τέμνει τους κύκλους στα διαδοχικά σημεία Α,Β,Γ,Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ.

2. Αν δύο διάμετροι σχηματίζουν δύο εφεξής γωνίες ίσες, τότε να αποδείξετε ότι διαιρούν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα.



2.19 Μέτρο τόξου και γωνίας

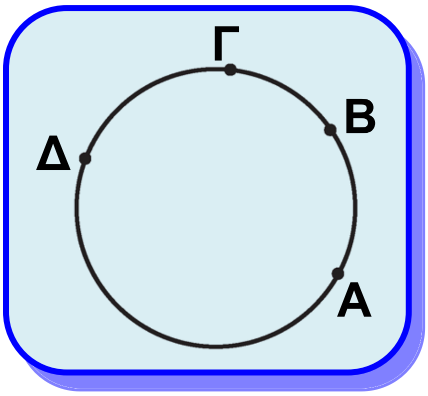
Δύο τόξα ενός κύκλου με ένα άκρο κοινό και χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία λέγονται διαδοχικά, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΒΓ}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά. Τρία ή περισσότερα τόξα με καθορισμένη σειρά λέγονται διαδοχικά, όταν το καθένα είναι διαδοχικό με το επόμενό του, π.χ. τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ (σχ.51) είναι διαδοχικά.



Σχήμα 51

Είναι φανερό ότι τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και ΓΔ είναι διαδοχικά, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $Α\hat{Ο}Β$, $Β\hat{Ο}Γ$ και $Γ\hat{Ο}Δ$ είναι διαδοχικές.

Έστω $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΒΓ}$ δύο διαδοχικά τόξα ενός κύκλου (σχ.52). Το τόξο ΑΒΓ λέγεται άθροισμα των τόξων

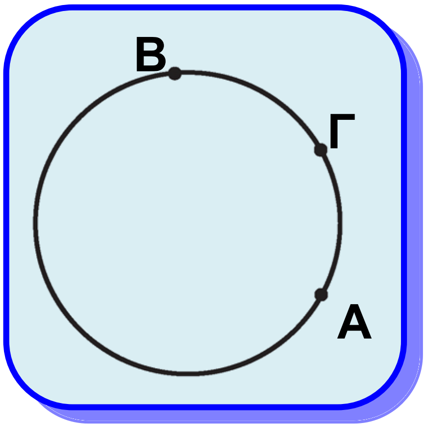


Σχήμα 52

$\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma}$, δηλαδή $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{AB\Gamma}$. Αν το τόξο Β Γ είναι ίσο με το $\overset{\frown}{AB}$, τότε το τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$ συμβολίζεται με $2\overset{\frown}{AB}$ και λέγεται διπλάσιο του Α Β. Όμοια ορίζεται και το $\nu \cdot \overset{\frown}{AB}$, όπου ν φυσικός.

Αν για δύο τόξα Α Β και Γ Δ ενός κύκλου ισχύει

Γ Δ = ν Α Β, τότε το Α Β λέγεται ένα ν-οστό του Γ Δ και συμβολίζεται με $\frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, δηλαδή $AB = \frac{1}{\nu}\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.
Στην περίπτωση που τα τόξα δεν είναι διαδοχικά, μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα από αυτά, ώστε να γίνουν διαδοχικά. Στην § 3.18 θα αναφέρουμε τη σχετική γεωμετρική κατασκευή.



Σχήμα 53

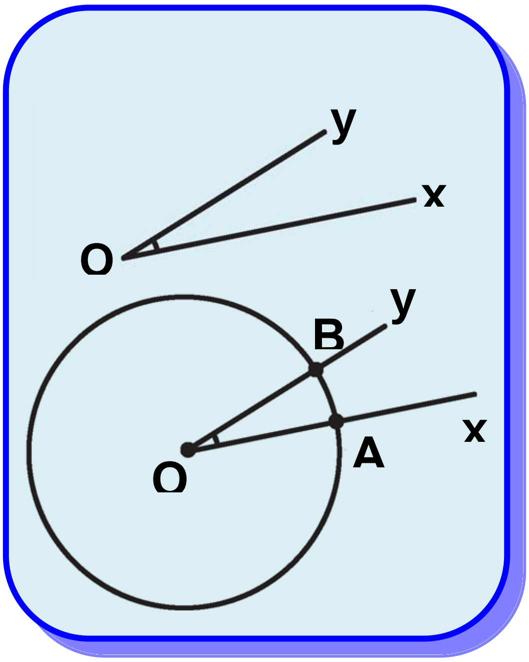
Αν $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι δύο μη διαδοχικά τόξα ενός κύκλου με $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A\Gamma}$ (σχ.53) που έχουν κοινό σημείο το ένα άκρο τους Α, τότε το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma B}$ λέγεται διαφορά του $\overset{\frown}{A\Gamma}$ από το $\overset{\frown}{AB}$ και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A\Gamma}$. Όταν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma}$, τότε η διαφορά τους είναι το μηδενικό τόξο $\overset{\frown}{0}$. Είδαμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε ένα τόξο ενός κύκλου με ένα άλλο τόξο του ίδιου κύκλου. Ένα τόξο με το οποίο συγκρίνουμε όλα τα άλλα το λέμε μονάδα μέτρησης. Έχει επικρατήσει να χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το τόξο μίας μοίρας που ορίζεται ως

το $\frac{1}{360}$ του τόξου ενός κύκλου και συμβολίζεται με 1°.

Για κάθε τόξο υπάρχει ένας θετικός αριθμός (όχι απαραίτητα φυσικός), που εκφράζει πόσες φορές το τόξο περιέχει τη μοίρα ή μέρη αυτής. Ο αριθμός αυτός λέγεται μέτρο του τόξου.

Από τον ορισμό της μοίρας προκύπτει ότι το τόξο ενός κύκλου είναι 360° και επομένως το ημικύκλιο και το τεταρτοκύκλιο είναι τόξα 180° και 90° αντίστοιχα. Η μοίρα υποδιαιρείται σε 60 πρώτα λεπτά (συμβολικά 60') και κάθε πρώτο λεπτό σε 60 δεύτερα λεπτά (συμβολικά 60'').

Θεωρούμε μια γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.54), που την καθιστούμε επίκεντρη σε έναν κύκλο (Ο, ρ), και έστω $\overset{\frown}{AB}$ το τόξο στο οποίο βαίνει. Ορίζουμε ως μέτρο της γωνίας $x\hat{O}y$ το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Το μέτρο της $x\hat{O}y$ το συμβολίζουμε με $(x\hat{O}y)$ ή απλά $x\hat{O}y$.



Σχήμα 54

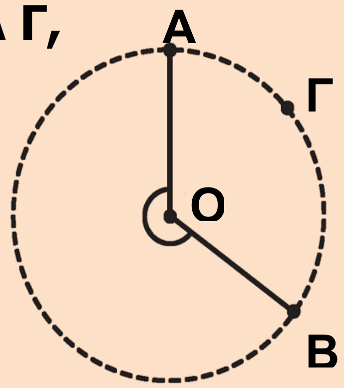
Το μέτρο μίας ορθής, ευθείας και μιας πλήρους γωνίας είναι αντίστοιχα 90°, 180° και 360°.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο κέντρου Ο, θεωρούμε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$ (σχ.55), ώστε $\overset{\frown}{AB} = 3\overset{\frown}{B\Gamma} = 6\overset{\frown}{\Gamma A}$

Να υπολογισθούν:

(i) τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{ΑΒ}$, ΒΓ και $\overset{\frown}{ΑΓ}$,
(ii) τα μέτρα των γωνιών $Α\hat{Ο}Β$, $Β\hat{Ο}Γ$
και $Γ\hat{Ο}Α$.



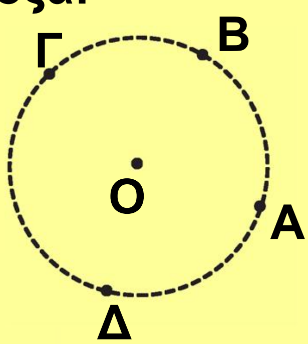
Σχήμα 55

Λύση
(i) Από την υπόθεση έχουμε ότι
$\overset{\frown}{ΑΒ} = 6\overset{\frown}{ΓΑ}$ και $\overset{\frown}{ΒΓ} = 2\overset{\frown}{ΓΑ}$, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση
$\overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΒΓ} + \overset{\frown}{ΓΑ} = 360^\circ$ προκύπτει ότι $9\overset{\frown}{ΓΑ} = 360^\circ$ ή
$\overset{\frown}{ΓΑ} = 40^\circ$. Άρα $\overset{\frown}{ΑΒ} = 240^\circ$ και $\overset{\frown}{ΒΓ} = 80^\circ$.
(ii) Η $Α\hat{Ο}Β$ είναι επίκεντρη με αντίστοιχο τόξο το $\overset{\frown}{ΑΒ}$,
επομένως $Α\hat{Ο}Β = \overset{\frown}{ΑΒ} = 240^\circ$ (μη κυρτή).
Όμοια $Β\hat{Ο}Γ = 80^\circ$ και $Γ\hat{Ο}Α = 40^\circ$.

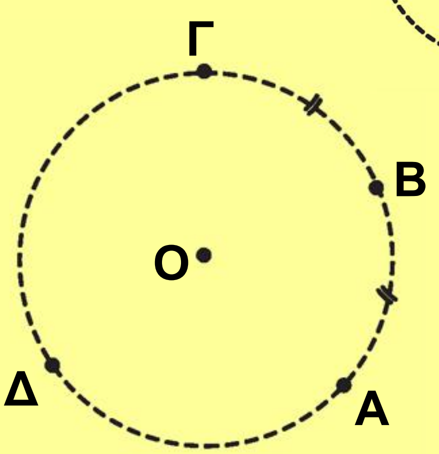
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στο παρακάτω σχήμα, να βρεθούν τα τόξα:
i) $\overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΒΓ}$
ii) $\overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΒΓ} + \overset{\frown}{ΓΔ}$
iii) $\overset{\frown}{ΑΒΓ} - \overset{\frown}{ΒΓ}$



2. Στο διπλανό σχήμα, να βρεθούν τα τόξα:
i) $2\overset{\frown}{ΑΒ}$
ii) $2\overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΓΔ}$
iii) $2\overset{\frown}{ΑΒ} - \overset{\frown}{ΒΓ}$

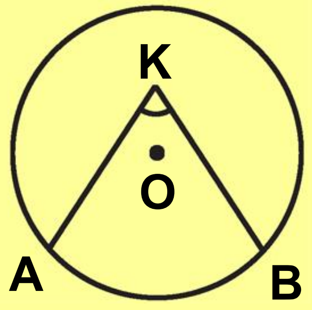


iv) Α Β - $\overset{\frown}{ΒΓ}$

3. Το μέτρο ενός τόξου είναι αριθμός:
α. αρνητικός β. μηδέν γ. θετικός δ. μη αρνητικός.
Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

4. Πώς ορίζεται το μέτρο μιας γωνίας;

5. Αν Α Β = $μ^\circ$ (διπλανό σχήμα),
τότε η γωνία $Α\hat{Κ}Β$ θα είναι $μ^\circ$;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε ημικύκλιο δίνονται τα σημεία Α, Β και σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$, ώστε $\overset{\frown}{ΜΑ} = \overset{\frown}{ΜΒ}$.
i) Αν Ρ σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$, να αποδείξετε ότι $\overset{\frown}{ΡΜ} = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{ΡΑ} + \overset{\frown}{ΡΒ})$

ii) Αν Σ σημείο του τόξου $\overset{\frown}{ΜΒ}$, να αποδείξετε ότι
$\overset{\frown}{ΣΜ} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ΣΑ} - \overset{\frown}{ΣΒ})$.

2. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\overset{\frown}{ΑΓ} - \overset{\frown}{ΒΓ} = 80^\circ$. Να βρείτε τα μέτρα:

i) των τόξων $\overset{\frown}{ΑΓ}$ και $\overset{\frown}{ΓΒ}$,

ii) των γωνιών $Α\hat{Ο}Γ$ και $Γ\hat{Ο}Β$ (Ο είναι το κέντρο του κύκλου).

3. Δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές. Αν η μία είναι διπλάσια από την άλλη, να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθεμία από τις γωνίες αυτές.

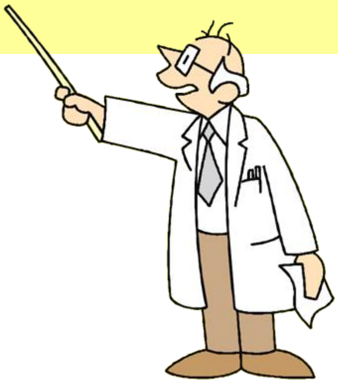
4. Αν μια γωνία ω είναι τα 6/5 μιας ορθής γωνίας, να υπολογίσετε σε μοίρες την παραπληρωματική της. Η γωνία ω έχει συμπληρωματική γωνία;

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Η παραπληρωματική μιας γωνίας ω είναι τριπλάσια της συμπληρωματικής γωνίας της ω. Να υπολογίσετε την ω.

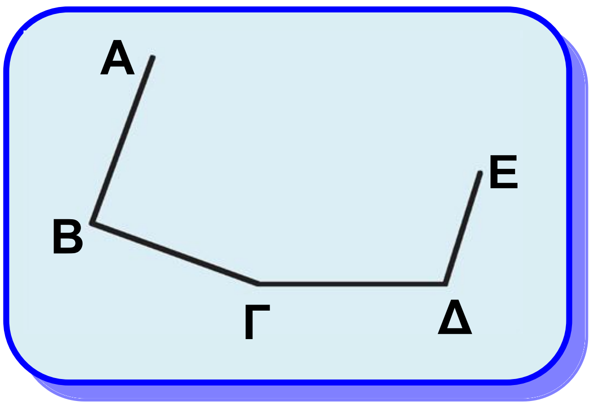
2. Μια γωνία φ είναι μικρότερη από τη συμπληρωματική της κατά 20°. Να υπολογίσετε τις δύο γωνίες.

3. Τέσσερις ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}Γ$, $Γ\hat{O}Δ$, $Δ\hat{O}A$, που έχουν μέτρα ανάλογα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.



Ευθύγραμμα σχήματα

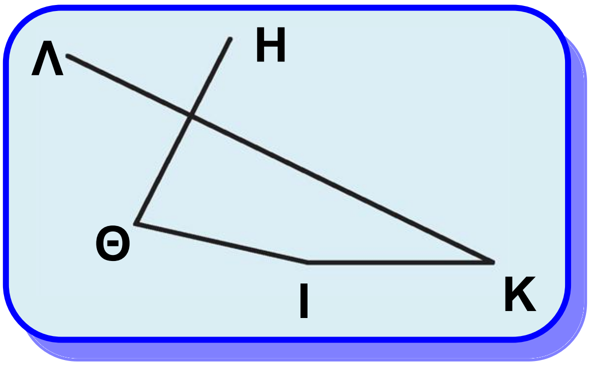
2.20 Τεθλασμένη γραμμή - Πολύγωνο - Στοιχεία πολυγώνου



Σχήμα 56

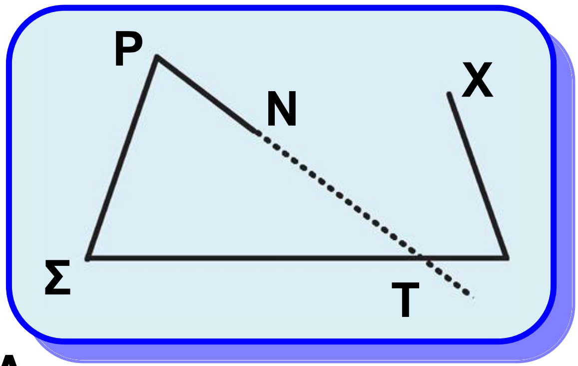
Θεωρούμε σημεία που έχουν καθορισμένη σειρά και ανά τρία διαδοχικά δεν είναι συνευθειακά, π.χ. τα Α, Β, Γ, Δ και Ε, με την αλφαβητική τους σειρά και θέση, όπως στο σχ.56. Το σχήμα που ορίζουν τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγεται **τεθλασμένη γραμμή** ή απλά **τεθλασμένη**. Η τεθλασμένη αυτή συμβολίζεται με ΑΒΓΔΕ.

Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε λέγονται **κορυφές** της τεθλασμένης και ειδικότερα οι κορυφές Α και Ε λέγονται **άκρα** της. Τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ λέγονται **πλευρές** της τεθλασμένης και το άθροισμά τους λέγεται **περίμετρος** της τεθλασμένης. Μία τεθλασμένη λέγεται απλή, όταν δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές πλευρές της δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο.



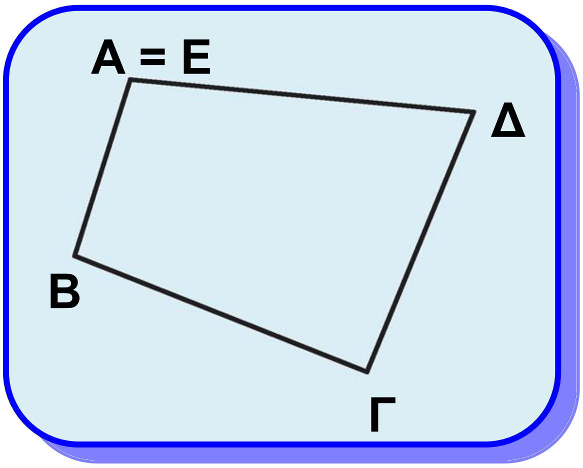
Σχήμα 57

Έτσι, η τεθλασμένη ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι απλή, ενώ η ΗΘΙΚΛ (σχ.57) δεν είναι.



Σχήμα 58

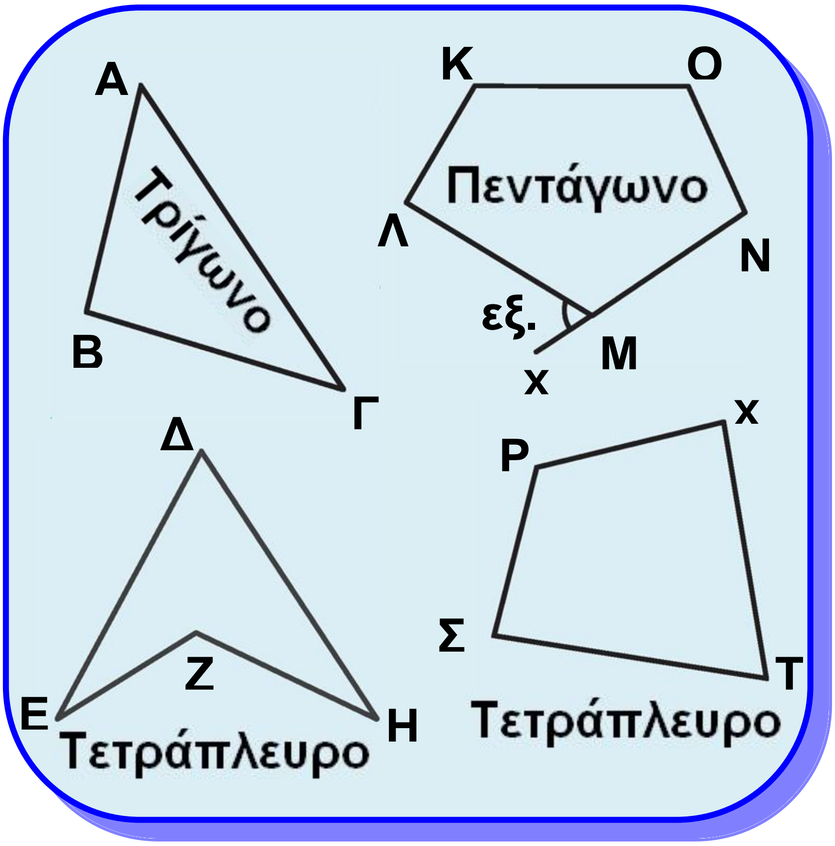
Μία τεθλασμένη λέγεται **κυρτή**, όταν ο φορέας κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες κορυφές της προς το ίδιο μέρος του, διαφορετικά λέγεται **μη κυρτή**. Έτσι η γραμμή ΑΒΓΔΕ (σχ.56) είναι κυρτή, ενώ οι ΗΘΙΚΛ (σχ.57) και ΝΡΣΤΧ (σχ.58) είναι μη κυρτές.



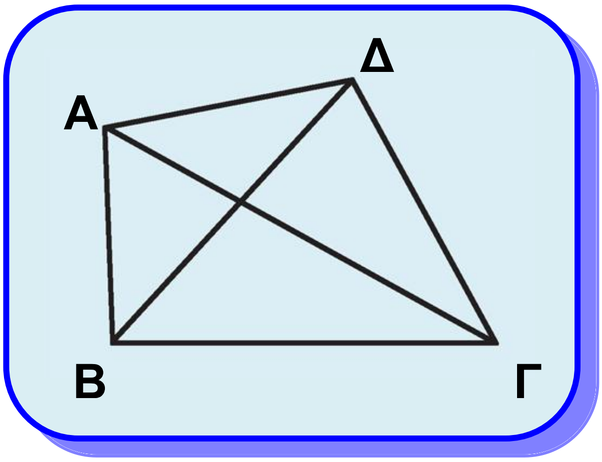
Σχήμα 59

Επίσης, μια τεθλασμένη, της οποίας τα άκρα ταυτίζονται, λέγεται **κλειστή**, π.χ. η ΑΒΓΔΕ, όπου το Α ταυτίζεται με το Ε (σχ.59).
Μια κλειστή και απλή τεθλασμένη λέγεται **πολύγωνο**.
Αν η τεθλασμένη είναι κυρτή, τότε το πολύγωνο λέγεται **κυρτό**, ενώ αν είναι μη κυρτή, το πολύγωνο λέγεται **μη κυρτό**.
Για παράδειγμα, τα πολύγωνα ΑΒΓ (σχ.60) και ΚΛΜΝΟ (σχ.60) είναι κυρτά, ενώ το ΔΕΖΗ (σχ.60) είναι μη

κυρτό. Το πολύγωνο με τρεις κορυφές λέγεται τρίγωνο (σχ.60), με τέσσερις τετράπλευρο (σχ.60), με πέντε πεντάγωνο (σχ.60) και γενικά με ν, ν-γωνο. Στο εξής λέγοντας πολύγωνο θα εννοούμε κυρτό πολύγωνο.



Σχήμα 60



Σχήμα 61

Κάθε τμήμα που έχει άκρα δύο μη διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου λέγεται διαγώνιος του πολυγώνου. Έτσι τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ είναι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχ.61).

Γωνίες πολυγώνου λέγονται οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του. Σε ένα κυρτό πολύγωνο τα κοινά εσωτερικά σημεία των γωνιών τους λέγονται εσωτερικά σημεία του πολυγώνου και αποτελούν το εσωτερικό του πολυγώνου.

Εξωτερική γωνία πολυγώνου λέγεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του. Για να τη σχηματίσουμε, αρκεί να προεκτείνουμε μια πλευρά του πολυγώνου, π.χ. η γωνία $\Lambda\hat{M}x$ (σχ. 60) είναι εξωτερική γωνία του πενταγώνου ΚΛΜΝΟ και συμβολίζεται $\hat{M}_{\varepsilon\xi}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ώστε $AB < \frac{A\Gamma}{2}$, $B\Gamma < \frac{B\Delta}{2}$ και ονομάζουμε Ε, Ζ τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$EZ = \frac{A\Gamma - B\Gamma}{2}$$

2. Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ,ΓΑ αντίστοιχα, αποδείξετε ότι τα τμήματα ΔΕ, ΒΖ έχουν κοινό μέσο.

3. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ονομάζουμε Ε το μέσο του ΒΔ. Να αποδείξετε ότι

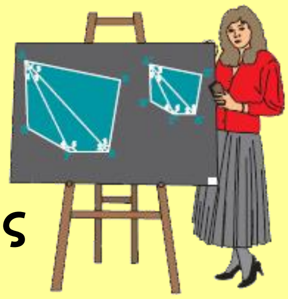
$$AE < \frac{A\Gamma}{2}$$

4. Θεωρούμε κύκλο (O,R) και τα διαδοχικά σημεία του Α, Β, Γ και Δ, ώστε $\overset{\frown}{AB} = 150^\circ$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 45^\circ$ και $\overset{\frown}{A\Delta} = 105^\circ$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{O}\Gamma$ είναι αντικείμενη ημιευθεία της ΟΑ.

5. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και Κ τυχαίο σημείο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΜ}$. Αν Γ και Δ είναι τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{ΑΚ}$ και $\overset{\frown}{ΜΚ}$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΓΔ}$.

Δραστηριότητα

Να βρείτε κατά πόσο αυξάνει ο αριθμός των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου όταν ο αριθμός των πλευρών του αυξηθεί κατά 1.



Εργασία

Να βρείτε το πλήθος δ των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου ως συνάρτηση του πλήθους των πλευρών του (ν ≥ 3), ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

i) Να κατασκευάσετε τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο και εξάγωνο και να βρείτε:

α) το πλήθος των διαγωνίων με μια κοινή κορυφή,

β) το συνολικό πλήθος των διαγωνίων.

ii) Μπορείτε να «ανακαλύψετε» ποιος τύπος δίνει το δ ως συνάρτηση του ν;

iii) Υποθέστε ότι ο τύπος ισχύει για πολύγωνο με ν πλευρές και να αποδείξετε ότι ισχύει για πολύγωνο με ν + 1 πλευρές. **Υπόδειξη**: Προσθέστε μια κορυφή και βρείτε το πλήθος των επιπλέον διαγωνίων.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό δώσαμε τις πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο και ορίσαμε τα βασικά γεωμετρικά σχήματα: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία και κύκλο. Τέλος, δώσαμε την έννοια της τεθλασμένης γραμμής και του πολυγώνου.

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία Α, Β ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία Α, Β και τα σημεία της ευθείας ΑΒ που είναι μεταξύ των Α, Β. Στη συνέχεια μιλήσαμε για σύγκριση τμημάτων, για το μέσο ενός τμήματος και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά του.

Κατόπιν ορίσαμε πράξεις με τμήματα, την έννοια του μήκους ενός τμήματος και την απόσταση δύο σημείων.

Η γωνία ορίστηκε ως το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία δύο ημιεπιπέδων. Στη συνέχεια μίλησαμε για σύγκριση γωνιών, για τη διχοτόμο μιας γωνίας και δεχθήκαμε τη μοναδικότητά της. Κατόπιν ορίσαμε την έννοια της ορθής (καθεμία από τις γωνίες στις οποίες χωρίζεται η ευθεία γωνία από τη διχοτόμο της), οξείας, αμβλείας γωνίας και της καθετότητας δύο ευθειών.

Επίσης, ορίσαμε τις πράξεις με γωνίες και τις έννοιες συμπληρωματικές, παραπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες. Ο κύκλος (Ο,ρ) ορίστηκε ως το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου που απέχουν από το σημείο Ο, απόσταση ρ. Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με τόξα, χορδές και σύγκριση τόξων.

Αποδείξαμε τη μοναδικότητα του μέσου ενός τόξου στηριζόμενοι στη μοναδικότητα της διχοτόμου μιας γωνίας και αξιοποιώντας τη βασική σχέση της επίκεντρης γωνίας με το αντίστοιχο τόξο της. Τέλος, ορίσαμε το μέτρο τόξου και γωνίας (ως το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της, όταν αυτή γίνει επίκεντρη σε κύκλο).

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Τα βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

- **Πρωταρχικές έννοιες:**
  σημείο, ευθεία, επίπεδο

- **Ευθύγραμμο τμήμα**
  - **Σύγκριση τμημάτων**
  - **Μέσο τμήματος**
  - **Πράξεις με τμήματα**
  - **Μήκος τμήματος - Απόσταση σημείων**

- **Γωνίες**
  - **Σύγκριση γωνιών**
  - **Διχοτόμος γωνίας**
  - **Οξεία, ορθή, αμβλεία γωνία, κάθετες ευθείες**
  - **Πράξεις με γωνίες**
  - **Συμπληρωματικές, παραπληρωματικές, κατακορυφήν γωνίες**

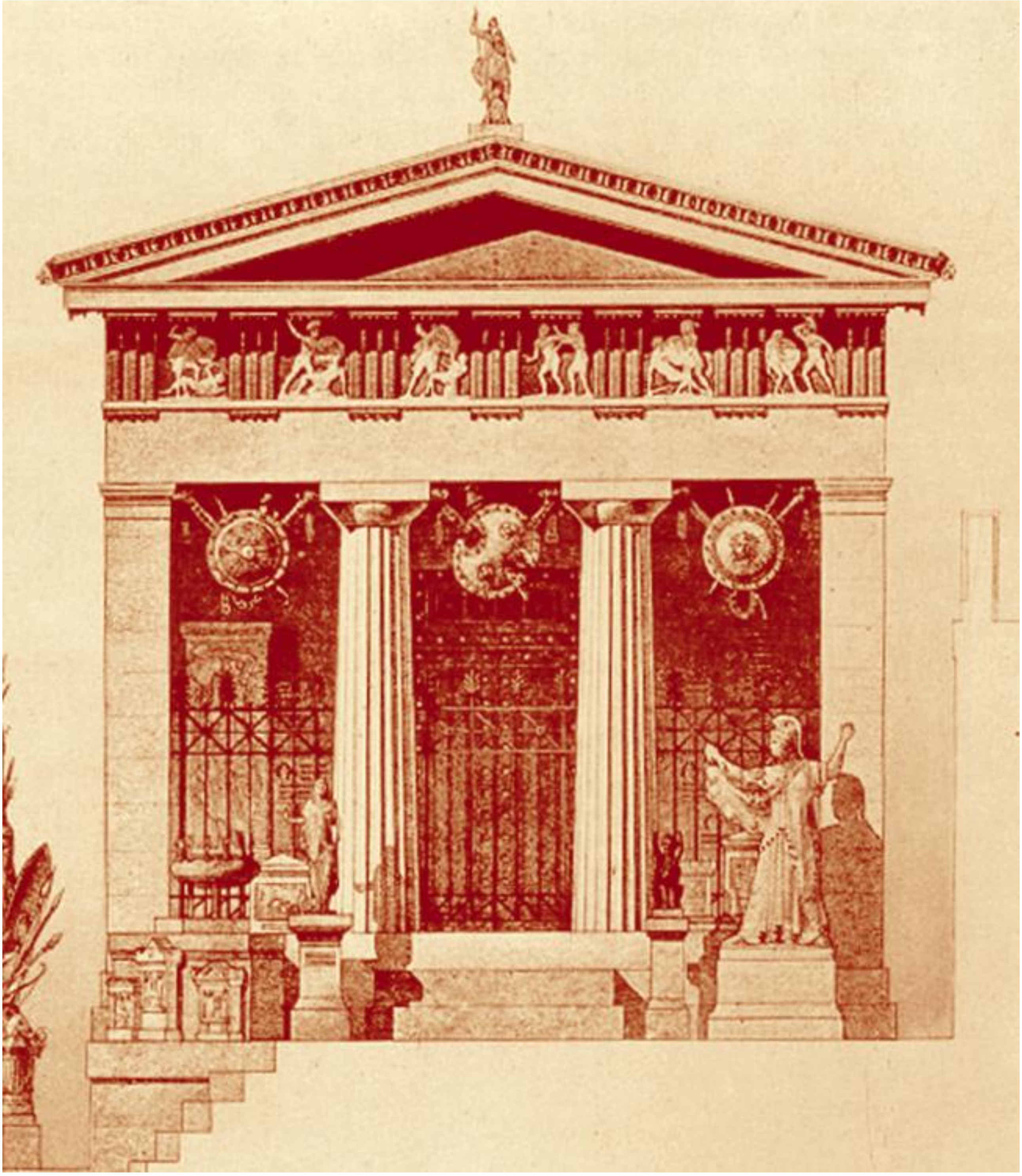
- **Κύκλος**
  - **Διάμετρος**
  - **Τόξα - χορδές, σύγκριση τόξων, μέσο τόξου**
  - **Επίκεντρη γωνία και σχέση με το αντίστοιχο τόξο**
  - **Μέτρο τόξου και γωνίας**

- **Ευθύγραμμα σχήματα: τεθλασμένη γραμμή, πολύγωνο, στοιχεία πολυγώνου**

3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Τρίγωνα

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με το πλέον θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που είναι το τρίγωνο. Αρχικά δίνουμε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων. Ως εφαρμογή των κριτηρίων αυτών παρουσιάζουμε ιδιότητες των στοιχείων του κύκλου, των ισοσκελών τριγώνων, της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και της διχοτόμου μιας γωνίας. Η μεσοκάθετος και η διχοτόμος εξετάζονται και ως βασικοί γεωμετρικοί τόποι. Στη συνέχεια αναφέρουμε συνοπτικά την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο και άξονα και μελετάμε ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο και τις εφαρμογές τους στη σύγκριση κάθετων και πλάγιων τμημάτων. Επίσης, παρουσιάζουμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, καθώς και τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων. Το κεφάλαιο κλείνει με κάποιες βασικές γεωμετρικές κατασκευές.

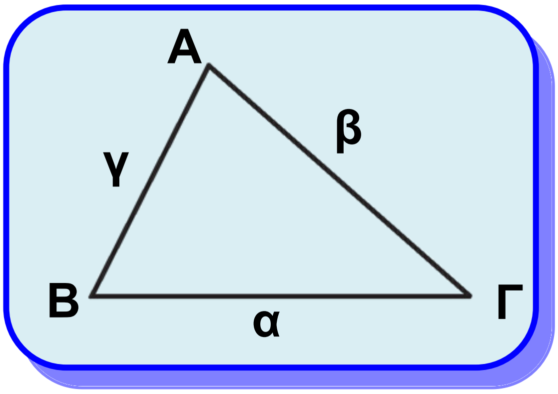


Ο Θησαυρός των Αθηναίων στους Δελφούς, 508 π.Χ.
Αναπαράσταση A. Tournaire

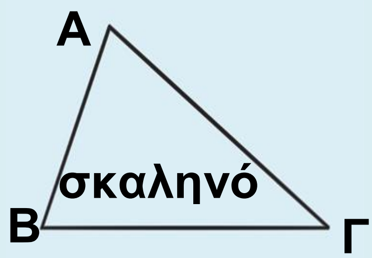
3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.1) έχει τρεις κορυφές Α, Β, Γ, τρεις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ και τρεις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$. Για ευκολία οι πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ συμβολίζονται με α, β, γ αντίστοιχα, και οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$ με $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Το άθροισμα α + β + γ των πλευρών του τριγώνου, δηλαδή η περίμετρός του συμβολίζεται συνήθως με 2τ. Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το σκαληνό, το ισοσκελές και το ισόπλευρο. Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:

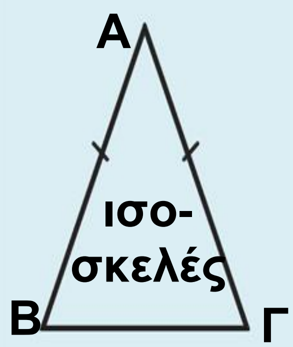
- **σκαληνό,** όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.2),
- **ισοσκελές,** όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ λέγεται **βάση** του και το Α **κορυφή** του,
- **ισόπλευρο,** όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.4).



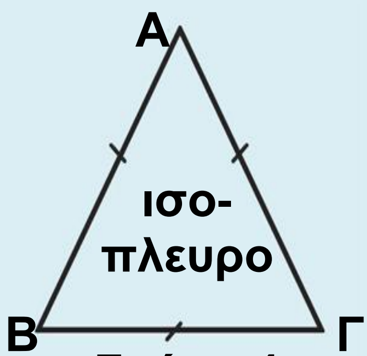
Σχήμα 1



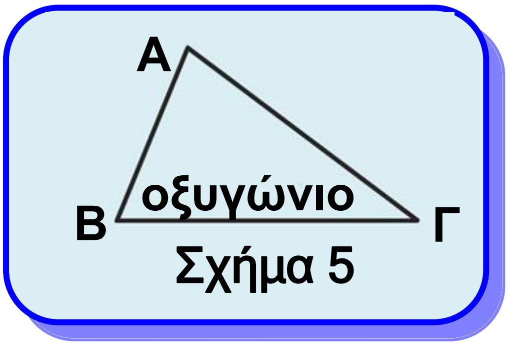
Σχήμα 2



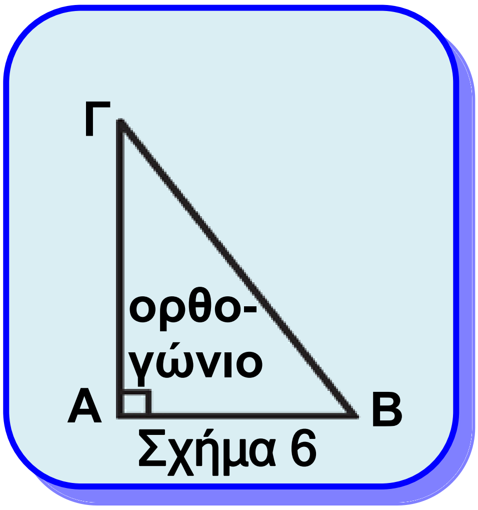
Σχήμα 3



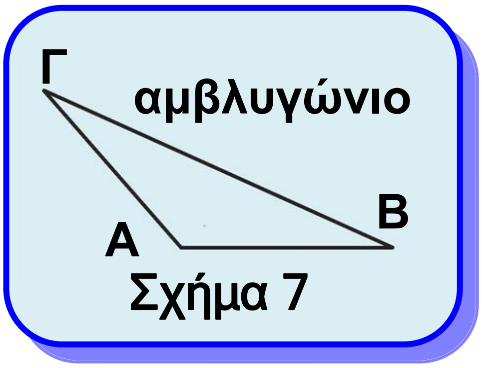
Σχήμα 4



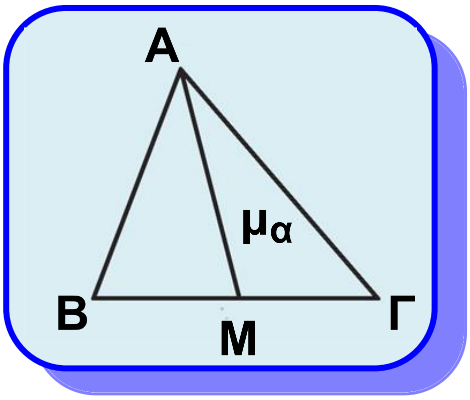
Σχήμα 5



Σχήμα 6



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται

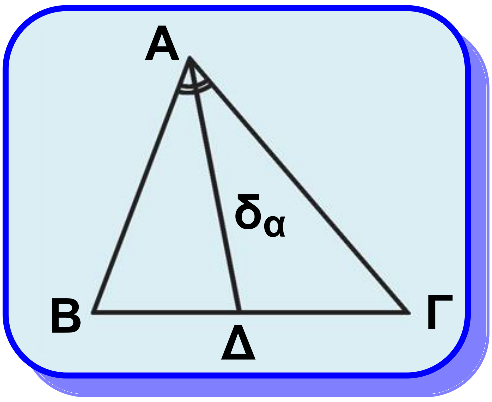
- **οξυγώνιο,** όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.5),
- **ορθογώνιο,** όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.6). Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** και οι άλλες δύο λέγονται **κάθετες πλευρές** του τριγώνου,
- **αμβλυγώνιο,** όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.7).

• Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχ.8 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ και συμβολίζεται με μ_α. Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.

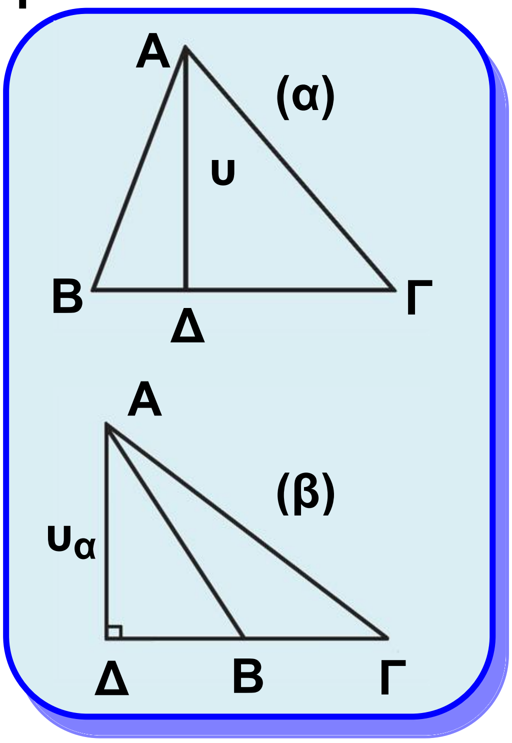
Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχ.9 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου και συμβολίζεται με δ_α.

Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.



Σχήμα 9

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Α, Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με υ_α , υ_β και υ_γ.
Στο σχ.10 το ΑΔ είναι το ύψος από την κορυφή Α. Το σημείο Δ λέγεται **προβολή** του Α πάνω στην ευθεία ΒΓ ή και **ίχνος** της καθέτου, που φέρεται από το Α στην ευθεία ΒΓ.
Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου λέγονται **δευτερεύοντα στοιχεία** του.



Σχήμα 10

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Είδαμε ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα, επομένως και δύο τρίγωνα, είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Συνεπώς:

- **Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.**
- **Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**

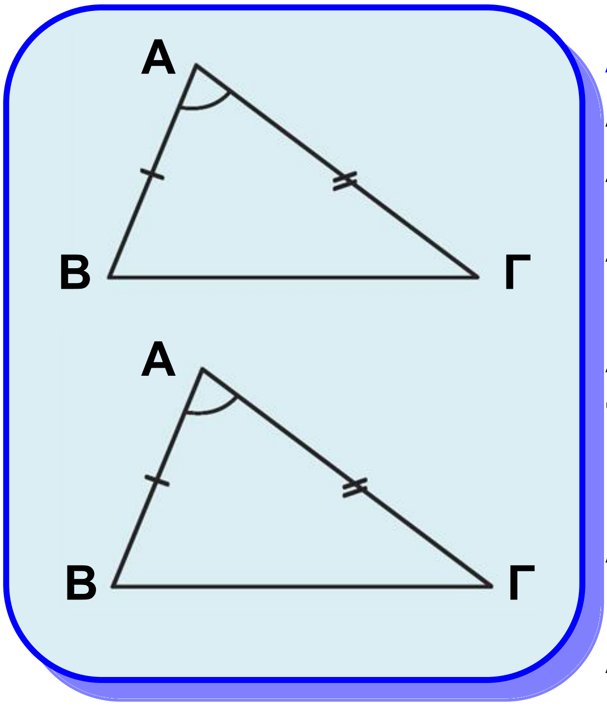
Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται **αντίστοιχες** ή **ομόλογες**.

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε προτάσεις, που θα μας εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους.
Οι προτάσεις αυτές αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τρίγωνων

Θεώρημα Ι (1ο Κριτήριο - ΠΓΠ)
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

ΣΧΟΛΙΟ
Η συντομογραφία ΠΓΠ σημαίνει πλευρά, γωνία, πλευρά.



Σχήμα 11

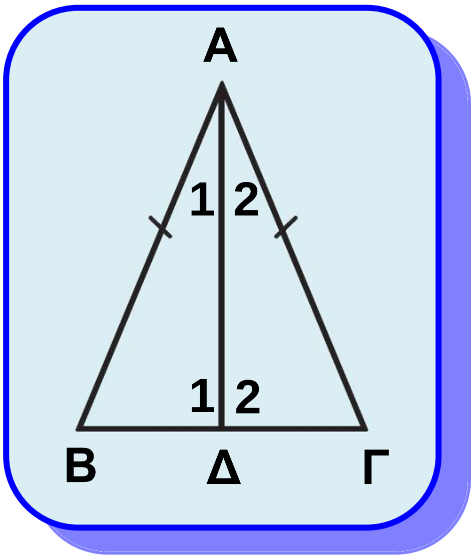
Απόδειξη
Ας υποθέσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΑΒ = Α'Β', ΑΓ = Α'Γ' και $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.11). Μετατοπίζουμε το τρίγωνο Α'Β'Γ', ώστε το σημείο Α' να ταυτιστεί με το Α και η ημιευθεία Α'Β' να ταυτιστεί με την ΑΒ. Επειδή $\hat{A} = \hat{A}'$ και η ημιευθεία Α'Γ' θα ταυτισθεί με την ΑΓ. Τότε, αφού ΑΒ = Α'Β' και ΑΓ = Α'Γ', το σημείο Β' ταυτίζεται με το Β και το Γ' με το Γ. Επομένως τα δύο τρίγωνα συμπίπτουν, άρα είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- **Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.**
- **Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.**

Απόδειξη



Σχήμα 12

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ (σχ.12). Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

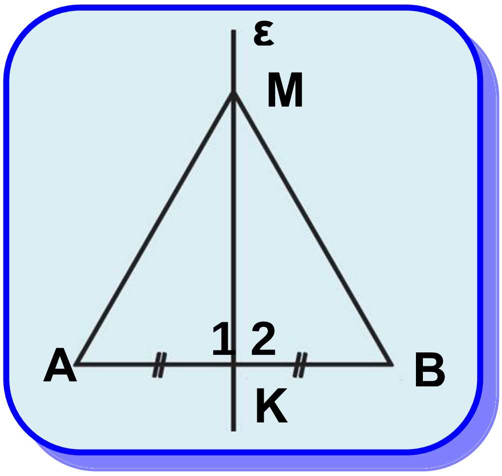
Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.



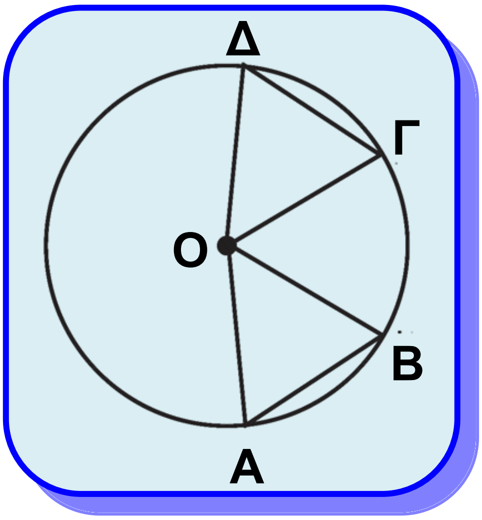
Σχήμα 13

Απόδειξη

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος ΑΒ (σχ.13) και Μ ένα σημείο της. Τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ έχουν ΚΑ = ΚΒ, ΜΚ κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90°$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε ΜΑ = ΜΒ.

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.



Σχήμα 14

Απόδειξη

Έστω ΑΒ και ΓΔ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (Ο,ρ) (σχ.14). Τότε είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν ΟΑ = ΟΓ(= ρ), ΟΒ = ΟΔ(= ρ) και $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$. Επομένως είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, η μεσοκάθετός του ε και σημείο Μ της ε (σχ.15). Στις προεκτάσεις των ΑΜ και ΒΜ προς το Μ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Δ, ώστε ΜΓ = ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:

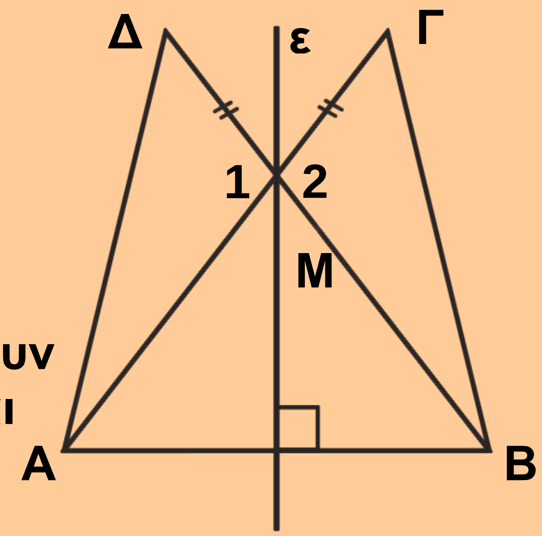
(i) $M\hat{A}B = M\hat{B}A$,

(ii) ΑΔ = ΒΓ.

Λύση

(i) Επειδή το Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου ε του ΑΒ είναι ΜΑ = ΜΒ, επομένως το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $M\hat{A}B = M\hat{B}A$.

(ii) Τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΒΓ έχουν ΜΑ = ΜΒ, ΜΓ = ΜΔ (υπόθεση) και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφήν), άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε ΑΔ = ΒΓ.



Σχήμα 15

ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.

2. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

3. Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.

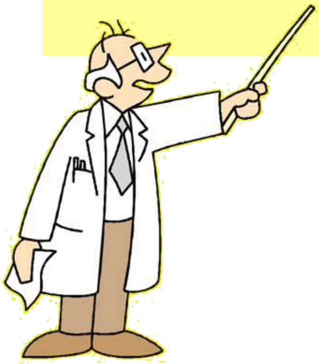
4. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της Α στην οποία θεωρούμε τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΑΓΕ = ΑΖΒ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ θεωρήσουμε τμήματα ΚΑ = ΑΚ, ΚΕ = ΒΚ, ΚΖ = ΓΚ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ, ΓΑ θεωρούμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

3. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $O\hat{\Gamma}A = O\hat{A}B$.



3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τρίγωνων

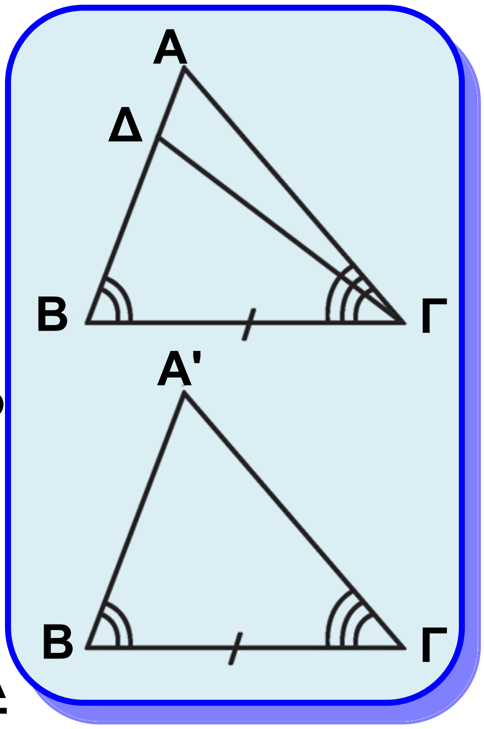
Με τη βοήθεια του 1ου κριτηρίου αποδεικνύουμε το 2ο και 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων.

Θεώρημα (2ο Κριτήριο - ΓΠΓ)
Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΧΟΛΙΟ
Η συντομογραφία ΓΠΓ σημαίνει γωνία, πλευρά, γωνία.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' (σχ.16) έχουν ΒΓ = Β'Γ', $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.
Θα αποδείξουμε ότι έχουν και ΑΒ = Α'Β'. Έστω ότι ΑΒ ≠ Α'Β', π.χ. ΑΒ > Α'Β'. Τότε υπάρχει σημείο Δ στην ΑΒ, ώστε να είναι ΒΔ = Β'Α'. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΒΓ = Β'Γ', ΒΔ = Β'Α' και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}$, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}$ που είναι άτοπο, γιατί το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ και επομένως $B\hat{\Gamma}\Delta < \hat{\Gamma}$. Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι ΑΒ ≠ Α'Β', άρα ΑΒ = Α'Β'. Τα τρίγωνα, λοιπόν, ΑΒΓ και Α'Β'Γ έχουν ΒΓ = Β'Γ', ΑΒ = Α'Β' και $\hat{B} = \hat{B}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.



Σχήμα 16

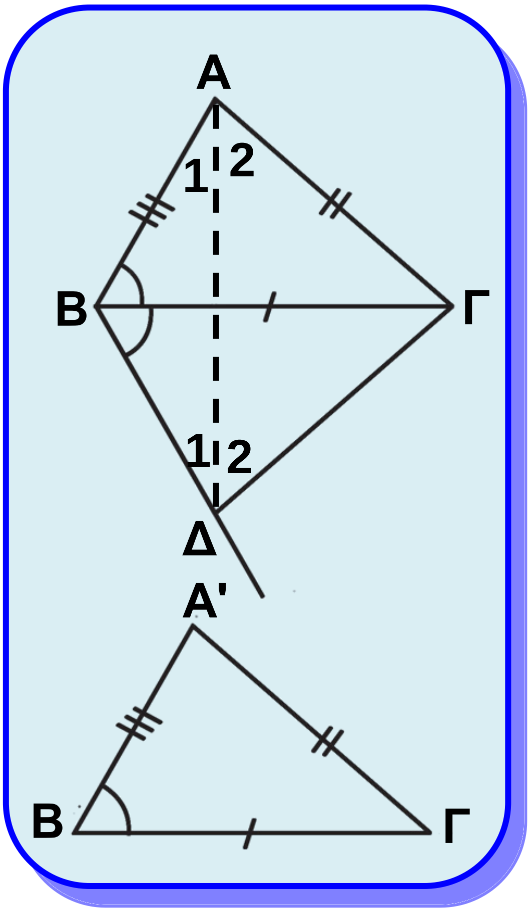
* Σημείωση: Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και με τη μέθοδο της μετατόπισης, όπως το θεώρημα Ι (σελ. 66).

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Η ισότητα δύο τριγώνων εξασφαλίζεται και από την ισότητα των τριών πλευρών τους, μία προς μία, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο - ΠΠΠ)
Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΧΟΛΙΟ
Η συντομογραφία ΠΠΠ σημαίνει πλευρά, πλευρά, πλευρά.



Σχήμα 17

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με ΑΒ = Α'Β', ΒΓ = Β'Γ', ΓΑ = Γ'Α' (σχ.17). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα είναι οξυγώνια. Θεωρούμε την ημιευθεία Βx, ώστε $\hat{\Gamma B x} = \hat{B}'$ (σχ.17) και σημείο της Δ, ώστε ΒΔ = Α'Β'. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΓ = Β'Γ', ΒΔ = Α'Β' και $\hat{\Gamma B \Delta} = \hat{B}'$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΓΔ = Γ'Α' και $\hat{\Delta} = \hat{A}'$.
Επειδή ΒΔ = Α'Β' και Α'Β' = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Επίσης, αφού ΓΔ = Α'Γ' και Α'Γ' = ΑΓ, προκύπτει ότι

$$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2 \quad (2).$$

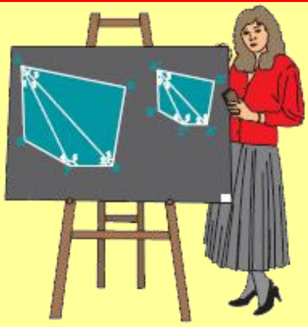
Επειδή τα τρίγωνα είναι οξυγώνια το τμήμα ΑΔ βρίσκεται στο εσωτερικό των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.
Επειδή $\hat{\Delta} = \hat{A}'$, έχουμε $\hat{A} = \hat{A}'$, που είναι το ζητούμενο.

Δραστηριότητα

Εξετάστε τις άλλες δύο περιπτώσεις της απόδειξης του 3ου Κριτηρίου:

i) $B > 90^\circ$ και $B' > 90^\circ$.

ii) $B = 90^\circ$ και $B' = 90^\circ$.



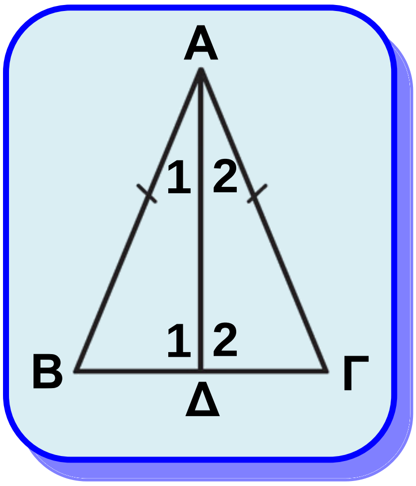
Με τη βοήθεια του κριτηρίου ΠΠΠ αποδεικνύονται τα επόμενα πορίσματα.

Πόρισμα Ι

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ η διάμεσός του (σχ.18). και ΑΓΔ έχουν ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ κοινή και ΒΔ=ΔΓ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος.



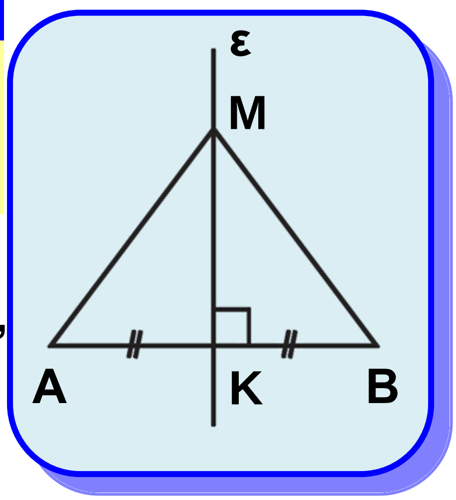
Σχήμα 18

Πόρισμα ΙΙ

Κάθε σημείο πού ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.19), Μ ένα σημείο, ώστε ΜΑ = ΜΒ και Κ το μέσο του ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και η ΜΚ διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η ΜΚ θα είναι και ύψος δηλαδή η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

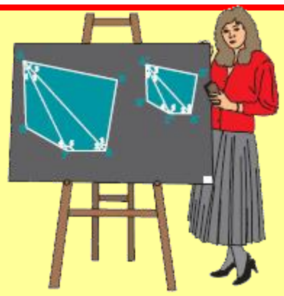


Σχήμα 19

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα ΙΙΙ του θεωρήματος Ι (§3.2) προκύπτει ότι η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

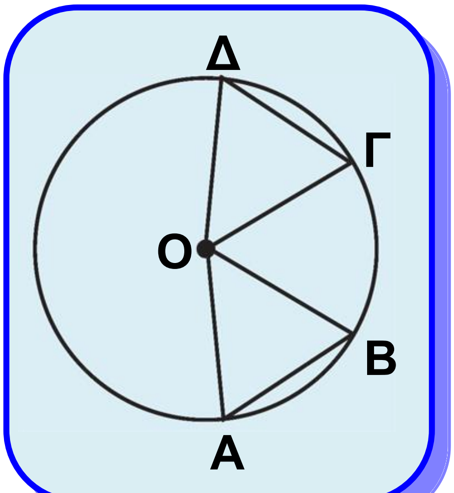
Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου



Πόρισμα ΙΙΙ

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.



Σχήμα 20

Απόδειξη

Έστω δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (Ο,ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με ΑΒ = ΓΔ. Τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ (σχ.20) έχουν: ΟΑ= ΟΓ (= ρ), ΟΒ = ΟΔ(= ρ) και ΑΒ = ΓΔ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα.

Επομένως, $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Πόρισμα IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα πορίσματα ΙΙΙ και IV προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ίσα τόξα πάνω σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους αρκεί να πάρουμε, με το διαβήτη, ίσες χορδές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

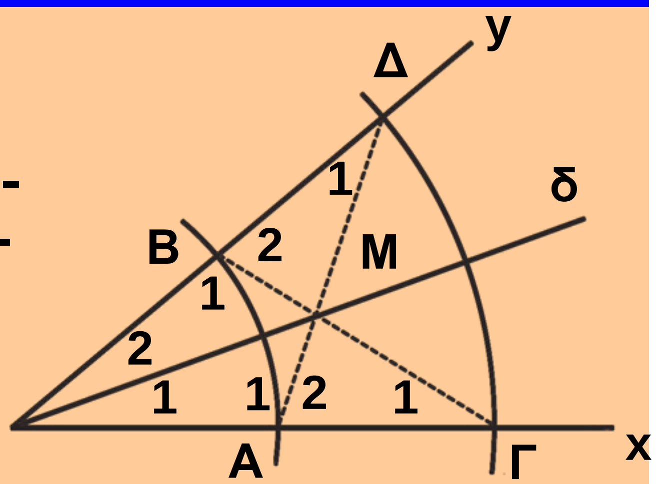
Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- **δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ),**
- **μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ),**
- **και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και δύο κύκλους (O,ρ), (0,R) με ρ < Κ (σχ.21). Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx, Oy στα Α, Β, ο δεύτερος στα Γ, Δ και Μ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΓ, να αποδειχθεί ότι:



Σχήμα 21

(i) τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα,

(ii) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ είναι ίσα,

(iii) τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα,

(iv) η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

Απόδειξη

(i) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουν ΟΑ = ΟΒ (= ρ), ΟΓ = ΟΔ(= R) και $\hat{O}$ κοινή (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα.

(ii) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ή $180° - \hat{A}_2 = 180° - \hat{B}_2$ ή $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$

Επομένως, τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ έχουν ΑΓ = ΒΔ, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (ΓΠΓ), άρα είναι ίσα.

(iii) Από το (ii) προκύπτει ότι ΜΑ=ΜΒ, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ έχουν ΟΑ = ΟΒ, ΜΑ = ΜΒ και ΟΜ κοινή (ΠΠΠ), άρα είναι ίσα.

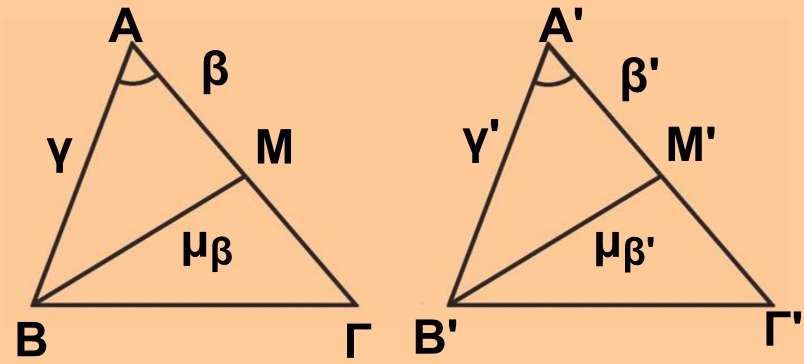
(iv) Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα, έχουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η εφαρμογή 1 δίνει έναν τρόπο κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν β = β', γ = γ' και $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.



Σχήμα 22

Απόδειξη

Εξετάζουμε πρώτα τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α'Β'Μ' (σχ.22). Αυτά έχουν ΑΒ = Α'Β', ΒΜ = ΒΜ' (από την υπόθεση) και ΑΜ =Α'Μ', ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α'Γ'. Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α'Β'Μ είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{A} = \hat{A}'$. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\hat{\beta} = \hat{\beta}'$, $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. **Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:**

i) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία. Σ Λ

ii) Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες. Σ Λ

2. Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.
3. Συμπληρώστε τα κενά:
i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι ……………………………………
ii) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι ……………………………
iii) Ένα σημείο Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος ΑΒ, όταν ……………………………………
iv) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, όταν ……………… ……………………………………

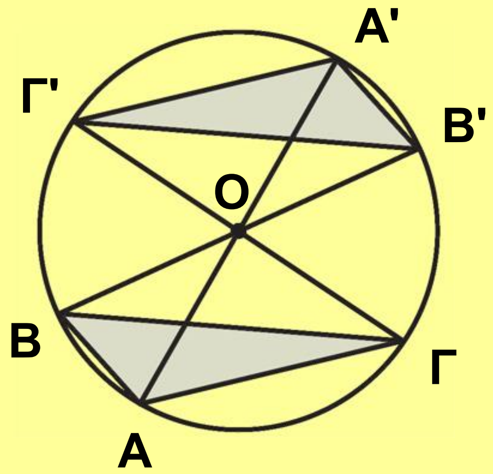
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν β = β', γ = γ' και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι' το σημείο τομής των διχοτόμων Α'Δ' και Β΄Ε' του Α'Β'Γ' να αποδείξετε ότι:
i) ΑΔ = Α'Δ' και ΒΕ = Β'Ε'
ii) ΑΙ = Α'Ι' και ΒΙ = Β'Ι'.

2. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν β = β', $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_\alpha'$. Να αποδείξετε ότι:
i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,
ii) α = α' και γ = γ'.
3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
2. Αν ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ' είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα στην επόμενη σελίδα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.



3. Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = ΓΔ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Σύνθετα θέματα

1. Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α 'Μ' και η αντίστοιχη διχοτόμος Β'Δ' του Α'Β'Γ' τέμνονται στο Θ'. Να αποδείξετε ότι:

i) ΒΔ = Β 'Δ',

ii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$,

iii) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α'Β'Θ' είναι ίσα,

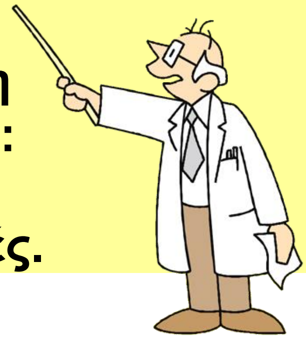
iv) ΑΘ = Α'Θ' και ΘΔ = Θ'Δ'.

2. Δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν την ίδια μεσοκάθετο ε. Αν η ε και η μεσοκάθετος του ΑΓ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του ΒΔ.

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΔΒ. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές,

ii) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.

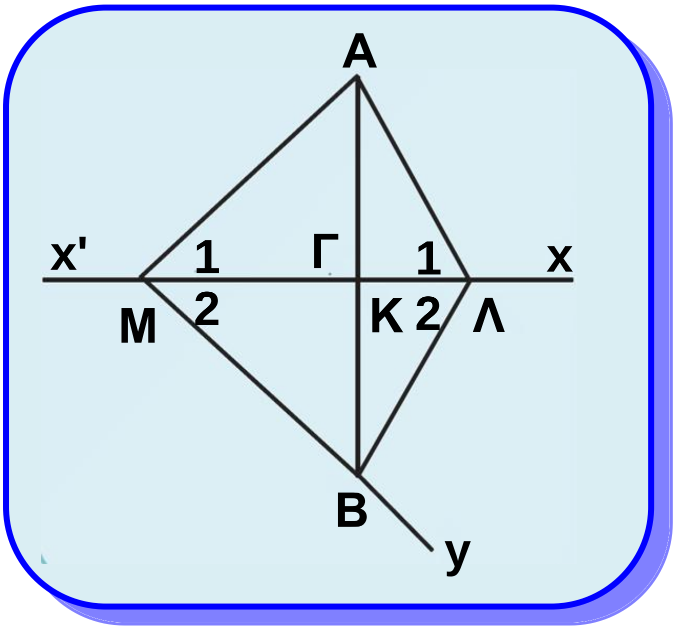


3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

Στο 2ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην κάθετη που φέρεται από σημείο σε ευθεία. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα και την ύπαρξή της.

Θεώρημα

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.



Σχήμα 23

Απόδειξη

Έστω ευθεία x'x, σημείο Α εκτός αυτής και σημείο Μ της x'x (σχ.23). Αν η ΑΜ είναι κάθετη στην x'x, τότε το θεώρημα ισχύει ως προς την ύπαρξη της καθέτου. Έστω ότι η ΑΜ δεν είναι κάθετη στην x'x. Στο ημιεπίπεδο που ορίζει η x'x και δεν περιέχει το Α θεωρούμε την ημιευθεία Μy ώστε να είναι $x\hat{M}y = A\hat{M}x$ και πάνω σε αυτή σημείο Β, ώστε ΜΑ = ΜΒ. Επειδή τα σημεία Α,Β είναι εκατέρωθεν της x'x, η x'x τέμνει την ΑΒ σε ένα εσωτερικό σημείο, έστω Κ. Αφού ΜΑ = ΜΒ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, η ΜΚ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΑΒ, άρα είναι και ύψος και επομένως $AB \perp x'x$.

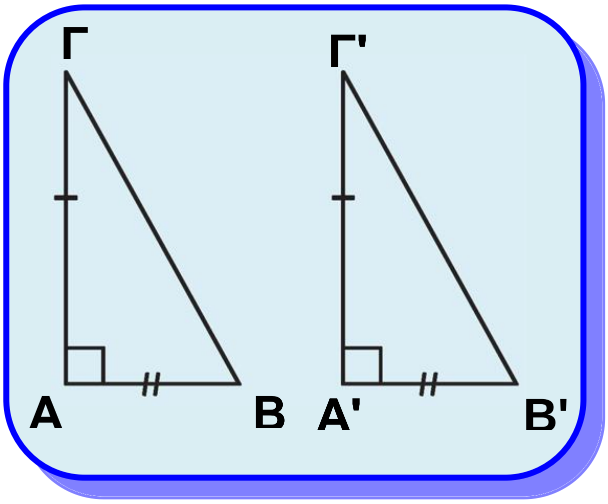
Έστω ότι υπάρχει και άλλη ευθεία ΑΛ κάθετη στην x'x . Τότε τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΒΜΛ είναι ίσα, γιατί έχουν ΜΛ κοινή, ΜΑ = ΜΒ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, οπότε θα είναι και $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2$.

Όμως $\hat{\Lambda}_1 = 90°$, άρα και $\hat{\Lambda}_2 = 90°$, οπότε $\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 = 180°$ το οποίο σημαίνει ότι τα σημεία Α,Λ,Β είναι συνευθειακά, δηλαδή η ΑΛ ταυτίζεται με την ΑΚ, που είναι άτοπο.

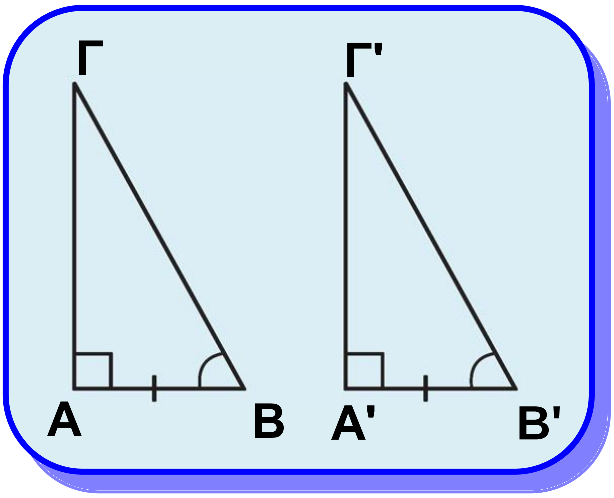
3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση, την ορθή, από το 1ο (ΠΓΠ) και 2ο (ΓΠΓ) κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων προκύπτει άμεσα ότι:

- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.24).**
- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα (σχ.25).**



Σχήμα 24

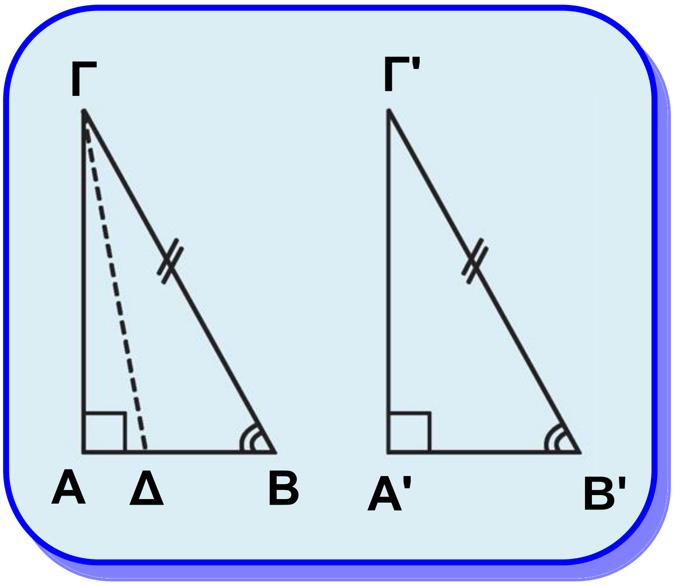


Σχήμα 25

Η ισότητα ορθογώνιων τριγώνων εξασφαλίζεται ακόμη και από τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα Ι

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Σχήμα 26

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$, ΒΓ = Β'Γ' και $\hat{B} = \hat{B}'$ (σχ.26). Θα αποδείξουμε ότι είναι και ΑΒ = Α'Β'. Έστω ότι ΑΒ $\neq$ Α'Β' , π.χ. ΑΒ > Α'Β'. Τότε στην πλευρά ΒΑ υπάρχει σημείο Δ, ώστε ΒΔ = Α'Β'. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΒΓ = Β'Γ', ΔΒ = Α'Β' και Β = Β', επομένως είναι ίσα, οπότε θα είναι Δ = Α' = 90°, δηλαδή ΓΔ   ΑΒ.

Έτσι έχουμε ΓΑ $\perp$ ΑΒ και ΓΔ $\perp$ ΑΒ που είναι άτοπο (μοναδικότητα καθέτου). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι ΑΒ $\neq$ Α'Β'. Άρα ΑΒ = Α'Β', οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΓ = Β'Γ', ΒΑ = Β'Α' και Β = Β' (ΠΓΠ).

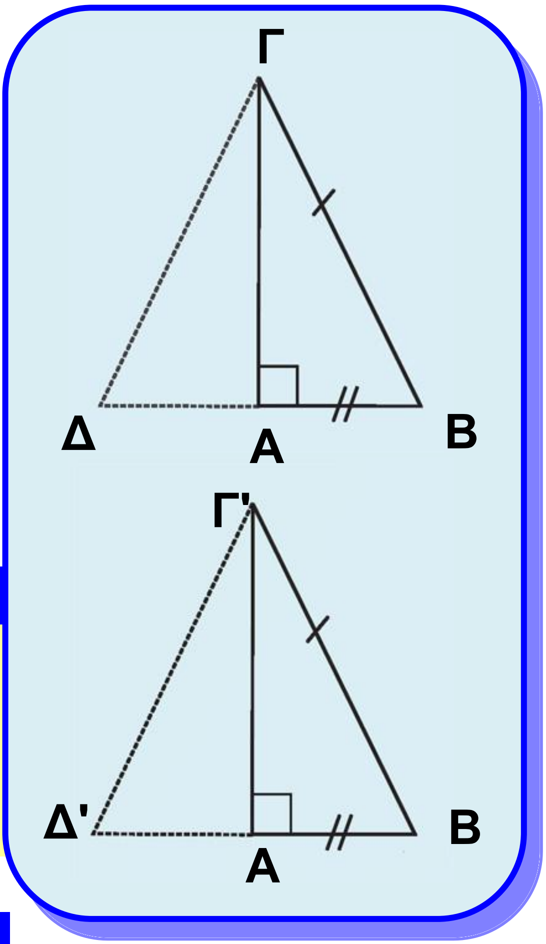
Θεώρημα ΙΙ

Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' (σχ.27) με

$\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$, ΒΓ = Β'Γ' και ΑΒ = Α'Β'. Θα αποδείξουμε ότι και Β = Β'. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και Β'Α' θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Δ', ώστε να είναι ΑΔ = ΑΒ και Α'Δ' = Α'Β'. Τότε η ΓΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΒ και η Γ'Α' μεσοκάθετος του Δ'Β'. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ΓΔ = ΓΒ και Γ'Δ' = Γ'Β'. Από τις τελευταίες ισότητες και την ΒΓ = Β'Γ' προκύπτει ότι ΓΔ = Γ'Δ'. Έτσι τα τρίγωνα ΓΔΒ και Γ'Δ'Β' έχουν ΓΔ = Γ'Δ', ΒΓ = Β'Γ' και ΔΒ = Δ'Β' (ως διπλάσια των ίσων τμημάτων ΑΒ και Α'Β'), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$. Τότε και τα αρχικά τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).



Σχήμα

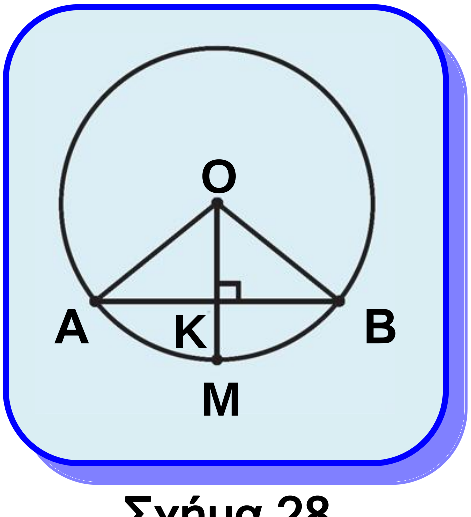
Πόρισμα Ι

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

Πόρισμα ΙΙ

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απόδειξη



Σχήμα 28

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο,ρ), μια χορδή του ΑΒ και την κάθετη ΟΚ της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ (σχ.28). Επειδή το τμήμα ΟΚ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΑ= ΟΒ = ρ), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

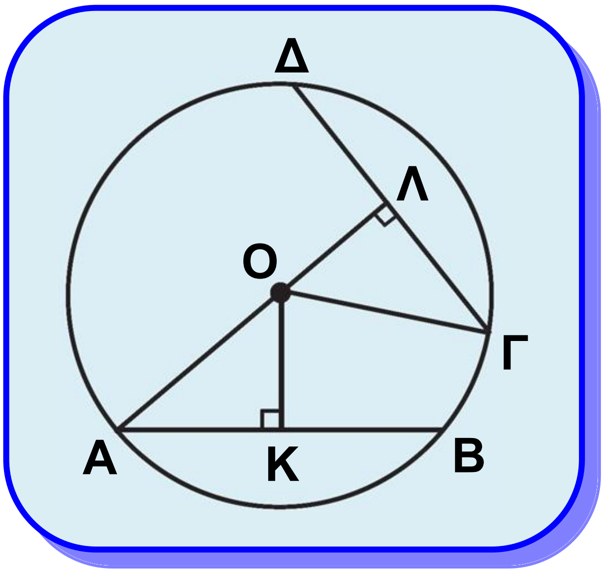
Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:.

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- **Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.**
- **Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.**

Θεώρημα III

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.



Σχήμα 46

Απόδειξη

Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ, ΟΛ τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ, έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$, ΟΑ = ΟΓ (= ρ) και ΑΚ = ΓΛ (αφού ΑΒ = ΓΔ). Επομένως είναι ίσα, οπότε ΟΚ = ΟΛ.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$, ΟΑ = ΟΓ και ΟΚ = ΟΛ, επομένως είναι ίσα, οπότε ΑΚ = ΓΛ ή $\frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ ή ΑΒ = ΓΔ.

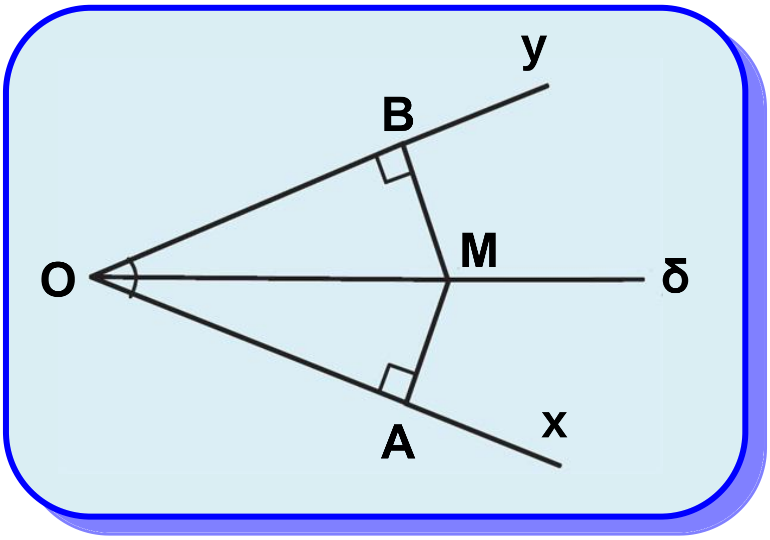
Θεώρημα IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη

Έστω μια γωνία xOy και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ (σχ.30). Φέρουμε ΜΑ$\perp$Οx και ΜΒ$\perp$Οy. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, ΟΜ κοινή και ΜΟΑ = ΜΟΒ, επομένως ΜΑ = ΜΒ .

Αντίστροφα. **Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε ΜΑ Οx και ΜΒ Οy και υποθέτουμε ότι ΜΑ = ΜΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, ΟΜ κοινή και ΜΑ = ΜΒ και επομένως ΜΟΑ = ΜΟΒ, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ.**



Σχήμα 30

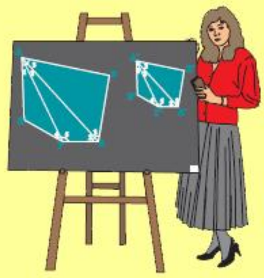
Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:

Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Με τη βοήθεια του συμπεράσματος αυτού αντιμετωπίζεται η επόμενη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές ενός τριγώνου

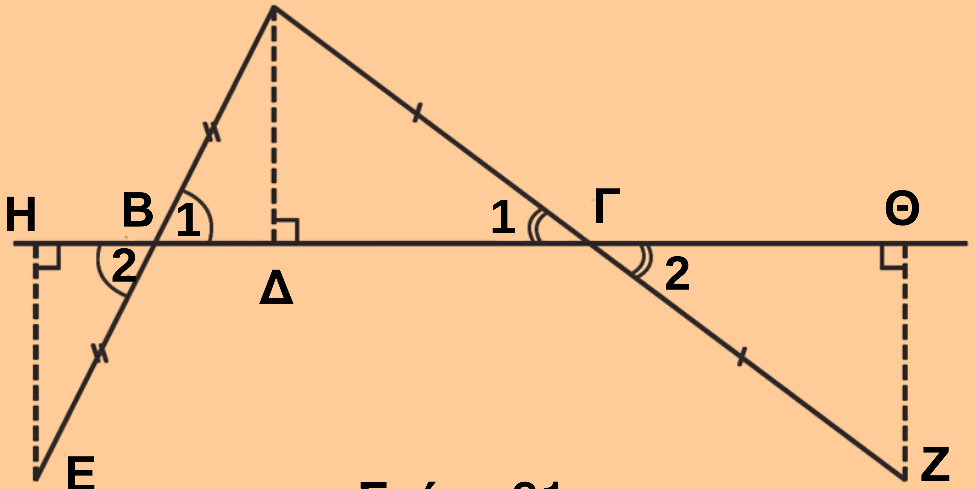


ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ (σχ.31) παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε ΓΖ=ΑΓ. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου και ΕΗ, ΖΘ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία ΒΓ, τότε:

(i) να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ, καθώς και τα ΑΓΔ και ΖΓΘ,

(ii) να αποδειχθεί ότι ΕΗ = ΖΘ.



Σχήμα 31

Λύση

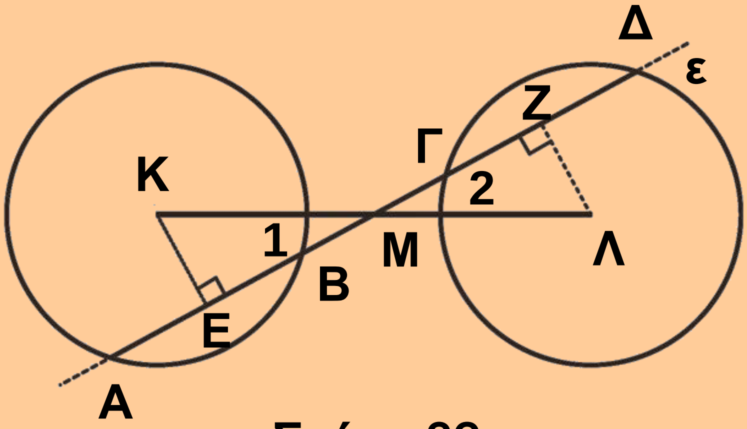
(i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ είναι ορθογώνια ($\hat{Δ} = \hat{Η} = 90°$) και έχουν ΑΒ = ΒΕ (από υπόθεση) και $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$ (κατακορυφήν). Άρα, είναι ίσα.

Όμοια και τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΖΓΘ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{Δ} = \hat{Θ} = 90°$, ΑΓ = ΓΖ και $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$.

(ii) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΕΒΗ προκύπτει ότι ΕΗ = ΑΔ. Όμοια από την άλλη ισότητα των τριγώνων προκύπτει ΖΘ = ΑΔ. Επομένως ΕΗ = ΖΘ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ, Λ και από το μέσο Μ του ΚΛ ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους (σχ.32) στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΓΔ.



Σχήμα 32

Απόδειξη

Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι χορδές ίσων κύκλων, για να είναι ΑΒ = ΓΔ αρκεί τα αποστήματά τους ΚΕ και ΛΖ, αντίστοιχα, να είναι ίσα. Τα τρίγωνα ΕΜΚ και ΖΜΛ είναι ορθογώνια ($\hat{E} = \hat{Z} = 90°$) και έχουν ΚΜ = ΜΛ, γιατί το Μ είναι μέσο του ΚΛ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν. Άρα είναι ίσα, οπότε ΚΕ = ΛΖ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Αν ΑΒ $\perp$ ε και ΑΓ $\perp$ ε (Β, Γ σημεία της ε) τότε:

i) Β = Γ		Σ Α
ii) Β ≠ Γ		Σ Α
iii) ΑΒ = ΑΓ		Σ Α

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Δ σημείο της βάσης και οι προτάσεις:

π_1: Το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

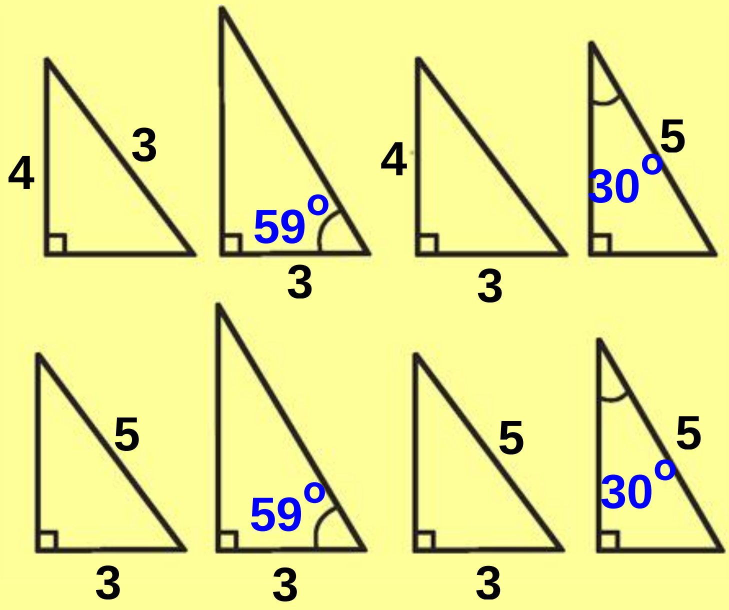
π_2: Το ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου.

π_3: Το ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου.

Αν για το ΑΔ ισχύει μία από τις π_1, π_2, π_3, τότε ισχύουν οι άλλες δύο προτάσεις;

3. Διατυπώστε τις δύο ανακεφαλαιωτικές περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.

4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει οκτώ ορθογώνια τρίγωνα. Καθένα από αυτά είναι ίσο με ένα από τα υπόλοιπα. Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και να αναφέρετε το λόγο για τον οποίο είναι ίσα.



5. Συμπληρώστε τα κενά στην επόμενη πρόταση:
Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής είναι μεσοκάθετος της ……………… και διχοτομεί ………………
………………………

6. Αν ΑΒ, ΓΔ είναι χορδές ενός κύκλου (Κ) και ΚΕ, ΚΖ είναι αντίστοιχα τα αποστήματά τους τότε:

α. ΑΒ = ΓΔ $\Leftrightarrow$ $KE = \frac{1}{2}KZ$,

β. ΑΒ = ΓΔ $\Leftrightarrow$ ΚΕ > ΚΖ,

γ. ΑΒ = ΓΔ $\Leftrightarrow$ ΚΕ = ΚΖ,

δ. ΑΒ = ΓΔ ⇔ $\frac{1}{2}$ ΚΕ = $\frac{1}{3}$ ΚΖ,

ε. ΑΒ = ΓΔ ⇔ ΚΕ < ΚΖ.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

7. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

8. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες είναι πάντοτε ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

2. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:

i) από τη βάση,

ii) από τις ίσες πλευρές.

3. Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του.

4. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

i) το Μ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου,

ii) η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του Μ από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους.

2. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α' Β' Γ' είναι $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$ και $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3. **Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι $α = α'$, $υ_β=υ_{β'}$ και $υ_γ =υ_{γ'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.**

4. **Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}$ = 1L) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ $\perp$ ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.**

5. **Δίνεται κύκλος (Ο, R), οι ίσες χορδές του ΑΒ, ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι:**

i) τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα,

ii) ΜΑ = ΜΓ και ΜΒ = ΜΔ.

Σύνθετα Θέματα

1. **Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ. Έστω Ε και Ζ οι προβολές του Δ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.**

i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΔΓΖ.

ii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της Α, η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ', με προβολές τα σημεία Ε', Ζ' στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

iii) Να αποδείξετε ότι ΕΕ' = ΑΓ και ΖΖ' = ΑΒ.

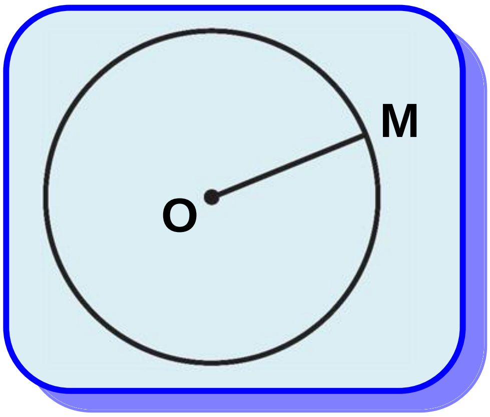
2. **Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α' Β' Γ' έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι ίση με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.**

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

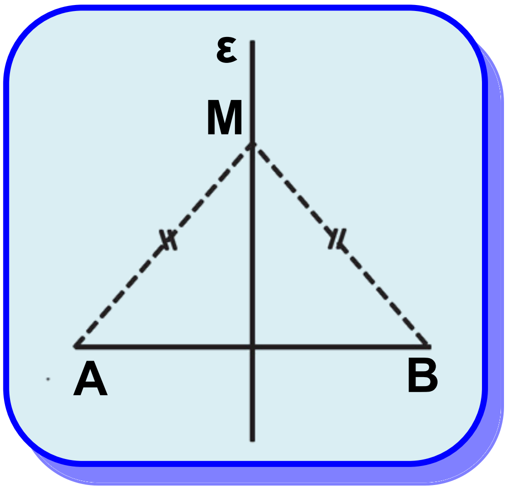
3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος

Όπως έχουμε αναφέρει, γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.
Επομένως:

- ο κύκλος (σχ.33) είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
- η μεσοκάθετος ενός τμήματος (σχ.34) είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
- η διχοτόμος μιας γωνίας (σχ.35) είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

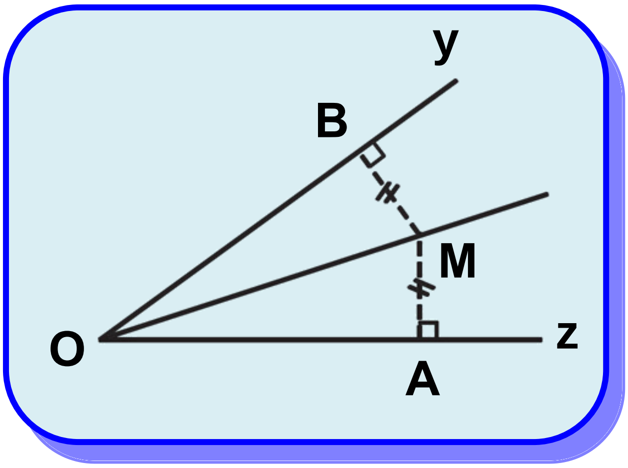


Σχήμα 33



Σχήμα 34

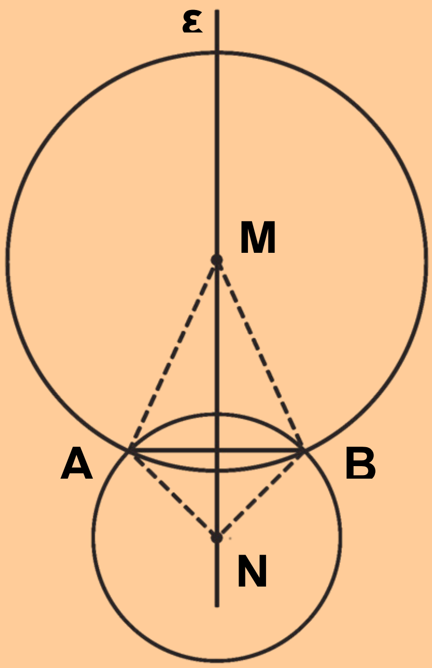
Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου απαιτεί μια ιδιαίτερη διαδικασία η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.



Σχήμα 35

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία Α και Β.



Σχήμα 36

Λύση

Έστω Μ ένα σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα Α,Β (σχ.36). Τότε ΜΑ = ΜΒ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου και επομένως το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο ε του τμήματος ΑΒ.

Αντίστροφα. Έστω Ν ένα σημείο της μεσοκαθέτου ε του ΑΒ. Τότε θα είναι ΝΑ=ΝΒ, οπότε ο κύκλος (Ν,ΝΑ) διέρχεται και από το Β. Επομένως κάθε σημείο της ε είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα Α,Β.
Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ε του τμήματος ΑΒ.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η λύση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου ακολουθεί τα εξής στάδια:
Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Μ του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και με βάση τη χαρακτηριστική ιδιότητα που έχει, προσδιορίζουμε τη γραμμή Γ πάνω στην οποία βρίσκεται.
Στη συνέχεια κατασκευάζουμε με τον κανόνα και το διαβήτη τη γραμμή αυτή και εξετάζουμε αν το τυχαίο σημείο Ν της γραμμής αυτής ικανοποιεί τη

χαρακτηριστική ιδιότητα του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η γραμμή Γ είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

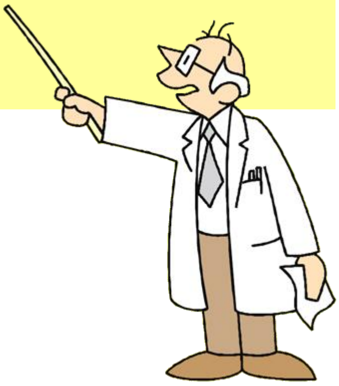
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Συμπληρώστε τα κενά στις επόμενες προτάσεις.
i) Ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών των ισοσκελών τριγώνων με γνωστή βάση είναι ....
ii) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι ....

Ασκήσεις Εμπέδωσης

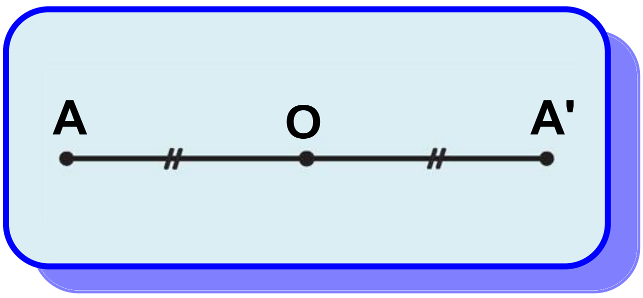
1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών Α των τριγώνων ΑΒΓ, που έχουν σταθερή την πλευρά ΒΓ = α και τη διάμεσο ΑΜ με γνωστό μήκος.
2. Δίνεται κύκλος (Ο,R). Αν Ν τυχαίο σημείο του κύκλου και Μ σημείο στην προέκταση της ΟΝ, ώστε ΟΝ = ΝΜ, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ, όταν το Ν διαγράφει τον κύκλο.



Συμμετρικά σχήματα

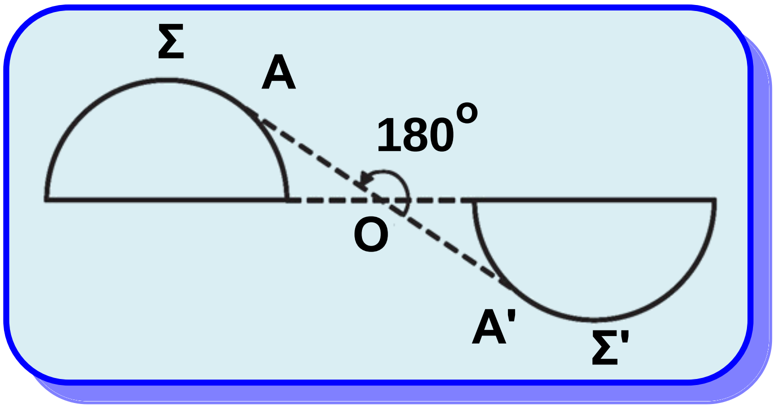
3.8 Κεντρική συμμετρία

Στην §2.10 είδαμε πότε δύο σημεία Α, Α' λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο ένα σημείο Ο (σχ.37).



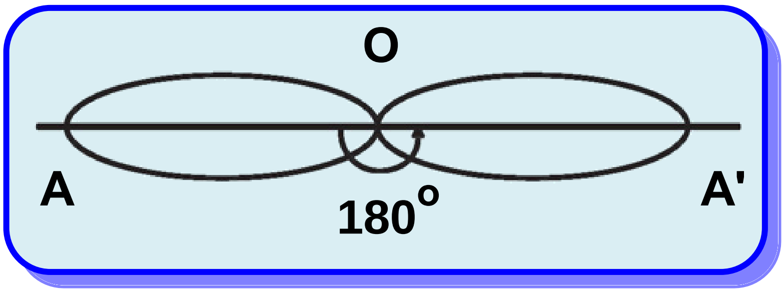
Σχήμα 37

Γενικότερα δύο σχήμα τα Σ, Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο (σχ.38), αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το Ο και αντίστροφα. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος, που αποτελείται από τα συμμετρικά ως προς το Ο σχήματα Σ και Σ'.
Δηλαδή ένα σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α', ως προς το Ο, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει κεντρική συμμετρία.



Σχήμα 38

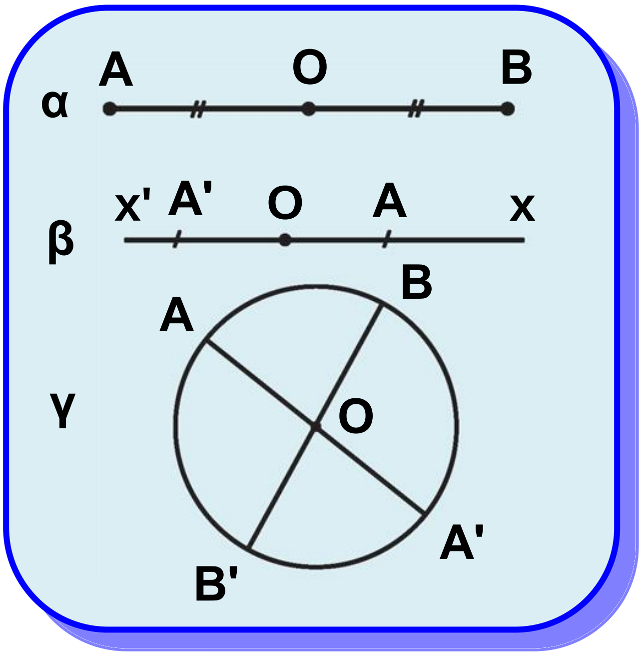
Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ, με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.39), κατά 180^o γύρω από το Ο, θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.



Σχήμα 39

Από τα γνωστά μας, μέχρι τώρα σχήματα:
- **Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του (σχ.40α).**
- **Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της (σχ.40β).**

• Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του (σχ.40γ).



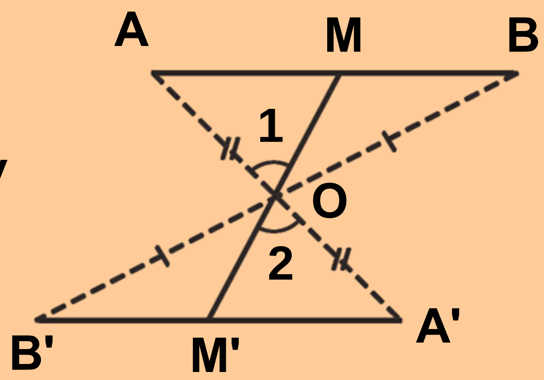
Σχήμα 40

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του, είναι τμήμα ίσο με αυτό.

Απόδειξη

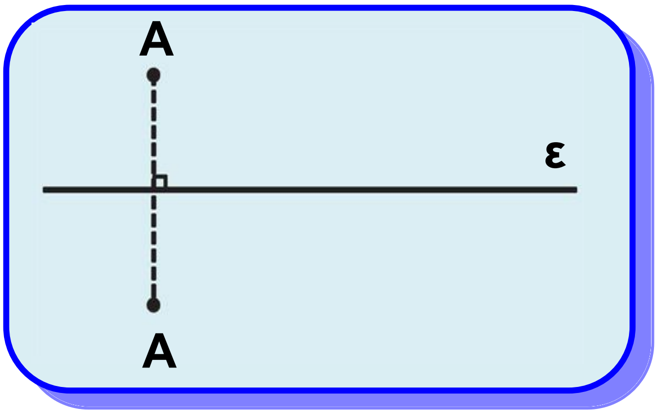
Έστω ένα τμήμα ΑΒ (σχ.41), σημείο Ο που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ και Α', Β' τα συμμετρικά των Α,Β ως προς το Ο αντίστοιχα. Επειδή ΟΑ' = ΟΑ, ΟΒ' = ΟΒ και $A'\hat{O}B' = A\hat{O}B$, τα τρίγωνα ΑΟΒ και Α'ΟΒ' είναι ίσα, οπότε Α'Β' = ΑΒ.



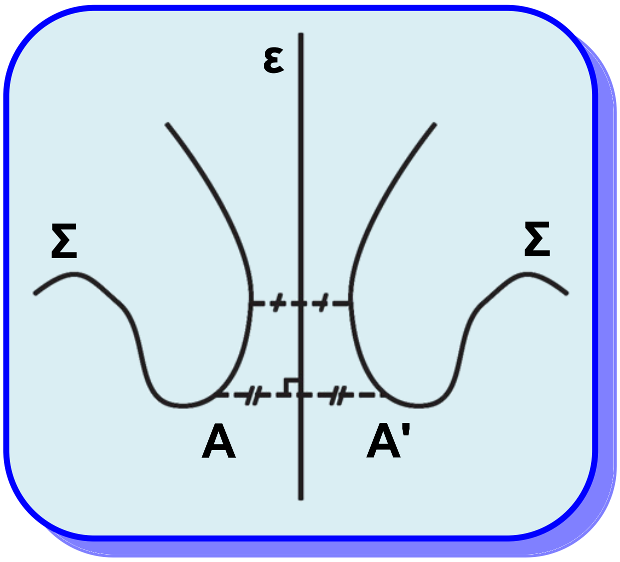
Σχήμα 41

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τμήματα ΑΒ και Α'Β' είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Έστω σημείο Μ του ΑΒ και Μ' η τομή της ΜΟ με το Α'Β'. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$, οπότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και Α'ΟΜ' είναι ίσα γιατί έχουν ΟΑ' = ΟΑ, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Επομένως ΟΜ' = ΟΜ, που σημαίνει ότι το Μ' είναι συμμετρικό του Μ. Όμοια το συμμετρικό κάθε

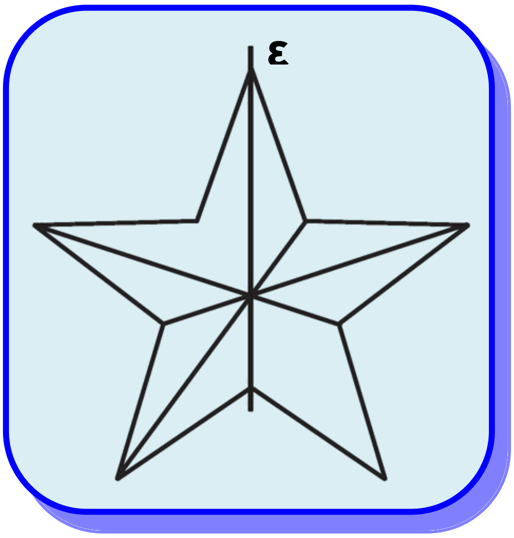
σημείου Μ' του Α'Β' είναι σημείο του ΑΒ. Άρα τα ΑΒ, Α'Β' είναι συμμετρικά ως προς το Ο.



Σχήμα 42



Σχήμα 43



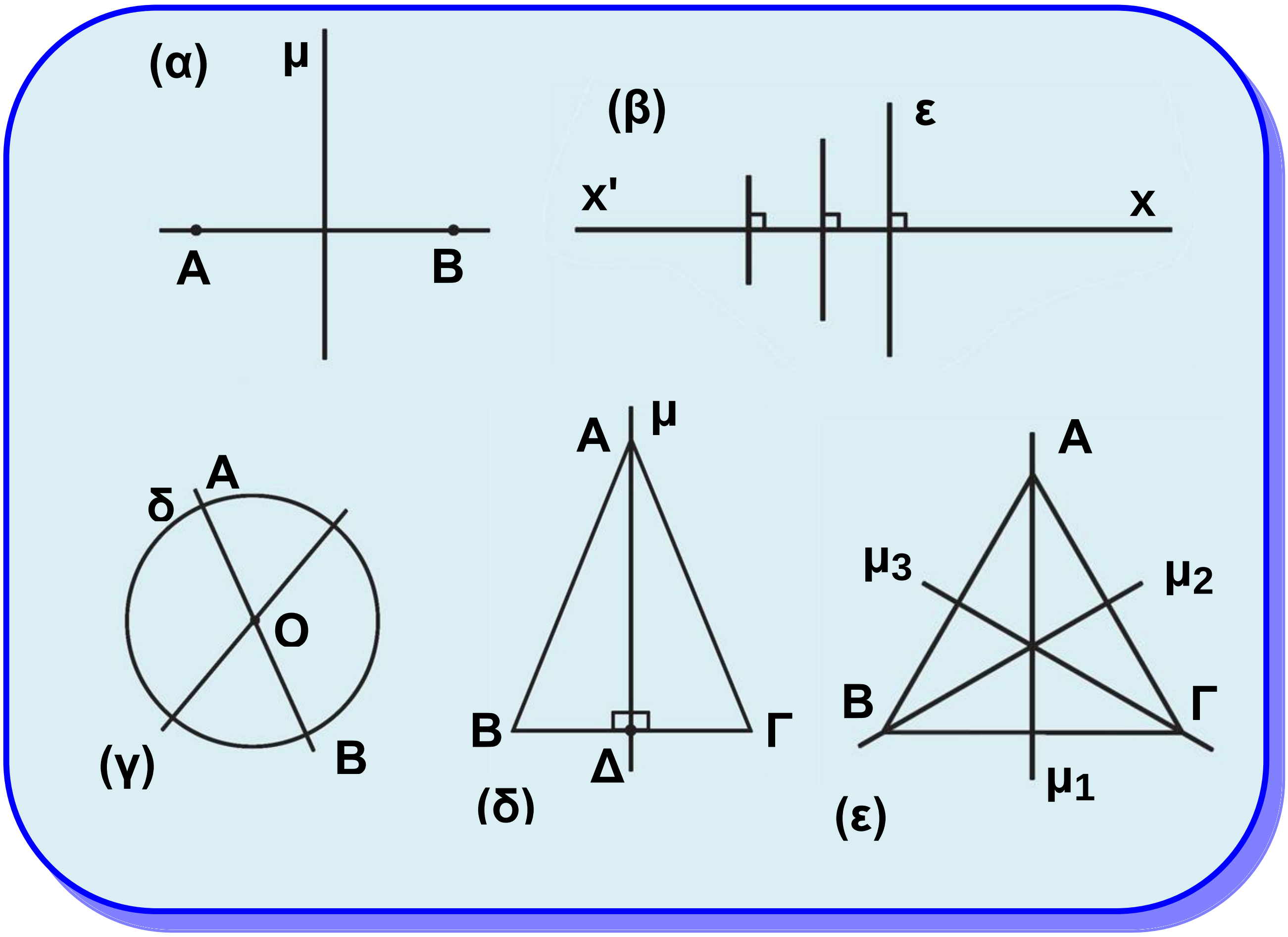
Σχήμα 44

3.9 Αξονική συμμετρία

Στην §2.14 είδαμε πότε δύο σημεία Α, Α' λέγονται συμμετρικά ως προς (άξονα) την ευθεία ε (σχ.42). Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ' (σχ.43) λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα. Η ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ'. Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α', ως προς την ε, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει αξονική συμμετρία. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε, τότε η ε χωρίζει το σχήμα (σχ.44) σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ε, τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.

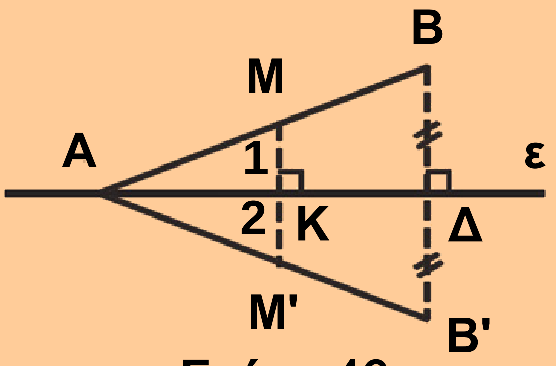
Από τα γνωστά μας σχήματα

- **Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετό του μ και τον φορέα του ε (σχ.45α).**
- **Η ευθεία x'x έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία ε$\perp$x'x και την ίδια τη x'x (σχ.45β).**
- **Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα δ κάθε διαμέτρου του ΑΒ (σχ.45γ).**
- **Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους ΑΔ (σχ.45δ).**
- **Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του (σχ.45ε).**



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω μια ευθεία ε και ένα τμήμα ΑΒ του οποίου το ένα άκρο Α είναι σημείο της ε. Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς την ε είναι το τμήμα ΑΒ' ίσο με το ΑΒ, όπου Β' το συμμετρικό του Β ως προς την ε.



Σχήμα 46

Απόδειξη

Το συμμετρικό του Α ως προς την ε είναι το ίδιο το Α, αφού το Α είναι σημείο της ε. Επειδή η ε είναι μεσοκάθετος του ΒΒ', είναι ΑΒ' = ΑΒ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΒ' η ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. 'Εστω σημείο Μ του ΑΒ. Φέρουμε ΜΚ $\perp$ ε η οποία όταν προεκταθεί τέμνει το ΑΒ' στο Μ'. Στο τρίγωνο ΑΜΜ' η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΜ' = ΚΜ, οπότε το Μ' είναι συμμετρικό του Μ. Όμοια αποδεικνύεται ότι το συμμετρικό κάθε σημείου του ΑΒ' είναι σημείο του ΑΒ. Άρα τα ΑΒ, ΑΒ' είναι συμμετρικά ως προς την ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας των γραμμάτων: Α, Β, Δ, Η, Θ, Τ, Χ, Ψ.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο. Αν Α', Β', Γ' είναι τα συμμετρικά των Α, Β, Γ ως προς το κέντρο Ο αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' είναι συμμετρικά ως προς το Ο και ίσα.

3. Αν x'A'y' είναι η συμμετρική της γωνίας $x\hat{A}y$, ως προς κέντρο συμμετρίας ένα σημείο Ο, εξωτερικό της $x\hat{A}y$, τότε να αποδειχθεί ότι $x'\hat{A}'x' = x\hat{A}y$.

4. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ΒΓ είναι τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ.

5. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι άξονας συμμετρίας της.

6. Έστω ε, ε' δύο κάθετοι που τέμνονται στο Ο και ένα τυχαίο σημείο Μ. Αν Μ' είναι το συμμετρικό του Μ ως προς ε και Μ'' το συμμετρικό του Μ' ως προς ε', τότε να αποδείξετε ότι:

i) ΟΜ = ΟΜ'',

ii) τα σημεία Μ, Ο, Μ'' είναι συνευθειακά.

Ανισοτικές σχέσεις

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε την ανισοτική σχέση που ισχύει μεταξύ μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου και των απέναντι γωνιών του και την ανισοτική σχέση πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου. Επίσης, παρουσιάζουμε την τριγωνική ανισότητα.

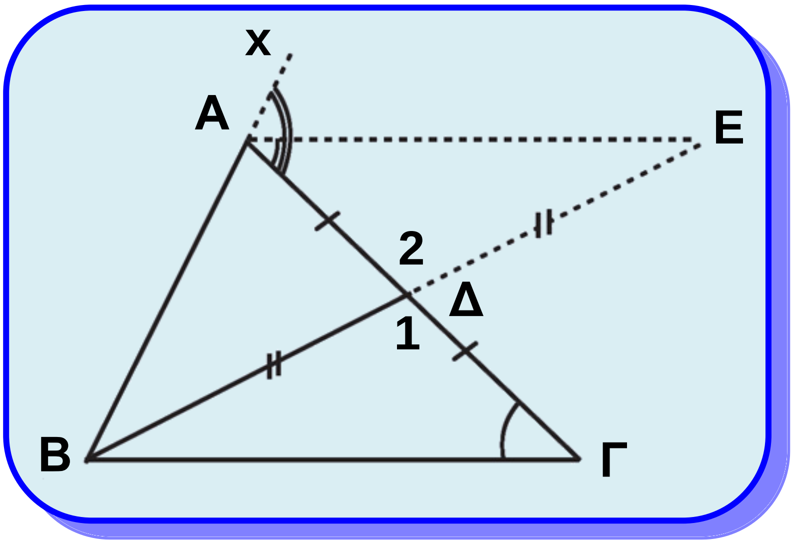
3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΒΔ (σχ.47) και στην προέκτασή της, προς το Δ, θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΔΕ = ΒΔ. Επειδή το Ε βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ έχουμε $\Gamma\hat{A}E < \Gamma\hat{A}x = \hat{A}_{\varepsilon\xi}$. Όμως τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΕΔΑ είναι ίσα γιατί έχουν: ΒΔ = ΔΕ, ΑΔ = ΔΓ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E$. Από την τελευταία ισότητα και την $\Gamma\hat{A}E < \hat{A}_{\varepsilon\xi}$ προκύπτει ότι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$.



Σχήμα 47

Πορίσματα

(i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

(ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180°.

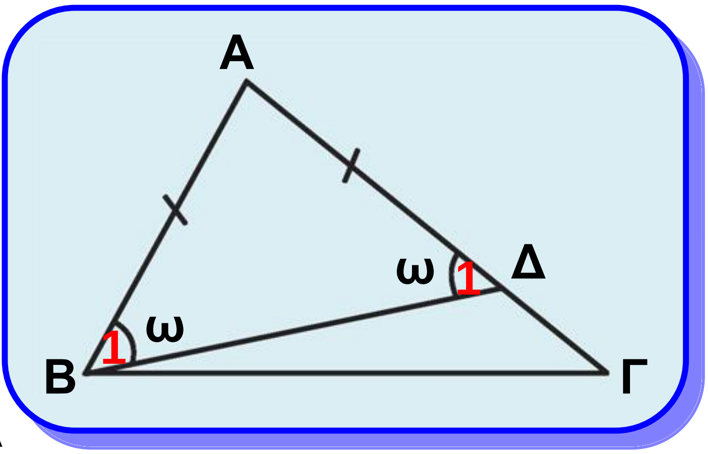
3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ (σχ.48). Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της ΑΓ, ώστε ΑΔ = ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία



Σχήμα 48

της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$ ενώ η $\hat{\Delta}_1$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \hat{\omega}$ και $\hat{\omega} > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί αν ήταν $\beta = \gamma$ ή $\beta < \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.

Πορίσματα

(i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

(ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

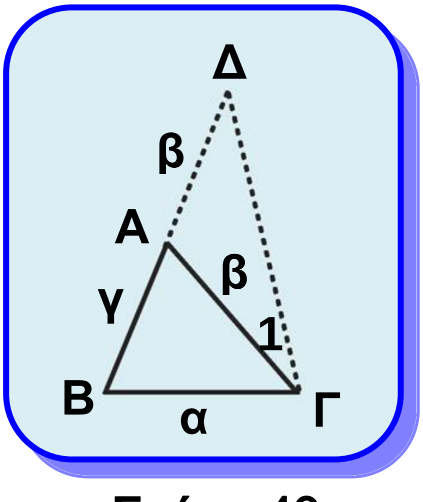
(iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

ΣΧΟΛΙΟ
Το παραπάνω πόρισμα (ii) είναι το αντίστροφο του πορίσματος I της § 3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής: ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

3.12 Τριγωνική ανισότητα

Γνωρίζουμε ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία που τα συνδέει. Αυτό εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα
Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.



Σχήμα 49

Απόδειξη
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $α < β + γ$ (σχ.49). Γι' αυτό προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ, προς το Α, κατά τμήμα ΑΔ = ΑΓ. Τότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές και η ΓΑ εσωτερική ημιευθεία της $\widehat{ΒΓΔ}$, οπότε έχουμε αντίστοιχα $\hat{Δ} = \hat{Γ}_1$ και $\hat{Γ}_1 < \widehat{ΒΓΔ}$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $\hat{Δ} < \widehat{ΒΓΔ}$, από την οποία σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι ΒΓ < ΒΔ ή $α < β + γ$. Όμοια προκύπτει ότι $β < γ + α$ και $γ < α + β$. Από τις ανισότητες αυτές, αντίστοιχα προκύπτει ότι $α > β - γ$,

αν β ≥ γ ή α > γ - β, αν γ ≥ β, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο. Επομένως:

$$\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma,\ \beta \geq \gamma$$

Πορίσμα

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΣΧΟΛΙΟ

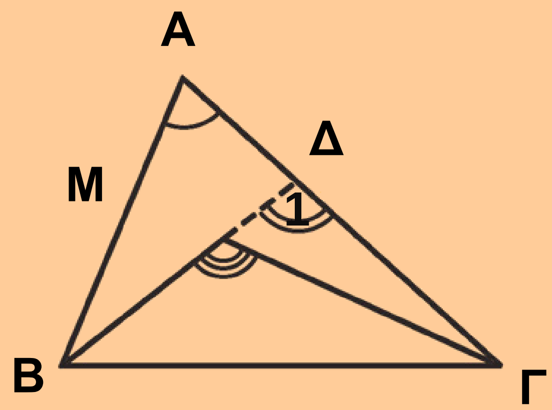
Γενικότερα ισχύει: Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από κάθε τεθλασμένη γραμμή που έχει άκρα τα Α και Β.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

(i) $\widehat{\mathrm{B M \Gamma}} > \hat{\mathrm{A}}$

(ii) ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ +ΑΓ.



Σχήμα 50

Απόδειξη

(i) Έστω Δ (σχ.50) το σημείο τομής της προέκτασης του ΒΜ με την ΑΓ. Η γωνία $\widehat{\mathrm{B M \Gamma}}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ και επομένως $\widehat{\mathrm{B M \Gamma}} > \hat{\Delta}_1$.Αλλά η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 > \hat{\mathrm{A}}$. Άρα θα είναι και $\widehat{\mathrm{B M \Gamma}} > \hat{\mathrm{A}}$.

(ii) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΜΓΔ προκύπτουν αντίστοιχα οι ανισότητες

ΜΒ + ΜΔ < ΑΒ + ΑΔ και ΜΓ < ΜΔ + ΔΓ.

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

ΜΒ + ΜΔ + ΜΓ < ΑΒ + (ΑΔ + ΔΓ) + ΜΔ ή

ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ + ΑΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

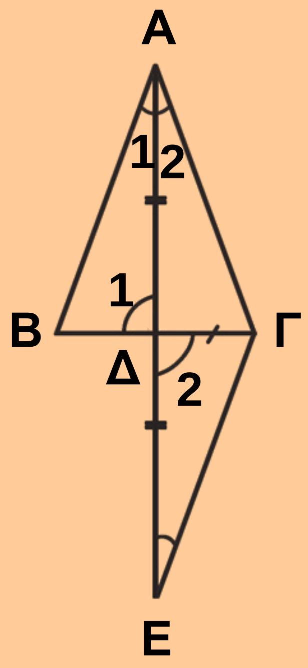
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

(i) το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος,

(ii) το τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος,

(iii) το τμήμα ΑΔ είναι ύψος,

τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.



Σχήμα 51

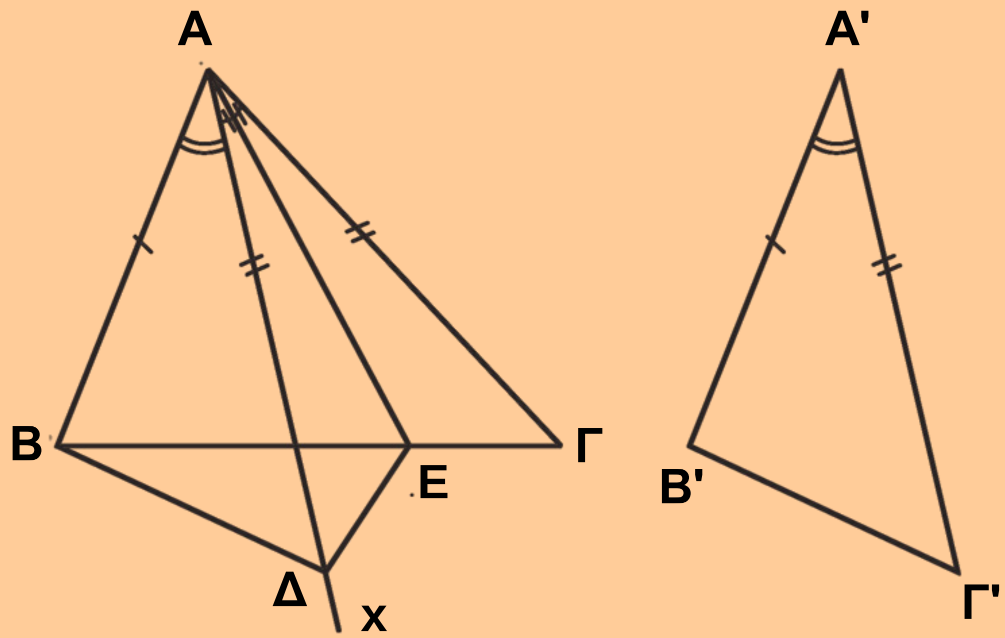
Λύση

Έστω ΑΔ διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ (σχ.51). Προεκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα (ΒΔ = ΔΓ, ΑΔ = ΔΕ, $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν). Άρα ΑΒ = ΓΕ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{E}$.

Από την $\hat{A}_1 = \hat{E}$ προκύπτει ΑΓ = ΓΕ (2), αφού ΑΔ διχοτόμος, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{E}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΒ = ΑΓ. Αν ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος ή ύψος και διχοτόμος τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.



Σχήμα 52

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με ΑΒ = Α'Β', ΑΓ = Α'Γ' και $\hat{Α} > \hat{Α}'$ (σχ.52). Θα αποδείξουμε ότι ΒΓ > Β'Γ'. Αφού $\hat{Α} > \hat{Α}'$, υπάρχει εσωτερική ημιευθεία Αx της $\hat{Α}$ τέτοια, ώστε $Β\hat{Α}x = \hat{Α}'$. Πάνω στην Αx θεωρούμε σημείο Δ, ώστε ΑΔ = Α'Γ'. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Γ' είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα, ΒΔ = Β'Γ'. Φέρουμε κατόπιν τη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας $Δ\hat{Α}Γ$, οπότε σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα τα ΑΔΕ και ΑΓΕ, άρα ΕΔ = ΕΓ. Στο τρίγωνο ΒΔΕ, έχουμε από την τριγωνική ανισότητα ότι

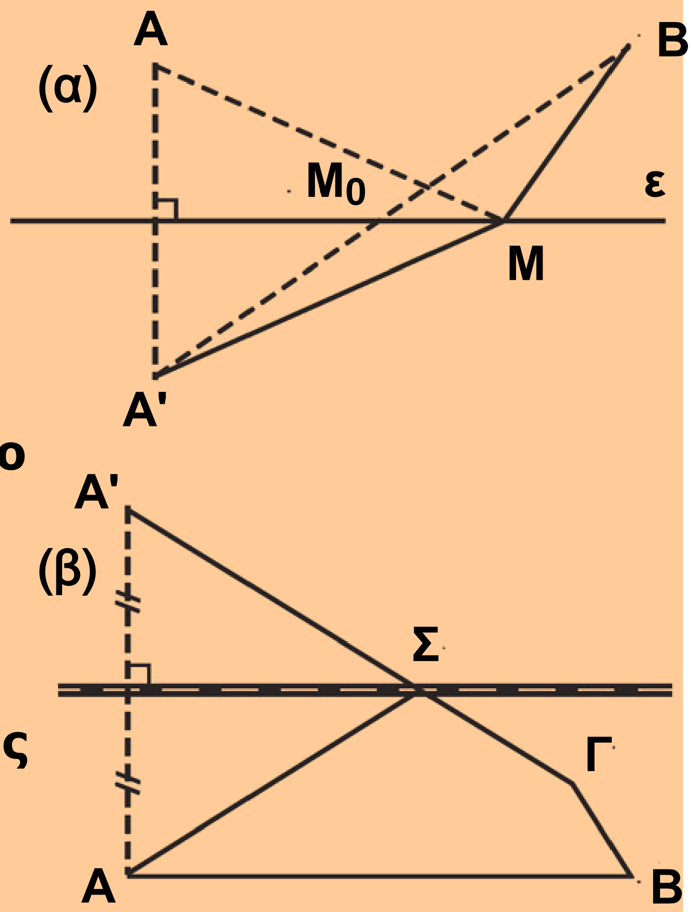
ΒΔ < ΒΕ + ΕΔ ή ΒΔ < ΒΕ + ΕΓ ή Β'Γ' < ΒΓ.

Αντίστροφα. **Ας θεωρήσουμε ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ΑΒ = Α'Γ', ΑΓ = Α'Γ' και ΒΓ > Β'Γ'.**

Αν ήταν $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε θα είχαμε ότι ΒΓ = Β'Γ', ενώ αν ήταν $\hat{A} < \hat{A}'$, θα είχαμε ότι Β'Γ' < ΒΓ, που είναι άτοπο. Επομένως, $\hat{A} > \hat{A}'$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Δίνεται μια ευθεία ε, δύο σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος της και το συμμετρικό Α' του Α ως προς την ε (Σχ.53α).
(i) Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ε, να αποδειχθεί ότι ΜΑ + ΜΒ = =ΜΑ' + ΜΒ ≥ Α'Β. Πότε το άθροισμα ΜΑ + ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή;
(ii) Στα σημεία Α, Β, Γ (σχ.53β) βρίσκονται τρεις κωμοπόλεις. Κοντά σε αυτές διέρχεται σιδηροδρομική γραμμή, πάνω στην οποία πρόκειται να κατασκευαστεί σταθμός Σ. Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευασθεί ο σταθμός, ώστε ο δρόμος ΑΣΓΒ να είναι ο ελάχιστος δυνατός;



Σχήμα 53

Λύση

(i) Επειδή το Α' είναι συμμετρικό του Α ως προς την ε, η ε είναι μεσοκάθετος του ΑΑ', οπότε ΜΑ = = ΜΑ' και επομένως ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ' + ΜΒ (1). Αν το Μ δεν είναι σημείο του τμήματος Α'Β από το τρίγωνο ΜΑ'Β, έχουμε

ΜΑ' + ΜΒ > Α'Β (2), ενώ αν το Μ είναι σημείο του Α'Β' έχουμε ΜΑ' + ΜΒ = Α'Β (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ' + ΜΒ ≥ Α'Β και ότι το ΜΑ + ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή Α'Β, όταν $M = M_0$, όπου M_0 το σημείο τομής της ε με το Α'Β.
(ii) Όμοια με το (i).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

i) Η εξωτερική γωνία $\hat{A}_{εξ}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{Γ}$. Σ Λ

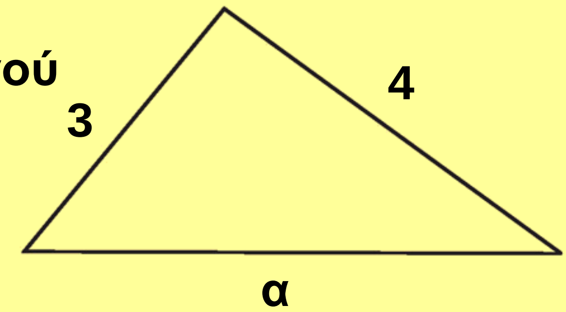
ii) Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{εξ}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερη από τη $\hat{Γ}$. Σ Λ

iii) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Σ Λ

iv) Αν β > γ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα. Σ Λ

v) Αν β = γ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα. Σ Λ

2. Για το τρίγωνο του διπλανού σχήματος ισχύει:



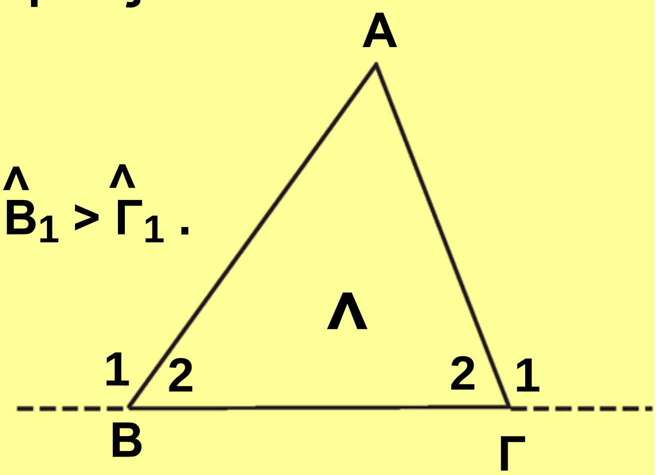
α. α = 7 β. α = 1
γ. 1 < α < 7 δ. α > 7
ε. 0 < α < 1

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \frac{\gamma}{3}$ και $\beta = \frac{3\gamma}{5}$;
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$.
Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90^\circ$.



2. Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν ΑΒ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΓΔ. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
i) Τι είδους γωνία είναι η $\hat{B}$;
ii) Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή Α τέμνει την ευθεία ΒΓ, σε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ημιευθείας Βx που περιέχει το Α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των Β και Α, ταυτίζεται με το Α ή βρίσκεται μετά το Α, αντίστοιχα.

5. Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΜ < ΑΒ.

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΑΒ.

7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι ΒΟ = ΓΟ και ΟΛ = ΟΜ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

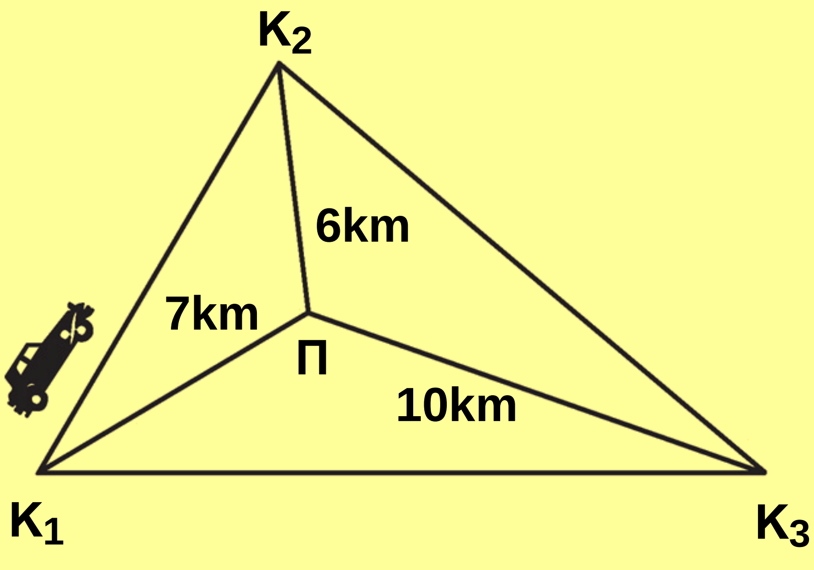
8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

9. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,

ii) η ΑΙ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

10. Οι κωμοπόλεις K_1, K_2, K_3 απέχουν από τη πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη K_1 και ακολουθώντας τη διαδρομή $K_1 K_2 K_3 K_1$ επιστρέφει στην K_1. Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Αποδεικτικές Ασκήσεις.

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Τι ισχύει όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;

2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι ΑΜΓ > ΑΜΒ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$,

ii) $\frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$

iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$

4. Έστω κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι ΣΑ ≤ ΣΜ ≤ ΣΒ. (Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).

5. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος δ_α τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β, να αποδείξετε ότι:

i) ΑΓ = 2ΑΒ,

ii) ΑΒ < ΒΓ.

6. Έστω κύκλος (Ο,R) και δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Αν $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι ΑΒ < 2ΓΔ.

7. Να αποδείξετε ότι σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα.

Σύνθετα Θέματα

1. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του.

i) Να αποδείξετε ότι

$$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}$$

ii) Για ποια θέση του Ο το άθροισμα ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ γίνεται ελάχιστο;

2. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:**

i) το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές,

ii) η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ διέρχεται από το σημείο Α.

3. **Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:**

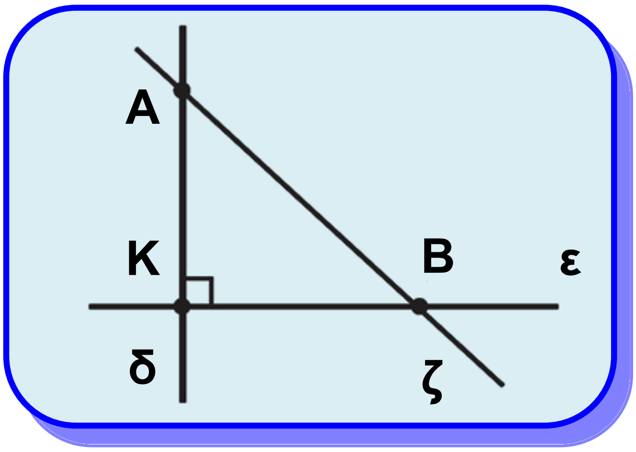
i) κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,

ii) ΑΓ + ΒΔ > ΑΒ +ΓΔ και ΑΓ + ΒΔ > ΑΔ + ΒΓ,

iii) το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.

4. **Στο εσωτερικό ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Οx, Οy τα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2ΟΓ.**

3.13 Κάθετες και πλάγιες

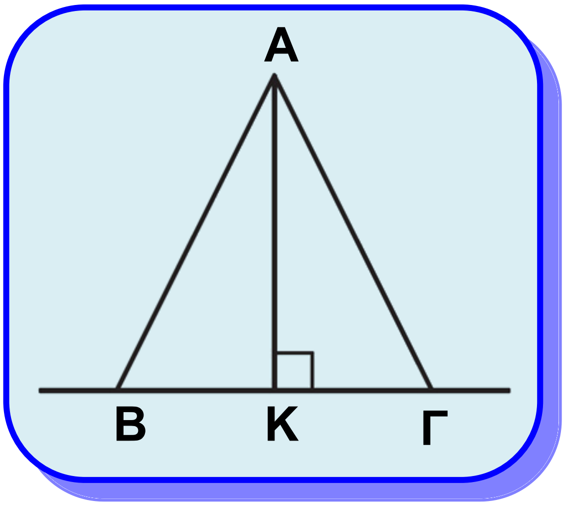


Σχήμα 54

Έστω μια ευθεία ε (σχ.54) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α φέρουμε προς την ε την κάθετο δ και μια πλάγια ζ. Οι ευθείες δ και ζ τέμνουν την ε στα Κ και Β αντίστοιχα. Το Κ, όπως είναι γνωστό, λέγεται προβολή του Α πάνω στην ε ή ίχνος της καθέτου δ πάνω στην ε. Το Β λέγεται ίχνος της ευθείας ζ ή του τμήματος ΑΒ πάνω στην ε.

Θεώρημα Ι

Αν δυο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.



Σχήμα 55

Απόδειξη

Έστω ΑΒ και ΑΓ δύο ίσα πλάγια τμήματα και ΑΚ το κάθετο τμήμα (σχ.55). Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ΑΚ ύψος του, επομένως θα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΒ = ΚΓ.

Αντίστροφα. **Έστω ότι ΚΒ = ΚΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα (εφαρμογή §3.12) το τρίγωνο είναι ισοσκελές δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.**

Θεώρημα ΙΙ

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:

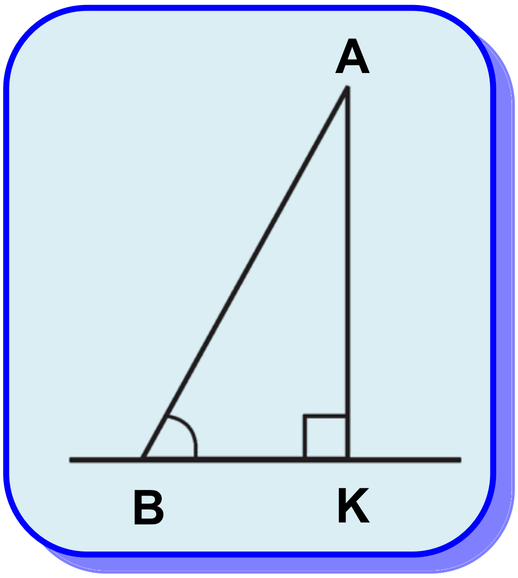
(i) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.

(ii) Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

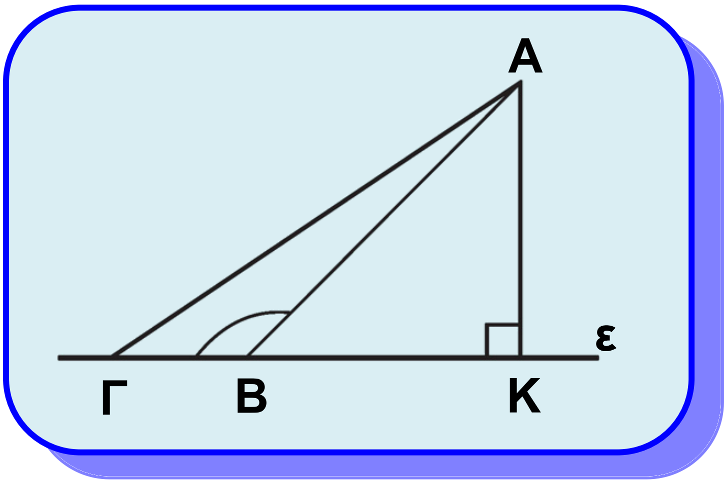
Απόδειξη

(i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ (σχ.56), η γωνία $\hat{K}$ είναι η μεγαλύτερη ως ορθή. Επομένως η πλευρά ΑΒ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και, άρα, ΑΒ > ΑΚ.

(ii) Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Θεωρούμε την κάθετο ΑΚ στην ε και δύο πλάγια τμήματα ΑΒ, ΑΓ, όπου Β, Γ σημεία της ε (σχ.57).



Σχήμα 56



Σχήμα 57

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο ίχνη Β, Γ των πλάγιων τμημάτων ανήκουν στην ίδια ημιευθεία που ορίζει το σημείο Κ. Ας υποθέσουμε ότι ΚΓ > ΚΒ (σχ.57). Θα αποδείξουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αφού το Β είναι μεταξύ των Κ, Γ, η $\widehat{ΑΒΓ}$ είναι εξωτερική του ορθογώνιου τριγώνου ΚΑΒ, επομένως $\widehat{ΑΒΓ} > \widehat{Κ} = 1L$, δηλαδή η ΑΒΓ είναι αμβλεία. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΓ βρίσκεται απέναντι από την $\widehat{ΑΒΓ}$, συνεπώς είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΑΓ>ΑΒ.

Αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αν ήταν ΚΓ = ΚΒ, τότε θα είχαμε ΑΓ = ΑΒ, που είναι άτοπο. Αν ΚΓ < ΚΒ, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θα είχαμε ότι ΑΓ < ΑΒ, που είναι επίσης άτοπο. Επομένως ΚΓ > ΚΒ.

ΣΧΟΛΙΟ

Την ιδιότητα (i) του Θεωρήματος ΙΙ, που έχει το κάθετο τμήμα συνήθως εκφράζουμε και ως: η απόσταση ενός σημείου Α από μία ευθεία ε είναι μικρότερη από την απόσταση του Α από τυχόν σημείο της ευθείας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Αν ΑΒ, ΑΓ πλάγια τμήματα ως προς μια ευθεία ε και ΑΚ το κάθετο τμήμα, τότε:

1. Συμπληρώστε τις παρακάτω ισοδυναμίες

i) ΑΒ = ΑΓ $\Leftrightarrow$ ....

ii) ΑΒ > ΑΓ $\Leftrightarrow$ ....

2. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i)	ΑΒ > ΑΚ	Σ	Λ
ii)	ΑΒ = ΑΚ	Σ	Λ
iii)	ΑΒ < ΑΚ	Σ	Λ

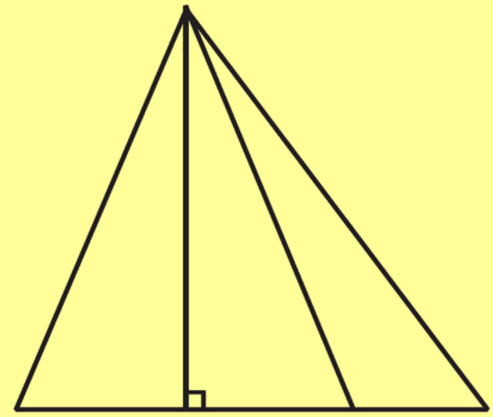
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Α, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) ΔΕ < ΕΒ,

ii) ΔΕ < ΒΓ.

2. Στο διπλανό σχήμα το ΑΗ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ.



3. Δίνεται τμήμα ΑΒ, σημείο Ρ της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ε που διέρχεται από το Α.

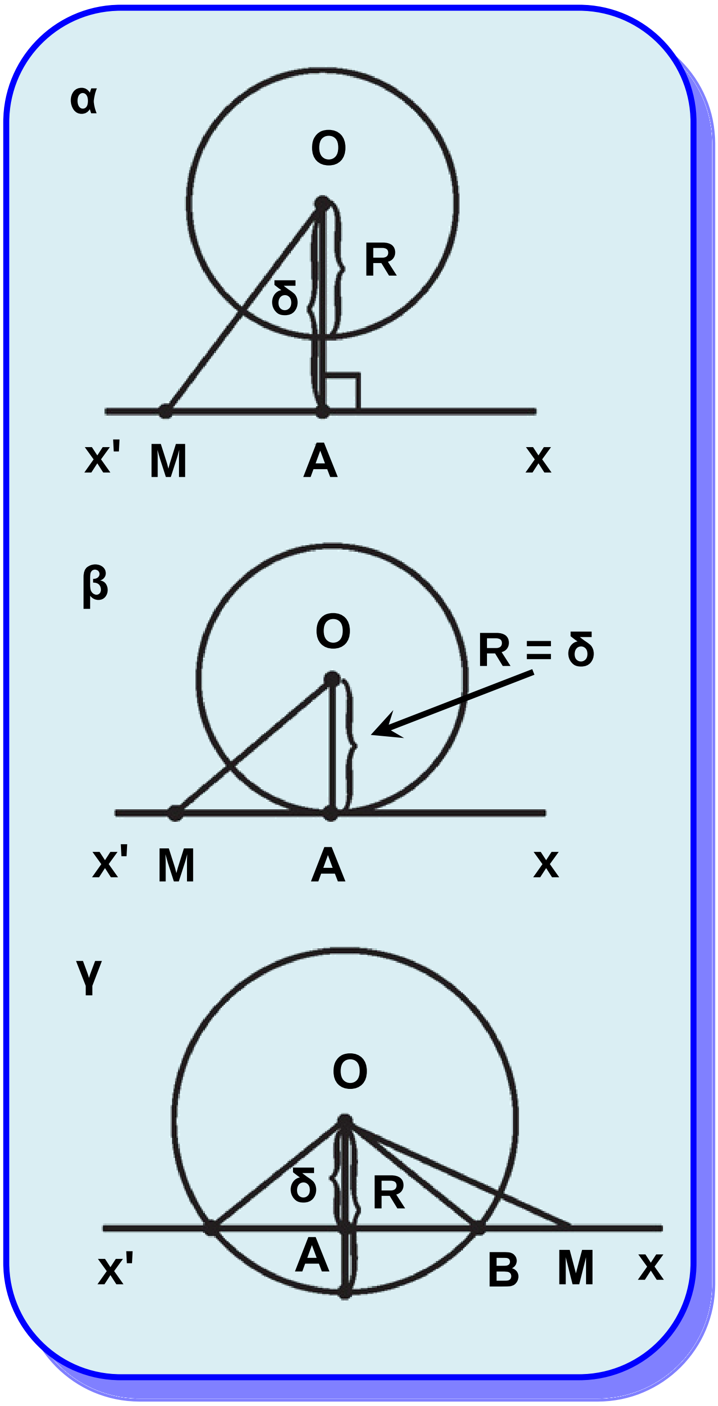
i) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του Ρ από την ευθεία ε και το σημείο Β.

ii) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε, ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

Ευθεία και κύκλος

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο,R) μια ευθεία x'x και την απόσταση δ = ΟΑ του κέντρου Ο από την x'x (σχ.58). Μεταξύ των δ και R ισχύει μία από τις σχέσεις: δ > R,



Σχήμα 58

δ = R και δ < R. Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία καθεμίας από τις σχέσεις αυτές.

•Έστω δ > R (σχ.58α). Τότε το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο Μ της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού ΟΜ > ΟΑ > R. Επομένως, η x'x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εξωτερική** ευθεία του κύκλου.

•Έστω δ = R (σχ.58β). Τότε το Α είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο Μ της x'x είναι εξωτερικό σημείο του (Ο,R), αφού ΟΜ > ΟΑ = R. Επομένως, η x'x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εφαπτόμενη** του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται **σημείο επαφής** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία x'x εφάπτεται του κύκλου (Ο,R) στο σημείο Α. Είναι φανερό ότι:

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

• Έστω δ < R (σχ.58γ). Τότε το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Πάνω στην ημιευθεία Αχ θεωρούμε ένα σημείο Μ, ώστε ΑΜ = R. Τότε το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, αφού ΟΜ > ΑΜ = R. Έτσι η ημιευθεία Αχ, αφού διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο, το Α, και ένα εξωτερικό, το Μ, είναι φανερό ότι έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β. Όμοια και η ημιευθεία Αχ' έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β'. Επομένως, η χ'χ έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία χ'χ, λέγεται **τέμνουσα του κύκλου** και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία **τομής** της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία **τέμνει** τον κύκλο.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

- **Αν δ > R, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.**
- **Αν δ = R, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.**
- **Αν δ < R, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.**

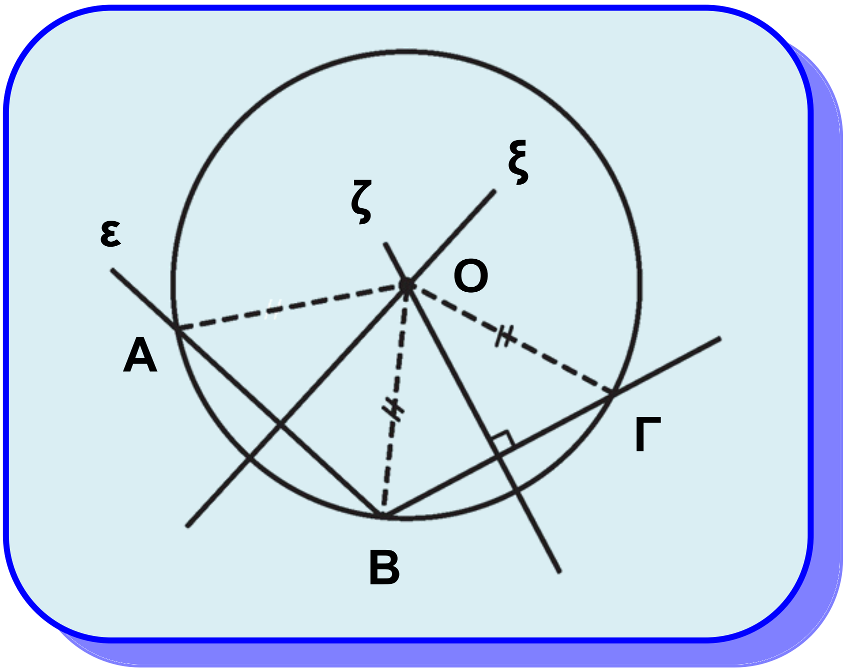
Με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύονται και τα αντίστροφα των παραπάνω συμπερασμάτων. Με την ίδια επίσης μέθοδο αποδεικνύεται και το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι μια ευθεία ε και ένας κύκλος (Ο,ρ) έχουν τρία κοινά σημεία, τα Α, Β, Γ (σχ. 59). Επειδή ΟΑ = ΟΒ (= ρ) και ΟΒ = ΟΓ (= ρ), οι μεσοκάθετοι ξ, ζ των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, διέρχονται από το Ο. Έτσι από το σημείο Ο έχουμε δύο διαφορετικές κάθετες στην ε τις ξ, ζ, που είναι άτοπο.



Σχήμα 59

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι τρία οποιαδήποτε σημεία ενός κύκλου δεν είναι συνευθειακά. Στην § 4.5 θα δούμε ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένας κύκλος, που είναι και μοναδικός.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

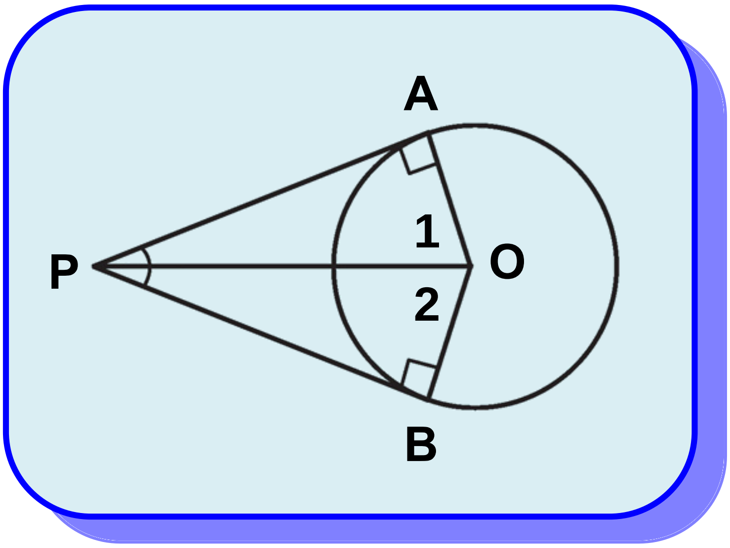
Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο Ρ. Στην § 6.7 θα δούμε ότι από το Ρ φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ λέγονται **εφαπτόμενα τμήματα** του κύκλου από το σημείο Ρ και η ευθεία ΡΟ **διακεντρική ευθεία** του σημείου Ρ. Ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα ΙΙ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ (σχ.60) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΡ κοινή και ΟΑ = ΟΒ (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε ΡΑ = ΡΒ.



Σχήμα 60

Πόρισμα

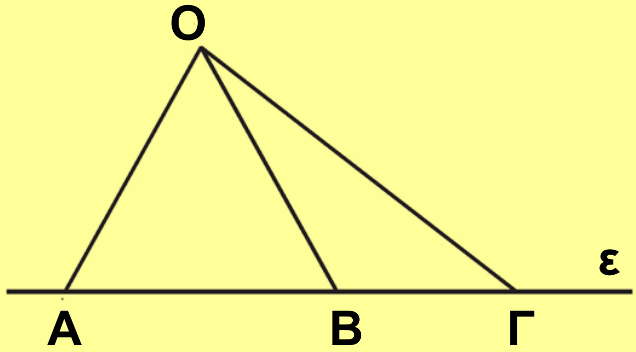
Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:
(i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
(ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

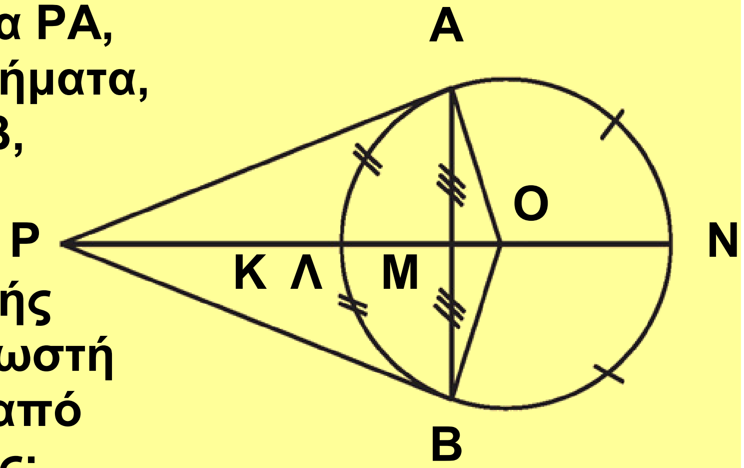
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Πότε μια ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;

2. Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



3. Στο διπλανό σχήμα τα PA, PB είναι εφαπτόμενα τμήματα, η PK διχοτόμος της APB, τα Λ, Ν μέσα των τόξων ΑΛΒ, ΑΝΒ αντίστοιχα και το Μ μέσο της χορδής ΑΒ. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:



i) PA = PB.	Σ	Λ
ii) H PK διέρχεται από το Ο.	Σ	Λ

iii) Η ΟΜ διέρχεται από τα Ρ, Λ, Ν. **Σ Λ**

iv) Η προέκταση του ΛΜ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{APB}$, $\hat{AOB}$ και το τόξο $\overset{\frown}{ANB}$. **Σ Λ**

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.

2. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ), μία διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 του κύκλου στα Α,Β. Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις ε_1, ε_2 στα Γ, Δ, να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma O \Delta} = 90^\circ$.

3. Από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ,Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΓΔ.

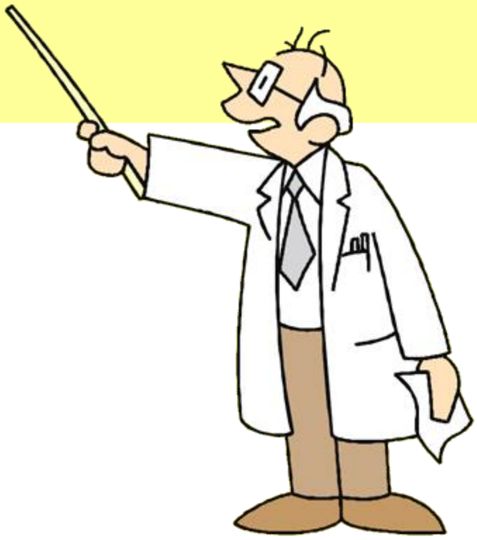
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.

2. Από σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου (Ο,R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ,ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{AM\Gamma}$ είναι τριπλάσια της $\hat{BM\Gamma}$.

3. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι

ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τιμή, ΟΡ να αποδείξετε ότι $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ

Κεφάλαιο 3ο