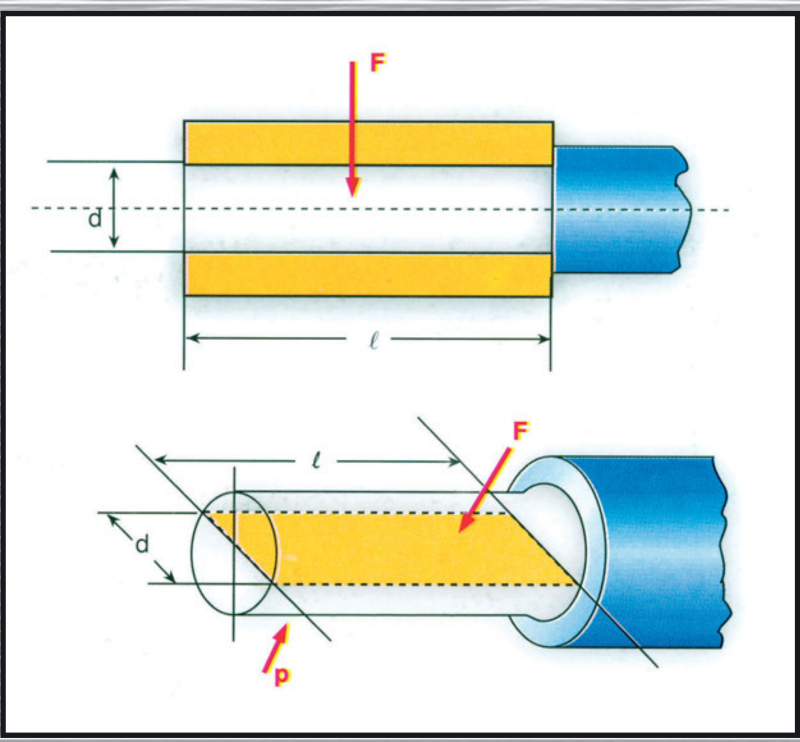
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ – ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Β΄ ΕΠΑ.Λ.

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ – ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

- **Νικόλαος Ροζάκος**
- **Πέτρος Σπυρίδωνος**
- **Δημήτρης Παπαγεωργίου**

ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ:

- **Νικόλαος Ροζάκος**

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΚΡΙΣΗΣ:

- **Περικλής Μπούρκας**
- **Δημήτριος Ευταξιόπουλος**
- **Εμμανουήλ Παπαδάκης**

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

- **Γεώργιος Ελευθερόπουλος**

ATELIER:

- **COSMOSWARE**

Ενέργεια 1.1.α: «Προγράμματα - Βιβλία»

- Επιστημονικός Υπεύθυνος της Ενέργειας:
  Θεόδωρος Εξαρχάκος
  Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών
  Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο 1.1.α - ΤΕΕ-14:
«Σύνταξη Προγραμμάτων Σπουδών και Παραγωγή Βιβλίων και Βοηθητικών Εκπαιδευτικών Μέσων για τα Τεχνικά - Επαγγελματικά Εκπαιδευτήρια»

- Επιστημονικός Υπεύθυνος του Έργου:
  Γεώργιος Βούτσινος
  Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

- Επιστημονικός Υπεύθυνος του Μηχανολογικού Τομέα:
  Νικόλαος Ροζάκος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ν. Ροζάκος • Π. Σπυρίδωνος • Δ. Παπαγεωργίου

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ – ΑΝΤΟΧΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Β΄ ΕΠΑ.Λ.

ΤΟΜΕΑΣ
ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το βιβλίο που διαβάζετε αναφέρεται στις λύσεις των ασκήσεων που προτείνονται στο αντίστοιχο βιβλίο θεωρίας με τίτλο “Τεχνική Μηχανική – Αντοχή των Υλικών”.

Μην καταφεύγετε στο βιβλίο αυτό με ευκολία.

- Πριν προσπαθήσετε να λύσετε μία άσκηση μελετήστε καλά την αντίστοιχη θεωρία και προσπαθήστε, και με τη βοήθεια του καθηγητή σας, να κατανοήσετε και να μάθετε όσο γίνεται καλύτερα τις έννοιες που εμπεριέχονται σε αυτή.
- Μάθετε πολύ καλά τους τύπους. Έμαθα καλά τους τύπους σημαίνει:
  - ✓ Γνωρίζω την έννοια που εκφράζουν,

✓ Γνωρίζω τι συμβολίζει το κάθε σύμβολο,

✓ Γνωρίζω τις αντίστοιχες μονάδες μέτρησης.

Πιο συγκεκριμένα:

$$\text{Ο τύπος } \sigma = \frac{F}{A}$$

➡ Εκφράζει την έννοια της τάσης, την οποία μπορώ να διατυπώνω,

➡ Το σύμβολο (σ) εκφράζει την τάση της οποίας οι μονάδες είναι:

N/mm^2, N/cm^2, daN/cm^2 κ.λ.π.

➡ Το σύμβολο (F) συμβολίζει τη δύναμη ή το φορτίο της οποίας οι μονάδες είναι:

N, daN, KN κ.λ.π.

➡ Το σύμβολο (A) συμβολίζει τη διατομή (επιφάνεια, εμβαδόν), επί της οποίας αναπτύσσεται η τάση (σ). Οι μονάδες της διατομής είναι:
mm^2, cm^2 κ.λ.π.

Μετά από την παραπάνω προσπάθεια, είστε έτοιμοι για τη λύση των αντίστοιχων ασκήσεων.

Εάν παρά ταύτα συναντήσετε δυσκολίες δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι είναι δύσκολες οι ασκήσεις. Σημαίνει συνηθέστερα, ή σχεδόν πάντα, ότι κάτι από τη θεωρία δεν κατανοήσατε ή δεν θυμάστε. Επαναλάβετε την προσπάθεια από την αρχή με αρωγό, μην το ξεχνάτε αυτό, τον καθηγητή σας. Είναι βέβαιο ότι θα τα καταφέρετε. Εάν παρ' όλα αυτά συναντήσετε και πάλι δυσκολίες, καταφύγετε στο βιβλίο των λύσεων, υπό τις εξής προϋποθέσεις:

- ότι θα μελετήσετε τις λύσεις των ασκήσεων και όχι απλώς θα τις διαβάσετε,
- ότι θα εντοπίσετε τις αδυναμίες σας και θα προσπαθήσετε να τις αναπληρώσετε.

Οι συγγραφείς

Οι αναγνώστες, οι οποίοι θα διαπιστώσουν πιθανές παραλείψεις, αναγκαίες προσθήκες ή επιθυμούν να διατυπώσουν γενικότερες παρατηρήσεις, που θα βελτιώσουν το βιβλίο, στην επόμενη έκδοσή του παρακαλούμε να απευθύνονται προς το: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τομέας Μηχανολογικός, Μεσογείων 396, Αγία Παρασκευή 153 41, Αθήνα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α

ΜΕΡΟΣ Β

Μέρος α΄

κεφάλαιο 1

ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

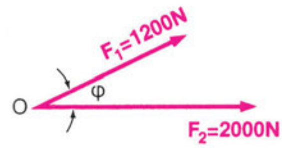
ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να προσδιοριστεί η συνισταμένη των δυνάμεων F_1 και F_2 που ενεργούν στο κοινό σημείο Ο, υπό γωνία 30°.



Λύση

Δίνονται

$F_1 = 1200$ N

Σ = 2000 N

φ = 30°

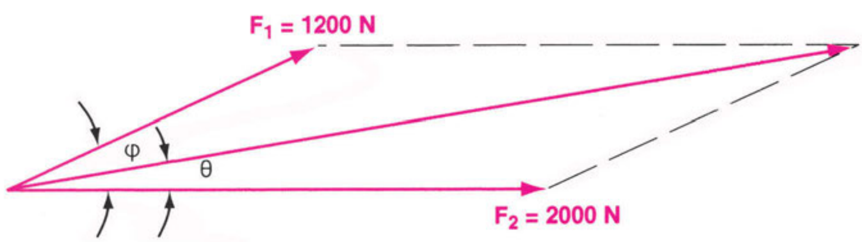
$συν30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ημ30° = \frac{1}{2}$

Ζητούνται

α) Το μέτρο της συνισταμένης (Σ)

β) Η γωνία (θ)



α) $Σ = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot συνφ}$

$$Σ = \sqrt{1200^2\ N^2 + 2000^2\ N^2 + 2 \cdot 1200\ N \cdot 2000\ N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Σ= 3098 N

β) $ημ\ θ = \frac{F_1}{Σ} \cdot ημφ$

$$ημ\ θ = \frac{1200\ N}{3098\ N} \cdot \frac{1}{2}$$

ημ θ = 0,19

θ = 11,16°

Απάντηση

α) Η συνισταμένη είναι Σ = 3098N

β) Η γωνία είναι θ = 11,16°

άσκηση 2

Να αποδειχτεί ότι η συνισταμένη των δυνάμεων $F_1 = F_2 = 2N$ μειώνεται από 4 N έως 0 N, όταν η γωνία υπό την οποία ενεργούν οι δυνάμεις αυξάνεται από 0° έως 180° (και παίρνει διαδοχικά τις τιμές 0°, 60°, 120°, 180°).

Λύση

Δίνονται

$F_1 = F_2 = 2N$

$\Sigma = 4\ N \div 0\ N$

$\varphi = 0° \div 180°$

(φ = 0°, 60°, 120°, 180°)

Ζητούνται

α) Η Σ για φ = 0°

β) Η Σ για φ = 60°

γ) Η Σ για φ = 120°

δ) Η Σ για φ = 180°

α) Η συνισταμένη Σ για φ = 0° (συν φ = 1).

$\Sigma = F_1 + F_2 = 2\ N + 2\ N$

$\Sigma = 4\ N$

β) Η συνισταμένη Σ για φ = 60° (συν φ = 1/2).

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_1 \cdot F_2}$$

$$\Sigma = \sqrt{2^2\ N^2 + 2^2\ N^2 + 2N \cdot 2N}$$

$$\Sigma = \sqrt{12N^2}$$

$$\Sigma = 2\sqrt{3}\ N$$

γ) Η συνισταμένη Σ για φ = 120° (συν φ = $-\frac{1}{2}$).

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - F_1 \cdot F_2}$$

$$\Sigma = \sqrt{2^2\ N^2 + 2^2\ N^2 - 2N \cdot 2N}$$

$$\Sigma = \sqrt{4N^2}$$

$$\Sigma = 2N$$

δ) Η συνισταμένη Σ για φ = 180° (συν φ = - 1).

$\Sigma = F_1 - F_2$

$\Sigma = 2\ N - 2\ N$

$\Sigma = 0$

Απάντηση

Η συνισταμένη είναι:

α) Για φ = 0° $\quad$ ***Σ = 4N***

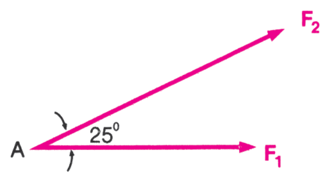
β) Για φ = 60° $\quad$ ***Σ = 2 $\sqrt{3}$N***

γ) Για φ = 120° $\quad$ ***Σ = 2N***

δ) Για φ = 180° $\quad$ ***Σ = 0***

άσκηση 3

Στο σημείο Α ενός σώματος ενεργούν δύο δυνάμεις 80 Ν και 100 Ν των οποίων οι διευθύνσεις σχηματίζουν γωνία 25°. Να προσδιορίσετε το μέτρο και τη διεύθυνση της συνισταμένης με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.



Λύση

Δίνονται

$F_1 = 80$ N

$F_2 = 100$ N

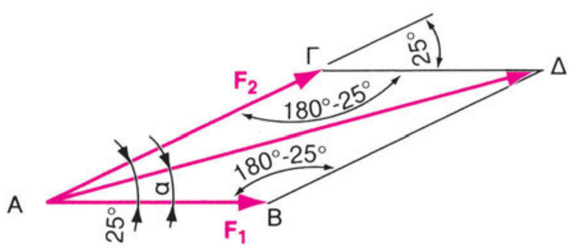
$\varphi = 25°$

Ζητούνται

Το μέτρο και η διεύθυνση της Σ

α. Με τη γραφική μέθοδο

β. Με την αναλυτική μέθοδο



α) Με τη γραφική μέθοδο:

Ορίζουμε κλίμακα: 1 cm $\triangleq$ 25 N

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 32 mm εκπροσωπεί τη δύναμη F_1. Το τμήμα ΑΓ = 40 mm, υπό γωνία 25° με το προηγούμενο εκπροσωπεί τη δύναμη F_2. Η διαγώνιος του παραλληλογράμμου ΑΔ είναι η συνισταμένη (Σ) που έχει:

Διεύθυνση: Τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου,

Μέτρο: 7,024 cm × 25 = 175,6 N   Σ = 175,6 N β) Με την αναλυτική μέθοδο

$$\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$\Sigma = \sqrt{80^2\ N^2 + 100^2\ N^2 + 2.80N \cdot 100N \cdot \sigma\upsilon\nu 25^o}$$

Σ = 175,79 N

$$\eta\mu\ \alpha = \frac{F_2}{\Sigma} \cdot \eta\mu\varphi$$

$$\eta\mu\ \alpha = \frac{100\,N}{175{,}79\,N} \cdot \eta\mu 25^o$$

ημ α = 0,2404

α = 14°

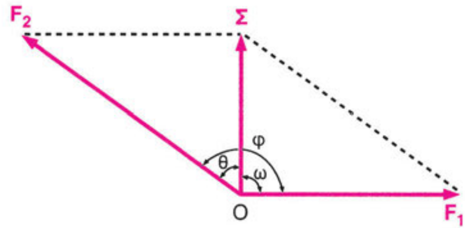
Απάντηση

α) Η συνισταμένη έχει διεύθυνση τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου και μέτρο Σ = 175,6Ν

β) Η διεύθυνση της συνισταμένης καθορίζεται από τη γωνία α = 14° και μέτρο της είναι Σ = 175,79Ν.

άσκηση 4

Μια δύναμη μέτρου $F_1 = 20\sqrt{3}$ N και μια δύναμη μέτρου F_2 ενεργούν στο σημείο Ο. Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων έχει μέτρο $\Sigma = 20$ N και είναι κάθετη στη δύναμη F_1. Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F_2 και η γωνία της με την F_1.



Λύση

Δίνονται

$F_1 = 20\sqrt{3}$ N

$\Sigma = 20$ N

$\omega = 90°$

Ζητούνται

α) Το μέτρο της δύναμης (F_2).

β) Η γωνία (φ) της F_2 με την F_1.

α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$F_2^2 = F_1^2 + \Sigma^2 \quad \text{και} \quad F_2 = \sqrt{F_1^2 + \Sigma^2}$$

$$F_2 = \sqrt{\left(20\sqrt{3}\,\mathrm{N}\right)^2 + \left(20\,\mathrm{N}\right)^2}$$

$$F_2 = \sqrt{1600\,\mathrm{N}^2}$$

$$F_2 = 40\ \mathrm{N}$$

β) $$\etaμθ = \frac{F_1}{F_2}$$

$$ημθ = \frac{20\sqrt{3}\,\mathrm{N}}{40\,\mathrm{N}}$$

$\etaμθ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $θ = 60°$

Επομένως:

$φ = 90° + 60°$

$φ = 150°$

Απάντηση

α) Η δύναμη δίνεται: $F_2 = 40$ N

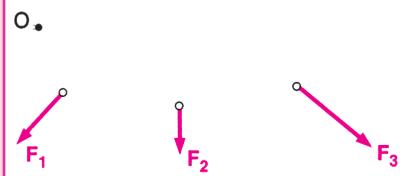
β) Η γωνία (φ) της F_2 με την F_1 είναι $φ = 150°$

κεφάλαιο 2

ΡΟΠΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

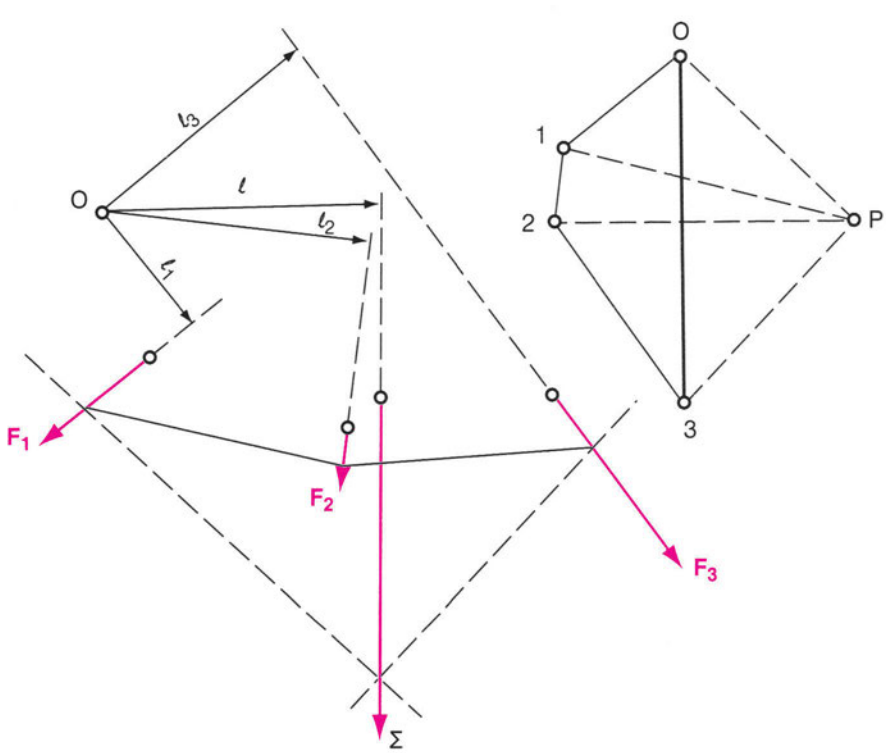
Να εφαρμόσετε το θεώρημα του VARIGNON στο σύστημα των δυνάμεων του σχήματος, ως προς το σημείο, Ο (κλίμακες: μηκών 1 cm ≙ 1 m, δυνάμεων 1 cm ≙ 15 N).



Λύση

Δίνονται
Οι θέσεις των δυνάμεων, η θέση του σημείου Ο και οι κλίμακες.

Ζητούνται
Να εφαρμοστεί το θεώρημα των ροπών



Με τη μέθοδο του δυναμοπολυγώνου προσδιορίζουμε τη συνισταμένη Σ.
Αν $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell$ οι αποστάσεις των δυνάμεων αντίστοιχα F_1, F_2, F_3, Σ, από το σημείο Ο, προκύπτουν:

$F_1 \cdot \ell_1 = 2 \cdot 15\ \text{N} \times 1{,}9 \cdot 1\ \text{m} = 57\ \text{Nm}$

$F_2 \cdot \ell_2 = 1 \cdot 15\ N \times 3{,}6 \cdot 1\ m = 54\ Nm$

$F_3 \cdot \ell_3 = 3 \cdot 15\ N \times 3{,}3 \cdot 1\ m = 148{,}5\ Nm$

$F_1 \cdot \ell_1 + F_2 \cdot \ell_2 + F_3 \cdot \ell_3 = 259{,}5\ Nm$

$\Sigma \cdot \ell = 4{,}7 \cdot 15\ N \times 3{,}7 \cdot 1\ m = 260{,}85\ Nm$

Απάντηση

Μετά την εφαρμογή του θεωρήματος των ροπών προκύπτει:

259,5 Nm και $\Sigma \cdot \ell = 260.85\ N \cdot m$

κεφάλαιο 3

ΣΥΝΘΕΣΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να προσδιοριστεί η συνισταμένη με την αναλυτική και τη γραφική μέθοδο των ομοευθειακών δυνάμεων, οι οποίες ενεργούν στο σώμα Ο:

F_1 = 2 daN
F_2 = 7 daN
F_3 = 4 daN
F_4 = 9 daN

Λύση

Δίνονται

F_1 = 2 daN
F_2 = 7 daN
F_3 = 4 daN
F_4 = 9 daN

Ζητούνται

Η συνισταμένη (Σ)
α) Με την αναλυτική μέθοδο
β) Με την γραφική μέθοδο

Η κοινή διεύθυνσή τους και η φορά τους

α) Με την αναλυτική μέθοδο
Δυνάμεις με φορά προς τα αριστερά (Σ1):

$$\Sigma_1 = F_1 + F_2 = 2 \text{ daN} + 7 \text{ daN} = 9 \text{ daN}$$

Δυνάμεις με φορά προς τα δεξιά (Σ_2):

$$\Sigma_2 = F_3 + F_4 = 4 \text{ daN} + 9 \text{ daN} = 13 \text{ daN}$$

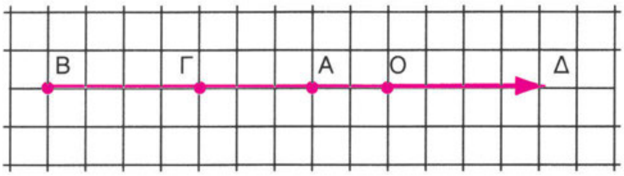
Τελική συνισταμένη (Σ):

$$\Sigma = \Sigma_2 - \Sigma_1 = 13 \text{ daN} - 9 \text{ daN}$$

$$\Sigma = 4 \text{ daN}$$

β) <u>Με τη γραφική μέθοδο</u>
Ορίζουμε κλίμακα 1 cm ≙ 1 daN.

Από ένα σημείο Ο σχεδιάζουμε διαδοχικά προς τα αριστερά τα διανύσματα F_1, F_2 που είναι αντίστοιχα τα ΟΑ και ΑΒ.



Από το Β σχεδιάζουμε διαδοχικά προς τα δεξιά τα διανύσματα F_3, F_4 που είναι αντίστοιχα τα ΒΓ και ΓΔ. Μετράμε το μήκος του διανύσματος ΟΔ, που προκύπτει ίσο με 4 cm, δηλαδή βάσει της κλίμακας που καθορίσαμε: Σ = 4 daN.

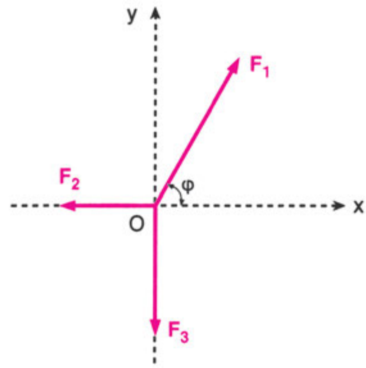
Απάντηση

α) Σ = 4 daN

β) Σ = 4 daN

άσκηση 2

Να βρεθεί το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων F_1, F_2, F_3 που ενεργούν στο ίδιο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα, όταν $F_1 = 50N$, $F_2 = 10N$, $F_3 = 20\sqrt{3}$ N και φ = 60°



Λύση

Δίνονται

$F_1 = 50$ N

$F_2 = 10$N

$F_3 = 20\sqrt{3}$ N

$\varphi = 60°$

Ζητούνται

Το μέτρο της συνισταμένης (Σ).

Αναλύουμε την F_1 στις F_{1x} και F_{1y}:

$\sigma\upsilon\nu\ \varphi = \dfrac{F_{1x}}{F_1}$ $\qquad$ $\eta\mu\ \varphi = \dfrac{F_{1y}}{F_1}$

$F_{1x} = F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\ \varphi$ $\qquad$ $F_{1\psi} = F_1 \cdot \eta\mu\ \varphi$

Υπολογίζουμε τα μέτρα της συνισταμένης στους άξονες x, y:

$\Sigma F_x = F_{1x} - F_2 = F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - F_2$

$\Sigma F_x = 50N \cdot \dfrac{1}{2} - 10\ N$

$\Sigma F_x = 15\ N$

$$\Sigma F_y = F_{1y} - F_3 = F_1 \cdot \eta\mu\ \varphi - F_3$$

$$\Sigma\ F_\psi = 50\ N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 20\sqrt{3}\ N$$

$$\Sigma F_\psi = 5\sqrt{3}\ N$$

$$\Sigma = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_\psi)^2}$$

$$\Sigma = \sqrt{(15\ N)^2 + (5\sqrt{3}\ N)^2}$$

$$\Sigma = \sqrt{225\ N^2 + 25 \cdot 3\ N^2}$$

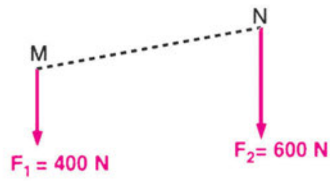
$$\Sigma = \sqrt{300}\ N$$

$$\Sigma = 17,32\ N$$

Απάντηση

Σ = 17,32 N

Να προσδιορίσετε με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των παραλλήλων δυνάμεων F_1, F_2 που φαίνονται στο σχήμα, όταν η απόσταση ΜΝ είναι ίση με 0,70 m.



Λύση

Δίνονται

F_1 = 400N

F_2 = 600N

MN = 0,70 m

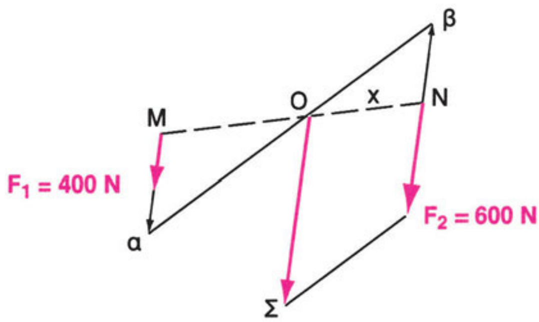
Ζητούνται

Το σημείο εφαρμογής της Σ

α. με τη γραφική μέθοδο

β. με την αναλυτική μέθοδο

α) Με τη γραφική μέθοδο:



Η κατασκευή φαίνεται στο σχήμα και γίνεται εύκολα κατανοητή, μετά από όσα έχουν αναφερθεί στο θεωρητικό μέρος.

β) Με την αναλυτική μέθοδο:

$Σ = F_1 + F_2$

Σ = 400 N + 600 N

Σ = 1000 N

Αν είναι ίση με x η απόσταση της συνισταμένης Σ από τη δύναμη F_2, τότε:

ΟΜ = 0,70 m - x

Από τα όμοια τρίγωνα ΟΜ α και ΟΝ β προκύπτει:

$$\frac{400\ \text{N}}{\text{x}} = \frac{600\ \text{N}}{0{,}70\text{m} - \text{x}}$$

400 N · (0,70m - x) = x · 600 N

280 N · m - x · 400 N = x · 600 N

280 N · m = x · 1000 N

$$\text{x} = \frac{280\ \text{N} \cdot \text{m}}{1000\ \text{N}}$$

x = 0,28 m

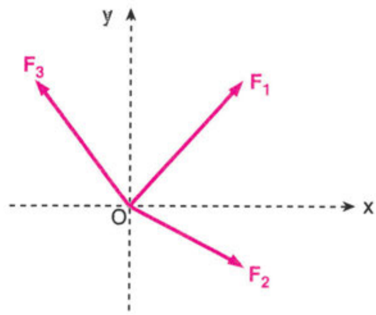
Απάντηση

α) Το σημείο Ο (βλέπε σχήμα)
β) x = 0,28 m (βλέπε σχήμα)

άσκηση 4

Να υπολογιστεί η συνισταμένη των δυνάμεων του σχήματος F_1, F_2, F_3, όταν:

F_{1x} = 3,5 N, F_{1y} = 1,5 N
F_{2x} = 2 N, F_{2y} = - 1 N
F_{3x} = - 1,5 N, F_{3y} = 3,5 N



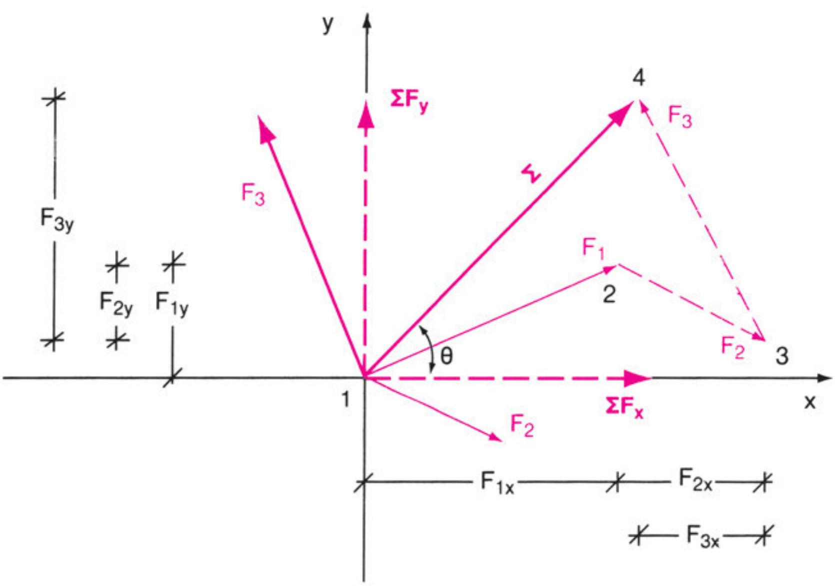
Λύση

Δίνονται

F_{1x} = 3,5 N, F_{1y} = 1,5 N
F_{2x} = 2 N, F_{2y} = - 1 N
F_{3x} = - 1,5 N, F_{3y} = 3,5 N

Ζητούνται

α) Το μέτρο της συνισταμένης (Σ)
β) Η διεύθυνσή της



α) Κατασκευάζουμε το δυναμοπολύγωνο και προσδιορίζουμε τη συνισταμένη Σ. Οπότε έχουμε:

$$\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} - F_{3x} = 4\text{ N}$$

$$\Sigma F_y = F_{1y} - F_{2y} + F_{3y} = 4\text{ N}$$

$$\Sigma = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2}$$

$$\Sigma = \sqrt{4^2\,N^2 + 4^2\,N^2}$$

$$\Sigma \cong 5{,}65\text{ N}$$

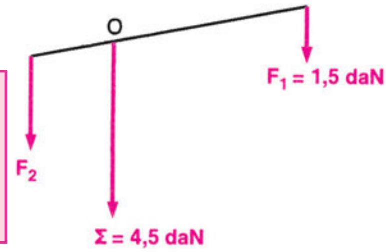
β) Αφού $\Sigma_\chi = \Sigma_y$, έπεται ότι: θ = 45°.

Απάντηση

α) Σ = 5,65N
β) θ = 45°

άσκηση 5

Να αναλύσετε τη δύναμη Σ = 4,5 daN στις συνιστώσες F_1 = 1,5 daN και F_2, αν η απόσταση της F_1 από το σημείο Ο είναι ίση με 100 cm.



Λύση

Δίνονται

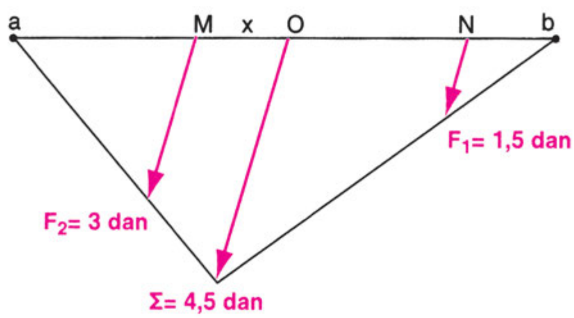
Σ = 4,5 daN

F_1 = 1,5 daN

ON = 100 cm

Ζητούνται

Η συνιστώσα F_2



$Σ = F_1 + F_2$

$F_2 = Σ - F_1$

F_2 = 4,5 daN - 1,5 daN

F_2 = 3 daN

$F_1 \cdot ON = F_2 \cdot MO$

Δηλαδή:

1,5 daN · 100 cm = 3 daN · x

$$x = \frac{150\,daN \cdot cm}{3\,daN}$$

x = 50 cm

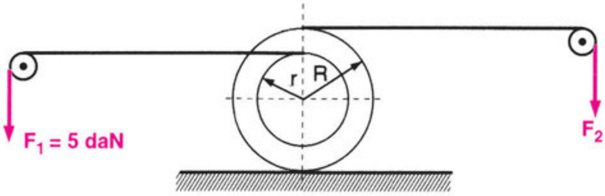
Απάντηση

F_2 = 3 daN

x = 50 cm

άσκηση 6

Να προσδιορίσετε τη δύναμη F_2, προκειμένου να εξασφαλιστεί η ισορροπία του συστήματος του σχήματος, αν r = 25 cm και R = 40 cm.



Λύση

Δίνονται

F_1 = 5 daN

r = 25 cm

R = 40 cm

Ζητούνται

Η δύναμη F_2

Για την ισορροπία του συστήματος θα πρέπει:

$$F_1 \cdot r = F_2 \cdot R$$

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot r}{R}$$

$$F_2 = \frac{5\,\text{daN} \cdot 25\,\text{cm}}{40\,\text{cm}}$$

$$F_2 = 3{,}125\ \text{daN} = 31{,}25\ \text{N}$$

Απάντηση

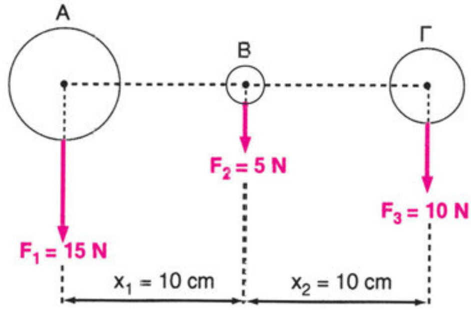
F_2 **= 3,125 daN = 31,25 N**

κεφάλαιο 4

ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

άσκηση 1

Να προσδιοριστεί το Κ.Β. των σωμάτων Α (F_1 = 15 N), Β (F_2 = 5 N), Γ (F_3 = 10 N) που βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



Λύση

Δίνονται

F_1 = 15 N

F_2 = 5N

F_3 = 10 N

Ζητούνται

Το Κ.Β. (G).

Αποστάσεις (όπως στο σχήμα)
$Σ = F_1 + F_2 + F_3 = 15$ N + 5 N + 10 N
Σ = 30 N

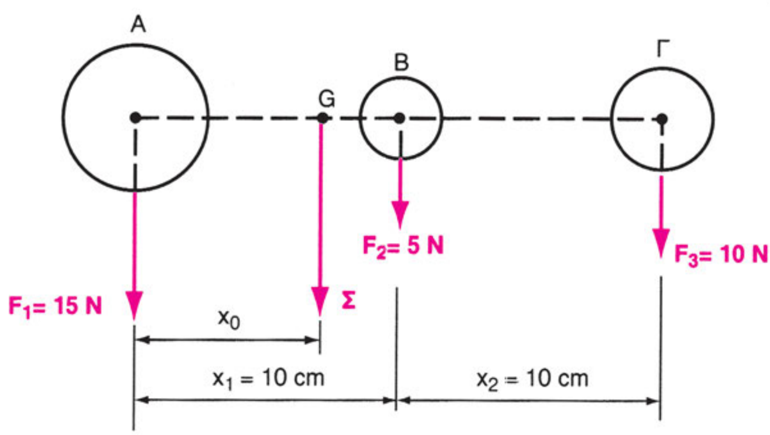
Αν η συνισταμένη Σ απέχει x_0 από την F_1, τότε η εξίσωση των ροπών ως προς το Α, θα δίνεται από τη σχέση:

$$Σ \cdot x_0 = F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot x_1 + F_3 \cdot (x_1 + x_2)$$

$$30 \text{ N} \cdot x_0 = 5 \text{ N} \cdot 10 \text{ cm} + 10 \text{ N} \cdot 20 \text{ cm}$$

$$x_0 = \frac{250 \text{ N} \cdot \text{cm}}{30 \text{ N}}$$

$$x_0 = 8{,}33 \text{ cm}$$

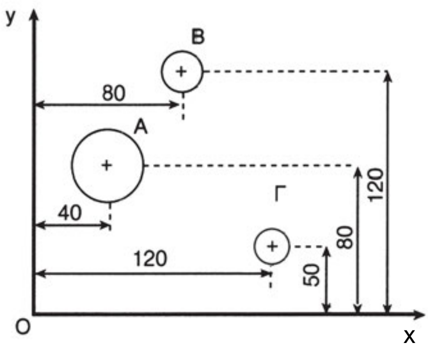


Απάντηση

x_0 = 8,33 cm (βλέπε σχήμα)

άσκηση 2

Να προσδιοριστεί το Κ.Β. των σωμάτων Α (F_1 = 10 N), B (F_2 = 4 N), Γ (F_3 = 2 N) που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (διαστάσεις σε cm).



Λύση

Δίνονται

F_1 = 10 N

F_2 = 4 N

F_3 = 2 N

Ζητούνται

Το Κ.Β. (G).

Αποστάσεις (όπως στο σχήμα)

$\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 = 10\ N + 4\ N + 2\ N$

$\Sigma = 16\ N$

Αν x_0, y_0 οι συντεταγμένες του Κ.Β. (G) η εξίσωση των ροπών ως προς τον άξονα Oy, θα δίνεται από τη σχέση:

$16\ N \cdot x_0 = 10\ N \cdot 40\ cm + 4\ N \cdot 80\ cm + 2\ N \cdot 120\ cm$

$16\ N \cdot x_0 = 960\ N \cdot cm$

$$x_0 = \frac{960\ N \cdot cm}{16\ N}$$

$x_0 = 60\ cm$

Η εξίσωση των ροπών ως προς τον άξονα Ox θα δίνεται:

$16\ N \cdot y_0 = 10\ N \cdot 80\ cm + 4\ N \cdot 120\ cm + 2\ N \cdot 50\ cm$

$16\ N \cdot y_0 = 800\ N \cdot cm + 480\ N \cdot cm + 100\ N \cdot cm$

$$y_0 = \frac{1380\,N \cdot cm}{16\,N}$$

$x_0 = 86{,}25$ cm

Επομένως οι συντεταγμένες του Κ.Β. είναι:
$x_0 = 60$ cm

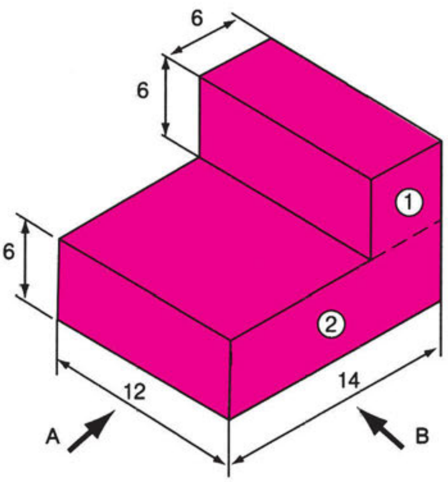
$y_0 = 86{,}25$ cm

Απάντηση

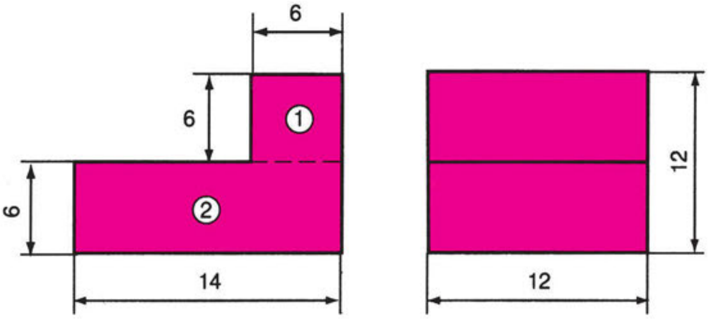
x_0 = 60 cm (βλέπε σχήμα)
y_0 = 86,25 cm

άσκηση 3

Να προσδιοριστεί το Κ.Β. του ομογενούς στερεού σώματος, που φαίνεται στο σχήμα (διαστάσεις σε cm).



Στερεό σώμα του οποίου ζητείται η θέση του κέντρου βάρους



Όψη από την πλευρά Β

Όψη από την πλευρά Α

Λύση

Δίνονται
Διαστάσεις στερεού όπως στο σχήμα.

Ζητούνται
Το Κ.Β. (G).

Χωρίζουμε το στερεό στα τμήματα 1 και 2 που έχουν κανονικό σχήμα.
Το 1 έχει όγκο (V_1):
$V_1 = 6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$
$V_1 = 432 \text{ cm}^3$

Το 2 έχει όγκο (V_2):
$V_2 = 6 \text{ cm x } 12 \text{ cm x } 14 \text{ cm}$
$V_2 = 1008 \text{ cm}^3$

Ο ολικός όγκος (V) είναι:
$V = V_1 + V_2 = 432 \text{ cm}^3 + 1008 \text{ cm}^3$
$V = 1440 \text{ cm}^3$
Αν οι συντεταγμένες του Κ.Β. είναι x_0, y_0, αντίστοιχα από την πλευρά αριστερά του

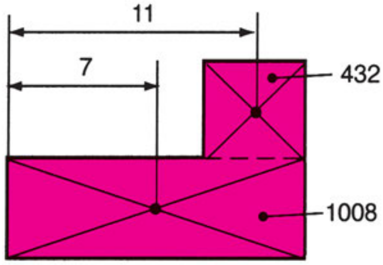
στερεού και από την κάτω πλευρά του, οι ροπές των όγκων ως προς τον άξονα y θα είναι:

$1440\ cm^3 \cdot x_0 = 432\ cm^3 \cdot 11\ cm + 1008\ cm^3 \cdot 7\ cm$

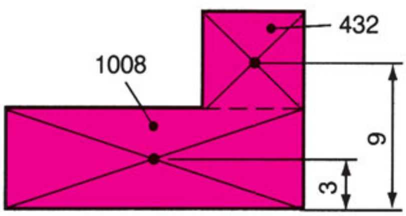
$1440\ cm^3 \cdot x_0 = 11808\ cm^4$

$$x_0 = \frac{11808\ cm^4}{1440\ cm^3}$$

$x_0 = 8{,}2\ cm$



Ροπές όγκων ως προς y



Ροπές όγκων ως προς x

Ροπές ως προς x

$1440\ cm^3 \cdot y_0 = 432\ cm^3 \cdot 9\ cm + 1008\ cm^3 \cdot 3\ cm$

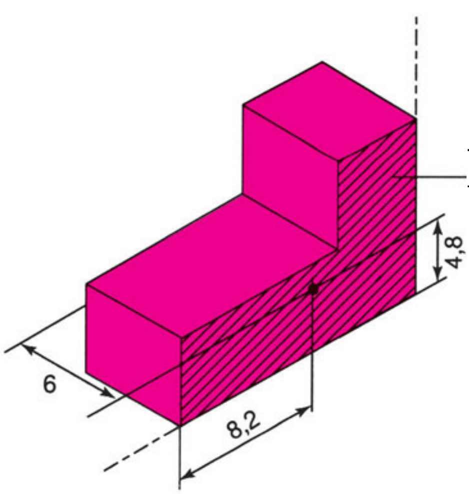
$1440\ cm^3 \cdot y_0 = 6912\ cm^4$

$$y_0 = \frac{6912\ cm^4}{1440\ cm^3}$$

$y_0 = 4{,}8\ cm$

Απάντηση

Η θέση του κέντρου βάρους του στερεού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τομή του στερεού στο σημείο του κέντρου βάρους του

Να προσδιορίσετε το κεντροειδές μίας ημιπεριφέρειας ακτίνας 1,20 m με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.

Λύση

Δίνονται

Ημιπεριφέρεια r = 1,20 m

Ζητούνται

Το κεντροειδές με:

α. τη γραφική μέθοδο

β. την αναλυτική μέθοδο

α) Με τη γραφική μέθοδο

Ορίζουμε κλίμακα: 1 cm ≙ 40 cm

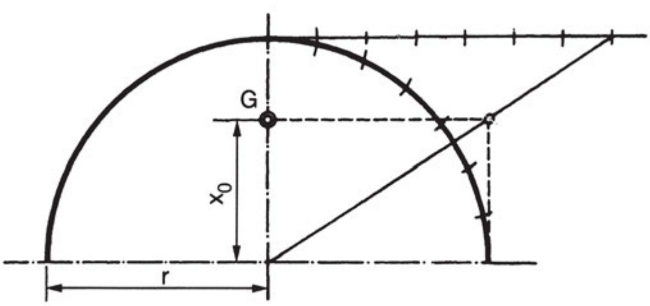
Με βάση τη μέθοδο που έχουμε περιγράψει στο θεωρητικό μέρος προχωρούμε στην κατασκευή που φαίνεται στο σχήμα, από την οποία προκύπτει:

x_0 = 1,9 x 40 cm

x_0 = 76 cm

β) Με την αναλυτική μέθοδο:

$$x_0 = \frac{r \cdot c}{\ell} \qquad \begin{aligned} r &= 1{,}20\text{m} \\ c &= 2r \\ \ell &= \pi \cdot r \end{aligned}$$



Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$x_0 = \frac{r \cdot 2r}{\pi \cdot r}$$

$$x_0 = \frac{2r}{\pi}$$

$$x_0 = \frac{2 \cdot 1{,}20\text{m}}{3{,}14}$$

x_0 = 0,76 m = 76 cm

Απάντηση

α) x_0 = 76 cm
β) x_0 = 76 cm

Να προσδιορίσετε το κεντροειδές ενός τεταρτημορίου περιφέρειας ακτίνας 1,50 m με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.

Λύση

Δίνονται

Τεταρτημόριο περιφέρειας r = 1,50 m

Ζητούνται

Το κεντροειδές με:

α. τη γραφική μέθοδο

β. την αναλυτική μέθοδο

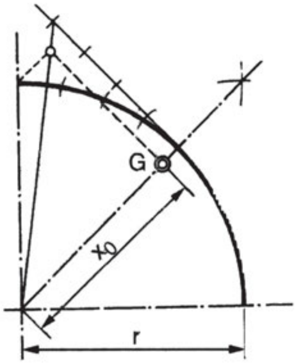
α) Με τη γραφική μέθοδο

Ορίζουμε κλίμακα: 1 cm ≙ 0,50 m

Με τη μέθοδο που περιγράψαμε στο θεωρητικό μέρος πραγματοποιούμε την κατασκευή που φαίνεται στο σχήμα, από την οποία προκύπτει:

$x_0 = 2{,}7 \cdot 50$ cm

$x_0 = 135$ cm



β) Με την αναλυτική μέθοδο:

$$x_0 = \frac{r \cdot c}{\ell} \qquad r = 1{,}50 \text{ m}$$

$$c = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2 \cdot r^2}$$

$$c = r \cdot \sqrt{2}$$

$$\ell = \frac{\pi \cdot r}{2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$x_0 = \frac{r \cdot r \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{\pi \cdot r}$$

$$x_0 = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot r}{\pi}$$

$$x_0 = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1{,}50\,m}{3{,}14}$$

$$x_0 = 1{,}35\ m = 135\ cm$$

Απάντηση

α) x_0 = 135 cm
β) x_0 = 135 cm

Να προσδιορίσετε το κεντροειδές ημικυκλίου ακτίνας 60 cm με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.

Λύση

Δίνονται

Ημικύκλιο r = 60 cm

Ζητούνται

Το κεντροειδές με:

α) τη γραφική μέθοδο,

β) την αναλυτική μέθοδο.

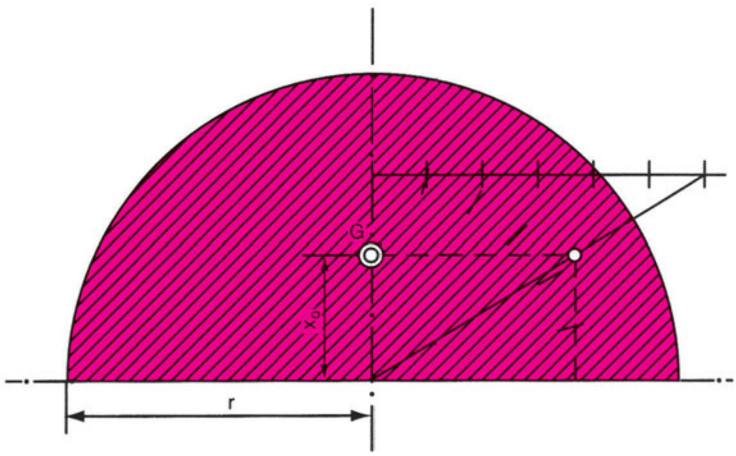
α) Με τη γραφική μέθοδο

Ορίζουμε κλίμακα: 1 cm ≙ 20 cm

Η κατασκευή που φαίνεται στο σχήμα, μετά από όσα έχουν αναφερθεί στο θεωρητικό μέρος, γίνεται εύκολα κατανοητή.

Επομένως: $x_0 = 1{,}2 \times 20$ cm

$x_0 = 24$ cm



β) Με την αναλυτική μέθοδο

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot c}{\ell}$$

r = 60 cm

c = 2 r

$\ell = \pi \cdot r$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot 2r}{\pi \cdot r}$$

$$x_0 = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

$$x_0 \cong 0{,}4 \cdot r = 0{,}4 \cdot 60\,\text{cm}$$

$$x_0 \cong 24\,\text{cm}$$

Απάντηση

α) x_0 = 24 cm

β) x_0 = 24 cm

άσκηση 7

Να προσδιορίσετε το κεντροειδές ενός τεταρτημορίου κύκλου ακτίνας 90 cm, με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο.

Λύση

Δίνονται

Τεταρτημόριο κύκλου

r = 90 cm

Ζητούνται

Το κεντροειδές με:

α) τη γραφική μέθοδο

β) την αναλυτική μέθοδο

α) Με τη γραφική μέθοδο

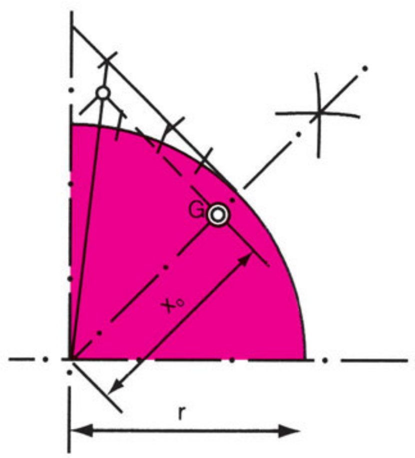
Ορίζουμε κλίμακα: 1 cm ≙ 30 cm

Η κατασκευή που προκύπτει φαίνεται στο σχήμα και είναι κατανοητή μετά από όσα έχουν αναφερθεί.

Επομένως:

$x_0 = 1{,}8 \times 30$ cm

$x_0 = 54$ cm



β) Με την αναλυτική μέθοδο:

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot c}{\ell}$$

r = 90 cm

$$c = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2 \cdot r^2}$$

$$c = r \cdot \sqrt{2}$$

$$\ell = \frac{2\pi \cdot r}{4}$$

$$\ell = \frac{\pi \cdot r}{2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot r\sqrt{2} \cdot 2}{\pi \cdot r}$$

$$x_0 = \frac{4\sqrt{2} \cdot r}{3\pi}$$

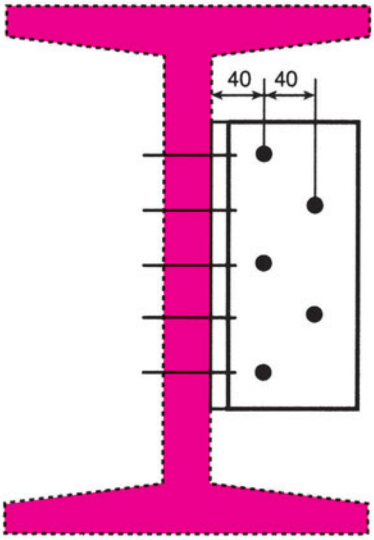
$$x_0 \cong 0,6 \cdot r = 0,6 \cdot 90\,cm$$

$$x_0 = 54\,cm$$

Απάντηση

α) x_0 = 54 cm
β) x_0 = 54 cm

άσκηση 8

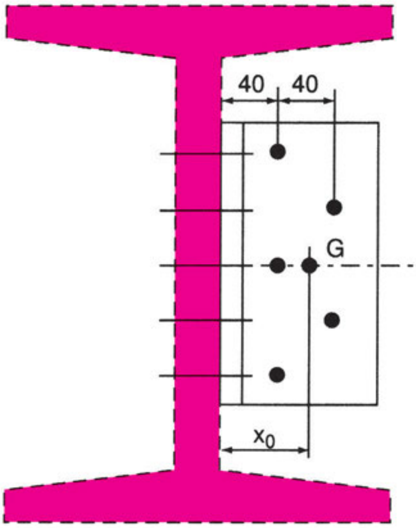


Στην ήλωση του σχήματος υπάρχει η ομάδα των πέντε ήλων. Να προσδιοριστεί το κεντροειδές της ομάδας (διαστάσεις σε mm).

Λύση

Αν E_κ το εμβαδόν του ενός ήλου, τότε το εμβαδόν Ε της ομάδας:

$$E = 5E_\kappa$$



Καρφωτή σύνδεση

Αν x_0 η απόσταση του Κ.Β. όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε:

$$E \cdot x_0 = 3\,E_\kappa \cdot 40\text{ mm} + 2\,E_\kappa \cdot 80\text{ mm}$$

$$5E_K \cdot x_0 = 280\,E_\kappa \cdot \text{mm}$$

$$x_0 = \frac{280\,E_\kappa \cdot \text{mm}}{5\,E_\kappa}$$

$$x_0 = 56\text{ mm}$$

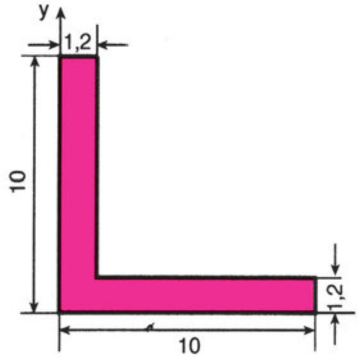
Η δεύτερη απόσταση y_0 δεν απαιτείται γιατί η διάταξη είναι συμμετρική και επομένως το κεντροειδές θα βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας της διάταξης.

Απάντηση

$x_0 = 56$ mm

άσκηση 9

Να προσδιοριστεί το κεντροειδές του ελάσματος με το παρακάτω σχήμα με την αναλυτική μέθοδο (διαστάσεις σε cm).*



Λύση

Αναλυτική μέθοδος

Θεωρούμε ότι η συνολική επιφάνεια αποτελείται από τις επιμέρους επιφάνειες 1 και 2.

Εμβαδόν (E_1) της επιφάνειας 1:

$E_1 = 10 \text{ cm} \cdot 1{,}2 \text{ cm}$

$E_1 = 12 \text{ cm}^2$

Εμβαδόν (E_2) της επιφάνειας 2:

$E_2 = (10 \text{ cm} - 1{,}2 \text{ cm}) \cdot 1{,}2 \text{ cm}$

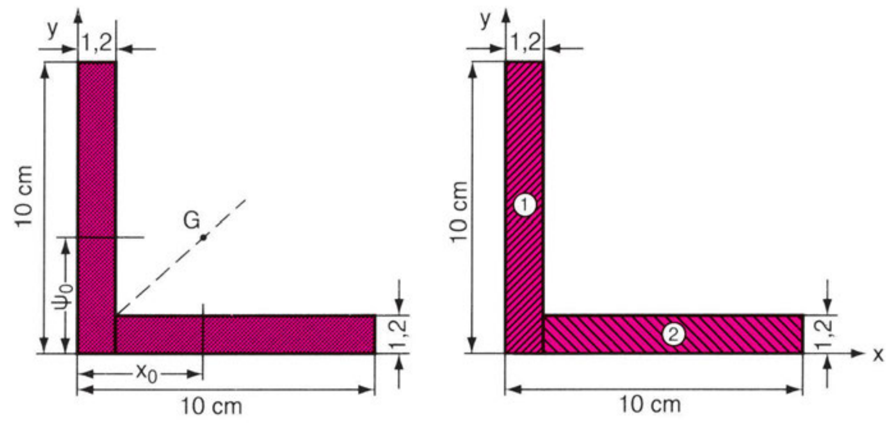
$E_2 = 10{,}56 \text{ cm}^2$

Το ολικό εμβαδόν (E):

$E = E_1 + E_2 = 12 \text{ cm}^2 + 10{,}56 \text{ cm}^2$

$E_x = 22{,}56 \text{ cm}^2$

(*) Σβήστε από το αντίστοιχο σχήμα του βιβλίου της θεωρίας τις μονάδες (m)



Αν x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κεντροειδούς G, η εξίσωση των ροπών, ως προς y, δίνεται:

$$E \cdot x_0 = E_1 \cdot 0{,}6\ cm + E_2 \left(\frac{10\,cm - 1{,}2\,cm}{2} + 1{,}2\,cm \right)$$

$$22{,}56\ cm^2 \cdot x_0 = 12\ cm^2 \cdot 0{,}6\ cm + 10{,}56\ cm^2 \cdot 5{,}6\ cm$$

$$22{,}56\ cm^2 \cdot x_0 = 7{,}2\ cm^3 + 59{,}14\ cm^3$$

$$x_0 = \frac{66{,}34\,cm^3}{22{,}56\,cm^2}$$

$$x_0 = 2{,}94\ cm$$

Η εξίσωση των ροπών, ως προς x:

$$E \cdot y_0 = E_1 \cdot 5\ cm + E_2 \cdot 0{,}6\ cm$$

$$22{,}56\ cm^2 \cdot y_0 = 12\ cm^2 \cdot 5\ cm + 10{,}56\ cm^2 \cdot 0{,}6\ cm$$

$$22{,}56\ cm^2 \cdot y_0 = 66{,}34\ cm^3$$

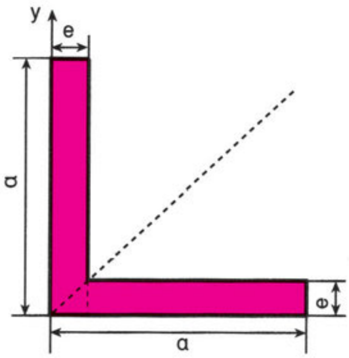
$$y_0 = \frac{66{,}34\,cm^3}{22{,}56\,cm^2}$$

$$y_0 = 2{,}9cm$$

Απάντηση

α) x_0 = 2,94 cm
β) y_0 = 2,9 cm

Να προσδιορίσετε το κεντροειδές της ισοσκελούς διατομής του σχήματος με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο, αν α = 150 mm και e = 24 mm (*)



Λύση

Δίνονται

Ισοσκελής διατομή L

α = 150 mm

e = 24 mm

Ζητούνται

Το κεντροειδές με:

α) τη γραφική μέθοδο,

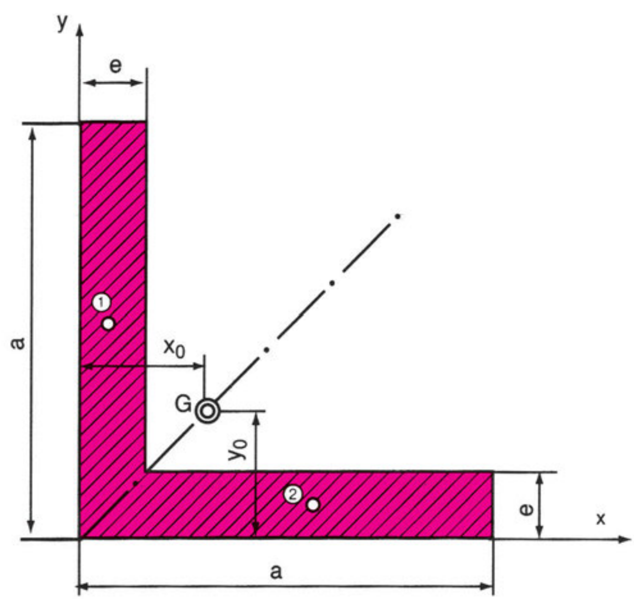
β) την αναλυτική μέθοδο.

α) Με τη γραφική μέθοδο:

Ορίζουμε κλίμακα:

1 cm ≙ 3 cm

Η διατομή είναι ισοσκελής, επομένως έχει άξονα συμμετρίας, τον οποίο χαράσσουμε στο σχήμα. Χωρίζουμε στη συνέχεια τη διατομή στα ορθογώνια 1 και 2 και προσδιορίζουμε τα κεντροειδή τους.



(*) *Προσθέστε μετά την εκφώνηση της άσκησης 10 στο βιβλίο θεωρίας το σχήμα που βρίσκεται άνω δεξιά αυτής της σελίδας.*

Υπολογίζουμε τις επιφάνειες των ορθογωνίων E_1 και E_2 και την ολική επιφάνεια της διατομής Ε:

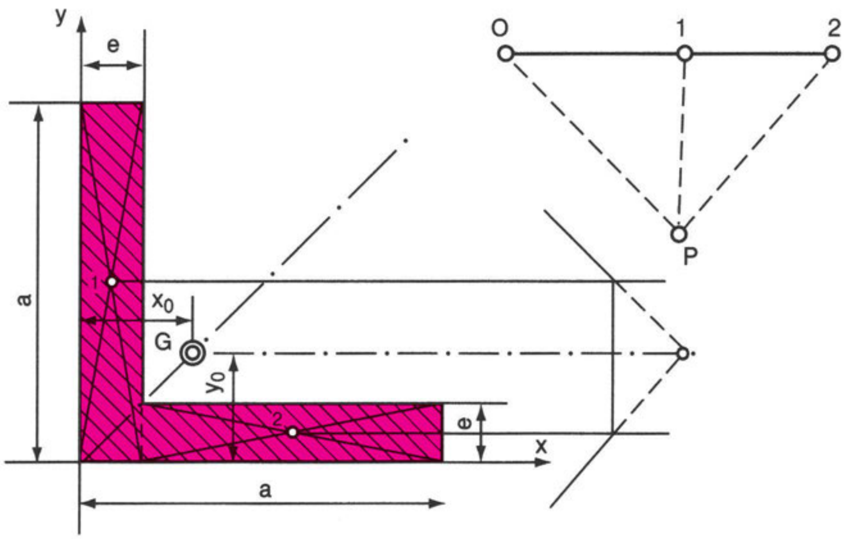
E_1 = 150 mm × 24 mm E_2 = (150 mm - 24 mm) · 24 mm

E_1 = 3600 mm^2 E_2 = 3024 mm^2

E = 6624 mm^2

Εφαρμόζουμε στα κεντροειδή των ορθογωνίων 1 και 2, κατά οριζόντια διεύθυνση ως δυνάμεις τις επιφάνειες E_1 και E_2. Αν οι δυνάμεις είναι οι 0-1 και 1-2, με τη βοήθεια του δυναμοπολυγώνου και του σχοινοπολυγώνου ορίζουμε την οριζόντια διεύθυνση της συνισταμένης.
Το σημείο τομής της διεύθυνσης της συνισταμένης με τον άξονα συμμετρίας της διατομής είναι το ζητούμενο κεντροειδές.

Διαπιστώνουμε ότι:
$x_0 = y_0$ = 1,5 × 3 cm
$x_0 = y_0$ = 4,5 cm = 45 mm



β) <u>Με την αναλυτική μέθοδο</u>:

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Varignon ως προς τον άξονα y:

Αν x_1, x_2 οι αποστάσεις των κεντροειδών των ορθογωνίων 1 και 2 από τον άξονα y, τότε:

$$E \cdot x_0 = E_1 \cdot x_1 + E_2 \cdot x_2$$

$$6624\ \text{mm}^2 \cdot x_0 = 3600\ \text{mm}^2 \cdot 12\ \text{mm} + 3024\ \text{mm}^2 \left[\left(\frac{150\,\text{mm} - 24\,\text{mm}}{2}\right) + 24\,\text{mm}\right]$$

$6624\ mm^2 \cdot x_0 = 43200\ mm^3 + 263088\ mm^3$

$$x_0 = \frac{306288\,mm^3}{6624\,mm^2}$$

$x_0 = 46{,}24\ mm$

Και επειδή η διατομή είναι συμμετρική:

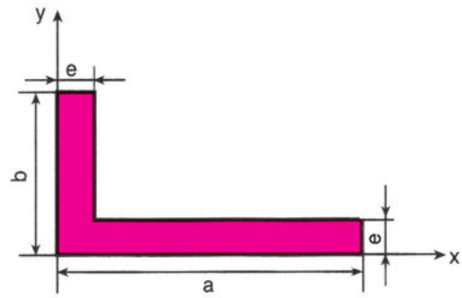
$x_0 = y_0 = 46{,}24\ mm$

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της γραφικής και της αναλυτικής μεθόδου διαπιστώνουμε, όπως είναι φυσικό, μικρότερη ακρίβεια της πρώτης έναντι της δεύτερης.

Απάντηση

α) $x_0 = y_0 = 45\ mm$
β) $x_0 = y_0 = 46{,}24\ mm$

Να προσδιορίσετε το κεντροειδές στη διατομή του σχήματος με τη γραφική και την αναλυτική μέθοδο, αν α = 160 mm, b = 80 mm και e = 16 mm



Λύση

Δίνονται

Η διατομή σχήματος L
με διαστάσεις
α = 160 mm, b = 80 mm
e = 16 mm

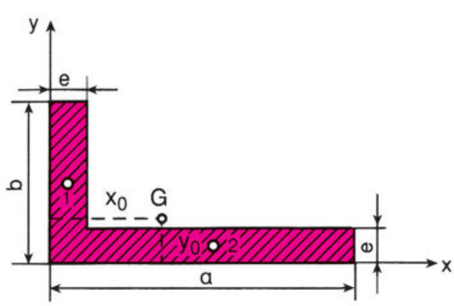
Ζητούνται

Το κεντροειδές με:
α. τη γραφική μέθοδο
β. την αναλυτική μέθοδο

α. Με τη γραφική μέθοδο:

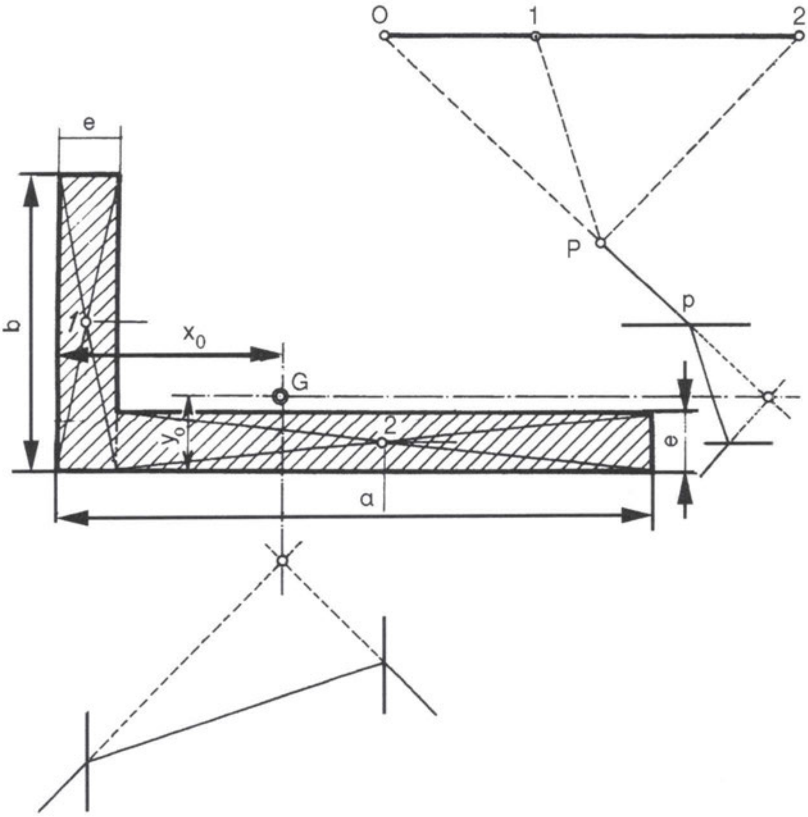
Ορίζουμε κλίμακα: 1 cm ≙ 2 cm

Χωρίζουμε τη διατομή στα ορθογώνια 1 και 2 και προσδιορίζουμε τις επιφάνειές τους:



$E_1 = b \cdot e$
$E_1 = 80\ mm \cdot 16\ mm$
$E_1 = 1280\ mm^2$
$E_2 = (a - e) \cdot e$
$E_2 = (160\ mm - 16\ mm) \cdot 16\ mm$
$E_2 = 2304\ mm^2$

Εφαρμόζουμε στα κεντροειδή των ορθογωνίων 1 και 2, κατά οριζόντια διεύθυνση ως δυνάμεις τις επιφάνειες E_1 και E_2. Αν οι δυνάμεις είναι αντίστοιχα οι 0-1 και 1-2, (βλέπε το άνω δεξιά δυναμοπολύγωνο), με τη βοήθεια του σχοινοπολυγώνου ορίζουμε την οριζόντια διεύθυνση της συνισταμένης.



Εφαρμόζουμε τις ίδιες δυνάμεις, κατά την κατακόρυφη διεύθυνση και καθορίζουμε την κατακόρυφη, αυτή τη φορά, διεύθυνση της συνισταμένης. Το σημείο τομής των δύο διευθύνσεων της συνισταμένης συμπίπτει με το ζητούμενο κεντροειδές. Διαπιστώνουμε ότι:

$x_0 = 3 \times 2$ cm $\qquad y_0 = 1 \times 2$ cm

$x_0 = 6$cm $= 60$ mm $\qquad y_0 = 2$ cm $= 20$ mm

β) <u>Με την αναλυτική μέθοδο</u>:

Χωρίζουμε τη διατομή στα ορθογώνια 1 και 2, προσδιορίζουμε τα κεντροειδή τους, επιλέγουμε τους άξονες x,y όπως φαίνονται στο σχήμα και υπολογίζουμε τις επιφάνειες E_1, E_2 και την ολική Ε.

$E_1 = 1280$ mm^2 $\qquad E_2 = 2304$ mm^2

$E = 3584$ mm^2

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Varignon, ως προς τους άξονες x και y:

Αν x_1 και x_2 οι αποστάσεις των κεντροειδών των ορθογωνίων 1 και 2 από τον άξονα y, τότε:

$$E \cdot x_0 = E_1 \cdot x_1 + E_2 \cdot x_2$$

$$3584\ mm^2 \cdot x_0 = 1280\ mm^2 \cdot 8\ mm + 2340\ mm^2 \left[\left(\frac{160mm - 16mm}{2}\right) + 16mm\right]$$

$$3584\ mm^2 \cdot x_0 = 10240\ mm^3 + 205920\ mm^3$$

$$x_0 = \frac{216160 mm^3}{3584 mm^2}$$

$$x_0 \cong 60{,}31\ mm$$

Ως προς τον άξονα x ανάλογα προκύπτει:

$$E \cdot y_0 = E_1 \cdot y_1 + E_2 \cdot y_2$$

$$3584\ mm^2 \cdot y_0 = 1280\ mm^2 \cdot 40\ mm + 2304\ mm^2 \cdot 8\ mm$$

$$y_0 = \frac{51200\ mm^3 + 18432\ mm^3}{3584\ mm^2}$$

$$y_0 \cong 20 mm$$

Απάντηση

α) $x_0 = 60\ mm$

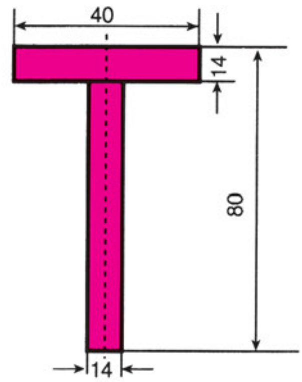
$y_0 = 20\ mm$

β) $x_0 = 60{,}31\ mm$

$y_0 = 20\ mm$

άσκηση 12

Να υπολογιστεί με την αναλυτική και την γραφική μέθοδο το κεντροειδές του παρακάτω σχήματος (διαστάσεις σε cm).



Λύση

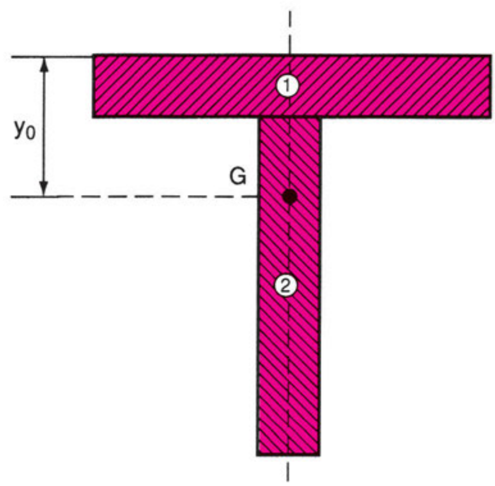
α) Αναλυτική μέθοδος

Χωρίζουμε την ολική επιφάνεια σε δύο επιμέρους, την 1 και 2.

Εμβαδόν (E_1) της επιφάνειας 1:

$E_1 = 40 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm}$

$E_1 = 560 \text{ cm}^2$



Εμβαδόν (E_2) της επιφάνειας 2:

$E_2 = 14 \text{ cm } (80 \text{ cm} - 14 \text{ cm})$

$E_2 = 924 \text{ cm}^2$

Το ολικό εμβαδόν (Ε):

$E = E_1 + E_2 = 560 \text{ cm}^2 + 924 \text{ cm}^2$

$E_x = 1484 \text{ cm}^2$

Για τον προσδιορισμό του κεντροειδούς (G) επαρκεί η απόσταση y_0, αφού το σχήμα είναι συμμετρικό και το κεντροειδές θα βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας του. Η εξίσωση των ροπών ως προς x:

$$E \cdot y_0 = 560\ cm^2 \cdot 14\ cm \cdot \frac{1}{2} + 924\ cm^2 \cdot \left(\frac{80\,cm - 14\,cm}{2} + 14\,cm\right)$$

$$1484\ cm^2 \cdot y_o = 3920\ cm^3 + 43428\ cm^3$$

$$y_0 = \frac{47348\,cm^3}{1484\,cm^2}$$

$$y_0 = 31{,}9cm$$

β) <u>Γραφική μέθοδος</u>

Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε λεπτομερώς στην προηγούμενη άσκηση καταλήγουμε: y_0 = 31,9 cm

Απάντηση

α) y_0 = 31.9 cm
β) y_0 = 31.9 cm

Μέρος β΄

κεφάλαιο 5

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

άσκηση 1

Μία ράβδος με ορθογωνική διατομή 4 cm × 6 cm εφελκύεται από φορτίο 2400 daN. Να προσδιοριστεί η αναπτυσσόμενη τάση σε daN/cm^2 και daN/mm^2.

Λύση

Δίνονται

a = 4 cm

b = 6 cm

F = 2400 daN

Ζητούνται

α) σ σε daN/cm^2

β) σ σε daN/mm^2

α) σ σε daN/cm^2

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$A = a \cdot b = 4\ cm \cdot 6\ cm = 24\ cm^2$

επομένως:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2400\,daN}{24\ cm^2}$$

$\sigma = 100\ daN\ /\ cm^2$

β) η τάση σε daN/mm^2

$1\ cm^2 = 10^2\ mm^2 = 100\ mm^2$

επομένως:

$\sigma = 100\ daN/cm^2 = 100\ daN/100\ mm^2$

$\sigma = 1\ daN\ /\ mm^2$

Απάντηση

α) $\sigma = 100\ daN/cm^2$

β) $\sigma = 1\ daN/mm^2$

Σε μία μεταλλική δοκό τετραγωνικής διατομής τοποθετείται βάρος 80 kN. Αν η αναπτυσσόμενη θλιπτική τάση είναι ίση με 0,8 kN/mm^2 να υπολογιστεί η πλευρά της διατομής της.

Λύση

Δίνονται

F = 80 KN

σ = 0,8 kN/mm^2

Ζητούνται

Η πλευρά της διατομής (α)

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$A = \frac{F}{\sigma} = \frac{80\,kN}{0{,}8\,kN/mm^2} = 100\ mm^2$$

$$A = \alpha^2$$

$$\alpha = \sqrt{A} = \sqrt{100\ mm^2}$$

$$\alpha = 10mm$$

Απάντηση

α = 10mm

Από ένα συρματόσχοινο κρέμεται βάρος ίσο με 22,6 kN. Αν η αναπτυσσόμενη τάση είναι ίση με 0,20 kN/mm^2, να υπολογιστεί η διάμετρός του.

Λύση

Δίνονται

F = 22,6 kN

σ = 0,20 kN/mm^2

Ζητούνται

Η διάμετρος (d)

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$A = \frac{F}{\sigma} = \frac{22{,}6\,kN}{0{,}20\,kN/mm^2}$$

$$A = 113\,mm^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 113\,mm^2}{3{,}14}}$$

$$d = \sqrt{144\,mm^2}$$

$$d = 12mm$$

Απάντηση

d = 12mm

Μία λάμα διατομής 40 × 6 mm και μήκους 30 cm καταπονείται σε εφελκυσμό από φορτίο 2400 daN. Αν η λάμα επιμηκύνεται κατά 0,12 mm και θραύεται υπό φορτίο 4000 daN, να υπολογιστούν:

α. Η αναπτυσσόμενη τάση,
β. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού,
γ. Η τάση θραύσης της λάμας.

Λύση

Δίνονται

$A = 40 \times 6\ \text{mm} = 4 \times 0{,}6\ \text{cm}$

$\ell = 30\ \text{cm} = 300\ \text{mm}$

$F = 2400\ \text{daN}$

$\Delta\ell = 0{,}12\ \text{mm}$

$F_{\theta\rho} = 4000\ \text{daN}$

Ζητούνται

α) Η αναπτυσσόμενη τάση (σ),

β) Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού (Ε),

γ) Η τάση θραύσης ($\sigma_{\theta\rho}$).

α) Η αναπτυσσόμενη τάση (σ)

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$A = 40\ \text{mm} \times 6\ \text{mm}$

$A = 240\ \text{mm}^2 = 2{,}4\ \text{cm}^2$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2400\,\text{daN}}{2{,}4\,\text{cm}^2}$$

$\sigma = 1000\ \text{daN / cm}^2$

β) Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού (Ε)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{0{,}12\,mm}{300\,mm}$$

$$\varepsilon = 0{,}0004$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1000\,daN/cm^2}{0{,}0004}$$

$$E = 2.500.000\ daN/cm^2$$

γ) Η τάση θραύσης ($\sigma_{\theta\rho}$)

$$\sigma_{\theta\rho} = \frac{F_{\theta\rho}}{A} = \frac{4000\,daN}{2{,}4\,cm^2}$$

$$\sigma_{\theta\rho} = 1666{,}6\ daN/cm^2$$

Απάντηση

α) σ = 1000 daN/cm^2

β) E = 2.500.000 daN/cm^2

γ) $\sigma_{\theta\rho}$ = 1666,6 daN/cm^2

Το φορτίο θραύσης του υλικού μίας εφελκυόμενης ράβδου είναι ίσο με 1000 daN. Αν η ράβδος έχει διατομή ίση με 4 cm^2 και ο συντελεστής ασφάλειας είναι ίσος με 5, να υπολογιστεί η επιτρεπόμενη τάση.

Λύση

Δίνονται

$F_{θρ}$ = 1000 daN

A = 4 cm^2

ν = 5

Ζητούνται

Η επιτρεπόμενη τάση ($σ_{επ}$).

$$ν = \frac{σ_{θρ}}{σ_{επ}}$$

$$σ_{θρ} = \frac{F_{θρ}}{A}$$

$$σ_{θρ} = \frac{1000\,daN}{4\,cm^2}$$

$$σ_{θρ} = 250\,daN / cm^2$$

$$σ_{επ} = \frac{σ_{θρ}}{ν} = \frac{250\,daN/cm^2}{5}$$

$$σ_{επ} = 50 \text{ daN / cm}^2$$

Απάντηση

$σ_{επ}$ = 50 daN/cm^2

άσκηση 6

Εφελκυόμενη ράβδος μήκους 40 cm παρουσίασε επιμήκυνση 0,04 cm. Να προσδιοριστεί η ειδική επιμήκυνση και η ίδια σε ποσοστό επί τοις εκατό.

Λύση

Δίνονται

$\ell = 40$ cm

$\Delta\ell = 0{,}04$ cm

Ζητούνται

α) Η ειδική επιμήκυνση (ε)

β) Η ε%

α) $\varepsilon = \dfrac{\Delta\ell}{\ell} = \dfrac{0{,}04\,\text{cm}}{40\,\text{cm}}$

$\varepsilon = 0{,}001$

β) $\varepsilon\% = \dfrac{\Delta\ell}{\ell}\cdot 100 = 0{,}001\cdot 100$

$\varepsilon\% = 0{,}1$

Απάντηση

ε = 0,001

ε% = 0.1

κεφάλαιο 6

ΑΞΟΝΙΚΟΣ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟΣ ΚΑΙ ΘΛΙΨΗ

άσκηση 1

Με τη βοήθεια μίας ράβδου μήκους 10 m ρυμουλκούμε αξονικό φορτίο 10.000 daN. Αν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της ράβδου είναι ίσο με 2.100.000 daN/cm^2 και η επιτρεπόμενη τάση ίση 1200 daN/cm^2, να υπολογιστούν:

α. Η διάμετρος της ράβδου,

β. Η επιμήκυνση.

Λύση

Δίνονται

$F = 10000$ daN

$E = 2.100.000$ daN/cm^2

$\sigma_{\varepsilon\pi} = 1200$ daN/cm^2

$\ell = 10$ m

Ζητούνται

α. Η διάμετρος της ράβδου (d)

β. Η επιμήκυνση ($\Delta\ell$).

α) $$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{\alpha\pi}}{\pi}}$$

$$A_{\alpha\pi} = \frac{F_{\upsilon\pi}}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{10000\,\text{daN}}{1200\,\text{daN/cm}^2}$$

$$A_{\alpha\pi} = 8{,}33\text{cm}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 8{,}33\,\text{cm}^2}{3{,}14}}$$

$$d = 3{,}25 \text{ cm}$$

β) $$\Delta\ell = \frac{F \cdot \ell}{A \cdot E} = \frac{10000\,\text{daN} \cdot 1000\,\text{cm}}{8{,}33\,\text{cm}^2 \cdot 2100000\,\text{daN/cm}^2}$$

$$\Delta\ell = 0{,}57\,\text{cm}$$

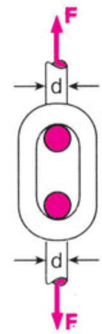
Απάντηση

α) d = 3,25 cm

β) $\Delta\ell$ = 0,57 cm

άσκηση 2

Η αλυσίδα που φαίνεται στο σχήμα καταπονείται σε εφελκυσμό από φορτίο ίσο με 4000 daN. Αν η τάση θραύσης του υλικού είναι ίση με 4800 daN/cm^2 και ο συντελεστής ασφάλειας ληφθεί ίσος με 6, να υπολογισθεί η διάμετρος του κρίκου της αλυσίδας.



Λύση

Δίνονται

$F = 4000$ daN

$\sigma_{\theta\rho} = 4800$ daN/cm^2

$v = 6$

Ζητούνται

Η διάμετρος του κρίκου (d)

Το φορτίο της αλυσίδας κατανέμεται ισομερώς στους δύο κλάδους του κρίκου. Αν F_{kk} είναι το φορτίο κάθε κλάδου του κρίκου, τότε:

$$F_{kk} = \frac{F}{2}$$

$$F_{kk} = \frac{4000\,\text{daN}}{2}$$

$$F_{kk} = 2000\,\text{daN}$$

$$A_{kk} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{kk}}{\pi}} \quad (1)$$

$$A_{kk} = \frac{F_{kk}}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \quad (2)$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{v}$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{4800\ \text{daN/cm}^2}{6}$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = 800\ \text{daN/cm}^2$$

Από την (2) προκύπτει:

$$A_{kk} = \frac{2000\,daN}{800\,daN/cm^2}$$

A_{kk} = 2,5 cm^2

Από την (1) προκύπτει:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{kk}}{\pi}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 2{,}5\,cm^2}{3{,}14}}$$

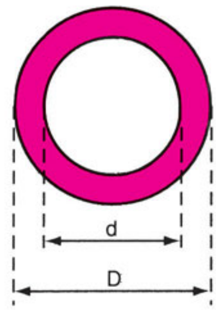
d = 1,78 cm = 17,8 mm

Απάντηση

d = 17,8 mm

άσκηση 3

Σωλήνας με εξωτερική διάμετρο 30 mm και εσωτερική 25 mm καταπονείται σε θλίψη από φορτίο 10 kN. Να υπολογιστεί η θλιπτική τάση που θα αναπτυχθεί.



Λύση

Δίνονται

D = 30 mm

d = 25 mm

F = 10 kN = 10.000 N

Ζητούνται

Η τάση (σ)

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4}$$

$$A = \frac{3{,}14\left(30^2\,mm^2 - 25^2\,mm^2\right)}{4}$$

$$A \cong 216\ mm^2$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{10000N}{216mm^2}$$

$$\sigma = 46{,}3\ N/mm^2$$

Απάντηση

$\sigma = 46{,}3\ N/mm^2$

Συρματόσχοινο αποτελείται από 6 δέσμες, η καθεμία από τις οποίες έχει 37 συρματίδια διαμέτρου (το καθένα) 0,5 mm. Αν η τάση θραύσης του υλικού είναι ίση με 150 daN/mm^2 και ο συντελεστής ασφάλειας ίσος με 6, να προσδιοριστεί η εφελκυστική ικανότητα φόρτισης, δηλαδή το μέγιστο φορτίο που μπορεί να ανυψωθεί με ασφάλεια.

Λύση

Δίνονται

Δέσμες: 6

συρματίδια: 37/δέσμη

$d_{σδ}$ (διάμετρος συρματιδίου) = 0,5 mm

$σ_{θρ}$ = 150 daN/mm^2

v = 6

Ζητούνται

Η ικανότητα φόρτισης ($F_μ$).

$F_μ = A_{υπ.} σ_{επ}$ (ικανότητα φόρτισης) (1)

$$A_{υπ} = \frac{π \cdot d_{σδ}^2}{4} 37 \cdot 6$$

$$v = \frac{σ_{θρ}}{σ_{επ}}$$

$$σ_{επ} = \frac{σ_{θρ}}{v} = \frac{150\,daN/mm^2}{6}$$

$$σ_{επ} = 25\,daN/mm^2$$

Από τη (2) προκύπτει:

$$A_{υπ} = \frac{πd_{σδ}^2}{4} \cdot 37 \cdot 6 = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5^2\,mm^2}{4} \cdot 37 \cdot 6$$

$A_{υπ}$ = 43,6 mm^2

Από την (1) προκύπτει:

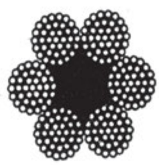
$$F_{\mu} = A_{\upsilon\pi} \cdot \sigma_{\varepsilon\pi} = 43{,}6\ mm^2 \cdot 25\ daN / mm^2$$

$$F_{\mu} = 1090\ daN$$

1. DIN 655

Συρματόσχοινα κανονικής κατασκευής (από ισοδιαμετρικά σύρματα)

α) 6×7+1H, 6×19+1H, 6×37+1H

Τύπος	Αριθμός Εμβόλων	Αριθμός συρμάτων ανά έμβολο	Αριθμός όλων των συρμάτων	Διάμετρος συρματοσχοίνου mm	Διάμετρος σύρματος mm	Μεταλλική διατομή mm²	Βάρος εις kg/m	Θεωρητικό φορτίο θραύσης σε kg για αντοχή σύρματος σε kg/mm² 130	160	180
B				6	0,28	13,67	0,130	1 780	2 190	2 460
				7	0,31	16,76	0,159	2 180	2 680	3 010
				8	0,34	20,16	0,191	2 620	3 230	3 640
				9	0,4	27,9	0,26	3 650	4 450	5 000
				10	0,45	35,3	0,34	4 600	5 650	6 350
				11	0,5	43,6	0,41	5 660	7 000	7 850
				12	0,55	52,7	0,50	6 850	8 450	9 500
				13	0,6	62,8	0,59	8 150	10 050	11 300
				14	0,65	73,7	0,70	9 600	11 800	13 250
				15	0,7	85,4	0,81	11 100	13 650	15 350
				16	0,75	98,1	0,93	12 750	15 700	17 650
	6	37	222	18	0,8	111,6	1,06	14 500	17 850	20 100
				20	0,9	141,2	1,34	18 350	22 600	25 400
				22	1,0	174,4	1,65	22 650	27 900	31 400
				24	1,1	211,0	2,00	27 450	33 750	38 000
				27	1,2	251,1	2,38	32 650	40 200	45 200
				29	1,3	294,7	2,80	38 300	47 150	53 050
6x37+1H				31	1,4	341,7	3,24	44 400	54 650	61 500
				33	1,5	392,3	3,72	51 000	62 750	70 600
				35	1,6	446,4	4,24	58 050	71 400	80 350
				37	1,7	503,9	4,78	65 500	80 600	90 700
				40	1,8	564,9	5,36	73 450	90 400	101 700
				42	1,9	629,4	5,97	81 800	100 700	113 300
				44	2,0	697,4	6,62	90 650	111 600	125 550

Απάντηση

$$F_{\mu} = 1090\ daN$$

Με σχοινί του οποίου το υλικό κατασκευής έχει τάση θραύσης ίση με 1200 daN/cm^2 ανυψώνουμε βάρος ίσο με 4200 daN. Αν ληφθεί συντελεστής ασφάλειας ίσος με 4, να προσδιοριστεί η διάμετρος του σχοινιού (διαστασιολόγηση).

Λύση

Δίνονται

$\sigma_{\theta\rho} = 1200$ daN/cm^2

$F = 4200$ daN

$v = 4$

Ζητούνται

Η διάμετρος (d)

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \quad (1)$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{F}{A}$$

$$A = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \quad (2)$$

$$v = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{\sigma_{\varepsilon\pi}}$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{v}$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{1200\,\text{daN/cm}^2}{4}$$

$\sigma_{\varepsilon\pi} = 300$ daN/cm^2

Από την (2) προκύπτει:

$$A = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{4200\text{ daN}}{300\text{ daN/cm}^2}$$

$A = 14$ cm^2

Από την (1) προκύπτει:

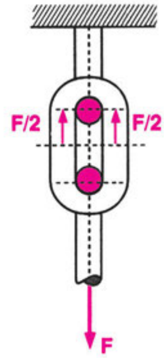
$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 14\text{ cm}^2}{3{,}14}}$$

$d = 4{,}22$ cm

Απάντηση

d = 4,22 cm

άσκηση 6



Η αλυσίδα του σχήματος καταπονείται από εφελκυστικό φορτίο 1800 daN. Αν η επιτρεπόμενη τάση είναι ίση με 820 daN/cm^2 και η διάμετρος του κλάδου του κρίκου ίση με 16 mm, να γίνει ο έλεγχος των τάσεων, δηλαδή να αποφανθείτε αν η αλυσίδα αντέχει τη φόρτιση με ασφάλεια.

Λύση

Δίνονται

$F = 1800$ daN

$\sigma_{\varepsilon\pi} = 820$ daN/cm^2

$d = 16$ mm $= 1{,}6$ cm

Ζητούνται

Ο έλεγχος των τάσεων

Με τους συμβολισμούς της άσκησης 2, έχουμε:

$$\sigma_{\upsilon\pi} = \frac{F_{\upsilon\pi}}{A_{\upsilon\pi}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \text{ (έλεγχος των τάσεων)}$$

$$\sigma_{\upsilon\pi(kk)} = \frac{F_{kk}}{A_{kk}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi} \quad (1)$$

$$A_{kk} = \frac{\pi d^2}{4} \quad (2)$$

$$F_{kk} = \frac{F}{2}$$

$$F_{kk} = \frac{1800 \text{ daN}}{2}$$

$$F_{kk} = 900 \text{ daN}$$

Από τη (2) έχουμε

$$A_{kk} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}6^2 \text{cm}^2}{4}$$

$A_{kk} = 2 \text{ cm}^2$

Από την (1) έχουμε:

$$\sigma_{\upsilon\pi(kk)} = \frac{F_{kk}}{A_{kk}} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}$$

$$\sigma_{\upsilon\pi(kk)} = \frac{900 \text{ daN}}{2 \text{ cm}^2} \leq 820 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{\upsilon\pi(kk)} = 450 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} \leq 820 \text{ daN/cm}^2$$

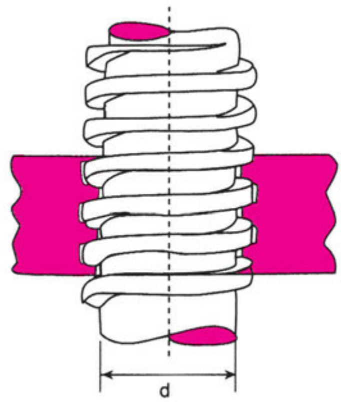
Απάντηση

$\sigma_{\upsilon\pi(kk)}$ = 450 daN/cm^2 ≤ 820 daN / cm^2

Επομένως, η αλυσίδα αντέχει τη φόρτιση με ασφάλεια.

άσκηση 7

Δίνεται κοχλίας με διάμετρο πυρήνα ίση με 10 mm και επιτρεπόμενη τάση ίση με 8 daN/mm². Να προσδιοριστεί το μέγιστο εφελκυστικό φορτίο, (ικανότητα φόρτισης). Σημειώνουμε ότι, για τον υπολογισμό της αντοχής των κοχλιών χρησιμοποιείται η διάμετρος του πυρήνα και όχι η εξωτερική του διάμετρος.



Λύση

Δίνονται

$d = 10m$

$\sigma_{επ} = 8\ daN / mm^2$

Ζητούνται

Η ικανότητα φόρτισης ($F_μ$)

$F_μ = A \cdot \sigma_{επ}$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 10^2\ mm^2}{4}$$

$A = 78{,}5\ mm^2$

Επομένως:

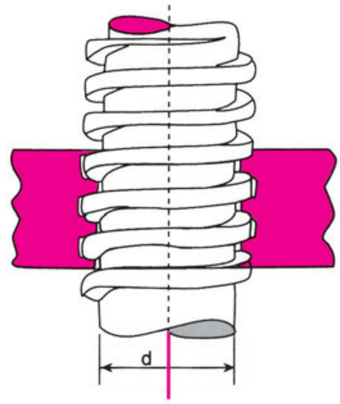
$F_μ = A \cdot \sigma_{επ} = 78{,}5\ mm^2 \cdot 8\ daN/mm^2$

$F_μ = 628\ daN$

Απάντηση

$F_μ$ = 628 daN

Από κοχλία πρόκειται να κρεμαστεί βάρος ίσο με 1000 daN. Αν η τάση θραύσης του υλικού είναι ίση με 48 daN/ mm² και ληφθεί συντελεστής ασφάλειας ίσος με 6, να υπολογιστεί η διάμετρος του πυρήνα του κοχλία, (διαστασιολόγηση).



Λύση

Δίνονται

$F = 1000$ daN

$\sigma_{\theta\rho} = 48$ daN/mm²

$v = 6$

Ζητούνται

Η διάμετρος του κοχλία (d)

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \quad (1)$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{F}{A}$$

$$A = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi}} \quad (2)$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{v} = \frac{48\,daN/mm^2}{6}$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = 8\,daN/mm^2$$

Από την (2) προκύπτει:

$$A = \frac{F}{\sigma_{\varepsilon\pi}} = \frac{1000\ daN}{8\ daN/mm^2}$$

$$A = 125\ mm^2$$

Από την (1) προκύπτει:

$$d = \sqrt{\frac{4\,A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 125\ mm^2}{3{,}14}}$$

$$d = \sqrt{159\ mm^2}$$

d = 12,6 mm

Απάντηση

d = 12,6 mm

άσκηση 9

Μία χαλύβδινη ράβδος καταπονείται επαναληπτικά σε εφελκυσμό και θλίψη από φορτίο 3700 daN. Αν η τάση θραύσης του υλικού της ράβδου είναι ίση με 420 N/mm^2 και ο συντελεστής ασφαλείας ίσος με 4, να υπολογίσετε τη διατομή της ράβδου.

Λύση

Δίνονται

$F_{μετ}$ = 3700 daN

$σ_{θρ}$ = 420 N/mm^2

$ν$ = 4

Ζητούνται

Η διατομή (A) της ράβδου

$$A = \frac{F_{μετ}}{σ_{επ(μετ)}} \quad (1)$$

$$σ_{επ(μετ)} = \frac{1}{3}σ_{επ} \quad (2)$$

$$σ_{επ} = \frac{σ_{θρ}}{ν} = \frac{420 N/mm^2}{4}$$

$σ_{επ}$ = 105 N/mm^2

Από την (2) προκύπτει:

$$σ_{επ(μετ)} = \frac{1}{3}σ_{επ} = \frac{1}{3}105\,N/mm^2$$

$$σ_{επ(μετ)} = 35 N/mm^2 = 3{,}5 daN/mm^2$$

Από την (1) προκύπτει:

$$A = \frac{F_{μετ}}{σ_{επ(μετ)}} = \frac{3700 daN}{3{,}5 daN/mm^2}$$

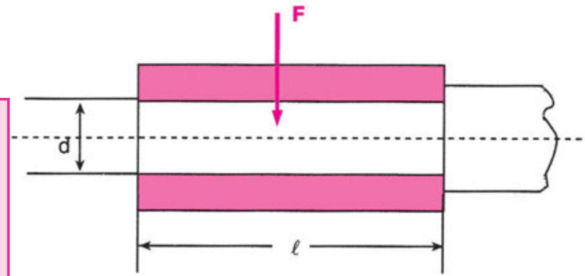
A = 1057 mm^2 = 10,57 cm^2

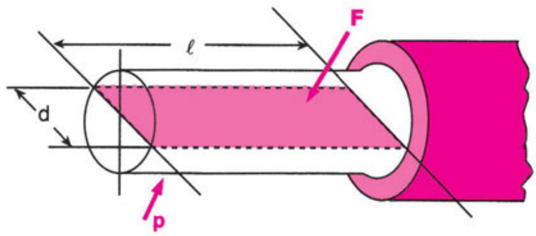
Απάντηση

A = 10,57 cm^2

άσκηση 10

Ο εγκάρσιος στροφέας της ατράκτου που φαίνεται στο σχήμα πιέζει τον τριβέα του εδράνου με φορτίο ίσο με 1000 daN. Εάν η επιφανειακή πίεση είναι ίση με 40 daN/cm^2 και το μήκος του στροφέα (ℓ) είναι διπλάσιο της διαμέτρου του (d), να προσδιοριστούν τα στοιχεία αυτά του στροφέα (ℓ και d).





Σαν επιφάνεια επαφής στροφέα και τριβέα δε θεωρούμε την ημικυλινδρική επιφάνεια, αλλά την ορθή προβολή της.

Λύση

Δίνονται

F = 1000 daN

p = 40 daN/cm^2

ℓ = 2 d

Ζητούνται

Το μήκος (ℓ) και η διάμετρος (d) του στροφέα

$\ell = 2d$ (1)

$A = \ell \cdot d = 2d \cdot d = 2\,d^2$

$$d = \sqrt{\frac{A}{2}} \quad (2)$$

$$p = \frac{F}{A}$$

$$A = \frac{F}{p} = \frac{1000\,daN}{40\,daN/cm^2}$$

A = 25 cm^2

Από τη (2) έχουμε:

$$d = \sqrt{\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{25\,cm^2}{2}}$$

$d = 3{,}5\ cm$

Από την (1) έχουμε:

$\ell = 2d = 2 \cdot 3{,}5\ cm$

$\ell = 7\ cm$

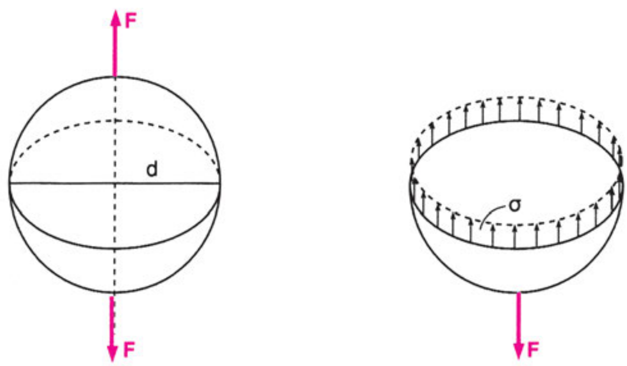
Απάντηση

$d = 3{,}5\ cm$

$\ell = 7\ cm$

άσκηση 11

Σφαιρικό κέφυλος εσωτερικής διαμέτρου (d) και πάχους (t) βρίσκεται υπό εσωτερική πίεση (p). Να αποδειχθεί ότι η τάση εφελκυσμού, που αναπτύσσεται στην τομή του κελύφους, που προκαλείται από διαμετρικό επίπεδο που τέμνει το κέλυφος κατά περιφέρεια μέγιστου κύκλου, είναι ίση με π · d/4 · t.



Λύση

Δίνονται

d, t, p

Ζητούνται

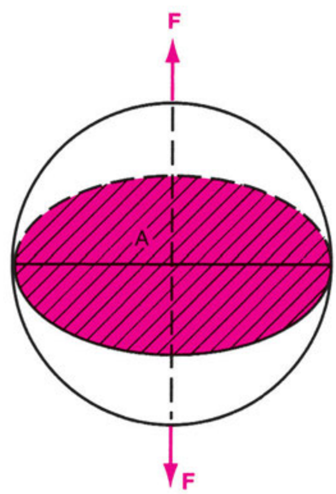
Να αποδειχθεί ότι: σ = p · d / 4 · t

Η πίεση p στα δύο ημισφαίρια είναι αυτή που ενεργεί στην επιφάνεια, η οποία προέρχεται από την προβολή των δύο ημισφαιρίων στο διαμετρικό επίπεδο τομής που αναφέραμε. Αν η επιφάνεια αυτή είναι ίση με A, τότε η συνισταμένη των πιέσεων θα δίδεται από τη σχέση:

$$F = p \cdot A$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$F = p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (1)$$



Η διατομή (A_1), που προέρχεται από την τομή του κελύφους είναι:

$$A_1 = \pi \cdot d \cdot t$$

Αν η αναπτυσσόμενη τάση είναι ίση με (σ), τότε:

$$F = A_1 \cdot \sigma = \pi \cdot d \cdot t \cdot \sigma$$

Επομένως, σε συνδυασμό με την (1) προκύπτει:

$$p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \pi \cdot d \cdot t \cdot \sigma$$

$$\sigma = \frac{p \cdot d}{4 \cdot t}$$

Απάντηση

$$\sigma = \frac{p \cdot d}{4 \cdot t}$$

Μελετούμε ένα σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής διαμέτρου 20 cm και πάχους 4 cm που βρίσκεται υπό πίεση. Αν η τάση θραύσης του υλικού είναι ίση με 52 daN/mm² και ο συντελεστής ασφάλειας ίσος με 10, να υπολογιστεί η μέγιστη εσωτερική πίεση, που είναι δυνατόν να αναπτυχθεί με ασφάλεια στο κέλυφος.

Λύση

Δίνονται

$d = 20$ cm

$t = 4$ cm

$\sigma_{\theta\rho} = 52$ daN/mm² $= 5200$ daN/cm²

$\nu = 10$

Ζητούνται

Η μέγιστη εσωτερική πίεση ($p_{\mu\varepsilon\gamma}$)

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{p_{\mu\varepsilon\gamma} \cdot d}{4 \cdot t}$$

$$p_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{4 \cdot t \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}}{d}$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{\nu} = \frac{5200 \text{ daN/cm}^2}{10}$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = 520 \text{ daN/cm}^2$$

$$p_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{4 \cdot t \cdot \sigma_{\varepsilon\pi}}{d} = \frac{4 \cdot 4 \text{ cm} \cdot 520 \text{ daN/cm}^2}{20 \text{cm}}$$

$$p_{\mu\varepsilon\gamma} = 416 \text{ daN/cm}^2$$

Απάντηση

$p_{\mu\varepsilon\gamma} = 416$ daN/cm²

κεφάλαιο 7

ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΑΣΚΗΣΗ 5

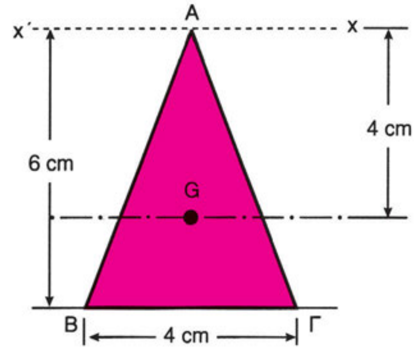
ΑΣΚΗΣΗ 6

ΑΣΚΗΣΗ 7

ΑΣΚΗΣΗ 8

άσκηση 1

Τριγωνικής ισοσκελούς διατομής με πλευρά b και ύψος h να βρείτε τη ροπή αδρανείας της ως προς άξονα που περνάει από την κορυφή Α (παράλληλος του x – x΄) Εφαρμογή: b = 4 cm και h = 6 cm



Λύση

Δίνονται

ΑΒ = ΑΓ

b = 4 cm

h = 6 cm

Ζητούνται

$I_{x\text{-}x΄}$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Steiner, λαμβάνοντας υπόψη ότι: $I_G = \dfrac{bh^3}{36}$, και τα γεωμετρικά στοιχεία του σχήματος, έχουμε:

$$I_{x\text{-}x'} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{4}bh^3$$

Άρα $I_{x\text{-}x'} = \dfrac{1}{4}bh^3$

Εφαρμογή: για

b = 4 cm

έχουμε $I_{x\text{-}x'} = \dfrac{1}{4}\cdot 4b^3$ cm^4

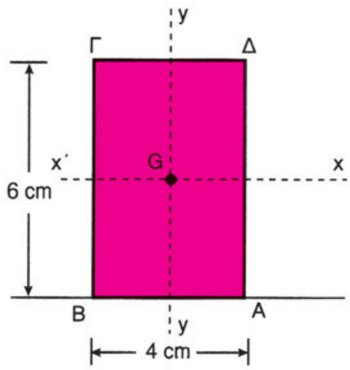
Άρα: $I_{x-x΄} = 216$ cm^4

Απάντηση

$I_{x\text{-}x΄} = 216$ cm^4

άσκηση 2

Δίδεται ορθογωνική διατομή διαστάσεων b = 4 cm, h = 6 cm. Να βρείτε την ακτίνα αδράνειας της διατομής αυτής ως προς τη βάση της.



Λύση

Δίνονται

b = 4 cm

h = 6 cm

Ζητούνται

i_{AB}

Ως προς άξονα x – x΄, η ροπή αδράνειας της ορθογωνικής διατομής 4 x 6 cm, θα είναι:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{4\,cm \cdot 6^3\,cm^3}{12} = 72\,cm^4$$

Άρα $I_x = 72\ cm^4$

Για τη ροπή αδράνειας της διατομής ως προς άξονα τη βάση του τριγώνου ΑΒ, όπου:
$E = 4 \cdot 6\ cm^2 = 24\ cm^2$ και $\alpha = 3\ cm$

θα έχουμε:

$$I_{AB} = I_x + E \cdot \alpha^2$$
$$I_{AB} = 72\ cm^4 + 24\ cm^2 \cdot 3^2\ cm^2 = 288\ cm^4$$

Άρα $I_{AB} = 288\ cm^4$

Η ακτίνα αδράνειας της διατομής ως προς τη βάση της ΑΒ θα είναι:

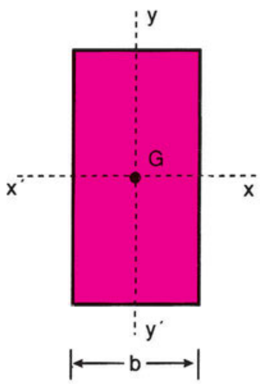
$$i_{AB} = \sqrt{\frac{288}{24}\ cm} = \sqrt{12\,cm} \cong 3{,}46\,cm$$

Άρα $i_{AB} \cong 3{,}46\ cm$

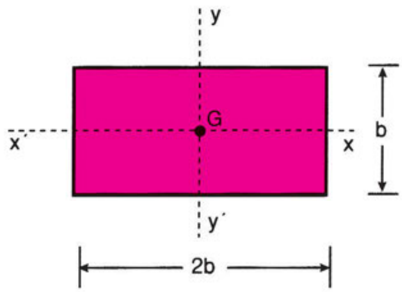
Απάντηση

$\boldsymbol{i_{AB} \cong 3{,}46\ cm}$

Δίδονται δύο ορθογωνικές διατομές (b, 2b) και (2b, b). Ποια είναι η πιο σταθερή ως προς άξονα x – x΄ και ποια είναι η πιο σταθερή ως προς άξονα y – y΄.



(α)



(β)

Λύση

Δίνονται

$E = 2\,b^2$

Ζητούνται

W_{x1}, W_{x2}

W_{y1}, W_{y2}

Οι ροπές αντίστασης W_{x1}, W_{x2} αντίστοιχα των διατομών (α) και (β) ως προς άξονα x – x΄ είναι:

$$W_{x_1} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{b \cdot 4b^2}{6} = 0{,}666b^3 \qquad W_{x_2} = \frac{2b(b)^2}{6} = \frac{2b^3}{6} = 0{,}333b^3$$

δηλαδή ως προς άξονα x – x΄ η διατομή (α) είναι η πιο σταθερή.

Αντίστοιχα έχουμε:

$$W_{y_1} = \frac{b^2 \cdot 2b}{6} = \frac{2b^3}{6} = 0{,}333b^3 \qquad W_{y_2} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} \cong 0{,}666b^3$$

Δηλαδή ως προς άξονα y – y΄ η διατομή (β) είναι η πιο σταθερή.

Απάντηση

α) ως προς άξονα x – x΄ η διατομή (α) είναι η πιο σταθερή
β) ως προς άξονα y – y΄ η διατομή (β) είναι η πιο σταθερή.

άσκηση 4

Δίδεται ορθογωνική διατομή διαστάσεων b = 4 cm και h = 6 cm. Βρείτε τη πολική ροπή αδρανείας της.

Λύση

Δίνονται

b = 4 cm

h = 6 cm

Ζητούνται

I_p

Αν λάβουμε υπόψη ότι:

$I_p = I_x + I_y$ όπου

$$I_x = \frac{4\,cm \cdot 6^3\,cm^3}{12} = 72\,cm^4$$

$$I_y = \frac{6\,cm \cdot 4^3\,cm^3}{12} = 32\,cm^4$$

θα έχουμε: $I_p = 72\ cm^4 + 32\ cm^4 = 104\ cm^4$

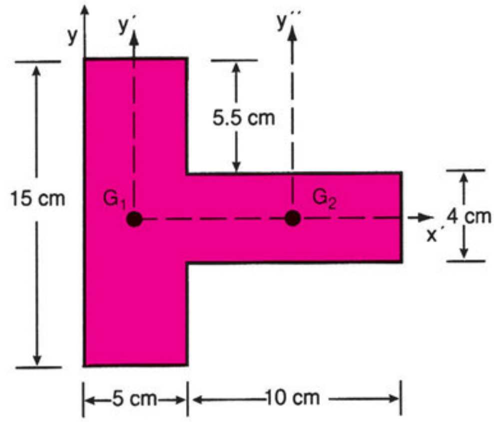
Άρα $I_p = 104\ cm^4$

Απάντηση

$I_p = 104\ cm^4$

άσκηση 5

Βρείτε τις ροπές αδρανείας I_x, I_y της διατομής του σχήματος.



Λύση

Δίνονται

Οι διαστάσεις
της σύνθετης διατομής

Ζητούνται

I_x, I_y

Ως προς άξονα x – x´, η ροπή αδράνειας της σύνθετης αυτής διατομής, θα είναι:

$$I_{x\text{-}x'} = \frac{5\,cm(15\,cm)^3}{12} + \frac{10\,cm(4\,cm)^3}{12} = 1406{,}25\,cm^4 + 53{,}333\,cm^4 \cong 1459{,}58\,cm^4$$

Άρα $I_{x-x'} = 1459{,}58\ cm^4$

Ως προς άξονα y – y´, η ροπή αδράνειας της σύνθετης αυτής διατομής θα είναι:

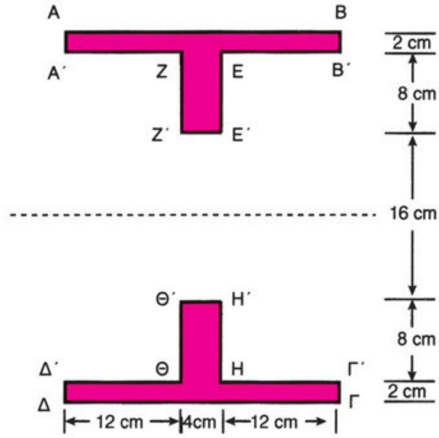
$$I_{y\text{-}y'} = \frac{5^3\,cm^3 \cdot 15\,cm}{12} + 5\,cm \cdot 15\,cm \cdot \frac{(5\,cm)^2}{4} + \frac{(10\,cm)^3 \cdot 4\,cm}{12} + 10\,cm \cdot 4\,cm\left(\frac{10}{2}\,cm + 5\,cm\right)^2 =$$

$$= 156{,}25\,cm^4 + 468{,}75\,cm^4 + 333{,}33\ cm^4 + 4000\,cm^4 = 4958{,}33\,cm^4$$

Άρα, $I_{y-y'} = 4958{,}33\ cm^4$

Απάντηση

$I_{y-y'} = 4958{,}33\ cm^4$



Δίδεται διατομή διπλού ταυ με εγκοπή. Να βρεθεί η ροπή αδρανείας και η ροπή αντίστασης της διατομής αυτής.

Λύση

Δίνονται

Σύνθετη διατομή

Ζητούνται

I_x, W_x

Είναι προφανές ότι η ροπή αδράνειας της διατομής του διπλού ταφ με εγκοπή στο μέσον της, θα είναι: η ροπή αδράνειας της επιφάνειας ΑΒΓΔ μείον το διπλάσιο της ροπής αδράνειας της επιφανείας Γ΄Β΄ΕΗ, μείον τη ροπή αδράνειας της επιφανείας Ε΄Ζ΄Θ΄Η΄. Έχουμε αντίστοιχα:

$$I_{ΑΒΓΔ} = \frac{bh^3}{12} = \frac{28\,cm \cdot 36^3\,cm^3}{12} = 108864\,cm^4$$

$$I_{Γ΄Β΄ΕΗ} = \frac{bh^3}{12} = \frac{12\,cm \cdot 32^3\,cm^3}{12} = 32768\ cm^4$$

$$I_{Ε΄Ζ΄Θ΄Η΄} = \frac{bh^3}{12} = \frac{4\,cm \cdot 16^3\,cm^3}{12} = 1365{,}33\,cm^4$$

$$I_X = 108864\,cm^4 - 2 \cdot 32768 - 1365{,}33\,cm^4$$

Άρα I_x = 42962,7 cm^4

Η ροπή αντίστασης της διατομής αυτής θα είναι

$$w_x = \frac{41962{,}7}{18}\,cm^3 = 2331{,}26\,cm^3$$

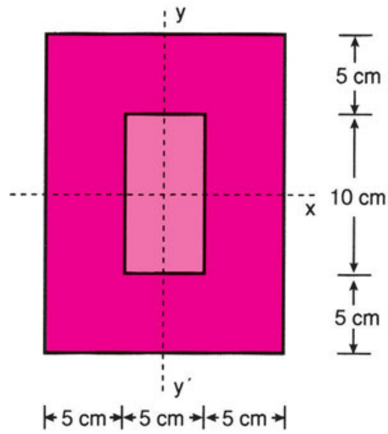
Άρα W_x = 23331,26 cm^3

Απάντηση

W_x = 23331,26 cm^3

I_x = 42962,7 cm^4

Βρείτε τη ροπή αδρανείας της κοίλης διατομής ως προς τους άξονες x – x´ και y – y´.



Λύση

Δίνονται

Οι διαστάσεις της σύνθετης διατομής

Ζητούνται

I_x

Από τους τύπους:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$ για τη σύνθετη διατομή έχουμε:

$$I_x = I_{x_1} - I_{x_2},$$

$$I_y = I_{y_1} - I_{y_2}$$

Είναι

$$I_{x_1} = \frac{15 \cdot 20^3}{12} cm^4,$$

$$I_{x_1} = 10000 cm^4$$

$$I_{x_2} = \frac{5 \cdot 10^3}{12} cm^4$$

$$I_{x_2} = 416,66 cm^4$$

Άρα I_x = 9583,34 cm^4

$$I_{y_1} = \frac{20 \cdot 15^3}{12} cm^4,$$

$$I_{y_1} = 5625 cm^4$$

$$I_{y_2} = \frac{10 \cdot 5^3}{12} cm^4,$$

$$I_{y_2} = 104,166 cm^4$$

Άρα I_y = 5520,83 cm^4

Απάντηση

I_y = 5520,83 cm^4

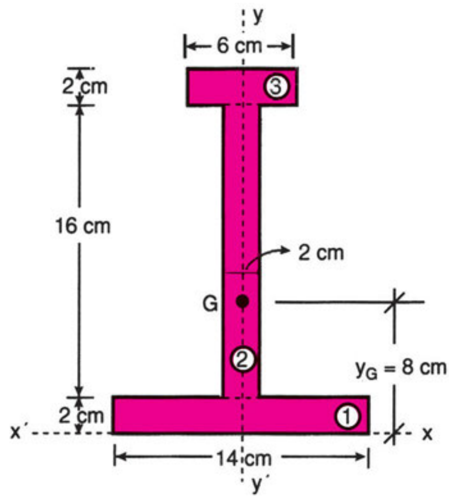
άσκηση 8

Δίδεται αμφιαρθρωτός στύλος, σύνθετης διατομής, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί:

α) η θέση του Κ.Β. διατομής

β) η ροπή αδρανείας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα y – y΄.

γ) η ακτίνα αδρανείας iy – y΄



Λύση

Δίνονται

Οι διαστάσεις της σύνθετης διατομής

Ζητούνται

Y_G, $I_{y-y'}$, $i_{y-y'}$

α) Έχουμε:

$E_1 = 2 \cdot 14\ cm^2 = 28\ cm^2$, $y_1 = 1$ cm, $E_1y_1 = 28\ cm^2$

$E_2 = 2 \cdot 16\ cm^2 = 32\ cm^2$, $y_2 = 10$ cm, $E_2y_2 = 320\ cm^2$

$E_3 = 2 \cdot 6\ cm^2 = 12\ cm^2$, $y_3 = 19$ cm , $E_3y_3 = 298\ cm^2$

$$y_G = \frac{E_1y_1 + E_2y_2 + E_3y_3}{E_1 + E_2 + E_3} = \frac{28 + 320 + 298}{72}\frac{cm^2}{cm} = 8\,cm$$

Άρα: $y_G = 8$ cm

β) Έχουμε:

$$I_{y\text{-}y'} = \frac{2 \cdot 14^3}{12}cm^4 + \frac{16 \cdot 2^3}{12}cm^4 + \frac{2 \cdot 6^3}{12}cm^4$$

Άρα: $I_{y\text{-}y'} = 504\ cm^4$

γ) Έχουμε:

$$I_{y\text{-}y'} = \sqrt{\frac{I_{y\text{-}y'}}{E}} = \sqrt{\frac{504}{72}}\,cm = 2{,}65\,cm$$

Άρα: $i_{y\text{-}y'}$ = 2,65 cm

Απάντηση

α) y_G = 8 cm

β) $I_{y\text{-}y'}$ = 504 cm^4

γ) $i_{y\text{-}y'}$ = 2,65 cm

κεφάλαιο 8

ΦΟΡΕΙΣ – ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ – ΣΤΗΡΙΞΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΟΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

άσκηση 1

Σε μία τομή τ – τ μίας δοκού έχουμε:
1) N = Q = 0, M $\neq$ 0
2) N = M = 0, Q $\neq$ 0
3) Q = M = 0 N $\neq$ 0
Να εξάγετε τα συμπεράσματα για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις.

Λύση

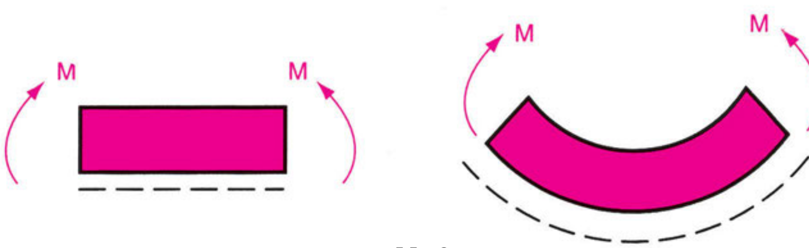
Δίνονται

1) N = Q = 0, M $\neq$ 0
2) N = M = 0, Q $\neq$ 0
3) Q = M = 0 N $\neq$ 0

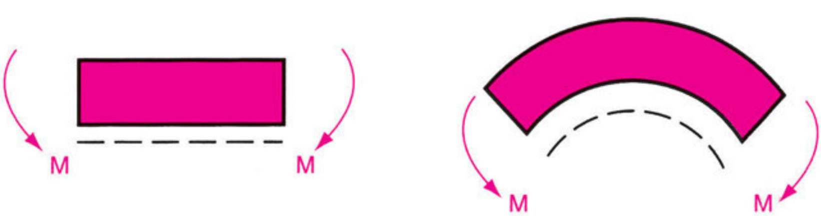
Ζητούνται

Τα συμπεράσματα για κάθε μία από τις περιπτώσεις 1,2,3

1. Αν M > 0 τότε οι ίνες (μόρια) του κάτω τμήματος της διατομής εφελκύονται, ενώ οι ίνες του πάνω τμήματος της διατομής θλίβονται. Αν M<0 συμβαίνουν τα αντίθετα.

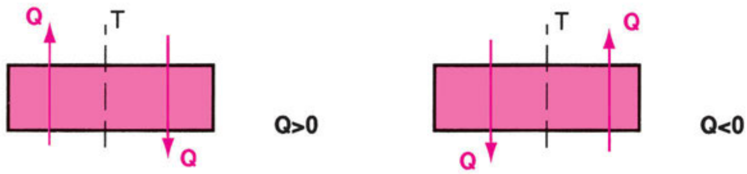


M>0

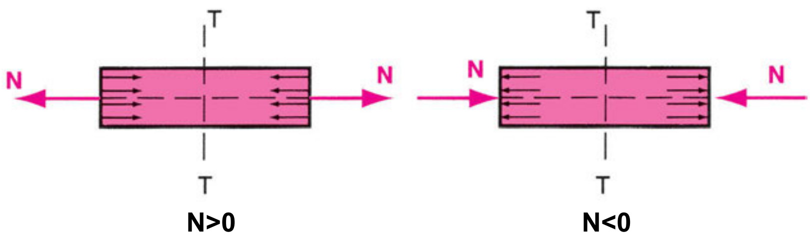


M<0

2. Η περίπτωση αυτή μας δίδει καθαρή διάτμηση, δηλαδή οι ίνες (τα μόρια) τείνουν να ολισθήσουν μεταξύ τους κατά τη διεύθυνση της Q.



3. Αν N > 0 τότε έχουμε καθαρό εφελκυσμό. Αν N < 0 τότε έχουμε καθαρή θλίψη.



Να βρεθούν οι αντιδράσεις στηρίξεων των παρακάτω φορέων.

Λύση

Δίνονται

Τα φορτία

Ζητούνται

A_y, B_y

α) Λαμβάνοντας τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma F_y = 0$, $100\ daN + 200\ daN = A_y + B_y$

$300\ daN = A_y + B_y$

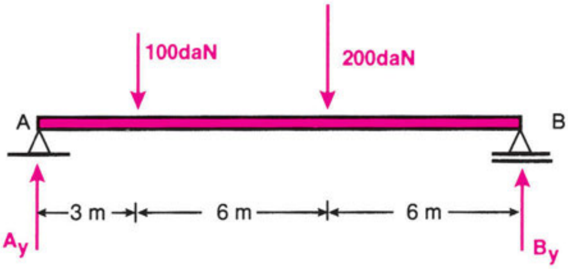
$\Sigma M_{F_1}^{A} = 0$,

$100\ daN \cdot 3\ m + 200\ daN \cdot 9\ m - B_y \cdot 15\ m = 0$

$2100\ daN \cdot m = B_y \cdot 15\ m$

$$B_y = \frac{2100}{15} daN = 140\ daN$$

Άρα: $A_y = 160\ daN$
$B_y = 140\ daN$

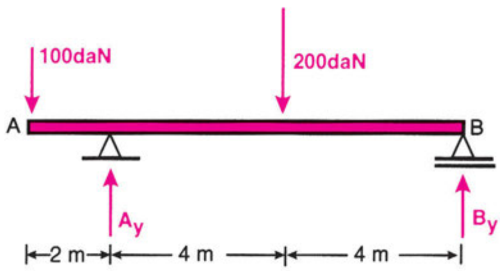


β)Λαμβάνοντας τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma F_y = 0$,
$100\ daN + 200\ daN = A_y + B_y$
$300\ daN = A_y + B_y$

$\Sigma M^{A}_{F_1} = 0$,
$- 100\ daN \cdot 2\ m + 200\ daN \cdot 4\ m - B_y \cdot 8\ m = 0$

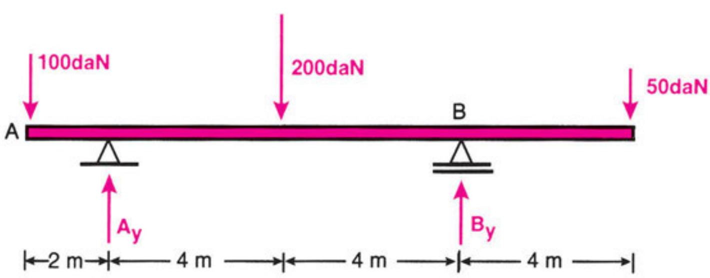
Άρα
$A_y = 225\ daN$
$B_y = 75\ daN$



γ) Λαμβάνοντας τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε:
$\Sigma F_y = 0$,
$100\ daN + 200\ daN + 50\ daN = A_y + B_y$
$350\ daN = A_y + B_y$

$\Sigma M^{A}_{F_1} = 0$,
$- 100\ daN \cdot 2\ m + 200\ daN \cdot 4\ m - B_y \cdot 8\ m + 50\ daN \cdot 12\ m = 0$
$1200\ daNm = B_y \cdot 8\ m$
$B_y = 150\ daN$

Άρα $A_y = 200\ daN$,
$B_y = 150\ daN$



δ) Λαμβάνοντας τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma F_y = 0,$

$$q \cdot \ell \frac{kN}{m} \cdot m = A_y + B_y$$

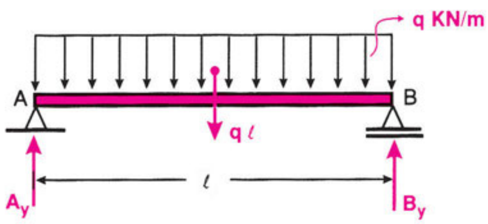
$$q \cdot \ell \cdot kN = A_y + B_y$$

$$q \cdot \ell N \cdot \frac{\ell}{2} m - B_y \cdot \ell m = 0$$

$$q \frac{\ell^2}{2} kNm - B_y \cdot \ell \cdot m = 0$$

$$B_y = \frac{q \cdot \ell}{2} kN$$

Άρα $A_y = B_y = \dfrac{q \cdot \ell}{2}$ kN

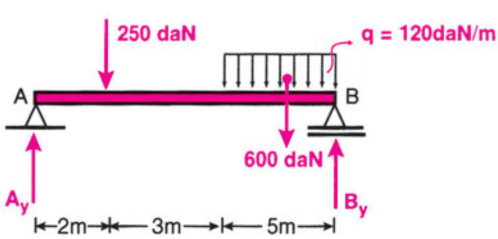


ε) Λαμβάνοντας τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma F_y = 0,$
250 daN + 600 daN = $A_y + B_y$
850 daN = $A_y + B_y$

$\Sigma M_{F1} = 0,$
250 daN · 2 m + 600 daN · 7,5 m - B_y · 10 m = 0
B_y = 500 daN

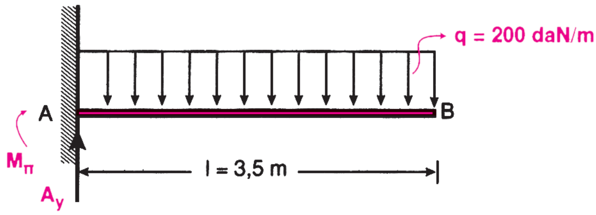
Άρα: A_y = 350 daN
B_y = 500 daN



στ) Για την ομοιόμορφη φόρτιση q = 200 daN/m καθ' όλο το μήκος ℓ = 3,5 m έχουμε:

A_y = 200 daN/m · 3,5 m = 700 daN. Άρα:
A_y = 700 daN

Η ροπή πακτώσεως M_π θα είναι: M_π = 700 daN · 1,75 m
Άρα: M_π = 1225 daN · m



ζ) Λαμβάνοντας τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma F_y = 0$,

$A_y + B_y$ = 150 daN + 100 daN + 200 daN + 400 daN

$A_y + B_y$ = 850 daN

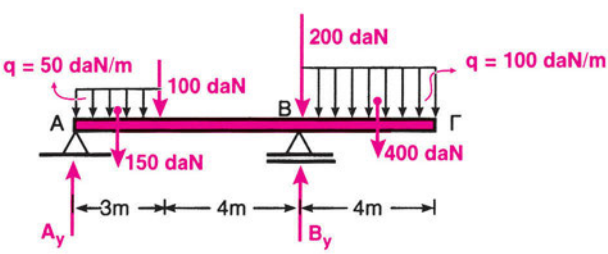
$\Sigma M_{F_1} = 0$,

150 daN · 1,5 + 100 daN · 3 m + 200 daN · 7 m - B_y · 7 m + 400 daN · 9 m = 0

5525 daN · m = B_y · 7 m

B_y = 789,29 daN

A_y = 60,71 daN



Απάντηση

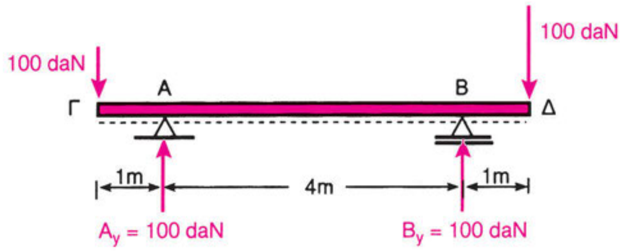
α) A_y = 160 daN, B_y = 140 daN
β) A_y = 225 daN, B_y = 75 daN
γ) A_y = 200 daN, B_y = 150 daN
δ) $A_y = B_y = \dfrac{q \cdot \ell}{2}$ kN
ε) A_y = 350 daN, B_y = 500 daN
στ) M_π = 1225 daN · m
z) A_y = 60,71 daN

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ, [M], [Q], [N] ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

Να βρεθούν τα διαγράμματα [M], [Q] των παρακάτω φορέων.

Λύση

1. Έχουμε: $A_y = B_y = 100$ daN



Διάγραμμα (Q)

$Q_Γ = -100$ daN, $Q_α^{δεξ} = 0$

$Q_B^{αρ} = 0$, $Q_B^{δεξ} = 100$ daN $= Q_Δ$

Διάγραμμα [Q]

<u>Διάγραμμα (M)</u>

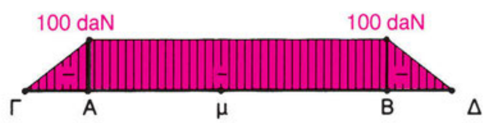
$M_Γ = 0$, $M^{αρ}_A = -100$ daNm $= M_A^{δεξ}$

$M_μ = -100$ daN $\cdot$ 3 m +

+ 100 daN $\cdot$ 2 m = - 100 daNm

$M_Δ = 0$,

$M_B = -100$ daN $\cdot$ m



Διάγραμμα [M]

2. $\Sigma F_y = 0$

$150\ daN - A_y + 70{,}7\ daN + B_y - 100\ daN = 0$

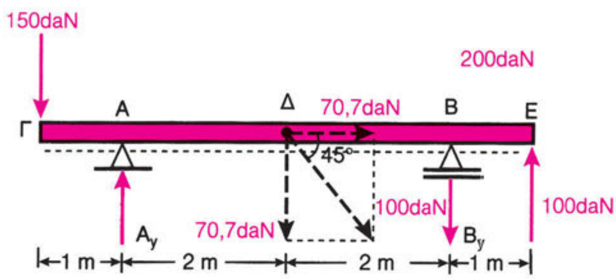
$A_y - B_y = 120{,}7\ daN$

$\Sigma M_{F_1}^{A} = 0,\ - 150\ daN \cdot 1\ m + 70{,}7\ daN \cdot 2\ m + B_y \cdot 4\ m - 100\ daN \cdot 5\ m = 0$

$4B_y = 508{,}6\ daN$

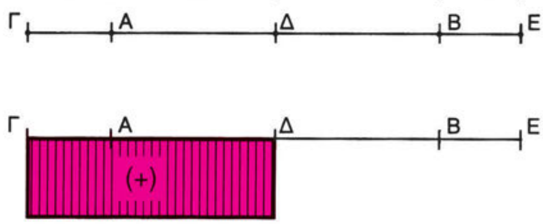
$A_y = 247{,}85\ daN$

$B_y = 127{,}15\ daN$



Διάγραμμα [N]

Παρατηρούμε ότι A_x = 70,7 daN όπου με τη δύναμη των 70,7 daN (ανάλυση της δύναμης των 100 daN) εφελκύουν την ΓΔ. Άρα έχουμε στο τμήμα αυτό σταθερή εφελκυστική δύναμη ίση με 70,7 daN.



Διάγραμμα [N]

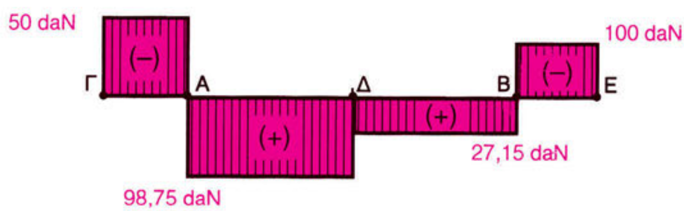
Διάγραμμα [Q]

$Q_Γ = Q^{αρ}_A = - 150\ daN$

$Q_A^{δεξ} = 98{,}75\ daN,$

$Q_Δ^{δεξ} = 27{,}15\ daN = Q_B^{αρ},$

$Q_E = - 100\ daN = Q_B^{δεξ}$

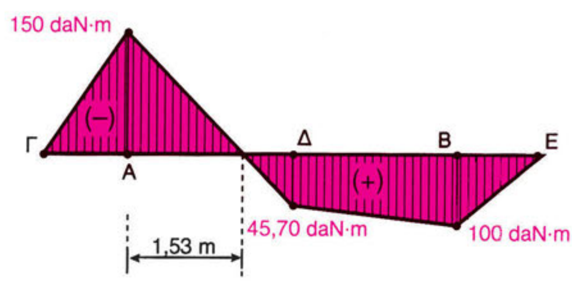


Διάγραμμα [Q]

Διάγραμμα [M]

$M_Γ = 0, M_A = - 150\ daN \cdot m$

$M_Δ = - 150\ daN \cdot 3\ m + 247{,}85\ daN \cdot 2\ m = + 45{,}70\ daN \cdot m$



Διάγραμμα [M]

3. Έχουμε:

$\Sigma F_X = 0$

$A_y + B_y = 670$ daN

$\Sigma M_{F1}^{A} = 0$,

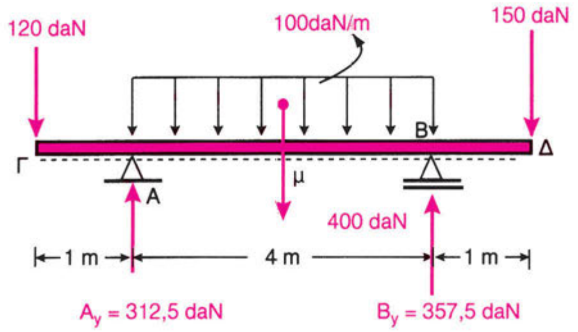
$- 120$ daN $\cdot$ 1 m + 400 daN $\cdot$ 2 m

$- B_y \cdot 4$ m + 150 daN $\cdot$ 5 m = 0

1430 daN $\cdot$ m = $B_y \cdot 4$ m

$B_y = 357{,}5$ daN,

$A_y = 312{,}5$ daN



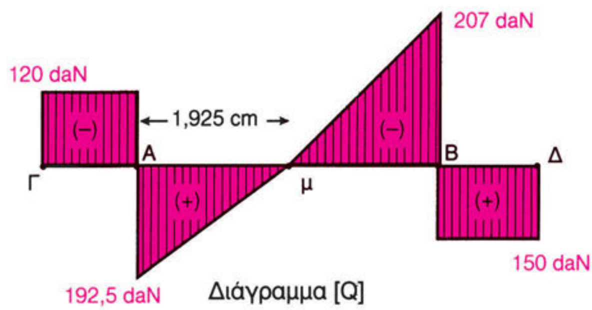
<u>Διάγραμμα [Q]</u>

$Q_Γ = -120$ daN $= Q_A^{αρ}$,

$Q_A^{δεξ} = 192{,}5$ daN, $Q_μ = - 7{,}5$ daN

$Q_Δ = 150$ daN $= Q_B^{δεξ}$,

$Q_B^{αρ} = - 207{,}5$ daN.



Διάγραμμα [Q]

<u>Διάγραμμα [M]</u>

$M_Γ = 0$,

$M_A = - 120$ daN $\cdot$ m

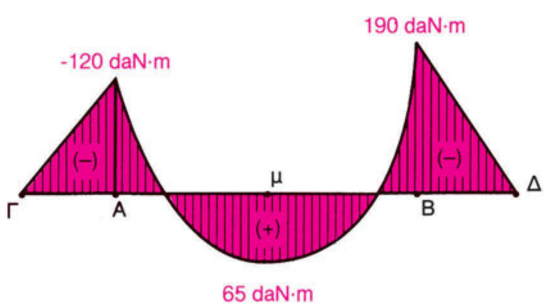
$M_μ = - 120$ daN $\cdot$ 3 m +

+ 312,5 daN $\cdot$ 2 m - 200 daN $\cdot$ 1 m

$M_μ = 65$ daN $\cdot$ m

$M_Δ = 0$,

$M_B = - 150$ daN $\cdot$ m



Διάγραμμα [M]

4.

Έχουμε:

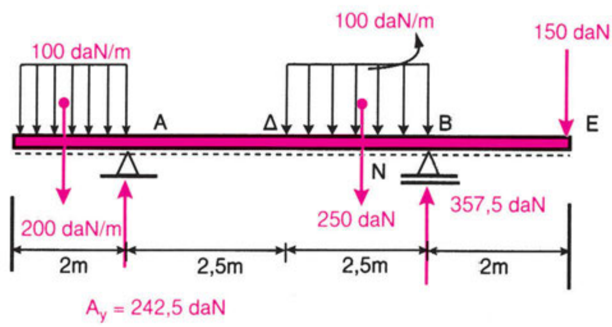
$\Sigma F_y = 0$,

$A_y + B_y = 600$ daN

$\Sigma MF_i^A = 0$, $- 200$ daN $\cdot$ 1 m $+ 250$ daN $\cdot$ 3,75 m $- B_y$ 5 m $+ 150$ daN $\cdot$ 7 m $= 0$

Άρα : $A_y = 242{,}5$ daN

$B_y = 357{,}5$ daN



Διάγραμμα [Q]

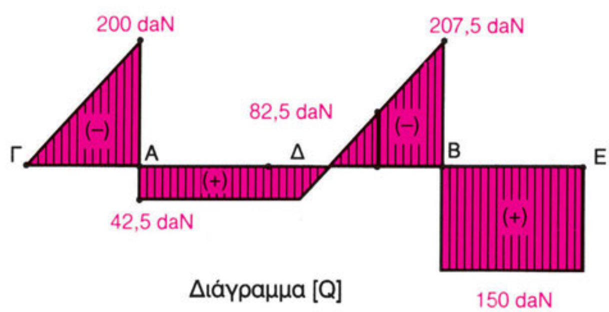
$Q_\Gamma = 0$,

$Q_A^{\alpha\rho} = - 200$ daN, $Q_A^{\delta\varepsilon\xi} = 42{,}5$ daN

$Q_\Delta = 42{,}5$ daN, $Q_E = 150$ daN,

$Q_B^{\delta\varepsilon\xi} = 150$ daN, $Q_B^{\alpha\rho} = - 207{,}5$ daN

$Q_N = - 82{,}5$ daN



Διάγραμμα [Q]

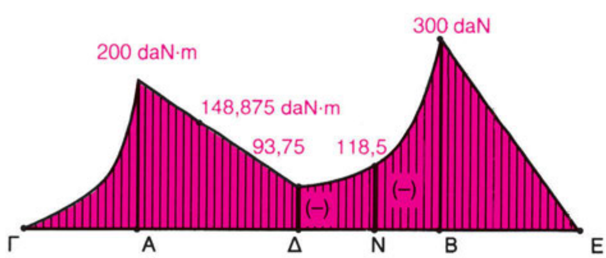
Διάγραμμα [M]

$M_\Gamma = 0$, $M_A = - 200$ daN $\cdot$ m

$M_\Delta = - 200$ daN $\cdot$ 3,5 m +
$+ 242{,}5$ daN $\cdot$ 2,5 m $= - 93{,}75$ daN $\cdot$ m

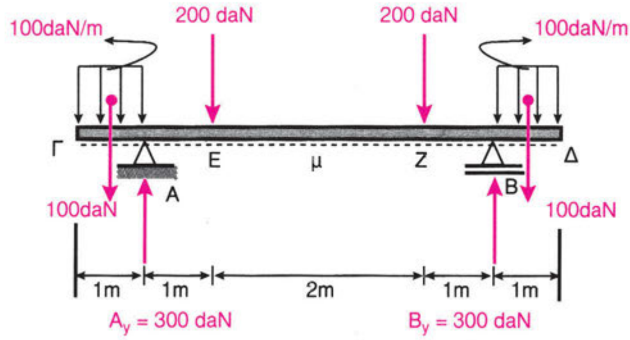
$M_E = 0$,

$M_B = - 300$ daN $\cdot$ m



Διάγραμμα [M]

5. $A_y = B_y = 300$ daN



Διάγραμμα [Q]

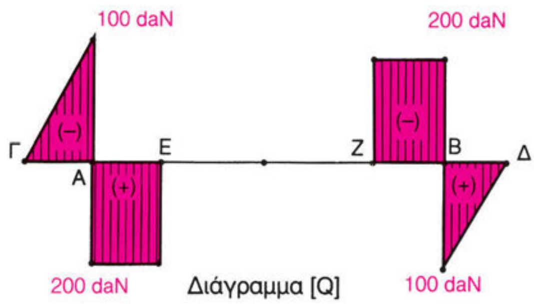
$Q_Γ = 0$, $Q_E^{αρ} = -100$daN

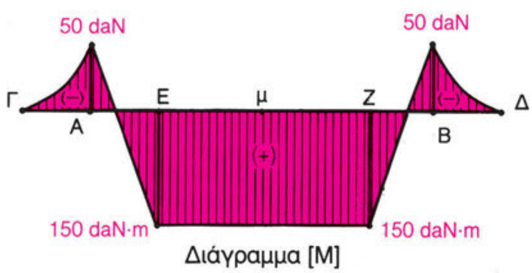
$Q_A^{δεξ} = 200$ daN, $Q_E^{αρ} = 200$ daN

$Q_E^{δεξ} = 0$, $Q_Z^{αρ} = 0$, $Q_Z^{δεξ} = -200$daN

$Q_Δ = 0$, $Q_β^{δεξ} = 100$ daN

$Q_B^{αρ} = -200$ daN





Διάγραμμα [M]

$M_Δ = M_Γ = 0$, $M_A = -100 \cdot 0{,}5$ daN =

$= -50$ daN $\cdot$ m $= M_B$

$M_E = -100$daN $\cdot$ 1,5 m + 300 daN $\cdot$ 1 m =

$= +150$ daN $\cdot$ m $= M_z$

$M_μ = -100$ daN $\cdot$ 2,5 m +

+ 300 daN $\cdot$ 2 m - 200 daN $\cdot$ 1 m =

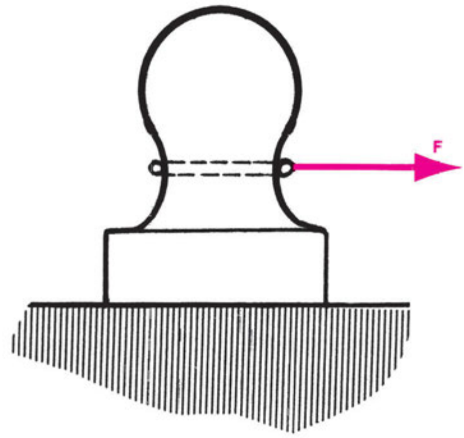
= 150 daN $\cdot$ m

κεφάλαιο 9

ΔΙΑΤΜΗΣΗ

άσκηση 1

Να υπολογισθεί η τάση διάτμησης που αναπτύσσεται στο λαιμό χυτοσιδηράς δέστρας, που η διατομή της είναι κυκλικός δακτύλιος, με εξωτερική διάμετρο D = 40 cm και πάχος 3,5 cm, όταν σύρεται από εγκάρσια δύναμη F = 500 KN



Λύση

Δίνονται

Εξωτερική διάμετρος

D = 40 cm

πάχος 3,5 cm

η δύναμη F = 500 kN = 500.000 N

Ζητούνται

η τάση διάτμησης τ

Το εμβαδόν της διατομής που υπόκειται σε διάτμηση είναι:

$$A = \frac{\pi}{4}(400^2 - 330^2) = 40133{,}846 \text{ mm}^2$$

άρα η αναπτυσσόμενη τάση θα είναι:

$$\tau = \frac{F}{A} \text{ ή } \tau = \frac{500000}{40133{,}846} = 12{,}458 \text{ N/mm}^2$$

παίρνουμε

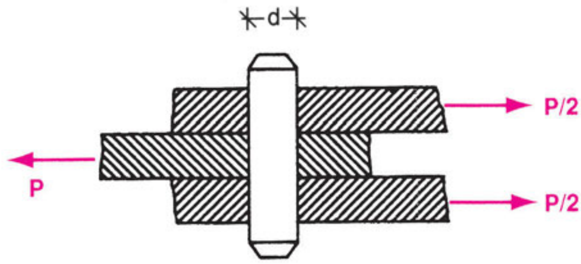
τ = 12,5 N/mm^2

Απάντηση

Η αναπτυσσόμενη στο λαιμό τάση διάτμησης είναι τ = 12,5 N/mm^2

άσκηση 2

Τρία ελάσματα ενώνονται με ένα πείρο, που έχει διάμετρο = 18 mm. Αν η επιτρεπόμενη τάση του υλικού, από το οποίο είναι φτιαγμένος ο πείρος, είναι $\tau_{\varepsilon\pi}$ = 800 daN/cm^2, να υπολογισθεί το μέγιστο φορτίο, με το οποίο μπορούμε να καταπονήσουμε τον πείρο.



Λύση

Δίνονται

Διάμετρος πείρου d = 18 mm

$\tau_{\varepsilon\pi}$ = 800 daN/cm^2

Ζητούνται

P_{max} = ;

1) Υπολογίζουμε το εμβαδόν μίας διατομής του πείρου.
Είναι:

$$A = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$A = \pi \frac{1{,}8^2}{4} = 2{,}54\,cm^2$$

2) Η σύνδεση των τριών ελασμάτων με τον πείρο έχει ως αποτέλεσμα να είναι δύο οι διατομές του πείρου που αναλαμβάνουν το φορτίο. Όταν θα έχουμε το μέγιστο φορτίο που αντέχει ο πείρος τότε στις διατομές που αναλαμβάνουν το φορτίο αυτό θα αναπτύσσεται η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση. Άρα στην περίπτωση που έχουμε μέγιστο φορτίο θα είναι:
$P_{max} = 2 \cdot \tau_{\varepsilon\pi} \cdot A \cdot C$ όπου C ο συντελεστής μείωσης, λόγω σχήματος. Εδώ C = 0,75
Επομένως

P_{max} = 2 × 800 × 2,54 × 0,75 = 3048 daN άρα

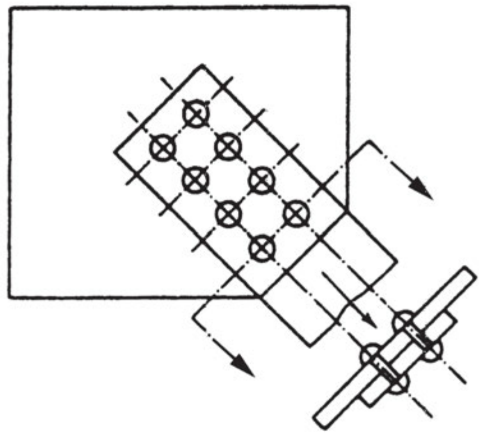
P_{max} = 3048 daN = 30480 N = 30,48 KN

Απάντηση

P_{max} = 30,48 KN

άσκηση 3

Ήλωση σε διπλή σειρά με 8 περτσίνια, καταπονείται από δύναμη F = 280 KN, σε διάτμηση. Αν το υλικό των περτσινίων είναι χάλυβας st 42 και ο συντελεστής ασφάλειας 4, να υπολογισθεί η διάμετρος των περτσινίων.



Λύση

Δίνονται

αριθμός περτσινιών 8

η δύναμη F = 280 KN

υλικό περτσινιών st 42

ο συντελεστής ασφάλειας ν = 4

Ζητούνται

η διάμετρος d των περτσινίων

1) Αφού το υλικό των περτσινιών είναι st 42, η τάση θραύσης θα είναι:

$\sigma_{\theta\rho} = 420\ \text{N/mm}^2$

άρα η επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό θα είναι:

$$\sigma_{\theta\rho} = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{\nu}$$

ή

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{420}{4} = 105\,\text{N/mm}^2$$

και επομένως, η επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση θα είναι

$\tau_{\varepsilon\pi} = 0{,}85\ \sigma_{\varepsilon\pi}$

$\tau_{\varepsilon\pi} = 0{,}85 \times 105 = 89{,}25\ \text{N/mm}^2$

2) Αν d η διάμετρος των περτσινιών τότε το εμβαδόν της διατομής ενός περτσινιού θα είναι:

$$A_{\pi} = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

και επειδή τα περτσίνια είναι οκτώ, η επιφάνεια Α που θα αναλάβει τις διατμητικές δυνάμεις θα είναι:

$$A = 8 \cdot A_{\pi} = 8\pi \cdot \frac{d^2}{4} 2\pi \cdot d^2$$

3) Επομένως θα έχουμε

$$\tau_{\varepsilon\pi} = \frac{F}{A \cdot C}$$

ή

$$A = \frac{F}{\tau_{\varepsilon\pi} \cdot C}$$

όπου C ο συντελεστής μείωσης λόγω σχήματος, εδώ είναι

$C = 0,75$

$$2\pi \cdot d^2 = \frac{F}{\tau_{\varepsilon\pi} \cdot C}$$

$$d^2 = \frac{F}{2 \cdot \pi \cdot \tau_{\varepsilon\pi} \cdot C}$$

ή $d = \sqrt{\dfrac{F}{2 \cdot \pi \cdot \tau_{\varepsilon\pi} \cdot C}}$

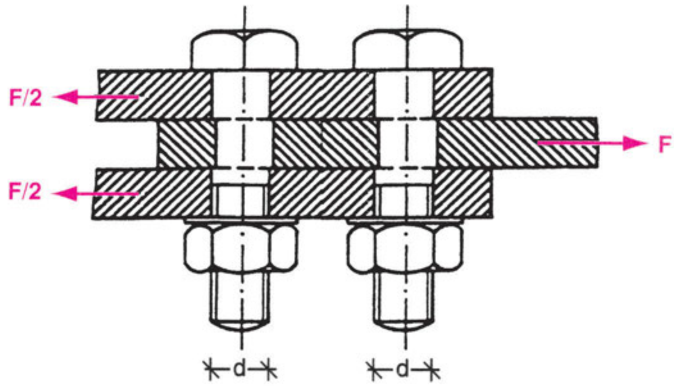
αντικαθιστούμε τις τιμές και έχουμε

$$d = \sqrt{\frac{280000}{2 \times \pi \times 89,25 \times 0,75}} = 25,8 \text{ mm} \cong 26 \text{ mm}$$

Απάντηση

Η διάμετρος κάθε περτσινιού θα είναι d = 26 mm

Με δύο βίδες διαμέτρου d, ενώνουμε τρία ελάσματα. Η σύνδεση καταπονείται από δύναμη F = 10000 N. Το υλικό, από το οποίο είναι κατασκευασμένες οι βίδες, έχει όριο θραύσης, $\sigma_{\theta\rho}$ = 400 N/mm^2. Να υπολογισθεί η αναγκαία διάμετρος του κορμού, που πρέπει να έχουν οι βίδες. Συντελεστής ασφάλειας, έστω 4.



Λύση

Δίνονται

Αριθμός βιδών 2,

$\sigma_{\theta\rho}$ = 400 N/mm^2

η δύναμη F = 10000 N

συντελεστής ασφαλείας ν = 4

Ζητούνται

η διάμετρος d των βιδών

1) Η επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό είναι:

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{\sigma_{\theta\rho}}{\nu}$$

$$\sigma_{\varepsilon\pi} = \frac{400}{4} = 100 N/mm^2$$

2) Η επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση είναι:

$\tau_{\varepsilon\pi}$ = 0,85 $\sigma_{\varepsilon\pi}$

ή $\tau_{\varepsilon\pi}$ = 0,85 × 100 = 85 N/mm^2

3) Οι επιφάνειες που θα αναλάβουν τις διατμητικές δυνάμεις είναι, όπως φαίνεται από το σχήμα, τέσσερις έχουμε:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi \cdot d^2$$

4) Μετά από τα παραπάνω έχουμε:

$$\tau_{\varepsilon\pi} = \frac{F}{A \cdot C}$$

όπου C = 0,75 ο συντελεστής μείωσης, λόγω σχήματος

$$85 = \frac{10000}{\pi \cdot d^2 \cdot 0{,}75}$$

είναι: $d^2 = \dfrac{10000}{\pi \times 85 \times 0{,}75}$

$$d = \sqrt{\frac{10000}{\pi \times 85 \times 0{,}75}} = 7{,}06 \text{ mm} \cong 8 \text{ mm}$$

Απάντηση

Η ζητούμενη διάμετρος είναι d = 8 mm

Θέλουμε να κόψουμε λάμα 10 × 60 mm σε μηχανικό ψαλίδι. Να υπολογισθεί η αναγκαία δύναμη κοπής, αν το υλικό της λάμας είναι st 37

Λύση

Δίνονται

Διαστάσεις λάμας

10 × 60 mm

υλικό λάμας st 37

Ζητούνται

η δύναμη κοπής F_k

1) Το υλικό είναι st 37 άρα η τάση θραύσης είναι $\sigma_{\theta\rho} = 370\ N/mm^2$

2) Η τάση διάτμησης θα είναι: $\tau_{\theta\rho} = 0{,}85 \cdot \sigma_{\theta\rho}$

επομένως $\tau_{\theta\rho} = 0{,}85 \times 370 = 314{,}5\ N/mm^2$

3) Η επιφάνεια κοπής είναι: $A = 10 \times 60 = 600\ mm^2$

4) Η δύναμη κοπής είναι:

$F_\kappa = \tau_{\theta\rho} \cdot A$

ή

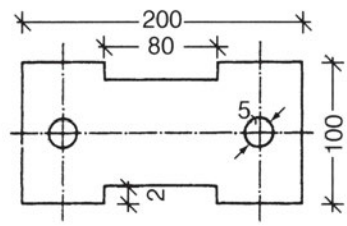
$F_K = 314{,}5 \times 600 = 188700\ N = 188{,}7\ kN$

Απάντηση

Η αναγκαία δύναμη κοπής είναι F_K = 188,7 KN

άσκηση 6

Σε πρέσσα θα κόψουμε κομμάτια, όπως δείχνει το παραπλεύρως σχήμα, από λαμαρίνα πάχους t = 2 mm και υλικό με όριο θραύσης $\sigma_{\theta\rho}$ = 300 N/mm^2. Να υπολογίσετε την αναγκαία δύναμη κοπής, που πρέπει να αναπτύξει η πρέσσα.



Λύση

Δίνονται

το σχήμα και οι διαστάσεις του

πάχος λαμαρίνας t = 2 mm

όριο θραύσης $\sigma_{\theta\rho}$ = 300 N/mm^2

Ζητούνται

η δύναμη κοπής F_k

1) Η τάση διάτμησης είναι:

$\tau_{\theta\rho} = 0,85 \cdot \sigma_{\theta\rho}$

ή $\tau_{\theta\rho} = 0,85 \times 300 = 255$ N/mm^2

2) Η περίμετρος κοπής S, είναι: s = 200 + 200 + 100 + 100 + 4×2 = 608 mm

Το εμβαδόν κοπής είναι:

$A = s \cdot t$

ή A = 608 × 2 = 1216 mm^2

(δεν υπολογίζουμε τις οπές, που θα ανοιχθούν σε δεύτερη φάση)

3) Η δύναμη κοπής F_k, είναι:

$F_k = \tau_{\theta\rho} \cdot A$

$F_k = 255 \times 1216 = 310 \cdot 08$ N $\cong$ 310,1 KN

Απάντηση

Η αναγκαία δύναμη κοπής είναι F_K = 310,1 KN

άσκηση 7

Κόβουμε έναν άξονα με d = 6 mm. Αν η τάση θραύσης είναι $\sigma_{\theta\rho} = 370\ N/mm^2$, ποια είναι η δύναμη κοπής;

Λύση

Δίνονται

διάμετρος άξονα d = 6 mm

τάση θραύσης $\sigma_{\theta\rho} = 370\ N/mm^2$

Ζητούνται

Η δύναμη κοπής P_κ

1) Η διατομή κοπής είναι:

$$A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

ή

$$A = \pi \cdot \frac{6^2}{4} = 28{,}27\ mm^2$$

2) Η τάση θραύσης σε διάτμηση είναι

$\tau_{\theta\rho} = 0{,}85\ \sigma_{\theta\rho}$

ή $\tau_{\theta\rho} = 0{,}85 \times 370 = 314{,}5\ N/mm^2$

3) Η δύναμη κοπής είναι:

$F_\kappa = A \cdot C \cdot \tau_{\theta\rho}$ (C = 0,75)

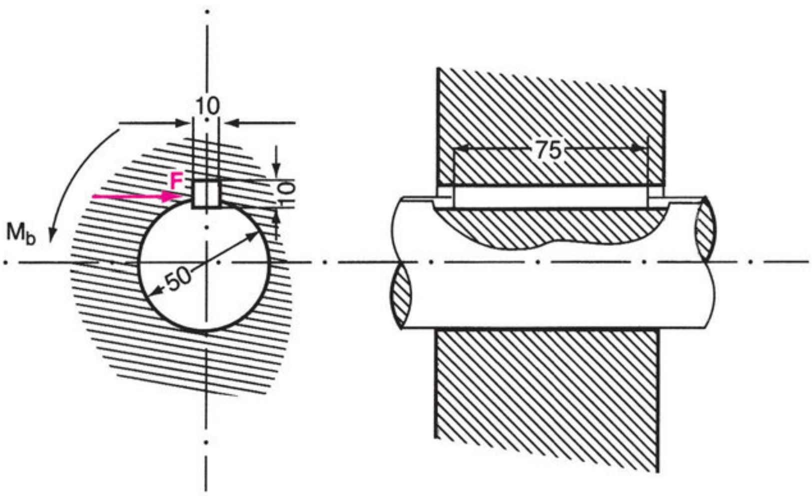
$F_\kappa = 28{,}27 \times 0{,}75 \times 314{,}5 = 6 \cdot 668{,}18\ N \cong 6{,}7\ KN$

Απάντηση

Η ζητούμενη δύναμη είναι $P_\kappa = 6{,}7\ KN$

άσκηση 8

Μία σφήνα, ύψους 10 mm , πλάτους 10 mm και μήκους 75 mm, συνδέει έναν άξονα, διαμέτρου d = 50 mm, με μία τροχαλία που κινείται από μία ροπή M_b = 1 KNm. Να υπολογισθεί η αναπτυσσόμενη διατμητική τάση στη σφήνα.



Λύση

Δίνονται

Οι διαστάσεις σφήνας

ύψος 10 mm,

πλάτος 10 mm

μήκος 75 mm

διάμετρος άξονα d = 50 mm

κινητήρια ροπή M_b = 1 KNm

Ζητούνται

Ζητούνται η διατμητική τάση στη σφήνα τ=;

Η ροπή M_b μεταφέρεται μέσω της σφήνας στον άξονα. Για την ισορροπία είναι

$$M_b = F \cdot \frac{d}{2}$$

1 KNm = F · 0,025 m

ή

$$F = \frac{1}{0,025} = 40 \text{ KN}$$

Η επιφάνεια που αναλαμβάνει τις διατμητικές δυνάμεις είναι

$A = 0{,}01 \times 0{,}075 = 750\ mm^2 = 750 \times 10^{-6}\ m^2$

Η διατμητική τάση είναι $\tau = \dfrac{F}{A}$

ή

$$\tau = \frac{40000}{750 \times 10^{-6}} = 5333.3333\ N/m^2$$

ή

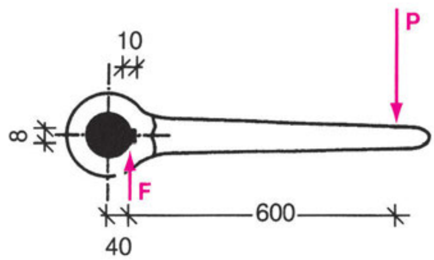
$\tau = 53{,}3\ MP_\alpha$

Απάντηση

Η αναπτυσσόμενη διατμητική τάση στη σφήνα είναι $\tau = 53{,}3\ MP_\alpha$

Με ένα μοχλό, μήκους 640 mm, στρέφουμε έναν άξονα, διαμέτρου 80 mm, με τον οποίο συνδέεται με μία σφήνα, πλάτους 8 mm και μήκους 30 mm. Αν το υλικό της σφήνας έχει επιτρεπόμενη τάση σε διάτμηση, 45 N/mm², να υπολογισθούν:

1. Η μέγιστη δύναμη F_m, που αντέχει η σφήνα και
2. Η αντίστοιχη μέγιστη δύναμη P_m, που πρέπει να εφαρμόσουμε στο άκρο του μοχλού.



Λύση

Δίνονται

Μήκος μοχλού $\ell = 640$ mm

Διάμετρος άξονα d = 80 mm

διαστάσεις σφήνας:

πλάτος = 8 mm

μήκος = 30 mm

$\tau_{\varepsilon\pi} = 45$ /mm²

Ζητούνται

η μέγιστη δύναμη F_m

η μέγιστη δύναμη P_m

1) Η επιφάνεια που αναλαμβάνει τη διατμητική δύναμη είναι:

$A = 8 \times 24 = 240$ mm²

Η μέγιστη δύναμη θα αναπτυχθεί όταν έχουμε τη μέγιστη τάση, άρα

$F_m = \tau_{\varepsilon\pi} \cdot A$

$F_m = 45 \times 240 = 10800$ N $= 10{,}8$ KN

2) Μεταξύ των δυνάμεων F_m και P_m ισχύει η σχέση:

$F_m \cdot 40 = p_m \cdot 640$

άρα $p_m = F_m \cdot \dfrac{40}{640}$ ή

$p_m = 10800 \times \dfrac{40}{640} = 675$ N

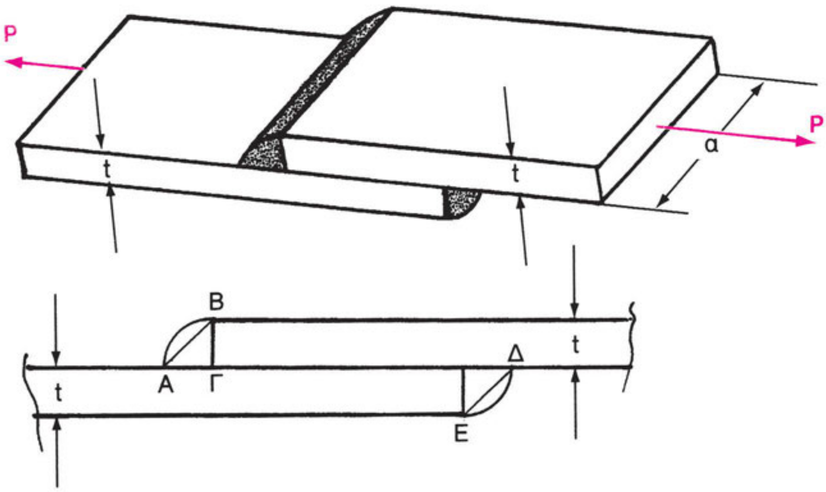
Απάντηση

α) Η μέγιστη δύναμη που αντέχει η σφήνα είναι F_m = 10,8 KN και

β) Η μέγιστη δύναμη που μπορούμε να εφαρμόσουμε στο άκρο του μοχλού P_m = 675 N

άσκηση 10

Δύο πλάκες με το ίδιο πάχος t και πλάτος α, είναι κολλημένες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να ορίσετε τη μέγιστη διατμητική τάση στην κόλληση, που αντιστοιχεί σε φορτίο P.



Λύση

Δίνονται

πάχος t

πλάτος α της πλάκας

μέγιστο φορτίο P

που αντέχει η κόλληση

Ζητούνται

μέγιστη διατμητική τάση τ

Η επιφάνεια που παραλαμβάνει τη διατμητική δύναμη είναι η ΑΒ και η ΕΔ (όπως φαίνεται στο σχ. 9.8)

Είναι:

(ΑΒ) = (ΒΓ) / συν 45° ή (ΑΒ) = t / 0,707

Επομένως η επιφάνεια είναι: $A = \dfrac{t}{0{,}707} \cdot \alpha$ και η τάση είναι: $\tau = \dfrac{p}{A}$

Άρα $\tau = \dfrac{p}{\dfrac{t \cdot \alpha}{0{,}707}} = \dfrac{0{,}707\,p}{t \cdot \alpha}$

Απάντηση

Αν τα γεωμετρικά στοιχεία των πλακών είναι πάχος t και πλάτος α η μέγιστη διατμητική τάση στην κόλληση για φορτίο P, είναι: τ = 0,707 P/t·α

κεφάλαιο 10

ΚΑΜΨΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

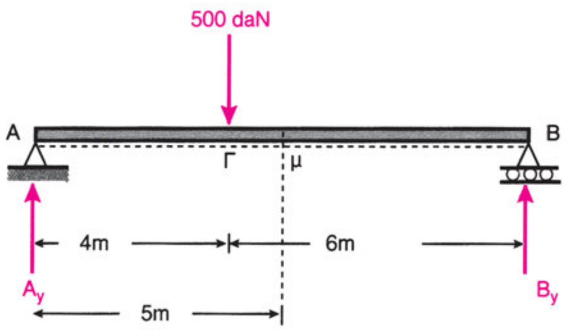
ΑΣΚΗΣΗ 4

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΑΣΚΗΣΗ 6

άσκηση 1

Αμφιέρειστη δοκός ορθογωνικής διατομής 4×6 cm δέχεται φορτίο 500 daN
Να βρεθούν α) Η σ_{max}
β) Οι ακραίες τάσεις στο μέσο της δοκού.



Λύση

Δίνονται

Διατομή 4 x 6 cm

P = 500 daN

Ζητούνται

σ_{max}

σ_{μ}

α) Οι αντιδράσεις A_y, B_y στηρίξεως της δοκού είναι:

A_y = 300 daN, B_y = 200 daN

Είναι $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} cm^4 = 72 cm^4$

Η ροπή στο Γ θα είναι:
M_{Γ} = 300 daN · 4 m = 120 daN · m
M_{Γ} = 1200 daN · cm

Από τον τύπο της κάμψεως έχουμε:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{\Gamma}}{I_x} = y_{\mu} = \frac{12000\, daN \cdot cm}{72\ cm^4} \cdot 3\ cm$$

$$\sigma_{max} = 500\ \frac{daN}{cm^2} = 500\ at$$

$\sigma_{max} = 500$ at

β) Στο μέσο μ της δοκού θα είναι: $M_\mu = 300\ daN \cdot 5\ m - 500\ daN \cdot 1\ m = 10.000\ daN \cdot cm$

Άρα:

$$\sigma_\mu = \frac{10000\,daN \cdot cm}{72\,cm^4} \cdot 3\,cm$$

$\sigma_\mu = 416{,}67$ at

Απάντηση

$\sigma_\mu = 416{,}67$ at

Αμφιέρειστη δοκός κυκλικής διατομής έχει: ℓ = 3 m, $\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 120daN/cm^2 με ομοιόμορφη φόρτιση q = 60 daN/m καθ' όλο το μήκος της. Να βρεθεί η ακτίνα R της κυκλικής διατομής.

Λύση

Δίνονται

ℓ = 3 m

$\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 120 daN/cm^2

q = 60 daN/m

Ζητούνται

R

α) Από τον τύπο της κάμψης:

$\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{I} \cdot y_{max}$ έχουμε:

$$\sigma_{max} = \dfrac{\dfrac{q\ell^2}{8} \cdot R}{\dfrac{\pi R^4}{4}} = \dfrac{q\ell^2}{2\pi R} \quad (1)$$

οπότε

q = 40 daN/m,

ℓ = 3 m,

$\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 120 daN/cm^2

Επειδή δε:

$\sigma_{max} \leq \sigma_{\varepsilon\pi}$ = 120 daN/cm^2 από τη σχέση (1) έχουμε:

$\dfrac{q\ell^2}{2\pi R^3} = \sigma_{\varepsilon\pi}$ από όπου:

$$R = \sqrt[3]{\frac{q\ell^2}{2\pi\sigma_{\varepsilon\pi}}} \quad (3)$$

Εάν στη σχέση (3) θέσουμε τα δεδομένα (2) λαμβάνουμε:

$R \cong 4$ cm

Απάντηση

$R \cong 4$ cm

Δίδεται μία άτρακτος από χυτοσίδηρο. Το πηλίκο των διαμέτρων τους είναι 1,4 και $\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 800 at. Να βρεθεί το πάχος της διατομής.

Λύση

Δίνονται

$\frac{D}{d} = 1{,}4$

$\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 800 at

Ζητούνται

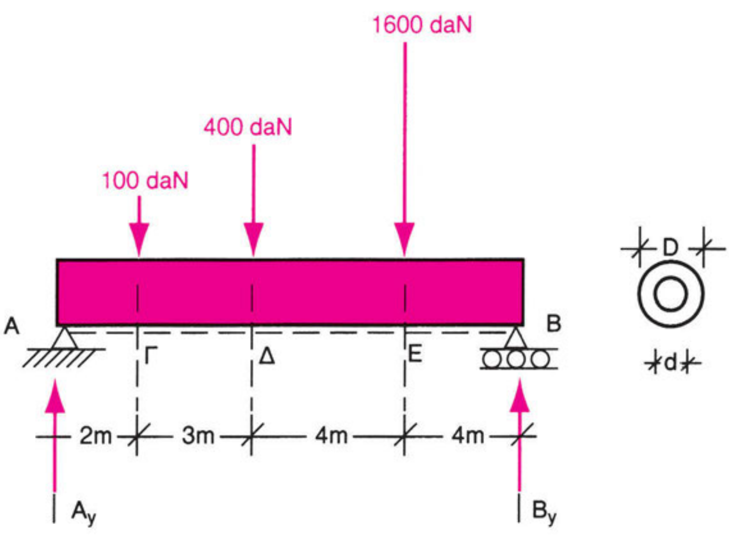
D

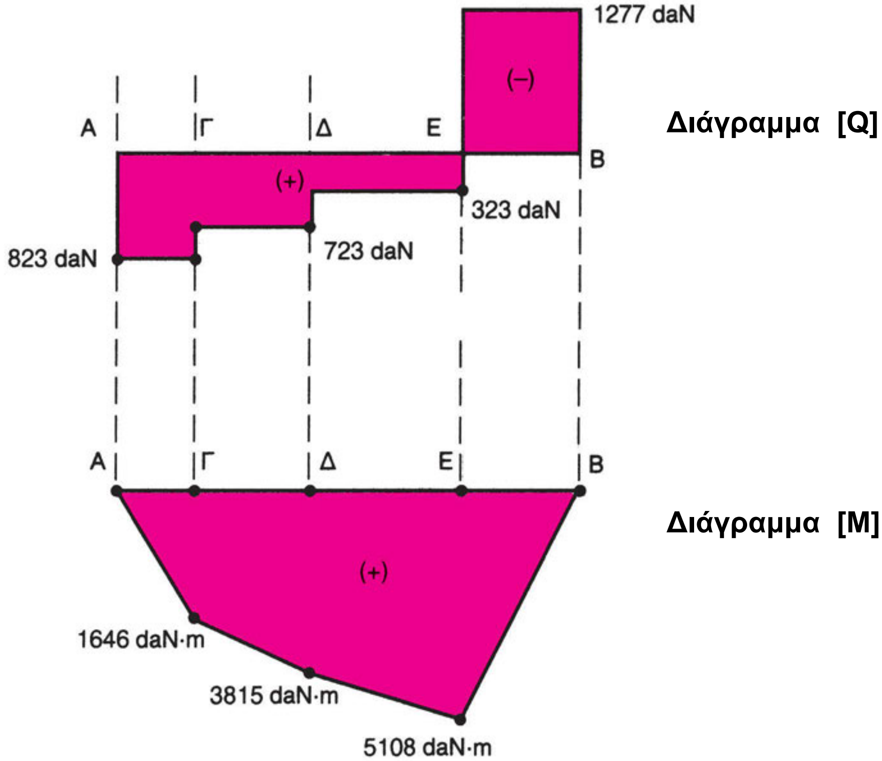
Έχουμε

$A_y + B_y = 2100$ daN, $100 \text{ daN} \cdot 2 \text{ m} + 400 \text{ daN} \cdot 5 \text{ m} + 1600 \text{ daN} \cdot 9 \text{ m} = 13\, B_y$

Οι αντιδράσεις A_y, B_y είναι: A_y = 823 daN, B_y = 1277 daN

Τα διαγράμματα (Q) και (M) είναι αντίστοιχα:





Είναι προφανές ότι στη θέση Ε της δοκού ΑΒ έχουμε: (διάγραμμα (Μ))
$M_E = 5108 \text{ daN} \cdot \text{m} = M_{max}$

Η ροπή αντίστασης $W_{υπ}$, κοίλης κυκλικής διατομής είναι

$$w_{υπ} = \frac{π}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \quad (1)$$

Επειδή δε: $M_{max} = σ_{επ} \cdot W_{υπ}$ (2)

και $\frac{D}{d} = 1,4$ (3) θα έχουμε:

$$5108 \text{ daN} \cdot \text{m} = 800 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} \cdot w_{υπ}$$

$$510800 \text{ daN} \cdot \text{cm} = 800 \text{ daN/cm}^2 \cdot w_{υπ}$$

$$w_{υπ} = \frac{510800}{800} \text{cm}^3 = 638,5 \text{ cm}^3 \quad (4)$$

Άρα $W_{υπ} = 638,5 \text{ cm}^3$

Από τη σχέση (1) λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3) έχουμε:

$$w_{υπ} = \frac{3,14}{32} \cdot \frac{d^4 \left(1,4^4 - 1\right)}{1,4\,d} = 0,27\,d^3$$

Άρα η σχέση (4) γίνεται:

$w_{υπ}$ = 638,5 cm^3 = 0,27 d^3. Άρα:

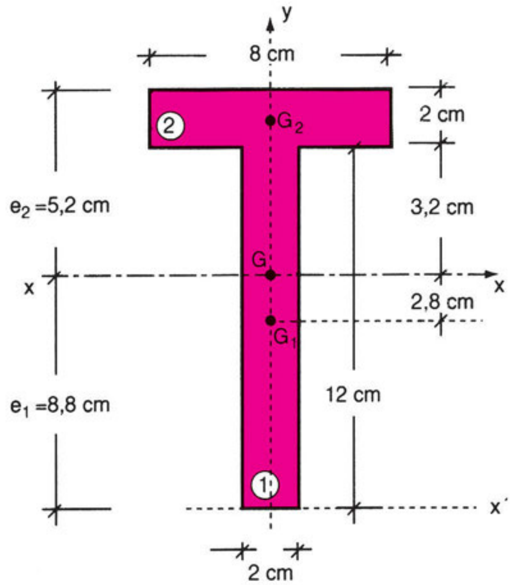
$$d^3 = \frac{638,5\ cm^3}{0,27} = 2365\ cm^3,$$

d = 13,4 cm

Απάντηση

d ≅ 14 cm και D ≅ 20 cm

Αμφιέρειστη δοκός μήκους ℓ = 3,5 m με ομοιόμορφη φόρτιση q = 200 daN/m αποτελείται από χαλύβδινο έλασμα με διατομή απλού ταυ. Να βρεθούν στη δυσμενέστερη θέση (2) οι τάσεις σ_1 και σ_2 της πάνω και κάτω ίνας.



Λύση

Δίνονται

ℓ = 3,5 m

q = 200 daN/m

Ζητούνται

σ_1, σ_2

Για τη διατομή έχουμε:

E_1 = 24 cm^2, y_1 = 6 cm, E_1 y_1 = 144 cm^2

E_2 = 16 cm^2, y_1 = 13 cm, E_1 y_1 = 208 cm^2

$$y_G = \frac{144+208}{40}\,\text{cm},$$

Άρα y_G = 8,8 cm

Για τη ροπή αδράνειας της σύνθετης διατομής, εφαρμόζοντας και το θεώρημα Steiner έχουμε:

$$I_1 = \frac{2\cdot 12^3}{12}\,\text{cm}^4 + 24\cdot 2{,}8^2\,\text{cm}$$

$$I_1 = 476{,}16\,\text{cm}^4$$

$$I_2 = \frac{8\cdot 2^3}{12}\,\text{cm}^4 + 16\cdot 4{,}2^2\,\text{cm}^4$$

$I_2 = 287{,}58\ cm^4$

Άρα:

$I = I_1 + I_2 = 763{,}74\ cm^4$

Η ροπή κάμψης στη διατομή (2) (δυσμενέστερη) είναι:

$$M = \frac{q\ell^2}{8} = \frac{200\,daN/m \cdot 3{,}5^2\,m^2}{8} = 306{,}25\,daN/m^2$$

Άρα:

$$\sigma_2 = -\frac{M}{w_2},$$

όπου

$$w_2 = \frac{763{,}74}{5{,}2}\,cm^4/cm = 146{,}87\,cm^3,$$

δηλαδή

$$\sigma_2 = \frac{-306{,}25\,daN \cdot m}{146{,}87\ cm^3} = -\frac{30625\,daN \cdot cm}{146{,}87\,cm^3} = -208{,}5\,daN/cm^2$$

Άρα: $\sigma_2 = -\ 208{,}5\ daN/cm^2$

Όμοια: $\sigma_1 = 353\ daN/cm^2$ ($W = 86{,}79\ cm^3{}_1$)

Απάντηση

$I = 763{,}74\ cm^4$

$\sigma_1 = 353\ daN/cm^2$

$\sigma_2 = -\ 208{,}5\ daN/cm^2$

άσκηση 5

Στην αμφιέρειστη δοκό του σχήματος να βρεθούν:

α) Οι A_y, B_y

β) Τα διαγράμματα (Q), (M)

γ) Η μέγιστη ροπή κάμψης max $M_κ$ και η θέση που αναπτύσσεται στη δοκό καθώς και η αντίστοιχη max σ, αν η ροπή αντίστασης της διατομής $W = 1000\ cm^3$.

Λύση

Δίνονται

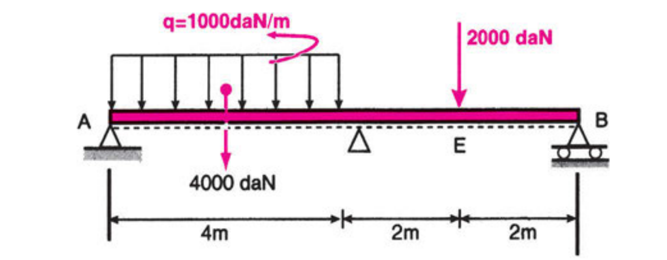
$W = 1000\ cm^3$

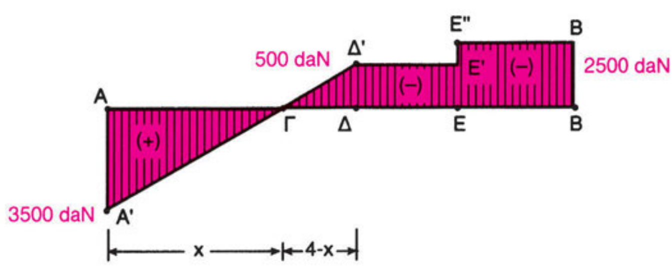
Ζητούνται

α) Οι A_y, B_y

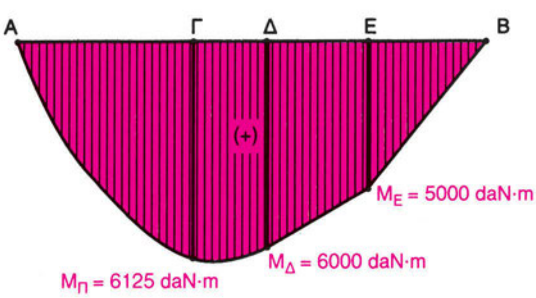
β) Τα διαγράμματα (Q), (M)

γ) $σ_{max}$





Διάγραμμα [Q]



Διάγραμμα [M]

α) Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:
$\Sigma F_y = 0$,
$A_y + B_y = 4000\ daN + 2000\ daN = 6000\ daN$

Χρησιμοποιώντας την τρίτη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$\Sigma M^A_{F1} = 0$

$4000\ daN \cdot 2m + 2000\ daN \cdot 6\ m = B_y\ 8\ m$
$20000\ daN \cdot m = 8B_y \cdot m$

$$B_y = \frac{20000}{8} daN = 2500\, daN$$

Άρα: $A_y = 3500\ daN$ και
$B_y = 2500\ daN$

β) Για το διάγραμμα (Q) έχουμε:
$Q_A = A_y = 3500\ daN$,
$Q_\Delta = 3500\ daN - 4000\ daN = -500\ daN$

Ο μηδενισμός της Q γίνεται σε απόσταση x από το Α.

Είναι όπως εξάγεται παρακάτω, x = 3,5 m. Όμοια: $Q_B = -2500\ daN$ και
$Q_E^{\delta\varepsilon\xi} = -2500\ daN$,
$Q_E^{\alpha\rho} = -2500\ daN + 2000\ daN = -500\ daN$

γ) Από τα όμοια τρίγωνα ΑΑ΄Γ και ΔΔ΄Γ έχουμε:

$$\frac{x}{4-x} = \frac{3500}{500} \text{ από όπου } x = 3{,}5\ m$$

Έχουμε δηλαδή το μηδενισμό της Q σε απόσταση 3,5 m από το Α (ΑΓ = x = 3,5 m)
Οι τιμές των ροπών κάμψης στα σημεία Ε και Δ είναι αντίστοιχα:

$M_\Delta = 3500\ daN \cdot 4\ m - 4000\ daN \cdot 2\ m = 6000\ daN \cdot m$
$M_E = 2500\ daN \cdot 2\ m = 5000\ daN \cdot m$
και
$M_{max} = M_\Gamma = 3500\ daN \cdot 3{,}5\ m - 3500\ daN \cdot 1{,}75\ m = 6125\ daN \cdot m$

Ώστε:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{w} = \frac{6125\ daN \cdot cm \cdot 10^2}{1000 \cdot cm^3}$$

Άρα: $\sigma_{max} = 612,5\ daN/cm^2$

Απάντηση

σ_{max} = 612,5 daN/cm²

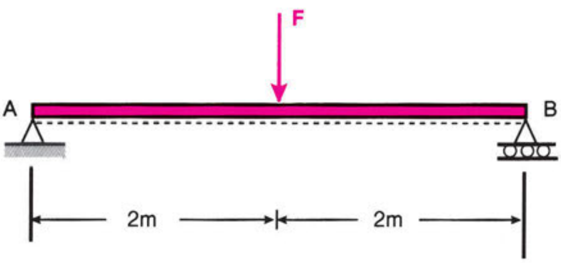
άσκηση 6

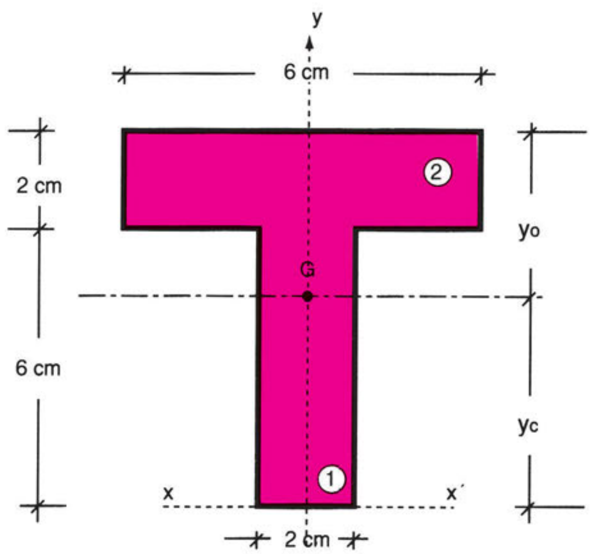
Η αμφιέρειστη δοκός του σχήματος φέρει άγνωστο φορτίο F. Η διατομή της δοκού είναι απλό ταυ. Να βρεθούν:

α) Η θέση του Κ.Β. της διατομής.

β) Οι ροπές αντίστασης της πάνω και κάτω ίνας της διατομής αφού βρεθεί η ροπή αδρανείας ως προς τον κεντροβαρικό οριζόντιο άξονα.

γ) Η τιμή του μέγιστου φορτίου F, που μπορεί να φέρει η δοκός αν το υλικό της έχει την ίδια αντοχή σε εφελκυσμό και θλίψη με $\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 1000 daN/cm^2





Λύση

Δίνονται

Διαστάσεις της σύνθετης διατομής

Ζητούνται

Y_G, W_C

I_X, W_O, F

α) Είναι:

E_1 = 12 cm^2, y_1 = 3 cm, E_1y_1 = 36 cm^3

και

E_2 = 12 cm^2, y_2 = 7 cm, E_2y_2 = 84 cm^3

$$y_G = \frac{E_1y_1 + E_2y_2}{E_1 + E_2} = \frac{120}{24}\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$$

Άρα: $y_\sigma = 5$ cm

β) Είναι:

$I_X = I_{X1} + I_{X2}$ όπου με I_{X1} καλούμε τη ροπή αδράνειας της διατομής (1), και με I_{X2} καλούμε τη ροπή αδράνειας της διατομής (2).

Έχουμε:

$$I_{x_1} = \left(\frac{2\cdot 6^3}{12} + 12\cdot 2^2\right) cm^4 = 84\, cm^4$$

$$I_{x_2} = \left(\frac{6\cdot 2^3}{12} + 12\cdot 2^2\right) cm^4 = 52\, cm^4$$

$$I_x = 136\, cm^4$$

Είναι:

$$w_c = \frac{I_x}{y_c} = \frac{136}{5} cm^3 \ , \ w_0 = \frac{I_x}{y_o} = \frac{136}{3} cm^3$$

Άρα:

$W_C = 27{,}2 cm^3$, $W_O = 45{,}33 cm^3$

ΕΛΕΓΧΟΙ

i) επί της άνω ίνας:

$$\sigma = -\frac{M_{max}}{w_o} = -\frac{\frac{F\cdot \ell}{4}}{w_o} = -1000\, daN/cm^2 = -\frac{F\cdot 4\, cm}{4\cdot 45{,}3\, cm^3}$$

Άρα: F = 453 daN

ii) επί της κάτω ίνας:

Όμοια:

$$\sigma = \frac{M_{max}}{y_c}$$ άρα

F = 272daN

Απάντηση

Το μέγιστο φορτίο που με ασφάλεια, μπορεί να φέρει η δοκός είναι το μικρότερο από τα δύο προαναφερόμενα δηλαδή F = 272 daN

κεφάλαιο 11

ΣΤΡΕΨΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΑΣΚΗΣΗ 7

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να υπολογισθούν η διάμετρος, η γωνία στροφής και η γωνία παραμόρφωσης ενός άξονα που καταπονείται σε στρέψη από μία ροπή 50 KN/m^2 όταν η επιτρεπόμενη τάση είναι 30 MN/m^2 και το μέτρο διάτμησης είναι G = 80 GN/m^2.

Λύση

Δίνονται

ροπή στρέψης 50 KN/m^2

$\tau_{\varepsilon\pi}$ = 30 MN/m^2

G = 80 GN/m^2

Ζητούνται

η διάμετρος του άξονα d

η γωνία παραμόρφωσης γ

η γωνία στροφής ανά m θ/ℓ

1) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$\tau = \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

άρα

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau}}$$

αντικαθιστούμε τις δοσμένες τιμές:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 50 \times 10^3}{\pi \times 30 \times 10^6}} = \sqrt[3]{0{,}0085} = 0{,}204\,\text{m}$$

άρα

d = 20,4 cm

2) Για την γωνία παραμόρφωσης έχουμε τον τύπο $\gamma = \frac{\tau}{G}$ αντικαθιστούμε τις τιμές και έχουμε:

$$\gamma = \frac{30 \times 10^6}{80 \times 10^9} = 0{,}000375 \text{ rad}$$

ή

$$\gamma = \frac{180}{\pi} \times 0{,}000375 = 0{,}0193 = 1'9'',61$$

3) Για τη γωνία στροφής έχουμε τη σχέση:

$$\frac{\tau}{r} = \left(\frac{\theta}{\ell}\right) G$$

στον τύπο θέτουμε $r\frac{d}{2}$ και έχουμε $\left(\frac{\theta}{\ell}\right) = \frac{2 \cdot \tau}{d \cdot G}$ αντικαθιστούμε τις τιμές

$$\frac{\theta}{\ell} = \frac{2 \times 30 \times 10^6}{0{,}204 \times 80 \times 10^9} = 0{,}00368 \text{ rad}$$

$$\frac{\theta}{\ell} = \frac{180}{\pi} \times 0{,}00368 = 0^0{,}21 = 12'38'',3$$

Απάντηση

α) Η διάμετρος του άξονα είναι d = 20,4 cm

β) Η γωνία παραμόρφωσης είναι γ = 0,000375 rad = 1′ 9″, 61

γ) Η γωνία στροφής ανά μέτρο $\frac{\theta}{\ell}$ είναι $\frac{\theta}{\ell}$ = 12′ 38″, 3/m

άσκηση 2

Να υπολογισθούν η εσωτερική και η εξωτερική διάμετρος ενός άξονα, με δακτυλιοειδή διατομή, καθώς και η γωνία στροφής. Ο άξονας καταπονείται σε στρέψη από μία ροπή 50 KN/m^2 η επιτρεπόμενη τάση είναι 30 MN/m^2 και το μέτρο διάτμησης είναι G = 80 GN/m^2 ο λόγος των διαμέτρων είναι 0,9

Λύση

Δίνονται

είδος άξονα (δακτυλιοειδής)

ροπή στρέψης M_t = 50 KN/m^2

$\tau_{\varepsilon\pi}$ = 30 MN/m^2

G = 80 GN/m^2 d/D = 0,9

Ζητούνται

D, d και θ/ℓ

Για τη περίπτωση δακτυλιοειδούς διατομής, έχουμε για την εξωτερική περιφέρεια

$$\tau = \frac{5 \cdot M_t \cdot D}{D^4 - d^4}$$

και

$$\theta = \frac{10 \cdot M_t \cdot \ell}{\left(D^4 - d^4\right)G}$$

Από τη πρώτη σχέση, σε συνδυασμό με το λόγο των διαμέτρων d/D = 0,9 έχουμε:

$$\tau = \frac{5 \cdot M_t \cdot D}{D^4 - (0{,}9D)^4} = \frac{5 \cdot M_t}{D^3\left(1 - 0{,}9^4\right)}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot M_t}{\tau(1 - 0{,}6561)}}$$

αντικαθιστούμε τις τιμές και έχουμε:

$$D = \sqrt[3]{\frac{5 \times 50 \times 10^3}{30 \times 10^6 \times 0.3439}} = \sqrt[3]{0{,}0243} = 0{,}289\,\text{m} \cong 29\,\text{cm}$$

άρα

d = 0,9 × 28,9 ≅ 26 cm

Από τη δεύτερη σχέση, έχουμε αντίστοιχα:

$$\theta = \frac{10 \cdot M_t \cdot \ell}{\left(D^4 - d^4\right)G}$$

ή

$$\frac{\theta}{\ell} = \frac{10M_t}{G \cdot D^4\left(1 - 0{,}9^4\right)} = \frac{10 \cdot M_t}{G \cdot D^4 \times 0{,}3439}$$

αντικαθιστούμε τις τιμές:

$$\frac{\theta}{\ell} = \frac{10 \times 50 \times 10^3}{(0{,}289)^4 \times (0{,}3439) \times 80 \times 10^9} = 0{,}0026\ \frac{rad}{m} = \left(\frac{180}{\pi} \times 0{,}0026\right)^0 = 0^0{,}15$$

άρα $\frac{\theta}{\ell}$= 9΄/m

Απάντηση

εσωτερική διάμετρος d = 26 cm
εξωτερική διάμετρος D = 29 cm
η γωνία στροφής ανά μέτρο θ/ℓ= 9΄/m

άσκηση 3

Στις δύο προηγούμενες ασκήσεις, έχουμε δύο διαφορετικών γεωμετρικών στοιχείων άξονες, που είναι από το ίδιο υλικό και καταπονούνται από την ίδια ροπή. Από τα αποτελέσματα των δύο παραπάνω ασκήσεων, τι συμπεράσματα μπορείτε να εξαγάγετε από το γεγονός της διαφοράς τους ως προς τα γεωμετρικά στοιχεία.

Λύση

Δίνονται

δύο άξονες ένας συμπαγής και ένας δακτυλιοειδής με τα αυτά λοιπά στοιχεία

Ζητούνται

σύγκριση μεταξύ αυτών των αξόνων ως προς τη συμπεριφορά τους στην καταπόνηση της στρέψης

1. Πρώτη άμεση παρατήρηση είναι ότι έχουμε διαφορά στις διαστάσεις. Ο συμπαγής άξονας έχει διάμετρο 20,4 cm ενώ ο δακτυλιοειδής έχει εξωτερική διάμετρο 29 cm. Δηλαδή έχουμε μία αύξηση, στο μέγεθος της διαμέτρου που ποσοστιαία, είναι:

$$\frac{29-20{,}4}{29}\times 100=\frac{8{,}6\times 100}{29}=29{,}6\%$$

2. Από άποψη δυστρεψίας ο δακτυλιοειδής είναι χειρότερος (9΄ ανά μέτρο) από τον συμπαγή (1΄9΄΄, 6 ανά μέτρο)

3. Από άποψη βάρους ανά μέτρο μήκους έχουμε, αν w το ειδικό βάρος του υλικού:

ο συμπαγής $B_\sigma=\pi\frac{20{,}4}{4}\cdot w\cdot 1=326{,}8\,w$

ο δακτυλιοειδής $B_\delta=\pi\frac{\left(29^2-26^2\right)}{4}\cdot w\cdot 1=129{,}6\,w$

Ο συμπαγής λοιπόν είναι βαρύτερος κατά ποσοστό

$$\frac{326{,}8-129{,}6}{326{,}8}\times 100=60\%$$

Απάντηση

Άρα όπου η δυστρεψία ή το μέγεθος είναι τα σημαντικά μεγέθη του προβλήματος τότε προτιμούμε τον συμπαγή άξονα. Όπου το βάρος είναι ανεπιθύμητο προτιμούμε τους δακτυλιοειδείς.

άσκηση 4

Ποια τάση θα αναπτυχθεί σε έναν άξονα, διαμέτρου d, που έχει μέτρο διάτμησης G = 80 GN/m^2 αν θέσουμε ως προϋπόθεση ότι η γωνία στροφής θα είναι 1° σε μήκος ℓ = 20 d.

Λύση

Δίνονται

$$G = 80\ GN/m^2 = \frac{80\times10^9}{10^6}\frac{N}{mm^2} = 80\times10^3 N/mm^2$$

θ = 1° σε μήκος ℓ = 20 d

Ζητούνται

η τάση τ_{max}

Από τη σχέση $\frac{G\cdot\theta}{\ell} = \frac{\tau}{r}$ έχουμε

$$\tau = \frac{G\cdot\theta}{\ell}$$

ή

$$\tau = \frac{G\cdot\theta\cdot d/2}{20\cdot d} = \frac{G}{40}\cdot\theta$$

αλλά έχουμε θέσει τον όρο να είναι θ = 1° σε μήκος ℓ = 20 d

αλλά $\theta = 1^o = \frac{\pi}{180}\cdot 1^o = 0{,}0174$ rad

Επομένως $\tau = \frac{80\times10^3\times0{,}0174}{40} = 34{,}8\frac{N}{mm^2}$

Απάντηση

Η τάση που θα αναπτυχθεί είναι τ_{max} = 34,8 N/mm^2

άσκηση 5

Άξονας πακτωμένος κατά το ένα άκρο του, καταπονείται σε στρέψη. Ο άξονας αυτός έχει μήκος 1000 mm, είναι κατασκευασμένος από χάλυβα με G = 83×104 daN/cm^2 και η επιτρεπόμενη τάση είναι $T_{επ}$ = 80 daN/cm^2. Αν θέλουμε για λόγους οικονομίας να εξαντλήσουμε τα όρια αντοχής, ποια θα πρέπει να είναι η διάμετρος του άξονα; (Η μέγιστη επιτρεπόμενη γωνία στροφής $θ_{max}$ = 00,25/m).

Λύση

Δίνονται

$\ell = 1000$ mm = 1 m

$G = 83\times10^4$ daN/cm^2

$τ_{επ} = 80$ daN/cm^2

$θ_{max} = 0^o,25$/m

Ζητούνται

d_{min}

Για να επιτύχουμε την απαίτηση να εξαντλήσουμε τα όρια της αντοχής θα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως

$$τ_{επ} = \frac{16M_t}{π \cdot d^3}$$

και

$$θ_{επ} = \frac{32 \cdot M_t \cdot \ell}{G \cdot π \cdot d^4}$$

Διαιρώντας κατά μέλη, τις δύο αυτές σχέσεις, θα έχουμε:

$$\frac{τ_{επ}}{θ_{επ}} = \frac{\dfrac{16M_t}{π \cdot d^3}}{\dfrac{32 \cdot M_t \cdot \ell}{G \cdot π \cdot d^4}} = \frac{d \cdot G}{2 \cdot \ell}$$ ή

$$d = \frac{2 \cdot τ_{επ} \cdot \ell}{G \cdot θ_{επ}}$$ αντικαθιστούμε τις τιμές

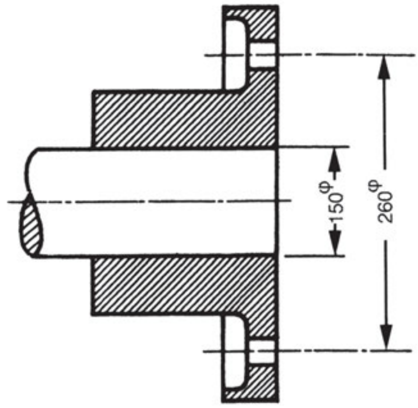
$$d = \frac{2\times80\times1}{83\times10^4\times0,25\times\dfrac{π}{180}} = 0,04417 \text{ m}$$

Απάντηση

$d \approx 4,42$ cm

άσκηση 6

Να υπολογισθεί η μεγαλύτερη ισχύς που μπορεί να μεταβιβασθεί από ένα άξονα διαμέτρου 150 mm ο οποίος στρέφεται με 240 rpm, όταν η επιτρεπόμενη τάση είναι $\tau_{\varepsilon\pi}$ = 55 N/mm^2. Ο άξονας αυτός έχει ένα σύνδεσμο με έξι μπουλόνια, περιφερειακά σε μία διάμετρο 260 mm. Να ορίσετε τη διάμετρο των μπουλονιών όταν η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση τους είναι τ_{1max} = 100 N/cm^2.



Λύση

Δίνονται

$d_{\alpha\xi}$ = 150 mm

f = 240 rpm

$\tau_{\varepsilon\pi}$ = 55 N/mm^2

αριθμός μπουλονιών 6

$d_{\sigma\upsilon\nu}$ = 260 mm

τ_{1max} = 100 N/cm^2

Ζητούνται

P_{max}

d_1

1. Από τη σχέση $\frac{M_t}{I_r} = \frac{\tau}{r}$ έχουμε $M_t \frac{\tau \cdot I_r}{r}$ είναι

τ = 55 N/mm^2 = 55 × 10^6 N/m^2

d = 150 mm = 0,15 m

$$I_r = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi}{32} \times 0{,}15^4 = 0{,}0000497\ m^4 \approx 0{,}5 \times 10^{-4}\ m^4$$

αντικαθιστούμε τις τιμές και έχουμε:

$$M_t = \frac{55\times10^6 \times 0{,}5\times10^{-4}}{\frac{0{,}15}{2}} = 36{,}7\times10^3\ \text{Nm}$$

Από τα μαθήματα φυσικής, γνωρίζουμε ότι για την ισχύ είναι:

$p = M_t \cdot 2\pi \cdot f$

$$p = 36{,}7\times10^3 \times 2\times\pi\frac{240}{60} = 922{,}4\times10^3\ \text{kw}$$

2. Τα μπουλόνια επιβαρύνονται σε διάτμηση εξ αιτίας της περιφερειακής δύναμης από τη στρεπτική ροπή.

Είναι: $F \cdot r_1 = M_t$ ή $F = \frac{M_t}{r}$ άρα $F = \frac{36{,}7\times10^3}{0{,}260} = 282{,}3\times10^3\ \text{N}$

Κάθε μπουλόνι θα αναλάβει το 1/6 αυτής της δύναμης άρα

$$F_1 = \frac{282{,}3\times10^3}{6} = 47{,}05\times10^3\ \text{N}$$

άρα για κάθε μπουλόνι θα είναι $\tau_{max} = \frac{F_1}{\frac{\pi\cdot d_1}{4}}$ ή $d_1 = \sqrt{\frac{4\cdot F_1}{\pi\cdot\tau_{max}}}$ αντικαθιστούμε

$$d_1 = \sqrt{\frac{4\times47{,}05\times10^3}{\pi\times100\times10^6}} = \sqrt{0{,}000599} = 0{,}02449\ \text{m ή } d_1 = 24{,}49\ \text{mm} \approx 24{,}5\ \text{mm}$$

Απάντηση

$P = 922{,}4 \times 10^3$ Kw

$d_1 = 24{,}5$ mm

άσκηση 7

Να υπολογισθούν οι αναγκαίες διάμετροι εσωτερική d και εξωτερική D, ενός άξονα με δακτυλιοειδή διατομή, ο οποίος μεταφέρει ισχύ 750 kw με 50 rpm.
Δίδονται: α) η γωνία στροφής θ από 10 / 20 D
β) d/D = 0,6
γ) G = 85 x 103 N/mm^2

Λύση

Δίνονται

άξονας δακτυλιοειδής M_t = 750 kw
f = 50 rpm
$\theta < 1^o/_{20D}$
d/D = 0,6
G = 85 × 10^3 N/mm^2

Ζητούνται

D, d

Από τα μαθήματα φυσικής γνωρίζουμε ότι $P = M_t \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$ άρα

$M_t = \dfrac{p}{2 \cdot \pi \cdot f}$ αντικαθιστούμε τις τιμές

$$M_t = \frac{750 \times 10^3}{2 \times \pi \times \dfrac{50}{60}} = 143239{,}4 \cong 143240 \text{ Nm}$$

Απο τη σχέση αυτή $\dfrac{M_t}{I_r} = \dfrac{G\theta}{\ell}$ έχουμε $I_r = \dfrac{M_t \cdot \ell}{G \cdot \theta}$

Οι τιμές είναι:

M_t = 143240 Nm

G = 85×10^{3}N/m^2

$\theta = 1° = \dfrac{2 \cdot \pi}{360}$rad

$\ell = 20 \cdot D$

$d = 0,6\ D$

$$I_r = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} D^4(1 - 0,6^4) = 0,085\ D^4$$

Επομένως θα είναι

$$0,085D^4 = \frac{143240 \times 20D}{85 \times 10^9 \times \frac{2 : \pi}{360}} \quad ή$$

$$D^3 = \frac{143240 \times 20 \times 360}{0,085 \times 85 \times 10^9 \times 2 \times \pi} = 0,0227 m^3 \quad ή$$

$$D = \sqrt[3]{0,0227} = 0,283 m = 283\ mm \quad και\ άρα$$

$d = 0,6 \cdot D = 0,6 \times 283 = 169,8mm \approx 169,5mm$

Απάντηση

D = 283 mm
d = 169,5 mm

Ένας δακτυλιοειδής άξονας έχει εξωτερική διάμετρο D = 10 cm και εσωτερική d = 7.5 cm. Να υπολογισθούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στην εξωτερική και εσωτερική επιφάνεια του άξονα, όταν αυτός καταπονείται σε στρέψη από μία ροπή M_t = 2000 Nm. Να υπολογισθεί επίσης η γωνία στροφής. Το μήκος του άξονα είναι 1 m και το υλικό έχει μέτρο διάτμησης G = 80 GN/m^2.

Λύση

Δίνονται

άξονας δακτυλιοειδής

D = 10 cm

d = 7,5 cm

M_t = 2000 Nm

ℓ = 1 m

G = 80 GN/m^2

Ζητούνται

τ_{max}, τ_{min}, θ

1) Για να υπολογίσουμε τις τάσεις στην εξωτερική και την εσωτερική επιφάνεια δακτυλιοειδούς άξονα παίρνουμε τον τύπο

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{M_t}{I_r}$$

ή

$$r = \frac{M_t \rho}{I_r}$$

όπου $\rho = R = \frac{D}{2}$ για την εξωτερική επιφάνεια και

$\rho = r = \frac{d}{2}$ για την εσωτερική επιφάνεια

Είναι λοιπόν:

$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot R}{I_r} = \frac{M_t \cdot D}{2 \cdot I_r}$ για την εξωτερική επιφάνεια και

$\tau_{min} = \frac{M_t \cdot r}{I_r} = \frac{M \cdot d}{2 \cdot I_r}$ για την εσωτερική επιφάνεια υπολογίζουμε στην I_r της διατομής

$$I_r = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi}{32} \times \left(0,1^4 - 0,075^4\right) = \frac{\pi}{32} \times 0,00006836$$

ή

$$I_r = 6,7 \times 10^{-6}\,m^4$$

άρα θα είναι

$$\tau_{max} = \frac{2000 \times 0,1}{2 \times 6,7 \times 10^{-6}} = 14925373,1\,N/m^2 = 14,9MN/m^2$$

και

$$\tau_{min} = \frac{2000 \times 0,075}{2 \times 6,7 \times 10^{-6}} = 11194029,85\,N/m^2 = 11,2MN/m^2$$

2) Για να βρούμε τη γωνία στροφής θα πάρουμε τον τύπο

$$\frac{M_t}{I_r} = \frac{G\theta}{\ell}$$

ή

$$\theta = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_r}$$

αντικαθιστούμε τις τιμές

$$\theta = \frac{2000 \times 1}{80 \times 10^9 \times 6,7 \times 10^{-6}} = 0,00373\,rad$$

$$\theta = \left(0,00573 \times \frac{180}{\pi}\right)^0 = 0^\circ,21379 = 12'49'',64$$

Απάντηση

τ_{max} = 14,9 MN/m²

τ_{min} = 11,2 MN/m²

θ = 12' 49", 64

κεφάλαιο 12

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΑΣΚΗΣΗ 7

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΑΣΚΗΣΗ 9

Χαλύβδινος στύλος, τετραγωνικής διατομής πλευράς α = 50 mm και μήκους ℓ = 2,8 m είναι πακτωμένος κατά το ένα άκρο του ενώ στο άλλο έχει δυνατότητα ολίσθησης. Αν το υλικό έχει μέτρο ελαστικότητας Ε = 21 MN/cm^2 ζητείται το επιτρεπόμενο φορτίο ώστε ο συντελεστής ασφάλειας να είναι 5.

Λύση

Δίνονται

διατομή στύλου (τετραγωνική)

α = 50 mm

ℓ = 2,8 m

τρόπος στήριξης

Ε = 21 MN/cm^2

v = 5

Ζητούνται

$F_{επ}$

1) Η ροπή αδράνειας της διατομής είναι $I_r = \dfrac{\alpha^4}{12}$ ή $I_r = \dfrac{0{,}05^4}{12}$ ή I_r = 0,00000052 m^4 άρα $I_r = 0{,}52 \times 10^{-6}$ m^4

2) Το εμβαδόν της διατομής είναι $A = \alpha^2$ ή $A = 2{,}5 \times 10^{-3}$ m^2

3) Το ανηγμένο μήκος λυγισμού, λόγω του τρόπου στερέωσης του στύλου είναι

$$\ell_\kappa = \frac{\ell}{\sqrt{2}} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \qquad \ell_\kappa \quad \frac{2{,}8 \times 1{,}41}{2} = 1{,}979\text{m}$$

4) Η ακτίνα αδράνειας της διατομής είναι

$$i = \sqrt{\frac{I_r}{A}} = \sqrt{\frac{0{,}52 \times 10^{-6}}{2{,}5\ 10^{-3}}}$$

i = 0,0144m

5) Η λυγηρότητα είναι:

$$\lambda = \frac{\ell_\kappa}{i} = \frac{1{,}979}{0{,}0144} = 137{,}4 > 100$$

είμαστε επομένως μέσα στα όρια του νόμου του Hooke και άρα ισχύει ο τύπος του Euler.

6) Το κρίσιμο φορτίο είναι:

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\Gamma}{\ell_\kappa^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 0{,}52 \times 10^{-6}}{(1{,}9+9)^2} \text{ ή}$$

F_κ = 275,2 KN

7) Το επιτρεπόμενο φορτίο είναι

$$F_{\varepsilon\pi} = \frac{F_\kappa}{\nu} = \frac{275{,}2}{5} = 55{,}04 \text{ KN}$$

Απάντηση

$F_{\varepsilon\pi}$ = 55,04 KN

Χαλύβδινος στύλος με κυκλική διατομή διαμέτρου 10 cm, είναι πακτωμένος και στα δύο άκρα του. Το ύψος του είναι 5 m. Δίνεται μέτρο ελαστικότητας του υλικού Ε = 210 KN/mm^2.
Να υπολογιστούν:
α) Η λυγηρότητα,
β) το κρίσιμο φορτίο
γ) η κρίσιμη τάση.

Λύση

Δίνονται

διατομή στύλου (κυκλική) d = 10 cm
και τρόπος στήριξης
h = 5 m,
E = 210 KN/mm^2

Ζητούνται

λ, F_k, σ_κ

1) Το ανηγμένο μήκος λυγισμού είναι $\ell = 0{,}5\,\ell = 500 \times 0{,}5 = 250$ cm

2) Η ροπή αδράνειας της κυκλικής διατομής είναι:

$$I_r = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \text{ ή } I_r = \frac{\pi \times 10^4}{64} = 490{,}87 \text{ cm}^4$$

3) Το εμβαδόν της διατομής είναι

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78{,}53 \text{ cm}^2$$

4) Η ακτίνα αδράνειας της διατομής είναι

$$i = \sqrt{\frac{I_r}{A}} = \sqrt{\frac{490{,}87}{78{,}53}} = 2{,}5 \text{ cm}$$

5) Η λυγηρότητα είναι $\lambda = \frac{\ell_\kappa}{i} = \frac{250}{2,5} = 100$

επειδή το λ=100 έπεται ότι ήμαστε στα όρια της ελαστικής περιοχής και άρα ισχύει ο τύπος του Euler

6) Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι

$$F_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_r}{\ell_\kappa^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \times 10^5 \times 490,87}{(250)^2}$$

ή

F_κ = 1627,8 KN

7) Η κρίσιμη τάση είναι

$$\sigma_\kappa = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad ή \quad \sigma_\kappa = \frac{\pi^2 210 \times 10^5}{100^2}$$

ή

σ_κ = 20,7 KN/m^2

Απάντηση

α) λ = 100

β) F_κ = 1627,8 KN

γ) σ_κ = 20,7 KN/cm^2

Βάκτρο εμβόλου ατμομηχανής έχει μήκος 300 cm. Το βάκτρο καταπονείται από δύναμη 80 KN. Αν το υλικό του βάκτρου είναι t 52 (E = 2,1 x 107 N/cm^2) και ο συντελεστής ασφάλειας 10, να υπολογισθεί η αναγκαία διάμετρος.

Λύση

Δίνονται	**Ζητούνται**
ℓ = 300 cm	d
F = 80 KN	
st 52	
$E = 2{,}1 \times 10^7$ N/cm^2	
v = 10	

1) Το βάκτρο δουλεύει σαν αμφιαρθρωτός στύλος άρα

$\ell_\kappa = \ell$, δηλαδή ℓ_κ = 300 cm

2) Το επιτρεπόμενο φορτίο είναι $F_{\varepsilon\pi} = \dfrac{F_\kappa}{v}$ ή $F_\kappa = v \cdot F_{\varepsilon\pi}$ άρα

$F_\kappa = 10 \times 80 = 800\ KN = 800 \times 10^3\ N$

3) Ο τύπος του κρίσιμου φορτίου είναι $F_\kappa = \dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot I_r}{\ell_\kappa^2}$

λύνουμε τον τύπο ως προς τη ροπή αδράνειας

$$I_r = \frac{F_\kappa \cdot \ell_\kappa^2}{\pi^2 \cdot E}$$

αντικαθιστούμε τις τιμές

$$I_r = \frac{800 \times 10^3 \times 300^2}{\pi^2 \cdot 2{,}1 \times 10^7} = 347{,}4\ cm^4$$

4) Από τον τύπο της ροπής αδράνειας για κυκλική διατομή έχουμε

$I_r = \frac{d^4}{20}$ ή $d = \sqrt[4]{20 \cdot I_r}$ αντικαθιστούμε

$d = \sqrt[4]{20 \times 3{,}4}$

d = 9,129

d = 10 cm

Έλεγχος

Για την ευρεθείσα τιμή της διαμέτρου έχουμε:

Εμβαδόν διατομής $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78{,}54\ cm^2$

Ροπή αδράνειας $I_r = \frac{d^4}{20} = \frac{10^4}{200} = 500\ cm^4$

Ακτίνα αδράνειας $i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{500}{78{,}54}} = 2523$

λυγηρότητα $\lambda = \frac{\ell_\kappa}{i} = \frac{300}{2{,}523} = 118{,}9 > 100$

άρα ισχύει ο τύπος του Euler και καλώς υπολογίσαμε.

Απάντηση

d = 10 cm

άσκηση 4

Να βρεθεί η λυγηρότητα ενός ξύλινου στύλου, ορθογωνικής διατομής 20 × 25 cm² αμφίπακτου με μήκος 8 m.

Λύση

Δίνονται

Είδος στύλου ορθογωνικής διατομής 20 × 25 cm²

τρόπος στήριξης αμφίπακτος

$\ell = 8$ m

Ζητούνται

λ

Για αμφίπακτο στύλο είναι $\ell_\kappa = \ell / 2$ άρα $\ell_\kappa = \dfrac{800}{2} = 400\,\text{cm}$

1) Για την ορθογωνική διατομή $I_{min} = \dfrac{20^3 \times 25}{12} = 16666{,}667\ \text{cm}^4$

2) Η ακτίνα αδράνειας είναι

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{16666{,}667}{500}}$$

i = 5,77 cm

άρα

$$\lambda = \frac{\ell_\kappa}{i} = \frac{400}{5{,}77} = 69{,}3$$

Απάντηση

λ = 69,3

Υποστύλωμα από NPI 10 (DIN 1025φ 1) από st 52, μήκους 4.5 m είναι αμφίπακτο. Να υπολογισθεί πόσο φορτίο αντέχει σε λυγισμό με συντελεστή ασφάλειας v = 5.

Λύση

Δίνονται

το είδος και ο τρόπος στήριξης του στύλου st 52,

$\ell = 4,5$

$v = 5$

Ζητούνται

$F_{επ}$

1) Επιτρεπόμενη τάση $τ_{επ} = \dfrac{52000}{5}\dfrac{N}{cm^2} = 10,4\dfrac{KN}{cm^2}$

2) Το υποστύλωμα είναι αμφίπακτο άρα $\ell_κ = 0,5 \times 4.5 = 2,25$ m $= 225$ cm

3) Από το πίνακα DIN 1025 $φ_1$ έχουμε: $i_{min} = 1,07$ cm

$A = 10,6\ cm^2$

4) Η λυγηρότητα είναι $λ = \dfrac{\ell_κ}{i_{min}} = \dfrac{225}{1,07} = 210,3 > 100$

είμαστε εντός των ορίων της ελαστικής περιοχής

5) από τον πίνακα 10.3.6.α για st 52 και λ = 210,3 (με παρεμβολή) έχουμε ω = 15,685

6) επομένως $σ_{επ} = \dfrac{F_{επ}}{A}ω$ ή $F_{επ} = \dfrac{σ_{επ} \cdot A}{ω}$

άρα $F_{επ} = \dfrac{10400 \times 10,6}{15,685}N$ ή

$F_{επ} = 7028,3$ N

Απάντηση

$F_{επ} = 7028,3$ N

άσκηση 6

Κυλινδρικός λέβητας από ελάσματα πάχους ε = 30 mm και $\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 800 KN/ m^2 θέλουμε να εργάζεται σε πίεση 12 × 103 N/m^2. Μέχρι ποια διάμετρο μπορούμε να τον κατασκευάσουμε.

Λύση

Δίνονται

ε = 30 mm

$\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 800 KN/m^2

p = 12×10^3 N/m^2

Ζητούνται

d

Από τη σχέση $\varepsilon = \dfrac{pd}{2\sigma}$ ή $d = \dfrac{2 \cdot \varepsilon \cdot \sigma}{p}$

έχουμε $d = \dfrac{2 \times 0{,}030 \times 800 \times 10^3}{12 \times 10^3}\,m$

ή

d = 4 m

Απάντηση

μέχρι d = 4 m

άσκηση 7

Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν συγκρίνουμε δύο λέβητες ως προς την πίεση λειτουργίας τους αν είναι καθ' όλα όμοιοι και διαφέρουν μόνο κατά το πάχος του ελάσματός τους.
Εφαρμογή $P_1 = 2 \times 10^3$ N/m^2, $\varepsilon_1 = 4$ cm, $\varepsilon_2 = 6$ cm ποια η P_2;

Λύση

Δίνονται

$P_1 = 2 \times 10^3$ N/m^2

$\varepsilon_1 = 4$ cm

$\varepsilon_2 = 6$ cm

Ζητούνται

P_2

Λοιπά στοιχεία λεβήτων
τα αυτά

Αφού θέλουμε να είναι καθ' όλα όμοιοι θα πρέπει να αναπτύσσουν τις ίδιες τάσεις.
Άρα από τις σχέσεις

$$\sigma = \frac{p_1 \cdot d}{2 \cdot \varepsilon_1} \quad \text{και} \quad \sigma = \frac{p_2 \cdot d}{2\varepsilon_2} \quad \text{ή} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\text{θα έχουμε } \frac{p_1 \cdot d}{2 \cdot \varepsilon_1} = \frac{p_2 \cdot d}{2\varepsilon_2} \quad \text{ή} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

επομένως τα πάχη των ελασμάτων είναι ανάλογα των πιέσεων

$$\text{Εφαρμογή } p_2 = p_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{ή } p_2 = 2 \times 10^3 \times \frac{6}{4} = 3 \times 10^3 \, \frac{N}{m^2}$$

Απάντηση

α) τα πάχη των ελασμάτων είναι ανάλογα των πιέσεων

β) $P_2 = 3 \times 10^3$ N/m^2

άσκηση 8

Τέσσερις χαλύβδινοι στύλοι με κυκλική διατομή στηρίζουν ένα πατάρι βάρους 50 KN. Συγχρόνως ο χώρος όπου βρίσκονται οι στύλοι, θερμαίνεται από 15 °C σε 60 °C. Αν είναι για το υλικό των στύλων $E = 210\ GN/m^2$ $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ rad^{-1}$ $\sigma_{\theta\rho} = 500\ MN/m^2$ και ο συντελεστής ασφάλειας $v = 4$. Να υπολογισθεί η αναγκαία διάμετρος των στύλων.

Λύση

Δίνονται

αριθμός στύλων 4

$B = 50\ KN$

$\theta_1 = 15°$

$\theta_2 = 60\ °C$

$E = 210\ GN/m^2$

$\alpha = 12 \times 10^{-6}\ rad^{-1}$

$\sigma_{\theta\rho} = 500\ MN/m^2$

$v = 4$

Ζητούνται

d

1) Η επιτρεπόμενη τάση είναι $\sigma_{\varepsilon\pi} = \dfrac{\sigma_{\theta\rho}}{v}$ ή $\sigma_{\varepsilon\pi} = \dfrac{500}{4} = 125\dfrac{MN}{m^2} = 125 \times 10^6\ \dfrac{N}{m^2}$

2) Οι στύλοι, εκτός από τη θλίψη στην οποία υπόκεινται, εμποδίζονται να διασταλούν και άρα υφίστανται και την θλιπτική πίεση από την παρακώληση της διαστολής τους. Η αναπτυσσόμενη τάση σ_1, σε κάθε στύλο εξ αιτίας της θερμάνσεώς της είναι

$\sigma_1 = \alpha E(\theta_2 - \theta_1)$

$\sigma_1 = 12 \times 10^{-6} \times 210 \times 10^9 \times 45$

$\sigma_1 = 113{,}4 \cdot 10^6\ N/m^2$

3) Η τάση σ_2, που προκύπτει για κάθε στύλο εξ αιτίας του φορτίου από το πατάρι, αν κάθε στύλος έχει εμβαδόν διατομής Α, είναι:

$\sigma_2 = \dfrac{50 \times 10^3}{A \cdot 4}$ ή

$\sigma_2 = \dfrac{12{,}5 \times 10^3}{A}$

4) η ολική θλιπτική τάση που αναπτύσσεται είναι

$\sigma_{ολ} = \sigma_1 + \sigma_2$ ή

$$\sigma_{ολ} = 113,4 \times 10^6 + \frac{12,5 \times 10^3}{A}$$

5) πρέπει να είναι

$\sigma_{ολ} = \sigma_{επ}$ ή

$$113,4 \times 10^6 + \frac{12,5 \times 10^3}{A} = 125 \times 10^6$$

λύνουμε ως προς Α

$$A = \frac{12,5 \times 10^3}{125 \times 10^6 - 113,4 \times 10^6} = \frac{12,5 \times 10^{-3}}{11,6} \quad ή$$

$A = 1,077 \times 10^{-3}\ m^2 = 10,77\ cm^2$ άρα

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} = 10,77\ cm^2 \text{ και}$$

$$d = \sqrt{\frac{10,77 \times 4}{\pi}} = \sqrt{13,71}$$

d = 3,7cm παίρνουμε

d = 4cm

Απάντηση

_d = 4 cm_

Άτρακτος κυκλικής διατομής καταπονείται σε στρέψη από ροπή M_t = 12 KNm και σε κάμψη από ροπή M_b = 6 KNm. Να υπολογισθεί η αναγκαία διάμετρος αν είναι: $\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 60 MN/m^2 G = 81 GN/m^2 και θ < 0,00436 rad/m

Λύση

Δίνονται

είδος ατράκτου (κυκλική)

M_t = 12 KNm

M_b = 6 KNm

$\sigma_{\varepsilon\pi}$ = 60 MN/m^2

G = 81 GN/m^2

θ < 0,00436 rad/m

Ζητούνται

d

1. Η ισοδύναμη τάση είναι $\sigma = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2}$

2. Για κυκλική διατομή είναι

$$\sigma_b = \frac{32M_b}{\pi \cdot d^3} \quad \text{και}$$

$$\tau_t = \frac{16M}{\pi \cdot d^3}$$

3. Άρα έχουμε

$$\sigma = \sqrt{\frac{32M_b^2}{\pi^2 \cdot d^6} + 3\frac{16^2 M^2}{\pi^2 \cdot d^6}} = \frac{16}{\pi \cdot d^3}\sqrt{4M_b^2 + 3M_t^2}$$

αντικαθιστούμε

$$60 \times 10^6 = \frac{16}{\pi \cdot d^3}\sqrt{4 \times \left(6 \times 10^3\right)^2 + 3 \times \left(12 \times 10^3\right)^2}$$

$$60\times10^6 = \frac{16}{\pi\cdot d^3}\sqrt{576\times10^6} = \frac{16\times10^3}{\pi\cdot d^3}\sqrt{576}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\times10^3\times\sqrt{576}}{60\times10^6\times\pi}} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{2{,}037} = 0{,}1267 \text{ m ή}$$

d = 12,67 cm

Έλεγχος της γωνίας θ

$$\theta = \frac{32\,M_t\cdot\ell}{G\cdot\pi\cdot d^4} \quad \text{ή}$$

$$\frac{\theta}{\ell} = \frac{32\,M_t}{G\cdot\pi\cdot d^4}$$

Λύνουμε ως προς d

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_t}{G\cdot\pi\cdot\left(\frac{\theta}{\ell}\right)}}$$

αντικαθιστούμε τις τιμές

$$d = \sqrt[4]{\frac{32\times12\times10^3}{81\times10^9\times\pi\times0{,}00436}} = \sqrt[4]{0{,}000346} \qquad \text{ή}$$

d = 0,136 m = 13,6 cm

άρα d = 13,6 cm

μεταξύ δύο τιμών επιλέγουμε την δεύτερη που μας καλύπτει την πρώτη απαίτηση.

Απάντηση

d = 13,6 cm

κεφάλαιο 13

ΕΡΓΟ – ΙΣΧΥΣ – ΑΠΛΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

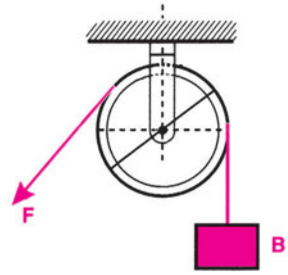
ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

άσκηση 1

Με τη σταθερή τροχαλία θέλουμε να ανυψώσουμε φορτίο Β = 30Ν. Οι παθητικές αντιστάσεις ανέρχονται σε 5% του φορτίου. Ποια είναι η δύναμη που πρέπει να καταβάλουμε προς τούτο, και ο βαθμός απόδοσης.



Λύση

Δίνονται

Β = 30 Ν

η = 95%

Ζητούνται

F

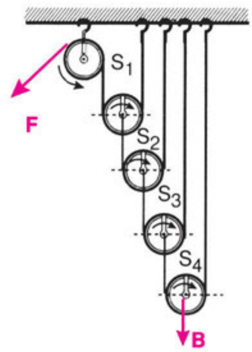
Αφού στη σταθερή τροχαλία οι παθητικές αντιστάσεις είναι 5% και φορτίου, ο βαθμός απόδοσης της μηχανής μας θα είναι: 95% = η. Επειδή: $F = \frac{B}{\eta}$ θα έχουμε

$$F = \frac{30\ N}{0{,}95} \cong 31\ N$$

Απάντηση

$F \cong 31\ N$

άσκηση 2



Στο συνδυασμό τροχαλιών να βρεθεί η δύναμη F για την ανύψωση φορτίου 1200 N, όταν ο βαθμός απόδοσης είναι n = 0,7.

Λύση

Δίνονται

B = 1200 N

Ζητούνται

F

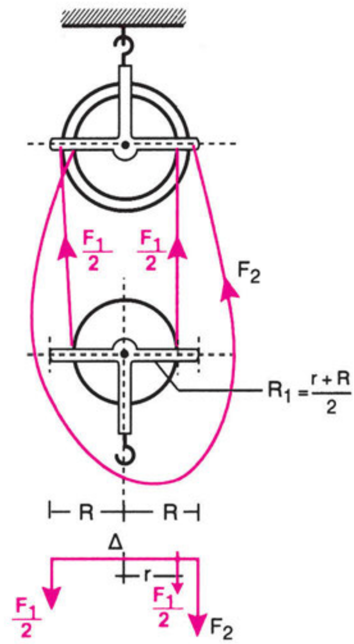
Στη διάταξή μας έχουμε ν = 4 ο αριθμός των ελευθέρων τροχαλιών, οπότε η σχέση μετάδοσης θα είναι $\frac{1}{2^{\nu}} = \frac{1}{16}$ και άρα η δύναμη F για την ανύψωση του φορτίου των 1200 N θα είναι:

$$F = \frac{1200N}{2^4} \cdot \frac{1}{0{,}7}$$

Απάντηση

$F \cong 107$ N

Το διαφορικό πολύσπαστο αποτελείται από δύο σταθερές τροχαλίες επί του ίδιου άξονα, αλλά διαφορετικής διαμέτρου, και από μία ελεύθερη τροχαλία. Οι τροχαλίες είναι κατασκευασμένες ως τροχοί αλύσσου, η δε λειτουργία του πολύσπαστου γίνεται με ατέρμονα άλυσσο. Αν είναι δεδομένο ότι για το λόγο $\frac{R-r}{2R}=\frac{1}{16}$ έχουμε: $n = 0{,}51$ και $F_2 = 4$ N βρείτε την F_1



Λύση

Δίνονται

$\frac{R-r}{2R}=\frac{1}{16}$

$n = 0{,}51$

$F_2 = 4$ N

Ζητούνται

F_1

Οι δύο τροχαλίες R και Γ αποτελούν ένα σώμα και στη περιφέρειά τους φέρουν δόντια για να κινηθεί η αλυσίδα.

Μία τρίτη τροχαλία με ακτίνα $R_1=\frac{R+r}{2}$ εργάζεται ελεύθερα. Όπως είδαμε και στη θεωρία θα πρέπει $F_2=\frac{F_1}{2n}\cdot\left(\frac{R-r}{2}\right)$ (1)

Η σχέση (1) γράφεται:

$F_2=\frac{F_1}{n}\cdot\left(\frac{R-r}{2}\right)$ και αν τεθεί η = 0,51, $F_2 = 4$ N λύνοντας τη (2) ως προς F_1 θα έχουμε:

$$F_1=F_2\ n\cdot\frac{2R}{(R-r)}=4N\cdot 0{,}51\cdot 16$$

Απάντηση

F_1 = 32,64 N

κεφάλαιο 14

ΤΡΙΒΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΑΣΚΗΣΗ 7

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΑΣΚΗΣΗ 9

ΑΣΚΗΣΗ 10

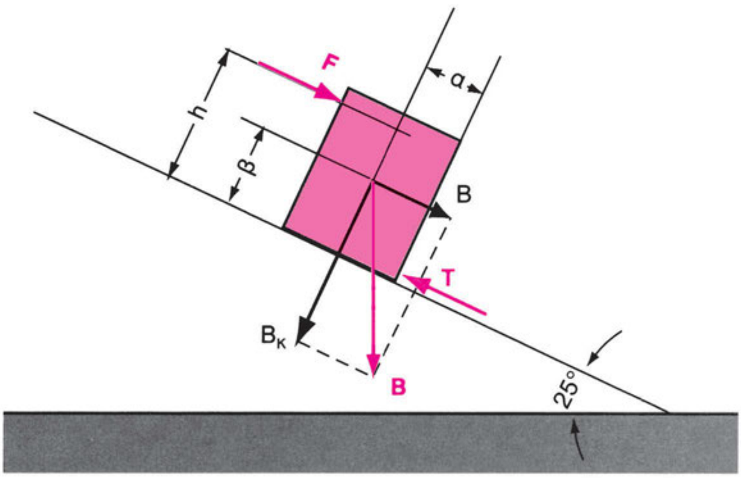
ΑΣΚΗΣΗ 11

ΑΣΚΗΣΗ 12

ΑΣΚΗΣΗ 13

άσκηση 1

Ένα κιβώτιο βάρους Β = 50 Ν, πρόκειται να εκφορτωθεί μέσω μίας ράμπας με κλίση 25° ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής είναι η = 0,6.
Ζητείται:
α) Η δύναμη F με την οποία θα ωθήσουμε το κιβώτιο ώστε αυτό να υπερνικήσει τη στατική τριβή και να ολισθήσει στη ράμπα και
β) Το ύψος που θα εφαρμόσουμε τη δύναμη ώστε να μην ανατραπεί το κιβώτιο. Το κέντρο βάρους του κιβωτίου είναι σε ύψος β = 60 cm από τη βάση του και σε οριζόντια απόσταση α = 40 cm από την ακμή ανατροπής.



Λύση

Δίνονται

Β = 50 Ν

φ = 25°

η = 0,6

α = 40 cm

β = 60 cm

Ζητούνται

F, h

α. Τη στιγμή που αρχίζει το κιβώτιο να ολισθαίνει, ισοταχώς, είναι

$T = F + B_1$

ή

$T = F + B \cdot ημφ$

αλλά

$T = B_k \cdot \eta = B \cdot \eta \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ άρα

$B \cdot \eta \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = F + B\eta\mu\varphi$ επομένως

$F = B\eta\sigma\upsilon\nu\varphi - B\eta\mu\varphi = B\,(\eta \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi)$, αντικαθιστούμε τις τιμές

$F = 50\,(0{,}60 \times 0{,}906 - 0{,}423)$ άρα

$F = 6{,}03$ N

β. Για να τείνει να ανατραπεί το κιβώτιο σημαίνει ότι δεν ολισθαίνει αλλά στρέφεται περί την ακμή του Α. Η στατική τριβή διέρχεται από το σημείο Α, καθώς και η αντίδραση της επιφάνειας της ράμπας. Άρα αυτές οι δύο δυνάμεις δεν δίνουν ροπή ως προς το Α. Θεωρούμε τις ροπές των άλλων δυνάμεων που ενεργούν πάνω στο κιβώτιο ως προς το σημείο Α, την οριακή στιγμή που αρχίζει η ανατροπή είναι

$F \cdot h + B\,\eta\mu\varphi \cdot \beta - B\,\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \alpha = 0$

$$h = \frac{\alpha \cdot B \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - \beta\,\eta\mu\varphi}{F}$$

ή

$$h = \frac{40 \times 50 \times 0{,}906 - 60 \times 50 \times 0{,}423}{6{,}03}$$

$h = 90{,}049$ cm

άρα

$h \leq 90{,}049$

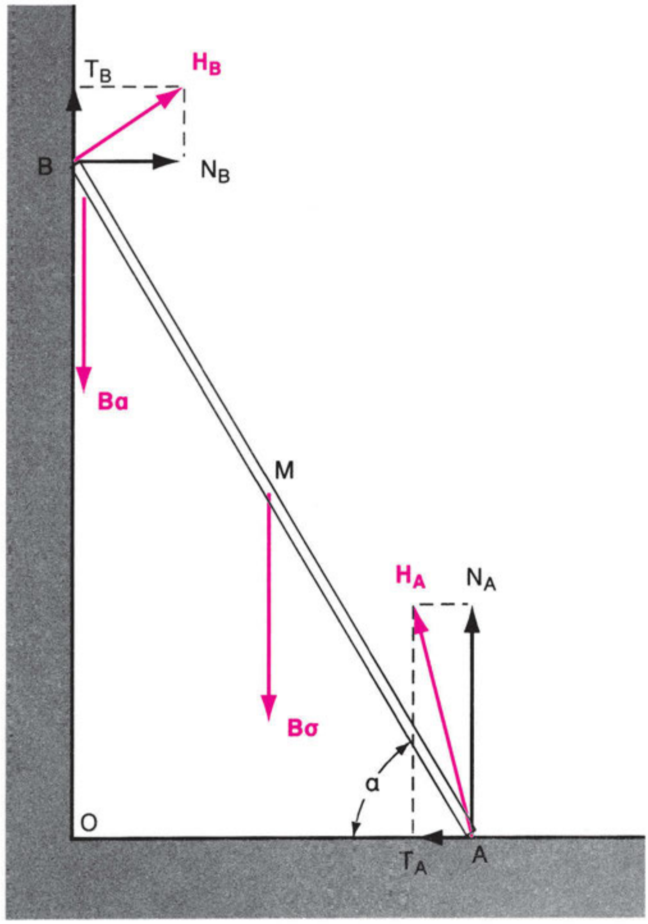
Απάντηση

α) F = 6,03 N

β) h ≤ 90,049 cm

άσκηση 2

Μία σκάλα μήκους 3,4 m ακουμπάει στον τοίχο με κλίση α ως προς το οριζόντιο επίπεδο.
α) Το βάρος της σκάλας είναι $B_σ$ = 200 N, ο συντελεστής τριβής με τον τοίχο n_B = 0,2 και με το δάπεδο $η_A$= 0,15. Να υπολογισθεί η γωνία α, όταν άνθρωπος βρίσκεται στη κορυφή της σκάλας, έτσι ώστε η σκάλα να μην ολισθήσει. (βάρος ανθρώπου $B_α$ = 800 N).



Λύση

Δίνονται

ℓ = 3,4m

$B_σ$ = 200 N

n_B = 0,2

$η_A$ = 0,15

$B_α$ = 800 N

Ζητούνται

α

Τη στιγμή που θα αρχίσει να ολισθαίνει η σκάλα, το σημείο Α θα κινηθεί προς τα δεξιά, το Β προς τα κάτω θα παρουσιασθεί τότε η εικόνα των δυνάμεων όπως στο σχήμα 14.2 και θα έχουμε:

α) Πάνω στη σκάλα να ενεργούν οι δυνάμεις:

- στο σημείο Β η αντίδραση του τοίχου H_B, η οποία αναλύεται στην τριβή T_B και τη κάθετη δύναμη, προς την επιφάνεια τριβής, N_B.
- Αντίστοιχα στο σημείο Α έχουμε την αντίδραση του δαπέδου H_A που και αυτή κατ' αναλογία, αναλύεται στην T_A και N_A.
- Στο μέσο της σκάλας στο σημείο Μ είναι το βάρος της σκάλας $B_σ$.
- Στο σημείο Β, στη κορυφή της σκάλας το βάρος του ανθρώπου.

β) Τη στιγμή της αρχής της ολίσθησης η σκάλα υπό το σύστημα των δυνάμεων που αναφέραμε, βρίσκεται σε οριακή κατάσταση ισορροπίας.

Άρα θα ισχύουν

(1) $ΣF_x = 0$ $\qquad N_B - T_A = 0$

(2) $ΣF_y = 0$ ή $\qquad T_B + N_A - (B_σ + B_α) = 0$

(3) $ΣM_A = 0$ $\qquad T_B(OA) + N_B \cdot (OB) - B_α \cdot (OA) - B_σ \dfrac{(OA)}{2} = 0$

και είναι ακόμη,

(4) $T_A = η_A \cdot N_A$

(5) $T_B = η_B \cdot N_B$

Επίσης έχουμε από το σχήμα

(6) $(OA) = (AB) \cdot συνα = 340 \cdot συνα$

(7) $(OB) = (AB) \cdot ημα = 340 \cdot ημα$

Από τη σχέση (1) παίρνουμε

(8) $N_B = T_A = η_A \cdot N_A$

από τις σχέσεις (2) και (5) έχουμε

(9) $N_A = (B_σ + B_α) - T_B = (B_σ + B_α) - η_B \cdot N_B$

αντικαθιστούμε τη N_A από την (9) στην (8)

$N_B = η_A (B_6 + B_α) - η_A η_B N_B$

και λύνοντας την τελευταία, ως προς N_B

θα έχουμε

$$(10)\quad N_B = \frac{n_A\left(B_\sigma + B_\alpha\right)}{1 + n_A \cdot n_B}$$

αντικαθιστώντας τις τιμές στην (10) και στην (5) έχουμε

$$(11)\ N_B = \frac{0{,}15 \times (800 + 200)}{1 + 0{,}15 \times 0{,}20} = 145{,}63\ \text{N}$$

$$(12)\ T_B = 0{,}2 \times 145{,}63 = 29{,}13\ \text{N}$$

Από την (6), (7), (11) και (12) αντικαθιστούμε τις τιμές στην (3)

$29{,}13 \times 340 \times$ συνα $+ 145{,}63 \times 340 \times$ ημα $- 800 \times 340 \times$ συνα $- 200 \times \frac{340}{2}$ συνα $= 0$ ή

$9904{,}2 \cdot$ συνα $+ 49514{,}2$ ημα $- 272000$ συνα $- 34000$ συνα $= 0$ ή

$49514{,}2$ ημα $= 296095{,}8$ συνα και άρα

$$\frac{\text{ημα}}{\text{συνα}} = \text{εφα} = \frac{296095{,}8}{49514{,}2} = 5{,}98 \qquad \text{άρα}$$

εφα = 5,98

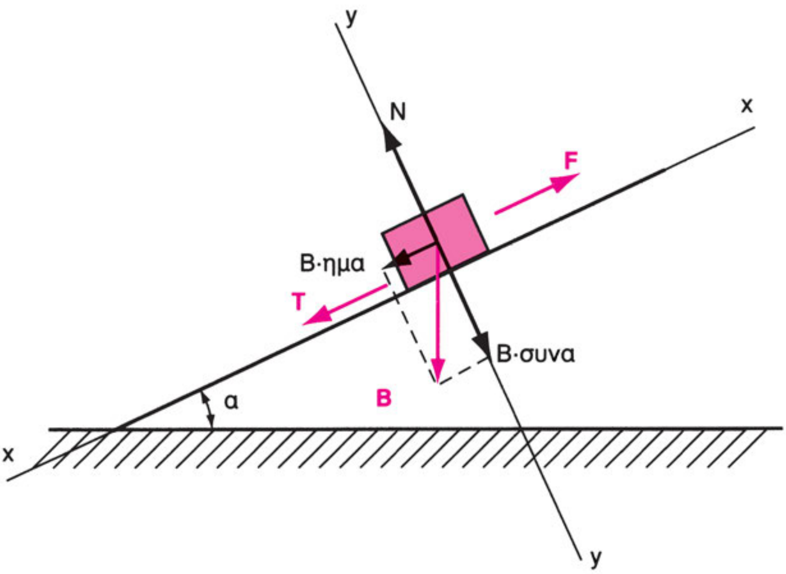
α = 80°, 507 = 80° 30´ 25´´, 2 επομένως

Απάντηση

α = 80° 30´25´´, 2

άσκηση 3

Ποιος είναι ο βαθμός απόδοσης n_A, κατά την ισοταχή ανύψωση σώματος, επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο;
Δίνονται: γωνία κεκλιμένου επιπέδου α = 30°
συντελεστής τριβής n = 0,15



Λύση

Δίνονται

α = 30°

η = 0,15

Ζητούνται

$n_α$

Το κεκλιμένο επίπεδο χρησιμοποιείται και ως μηχανή ανύψωσης, οπότε το ωφέλιμο έργο είναι το έργο του βάρους ενώ καταναλισκόμενο το έργο της έλκουσας δύναμης. Έστω F η έλκουσα δύναμη. Αφού έχουμε ισοταχή κίνηση θα ισχύουν οι σχέσεις ισορροπίας. Άρα

$\Sigma F_x = 0$, F - B ημα - T = 0

$\Sigma F_y = 0$, N - B συνα = 0

και

T = n · N

οπότε

F = B ημα + ηN

F = B (ημα + ησυνα)

Το καταναλισκόμενο έργο της έλκουσας δύναμης F σε μία διαδρομή μήκους s είναι

$A_{κατ} = F \cdot s$

στη διαδρομή αυτή s, το φορτίο ανεβαίνει κατά h. Από τη γεωμετρία του σχήματος είναι h = s ημα.

Το ωφέλιμο έργο είναι $A_ω = B \cdot h = Bs\,ημα$

Άρα ο βαθμός απόδοσης είναι

$$n_A = \frac{Bh}{Fs} = \frac{Bsημα}{B(ημα + συνα)s} = \frac{ημα}{ημα + n \cdot συνα}$$

$$n_α = \frac{εφα}{εφα + n} = \frac{εφα\ 30^o}{εφ30^o + 0,15}$$

από τη τριγωνομετρία έχουμε:

$εφ\ 30^o = 0,577$

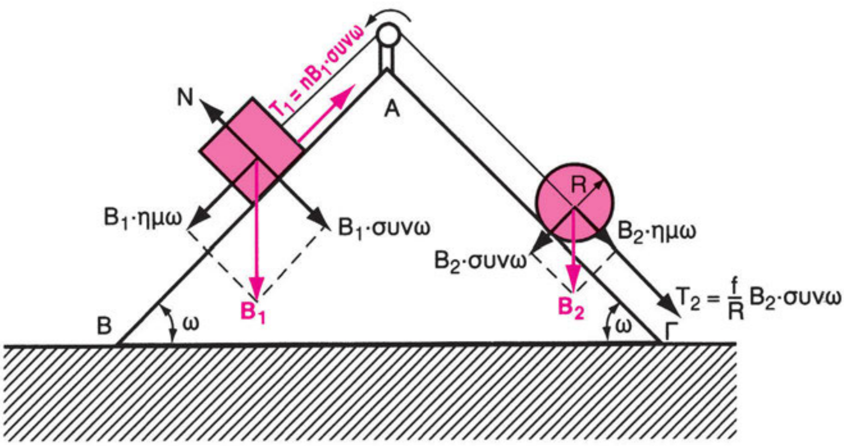
άρα $n_α = \dfrac{0,577}{0,577 + 0,15} = \dfrac{0,577}{0,727} = 0,794$

Απάντηση

$\boldsymbol{η_α = 0,794}$

άσκηση 3

Στα κεκλιμένα επίπεδα ΑΒ και ΑΓ, υπάρχουν, το σώμα βάρους B_1 = 110 N και η ρόδα βάρους B_2 = 70 N, αντίστοιχα. Το σώμα έχει συντελεστή ολίσθησης με το επίπεδο η = 0,30 και αντίστοιχα η ρόδα συντελεστή τριβής κύλισης f = 0,40 cm και ακτίνα R = 40 cm. Το σώμα και η τροχαλία συνδέονται, μέσω τροχαλίας χωρίς τριβή, με αβαρές νήμα. Να ευρεθεί ποια πρέπει να είναι, κατ' ελάχιστον η γωνία ω, ώστε το σύστημα να κινηθεί κατερχόμενο του επιπέδου ΑΒ.



Λύση

Δίνονται

B_1 = 110 N

B_2 = 70 N

η = 0,30

f = 0,40 cm

R = 40 cm

Ζητούνται

ω

Θέλουμε το σώμα B_1 να ολισθαίνει, κατεβαίνοντας το επίπεδο ΑΒ, ενώ η ρόδα B_2 θα κυλίεται, ανεβαίνοντας. Στη περίπτωση αυτή η εικόνα των δυνάμεων που ενεργούν πάνω στα σώματα είναι όπως φαίνεται στο σχήμα.

Στο επίπεδο ΑΒ, είναι το σώμα βάρους B_1 που αναλύεται κατά τα γνωστά, στο κάθετο στο επίπεδο B_1 συν ω και το παράλληλο προς το επίπεδο $B_1 \cdot$ ημ ω, και η τριβή T = η N = ηB_1 συν ω.

Στη ρόδα, στο επίπεδο ΑΓ, έχουμε πάλι το βάρος B_2 που αναλύεται, αντίστοιχα στα B_2 συν ω και B_2 ημα και στη τριβή $T_2 = \frac{t}{R} B_2 συνω$

(Οι τριβές πάντοτε αντίθετες προς τη κίνηση) Για να έχουμε κίνηση θα πρέπει

$$B_1\ ημω \geq n\ B_1\ συνω + B_2\ ημω + f\frac{B_2 συνω}{R}$$

ή

$$B_1 - B_2 ημω \geq (nB_1 + \frac{f}{R}B_2) συνω$$

ή

$$B_1 - B_2 \frac{ημω}{συνω} \geq \left(nB_1 + \frac{f}{R}B_2\right)$$

άρα

$$εφω \geq \frac{nB_1 + \frac{f}{R}B_2}{B_1 - B_2}$$

αντικαθιστούμε τις τιμές

$$εφω \geq \frac{0{,}30 \cdot 110 + \frac{4}{40} \cdot 70}{110 - 70} = 1$$

$ω \geq 45°$

Απάντηση

$ω = 45^o$

άσκηση 5

Ένα έλκυθρο, κινούμενο πάνω σε πάγο, έχει ίδιο βάρος 700 N. Στο έλκυθρο επιβαίνουν πέντε άνθρωποι (μέσο βάρος ο καθένας 800 N). Ποια είναι η αναγκαία δύναμη για να κινηθεί το έλκυθρο ισοταχώς. Δίνεται συντελεστής τριβής η = 0,015.

Λύση

Δίνονται

$B_{ελ} = 700$ N

$B_{αν} = 800$ N

$η = 0{,}015$

κίνηση ισοταχής

Ζητούνται

F

1. Το συνολικό φορτίο είναι:

$B_{ολ} = B_{ελ} + 5 \cdot B_{α}$

ή

$B_{ολ} = 700 + 5 \times 800 = 4700$ N

Το $B_{ολ}$ ταυτίζεται σε αυτή την περίπτωση με την κάθετο δύναμη μεταξύ των επιφανειών.

άρα

$T = B_{ολ} \cdot n$

ή $T = 4700 \times 0.015 = 70{,}5$ N

Αυτή είναι η ζητούμενη δύναμη F = T

Απάντηση

F = 70,5 N

Η τράπεζα μίας πλάνης κινείται με ταχύτητα U = 0,3 m/s. Το βάρος της τράπεζας αυτής είναι 9000 N. Το μέρος της ισχύος της μηχανής που διατίθεται για την υπερνίκηση των τριβών είναι 200 Kw. Μέχρι ποιο βάρος μπορεί να είναι το προς επεξεργασία εξάρτημα.

Λύση

Δίνονται

U = 0,3 m/s

B = 9000 N

P = 200 Kw

Ζητούνται

$B_{εξ}$

Η τράπεζα της πλάνης καθώς και η βάση πάνω στην οποία αυτή ολισθαίνει είναι από χυτοσίδηρο. Σύμφωνα με τον πίνακα 11.4α ο συντελεστής τριβής ολίσθησης χυτοσιδήρου πάνω σε χυτοσίδηρο με λίπανση είναι 0,07. Η δύναμη που ενεργεί κάθετα στο επίπεδο ολίσθησης είναι το βάρος της τράπεζας και το βάρος του προς επεξεργασία αντικειμένου. Δηλαδή

$F_κ = (9000 + B_{ελ})$ σε N. Η τριβή ολίσθησης είναι $T = ηF_k$

ή

$T = 0{,}007 \cdot (9000 + B_{εξ})$

Η ισχύς δίνεται από τον τύπο

$P = F \cdot U$ αλλά $F = T$

άρα θα έχουμε

$200 = 0{,}3 \times 0{,}07\ (9000 + B_{εξ})$ ή

ή

$B_{εξ} = 9000 - \dfrac{200}{0{,}3 \times 0{,}07}$ άρα

$B_{εξ} = 9000\text{-}857{,}14$

ή

$B_{εξ} = 8142{,}86$ N

Απάντηση

$B_{εξ}$ = 8142,86 N

Οι εξωτερικές δυνάμεις που δρούν πάνω σε ένα τριβέα είναι 300 N. Αν η διάμετρος του στροφέα είναι 120 mm και ο συντελεστής τριβής 0,1. Να υπολογισθεί:

α) Η ροπή στρέψης της τριβής

β) Η απώλεια ισχύος της τριβής τη στιγμή που ο άξονας περιστρέφεται με 250 rpm

Λύση

Δίνονται

F = 300 N

d = 120 mm

n = 0,1

N = 250 rpm

Ζητούνται

$M_τ$, $P_τ$

η τριβή είναι T = n · F (σχέση 11.6.1.γ)

άρα T = 0,11 × 300 = 30 N

η ροπή είναι $M_τ = T \cdot \frac{d}{2}$ (σχέση 11.6.1.δ)

άρα $M_τ = 30 \cdot \frac{0{,}12}{2} = 1{,}8 \text{ Nm}$

Η απώλεια ισχύος είναι

$P_τ = 2πN \cdot M_τ$ (σχέση 11.6.1.ε)

άρα $P_τ = 2π\frac{250}{60} \cdot 1{,}8 = 23{,}6 \text{ W}$

Απάντηση

M_t = 1,8 Nm

$P_τ$ = 23,6 W

Ανελκυστήρας τεσσάρων ατόμων, έχει γωνία περιέλιξης των συρματοσχοίνων του στην τροχαλία τριβής φ = 160°. Με δεδομένο ότι ο θάλαμος έχει βάρος 3000 N, να εξετάσετε την ασφάλεια του ανελκυστήρα αυτού από άποψη ολίσθησης των συρματοσχοίνων. Ταχύτητα ανελκυστήρα U · 0,63 m/s.

Λύση

Δίνονται

$Q = 4$ άτομα

$B_\alpha = 750$ N

$P_0 = 3000$ N

$\varphi = 160°$

Ζητούνται

έλεγχος ολίσθησης

Ο ανελκυστήρας έχει ωφέλιμο φορτίο

$Q = 4 \times 750 = 3000$ N

βάρος θαλάμου $P = 3000$ N

βάρος αντιβάρου $G = P + \dfrac{Q}{2} = 4500$ N

Ο λόγος των τάσεων των συρματοσχοίνων

α) κίνηση με άδειο θαλαμο $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{G}{P} = \dfrac{4 \times 500}{3000} = 1{,}5$

β) κίνηση με υπερφόρτωση 25% $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{1{,}25Q + P}{G} = \dfrac{6750}{4500} = 1{,}5$

Επειδή η ταχύτητα του ανελκυστήρα είναι μικρότερη των 0,65 m/s θα πάρουμε τους συντελεστές $C_1 = 1{,}1$ και $C_2 = 1{,}2$.

Η γωνία $\varphi = 160° = 160\dfrac{\pi}{180}$ rad $= 2{,}79$ rad άρα

$\dfrac{T_1}{T_2} C_1 C_2 \le e^{\eta\varphi}$ όπου $\eta = 0{,}291$

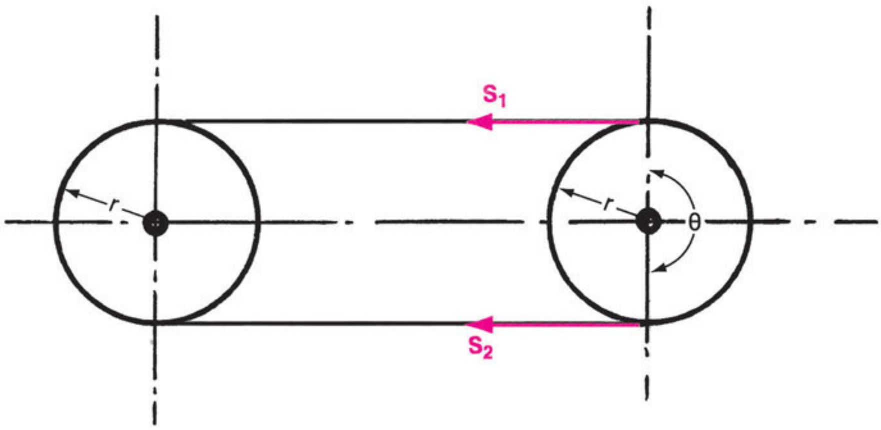
άρα $1{,}5 \times 1{,}1 \times 1{,}2 < e^{0{,}291 \times 2{,}79}$ ή $1{,}98 \le 2{,}25$

Απάντηση

Ο ανελκυστήρας δεν ολισθαίνει

άσκηση 9

Δύο ίσες τροχαλίες περιστρέφονται με τη βοήθεια ενός ιμάντα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ ιμάντα και τροχαλιών είναι 0.4. Αν η έλκουσα δύναμη, στον ιμάντα, είναι 600 N, να υπολογισθεί η ελκόμενη δύναμη στον άλλο κλάδο του ιμάντα.



Λύση

Δίνονται

$n = 0,4$

$s_1 = 600$ N

$r_1 = r_2$

Ζητούνται

s_2

1. Στη περίπτωση της ασκήσεως επειδή οι τροχαλίες είναι ίσες ($r_1 = r_2$) η γωνία περιέλιξης είναι $\theta = 180°$ άρα

$$\theta = \frac{\pi}{180} \times 180 = \pi = 3,14\,\text{rad}$$

2. Από τη σχέση

$\frac{s_1}{s_2} = e^{\eta\theta}$ υπολογίζουμε τον όρο $e^{\eta\theta} = e^{0,4\times3,14} = e^{1,257} = 3,51$ άρα

$$s_2 = \frac{s_1}{e^{\eta\theta}}$$

$$s_2 = \frac{600}{3,51} = 170,76\,\text{N}$$

Απάντηση

S_2 = 170,76 N

άσκηση 10

Στην προηγούμενη άσκηση, αν η ακτίνα των τροχαλιών είναι r = 20 cm και η συχνότητα περιστροφής f = 240 rpm ο δε ιμάντας που χρησιμοποιείται έχει πάχος h = 2 cm, να υπολογίσετε την ταχύτητα του ιμάντα.

Λύση

Δίνονται

$n = 0{,}4$

$s_1 = 600$ N

$r_1 = r_2 = 20$ cm

$f = 240$ rpm

$h = 2$ cm

Ζητούνται

U

Από τον τύπο

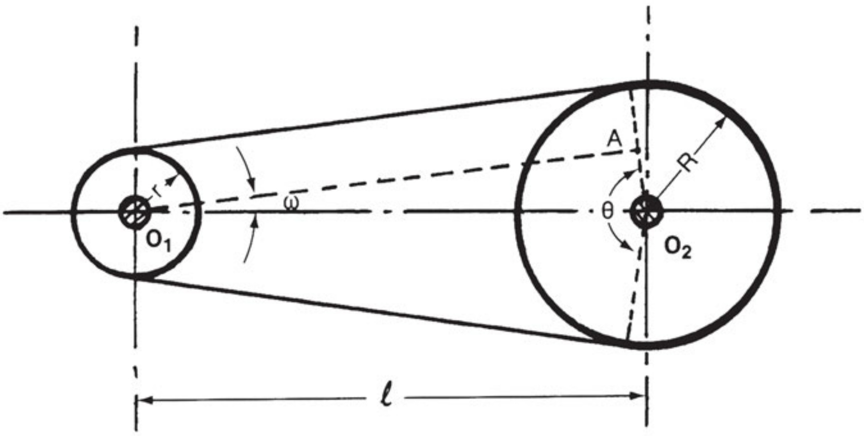
$U = 2\ \pi \cdot f\left(\dfrac{D+h}{2}\right)$ έχουμε

$$U = 2\pi \cdot \frac{240}{60}\left(\frac{2\times 20+2}{2}\right) = 527{,}8\,\frac{cm}{s} \cong 5{,}3\,\frac{m}{s}$$

Απάντηση

U = 5,3 m/s

Τα στοιχεία μίας απλής ιμαντοκίνησης είναι r = 0,2m R = 0,6m, ℓ = 2m. Το πλάτος του ιμάντα είναι 80 mm και η μεταφερόμενη ισχύς είναι 8 Kw. Να υπολογισθεί η ταχύτητα του ιμάντα. Συντελεστής τριβής ιμάντα - τροχαλίας n = 0.25 και επιτρεπόμενη τάση για μεταφορά ισχύος στον ιμάντα 14 N/mm ιμάντα.



Λύση

Δίνονται

r = 0,2 m

R = 0,6 m

ℓ = 2 m

α = 8 mm

P = 8 Kw

n = 0,25

$\tau_{\varepsilon\pi}$= 14 N/mm

Ζητούνται

U

Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε:

$$\omega = \frac{180 - \theta}{2}$$

Από το τρίγωνο O_1O_2 A έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{O_2A}{O_1O_2} = \frac{R - r}{\ell} \text{ ή}$$

$$\eta\mu\left(\frac{180-\theta}{2}\right)=\frac{0,6-0,2}{2}=\frac{0,4}{2}=0,2 \text{ άρα}$$

$$\frac{180-\theta}{2}=(11,536)^{o}=11^{o}32'13''$$

Επομένως λύνοντας ως προς θ, θα είναι: θ =180 - 2 × 11,536 = (156,928)° οπότε

θ = 2,739 rad

ή

θ = 156° 55´40´´,8

Υπολογίζουμε τον όρο $e^{\eta\theta}$. Έχουμε $e^{\eta\theta} = e^{0,25\times 2,739} = e^{0,68}$

Από τη σχέση $P=s_1\left(1-\frac{1}{e^{\eta\theta}}\right)U$, όπου s_1 είναι η μεγαλύτερη των τάσεων του ιμάντα.

Άρα θα είναι s_1 = 14 × 80 = 1120 N, θα έχουμε

$$8000 = 14\times 80\times\left(1-\frac{1}{1,98}\right)U=1120\times 0,495\times U$$

ή

$$U=\frac{8000}{1120\times 0,495}\frac{m}{s}$$

ή

$$U=14,43\ \frac{m}{s}$$

Απάντηση

U = 14,43 m/s

Ένας ανυψωτικός κοχλίας έχει τα εξής στοιχεία:
μέση διάμετρος D = 30 mm
βήμα σπειρώματος h = 6 mm
τριβή μεταξύ κοχλίου- περικοχλίου η = 0.15. Με ένα μοχλοβραχίονα μήκους ℓ = 0,5 m και μία δύναμη P = 10 N, τι φορτίο μπορούμε να ανυψώσουμε και ποιος ο βαθμός απόδοσης του κοχλία.

Λύση

Δίνονται

D = 30 mm
h = 6 mm
η = 0.15
P = 10 N
ℓ = 0,5 m

Ζητούνται

B, η_A

Η γωνία κλίσης της μέσης έλικας του σπειρώματος του κοχλία είναι

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{h}{\pi \cdot D} = \frac{6}{\pi \cdot 30} = 0{,}06366$$ άρα η αναγκαία δύναμη F είναι

$$F = B\frac{\eta + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \eta\,\varepsilon\varphi\theta} \quad \text{ή}$$

$$B = F\frac{1 - \eta\,\varepsilon\varphi\theta}{\eta + \varepsilon\varphi\theta}$$

2. Η ροπή M_t που εφαρμόζουμε είναι

$M_t = P \cdot \ell$ ή M_t = 10 × 0,5 = 5 Nm αλλά

$$M_1 = F \cdot \frac{D}{2} \quad \text{ή} \quad 5 = F \cdot \frac{0{,}030}{2} \quad \text{ή}$$

$$F = \frac{10}{0{,}30} = 333{,}31\,N$$

άρα

$$B = \frac{10}{0,30} \cdot \frac{1 - 0,15 \times 0,00366}{0,65 + 0,06366}$$ ή B = 1545,2 N

Ο συντελεστής απώλειας είναι

$$\frac{F_\theta}{F} = n_A$$

F_θ = Βεφθ = 1545,2×0,06366

ή

F_θ = 98,367 άρα $\frac{F_\theta}{F} = \frac{98,367}{333,34} = 0,295$ ή 29,5%

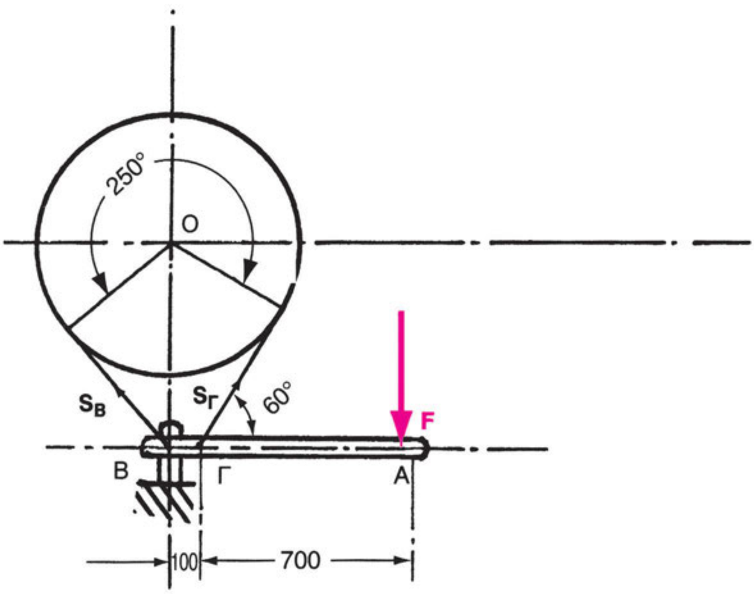
Απάντηση

B = 1545,2 N

η_A = 0,295 ή 29.5%

άσκηση 13

Σε ένα φρένο, με εύκαμπτη ταινία, η διάμετρος του τυμπάνου είναι 500 mm. Η δύναμη που ενεργεί στο άκρο του μοχλού είναι 200 N και ο συντελεστής τριβής τυμπάνου - ταινίας είναι 0.3. Να υπολογισθεί η ροπή φρεναρίσματος, αν τα γεωμετρικά στοιχεία του φρένου είναι αυτά του σχήματος.



Λύση

Δίνονται

D = 500 m

F = 200 N

n = 0.3

Ζητούνται

M_t

1. Για την ισορροπία κατά το φρενάρισμα είναι $\Sigma M_B = 0$

ή

$S_r \cdot 100 \cdot \eta\mu\, 60 - F \cdot 800 = 0$

ή

$$S_\Gamma = \frac{200 \times 800}{100 \times 0,800} = 1847,6 \text{ N}$$

2. Έχουμε $\frac{S_B}{S_\Gamma} = e^{n\theta}$ ή $S_B = S_\Gamma \cdot e^{n\theta}$ $\quad \theta = 250^o = 250\frac{\pi}{180} = 4,3 \text{ rad}$

άρα $S_B = 1847 \cdot 6 \times e^{0.3\times 4.36} = 1847,6 \times 3,7 = 6.683,8$ N

Η ροπή φρεναρίσματος είναι

$$M_t = (S_B - S_\Gamma)\frac{P}{2} \quad \text{ή}$$

$$M_t = (6683,8 - 1847,6)\frac{0,5}{2}\text{Nm}$$

$$M_t = 1209 \text{ Nm}$$

Απάντηση

$M_t = 1209$ Nm

κεφάλαιο 15

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΑΣΚΗΣΗ 7

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΑΣΚΗΣΗ 9

Μία φυσική ατμόσφαιρα (at) είναι $1{,}012 \times 10^5$ Pa. Μετρώντας με τα βαρόμετρα λέμε ότι 1 at είναι (1) ίση με 760 mmHg (2) ίση με 10333 mmH_2O.Να βρείτε τις σχέσεις μεταξύ mmHg, mmH_2O και N/m^2.

Λύση

Δίνονται

$1\ at = 1{,}012 \times 10^5\ Pa =$

$760\ mmHg = 10333\ mmH_2O$

$1\ Pa = 1\ N/m^2$

Ζητούνται

οι σχέσεις μεταξύ mmHg, mmH_2O, Pα

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι

$$1\ mm\ Hg = \frac{10333}{760}\ mm\ H_2O = 13{,}6\ mm\ H_2O$$

και

$$1\ mm\ Hg = \frac{760}{10333}\ mm\ Hg = 0{,}0735\ mm\ Hg$$

Επειδή είναι

$$1{,}012 \times \frac{N}{m^2} = 760\ mm\ Hg = 10333\ m\ H_2O$$

θα έχουμε

$$1\,mm\ Hg = \frac{1{,}012 \times 10^5}{760}\frac{N}{m^2} = 133{,}16\frac{N}{m^2} = 133{,}16\frac{N}{m^2}\ (ή\ P_α)$$

$$1\,mm\ H_2O = \frac{1{,}012 \times 10^5}{10333}\frac{N}{m^2} = 9{,}79\ \frac{N}{m^2}\ (ή\ P_α)$$

Απάντηση

1 mm Hg = 13,6 mm H_2O

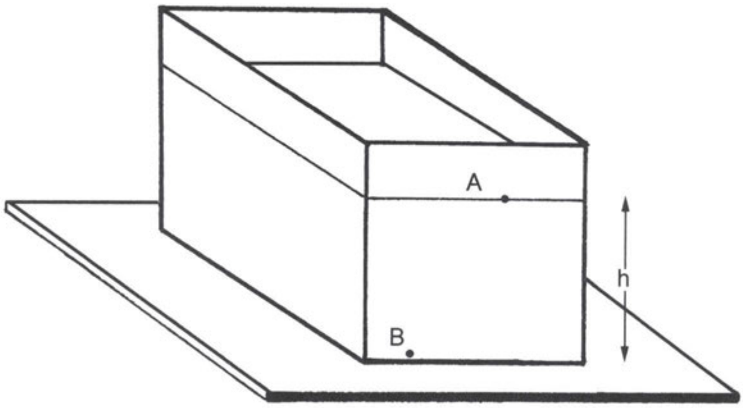
1 mm H_2O = 0,0735 mm Hg

1 mm Hg = 133,16 N/m^2

1 mm H_2O = 9,19 N/m^2

άσκηση 2

Μία υδαταποθήκη σχήματος παραλληλεπιπέδου με βάση 6 m × 4 m, περιέχει νερό σε ύψος 3 m. Ποια είναι η πίεση στη βάση της υδαταποθήκης και ποια είναι η ολική δύναμη που ασκεί το περιεχόμενο νερό στη βάση.



Λύση

Δίνονται

Διαστάσεις υδαταποθήκης:

βάση 6 m × 4 m

ύψος 3 m περιεχόμενου νερού

Ζητούνται

P, F

Για τη πίεση ηρεμούντος υγρού μεταξύ δύο σημείων Α και Β ισχύει η σχέση

$P_B - P_A = hw$

όπου w το ειδικό βάρος του υγρού.

Από το σχήμα 15.1 βλέπουμε ότι η μανομετρική πίεση στο Α είναι μηδέν (η απόλυτη είναι 1 atm). Άρα η σχέση γίνεται $P_B = hw = hgp$ όπου p η πυκνότητα του υγρού. Εδώ έχουμε νερό άρα $p = 1000\ Kg/m^3 = 1000\ Ns^2/m^4$

Αντικαθιστούμε τις τιμές και έχουμε

$P_B = 3 \times 9{,}81 \times 1000 = 29430\ N/m^2$

Η επιφάνεια πάνω στην οποία ασκείται αυτή η πίεση είναι η βάση της υδαταποθήκης οπότε $A = 6 \times 4 = 24\ m^2$ άρα η δύναμη θα είναι

$F = A \cdot P_B$

$F = 24 \times 29430 = 706320\ N$

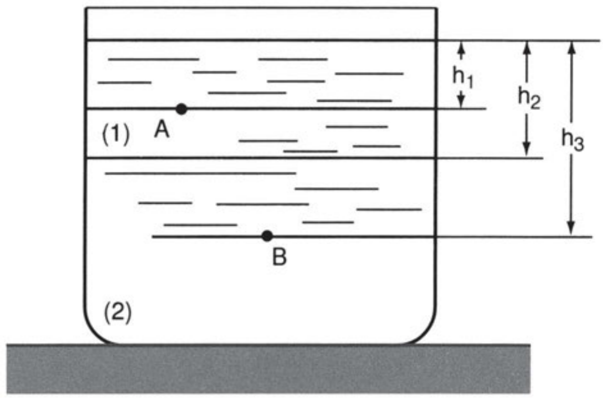
Απάντηση

P = 29,43 KN/m²

F = 706,3 KN

άσκηση 3

Σε ένα δοχείο υπάρχουν δύο υγρά (τα οποία δεν αναμιγνύονται ούτε αντιδρούν χημικά μεταξύ τους). Το υγρό (1) έχει ειδικό βάρος w_1 = 10 KN/m³ και το (2) w_2 = 9,8 KN.m³. Ποια είναι η διαφορά πίεσης, μεταξύ των σημείων Α και Β. Δίνονται h_1 = 0,7 m, h_2 = 1,2 m, h_3 = 2,4 m.



Λύση

Δίνονται

$w_1 = 10\ KN/m^3$

$w_2 = 9,8\ KN{\cdot}m^3$

$h_1 = 0,7$ m,

$h_2 = 1,2$ m

$h_3 = 2,4$ m

Ζητούνται

Δ_p

Η διαφορά πίεσης μεταξύ του σημείου Α και του σημείου Γ, στη διαχωριστή επιφάνεια των δύο υγρών, επειδή είναι μέσα στο ίδιο υγρό θα είναι

$P_Γ - P_Α = (h_2 – h_1)\, w_2$

και κατ’ αναλογία μεταξύ Β και Γ θα είναι

$P_B - P_Γ = (h_1 – h_2)\, w_1$

Δια προσθέσεως κατά μέλη έχουμε

$P_B - P_A = (h_2 - h_1)\, w_2 + (h_3 - h_2)\, w_π$ ή $P_B - P_A = (1,2 - 0,7) \times 9,8 + (2,4 - 1,2) \times 10 =$

$= P_B - P_A = 0,5 \times 9,8 + 1,2 \cdot 10 = 16,9\ KN/m^2$

Απάντηση

$\Delta_p = 16,9\ KN/m^2$

άσκηση 4

Ποια δύναμη πιέζει πώμα, εμβαδού 4 cm^2 που κλείνει μία οπή σε βάθος 1,5 m σε ένα δοχείο που περιέχει υγρό ειδικού βάρους w = 9,65 KN/m^3.

Λύση

Δίνονται

$A = 4\ cm^2$

$h = 1{,}5\ m$

$w = 9{,}65\ KN/m^3$

Ζητούνται

F

Η πίεση σε βάθος h υγρού με ειδικό βάρος w είναι $P = h \cdot w$ και η δύναμη που ασκείται $F = A \cdot P = Ah \cdot w$ άρα $F = 4 \cdot 10^{-4} \times 1{,}5 \times 9{,}65 \times 103 = 5{,}79\ N$

Απάντηση

F = 5,79 N

άσκηση 5

Το εμβαδόν του μεγάλου εμβόλου ενός υδραυλικού πιεστηρίου είναι A_{max} = 150 cm^2 και του μικρού A_{min} = 50 cm^2. Αν πάνω στο μικρό έμβολο ασκήσουμε κάθετα μία δύναμη F_1 = 25 N, πόση θα είναι η δύναμη F_2 που θα εμφανισθεί στο μεγάλο έμβολο.

Λύση

Δίνονται

A_{max} = 150 cm^2

A_{min} = 50 cm^2

F_1 = 25 N

Ζητούνται

F_2

Σύμφωνα με την αρχή του Pascal η πίεση που ασκείται στο μικρό έμβολο είναι η ίδια με αυτή που ασκείται στο μεγάλο έμβολο, άρα:

$$\frac{F_1}{A_{min}} = \frac{F_2}{A_{max}}$$

ή

$$F_2 = F_1 \frac{A_{max}}{A_{min}}$$

ή

$$F_2 = 25 \frac{150}{50} - 75N$$

Απάντηση

P_2 = 75 N

άσκηση 6

Ένα κυλινδρικό βαρέλι έχει εμβαδόν βάσης 0,6 m^2 και ύψος 1 m. Αν το βαρέλι είναι τελείως γεμάτο με νερό, ποια δύναμη ασκείται στον πυθμένα του; Αν στη συνέχεια εφαρμόσουμε στο πάνω μέρος του βαρελιού ένα σωλήνα διατομής, 5 cm^2 και συμπληρώσουμε άλλο ένα μέτρο νερό, ποια θα είναι η νέα δύναμη που θα ασκείται στον πυθμένα; Να ευρεθούν, επίσης, τα ποσοστά αύξησης της ποσότητας του νερού και το αντίστοιχο της αύξησης της δύναμης πάνω στον πυθμένα ($w = 10^4$ N/m^2).

Λύση

Δίνονται

$A = 0,6$ m^2

$h_1 = 1$ m

$h_2 = 1$ m

$a = 5$ cm^2 περιεχόμενο υγρό: νερό

$w = 10^4$ N/m^2

Ζητούνται

F_1, αύξηση της δύναμης %

F_2, αύξηση του νερού %

1. Η δύναμη που ασκείται στον πυθμένα είναι

$F_1 = P_1 \cdot A = w \cdot h_1 \cdot A = 10^4 \times 1 \times 0,6 = 6$ KN

2. $F_2 = P_1 \cdot A = w\,(h_1 + 1)\,A = 10^4 \times 2 \times 0,6 = 12$ KN

3. Ο όγκος του νερού που προστίθεται είναι

$1 \times 5 \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-4}$ m^3 ο όγκος του νερού στο βαρέλι είναι

$1 \times 0,6 = 0,6$ m^3

4. Η ποσοστιαία αύξηση της δύναμης είναι

$\dfrac{12-6}{6} \times 100 = 100\%$ και του νερού

$$\frac{\left(0,6+5\times10^{-4}\right)-0,6}{0,6}\times100=0,083\%$$

Απάντηση

F_1 = 6 KN

F_2 = 12 KN

αύξηση δύναμης 100%

αύξηση ποσότητας νερού 0,083%

άσκηση 7

Ένα ομοιογενές σώμα ζυγιζόμενο στον αέρα έχει βάρος B_1 = 4 N. Όταν είναι βυθισμένο στο νερό ζυγίζει B_2 = 3 N. Το ειδικό βάρος του νερού είναι w_0 = 9986 N/m^3. Ποιο είναι το ειδικό βάρος του σώματος αν η άνωση στον αέρα θεωρηθεί αμελητέα.

Λύση

Δίνονται

$B_1 = 4$ N

$B_2 = 3$ N

$w_o = 9986$ N/m^3

Ζητούνται

w

Η διαφορά του βάρους οφείλεται στην άνωση. Επομένως το σώμα έχει άνωση

A = 4 - 3 = 1 N

Αυτό σημαίνει ότι ο όγκος νερού που εκτοπίζεται έχει βάρος 1 N επομένως ο όγκος είναι

$$B = V \cdot w_υ$$

$$V = \frac{B}{w_υ}$$

ή

$$V = \frac{1}{9986} = 0{,}000100 \text{ m}^3 = 100 \text{ cm}^3$$

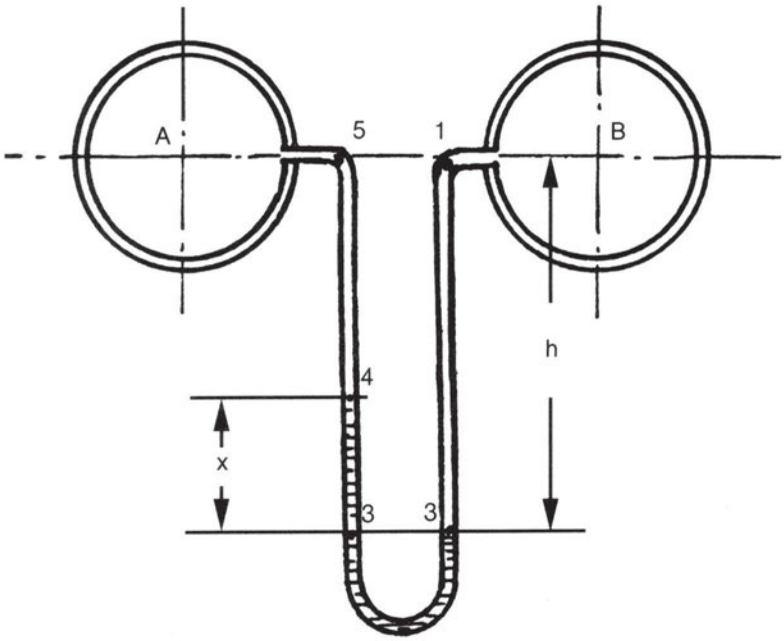
άρα το ειδικό βάρος του σώματος είναι $w = \frac{4}{100} = 0{,}04 \frac{N}{cm^3} = 40 \frac{KN}{m^3}$

Απάντηση

w = 40 KN/m^3

άσκηση 8

Ένα διαφορικό μανόμετρο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της διαφοράς πίεσης μεταξύ δύο σωλήνων που μεταφέρουν νερό. Το χρησιμοποιούμενο υγρό του μανομέτρου έχει ειδικό βάρος 1,6 N/m^3 και οι ενδείξεις του οργάνου είναι h = 30 cm και x = 10cm. Ποια η διαφορά πίεσης των σωλήνων.



Λύση

Δίνονται

w = 1,6 N/m^3

h = 30 cm

X = 10 cm

Ζητούνται

$\Delta_{p_{AB}}$

1. Στο σημείο (1), μετράμε την πίεση του σωλήνα Β, άρα: $P_B = P_1$

2. Αντίστοιχα στο σημείο (5) μετράμε την πίεση στο σωλήνα Α,

άρα: $P_A = P_5$

3. Από το σχήμα έχουμε:

$P_2 = P_1 + 30\ cm \cdot H_2O$

$P_2 = P_3$ γιατί είναι στο αυτό οριζόντιο επίπεδο τα σημεία (2) και (3)

$P_4 = P_3 - 10 \times 1{,}6$ cm $H_2O = P_3 - 16$ cm H_2O επομένως:

$P_4 = (P_1 + 30$ cm $H_2O) - 16$ cm H_2O άρα

$P_4 = P_1 + 14$ cm H_2O

είναι, από το σχήμα,

$P_5 = P_4 - 20$ cm $H_2O = 14$ cm $H_2O - 20$ cm H_2O

ή

$P_5 = P_1 - 6$ cm H_2O

άρα έχουμε:

$P_1 - P_5 = P_B - P_A = \Delta_{p_{AB}} = 6$ cm H_2O

$\Delta_{p_{AB}} = wh$

όπου και $h = 6$ cm $= 6 \times 10^{-2}$ m

$w = 10^3 \times 9{,}81$ N/m^3 το ειδικό βάρος του νερού

επομένως

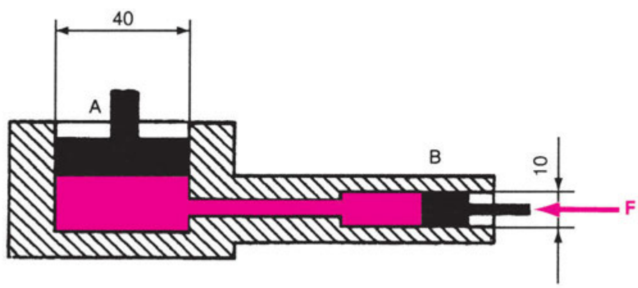
$\Delta_{p_{AB}} = 6 \times 10^{-2} \times 10^3 \times 9{,}81 = 588{,}6$ N/m^2

Απάντηση

$\boldsymbol{\Delta_{p_{AB}} = 588{,}6}$ N/m^2

άσκηση 9

Υδραυλικός γρύλος έχει 40 cm διάμετρο στο μεγάλο έμβολο και 10 cm στο μικρό. Χρησιμοποιείται για την ανύψωση το πολύ 15 KN. Να υπολογισθεί η αναγκαία δύναμη στο μικρό έμβολο και η πίεση που επικρατεί μέσα στο γρύλο.



Λύση

Δίνονται

D = 40 cm

d = 10 cm

F = 15 kN

Ζητούνται

F_A, P

α. Εστω D και d οι διάμετροι του μεγάλου και του μικρού εμβόλου, αντίστοιχα. Επειδή οι πιέσεις είναι παντού οι ίδιες θα είναι και $P_A = P_B$, άρα

$$\frac{15}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{F_A}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

ή

$$\frac{15}{D^2} = \frac{F_A}{d^2}$$

ή

$$F_A = 15 \times \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

αντικαθιστούμε τις τιμές και έχουμε:

$$F_A = 15 \times \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 937{,}5\ \mathrm{N}$$

β. Η πίεση στο γρύλο είναι παντού η ίδια. Αρα αρκεί να υπολογίσουμε τη πίεση σε ένα σημείο π.χ. το Α.

είναι

$$P_A = P = \frac{F_A}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4 \cdot F_A}{\pi \cdot D^2}$$

ή

$$P = \frac{4 \times 15}{\pi \times 40^2} = 0{,}011936 \frac{KN}{cm^2} = 119{,}36 \frac{KN}{m^2}$$

Απάντηση

F_A = 937,5 N

P = 119,36 KN/m²

κεφάλαιο 16

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΑΣΚΗΣΗ 7

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΑΣΚΗΣΗ 9

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δεξαμενή περιέχει νερό, στο ίδιο πάντα ύψος. Στο κάτω μέρος της δεξαμενής, σε απόσταση 2,5 m από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, υπάρχει κρουνός, με εμβαδόν διατομής 4 cm^2. Ποια είναι η ταχύτητα εκροής του νερού και ποια η παροχή του κρουνού.

Λύση

Δίνονται

h = 2,5 m

A = 4 cm^2

Ζητούνται

U, Q

1) Κατά το θεώρημα του Torricelli η ταχύτητα εκροής είναι

$$υ = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

άρα

$$υ = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 2{,}5} = \sqrt{49{,}05} = 7{,}0 \frac{m}{s}$$

2) Η παροχή δίνεται από τη σχέση

Q = U · A άρα

Q = 7 × 4 × 10^{-4} = 28 × 10^{-4} m^3/s

ή

Q = 2800 cm^3/s

Απάντηση

υ = 7,0 m/s

Q = 2800 cm^3/s

Κρουνός με διατομή Α = 15 cm^2 γεμίζει μία κυκλική υδαταποθήκη, διαμέτρου d = 2 m και ωφέλιμου ύψους h = 3 m σε t = 4 h 42′ 54″. Πόση είναι η παροχή Q του κρουνού και πόση η ταχύτητα εκροής του νερού από τον κρουνό.

Λύση

Δίνονται

A = 15 cm^2

d = 2m

h = 3 m

t = 4h 42' 54"

Ζητούνται

Q, u

1) Ο όγκος V της υδαταποθήκης είναι:

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h$$

$$V = \frac{\pi \times 2^2}{4} \times 3 = 9{,}43\ m^3$$

2) Ο χρόνος εκροής είναι:

$$t = 4h42'54'' = 4 + \frac{42}{60} + \frac{54}{3600} = 4{,}715\ h$$

3) Η παροχή δίνεται από τη σχέση

$$Q = \frac{V}{t}$$

ή

$$Q = \frac{9{,}43}{4{,}715} = 2\frac{m^3}{h} = 5{,}6 \times 10^{-4}\ \frac{m^3}{s}$$

4) Η ταχύτητα εκροής δίνεται από τη σχέση

$$υ = \frac{Q}{A}$$

$$υ = \frac{5,6 \times 10^{-4}}{15 \times 10^{-4}} = 0,37 \frac{m}{s}$$

υ = 0,37 m/s

Απάντηση

Q = 2 m^3/h

υ = 0,37 m/s

άσκηση 3

Ένας σωλήνας έχει εμβαδόν διατομής 120 cm^2. Από τον σωλήνα ρέει νερό με ταχύτητα υ = 4 Km/h. Πόσο όγκο νερού θα δώσει ο σωλήνας σε μία μέρα;

Λύση

Δίνονται	Ζητούνται
$A = 120\ cm^2$	V
$υ = 4\ Km/h$	
$t = 24\ h$	

Για την παροχή Q του σωλήνα έχουμε τις σχέσεις:

$$Q = \frac{V}{t} \text{ και}$$

$$Q = A \cdot υ$$

όπου: V: ο όγκος που διέρχεται από τον σωλήνα

t: ο χρόνος που διέρχεται ο όγκος V από το σωλήνα

A: η διατομή του σωλήνα

υ: η ταχύτητα ροής στον σωλήνα

Από τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$\frac{V}{t} = A \cdot υ$$

ή

$$V = A \cdot υ \cdot t$$

αντικαθιστούμε τις τιμές:

$$V = (120 \times 10^{-4}) \times (4 \times 10^{3}) \times 24 = 1152\ m^3$$

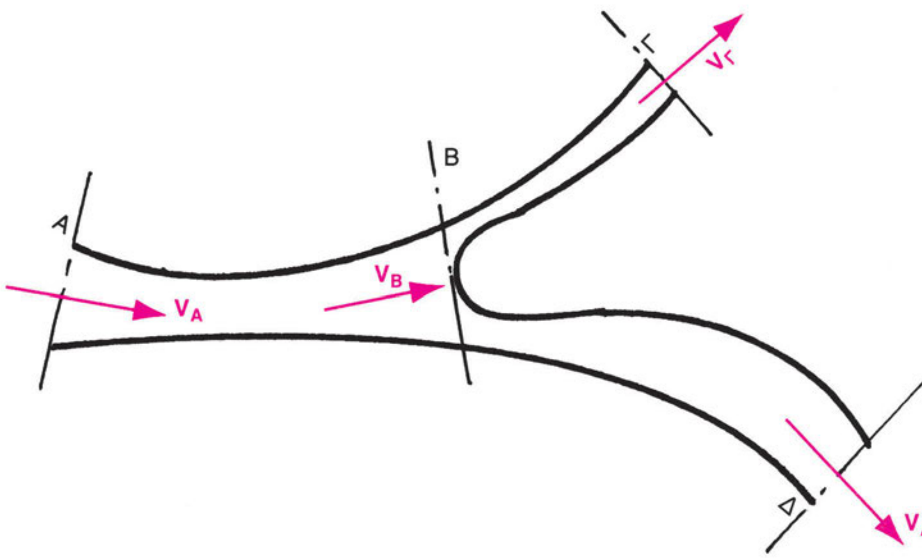
Απάντηση

V = 1152м³

Σε ένα κόμβο αγωγών, όπως φαίνεται στο σχήμα κινείται υγρό. Στην είσοδο του κόμβου στη θέση Α η διάμετρος είναι d_A = 450 mm, στη θέση Β είναι d_B = 300 mm. Στο Β γίνεται διακλάδωση σε δύο σκέλη. Οι διάμετροι είναι d_Γ = 150 mm και d_Δ= 225 mm. Μετρήθηκαν οι ταχύτητες του υγρού στις θέσεις Α και Δ και ευρέθησαν U_A= 1.8 m/s και U_Δ = 3,6 m/s. Να υπολογισθούν

α) Οι παροχές στις θέσεις Γ και Δ

β) Οι ταχύτητες στις θέσεις Β και Γ



Λύση

Δίνονται

d_A = 450 mm

d_B = 300 mm

d_Γ = 150 mm

d_Δ = 225 mm

U_A = 1.8 m/s

U_Δ = 3,6 m/s

Ζητούνται

Q_Γ, Q_Δ, U_B, U_Γ

1. Η αρχή της συνέχειας μας δίνει:

$A_A \cdot U_A = A_B \cdot U_B$ όπου ΑΑ και ΑΒ τα εμβαδά των διατομών στη θέση Α και στη θέση Β.

$$A_A = \frac{\pi \times 0,45^2}{4} = 0,159\ m^2$$

είναι:

$$A_B = \frac{\pi \times 0,3^2}{4} = 0,07\ m^2$$

Άρα είναι:

$0,159 \times 1,8 = 0,07\ U_B$

ή $U_B = \dfrac{0,159 \times 1,8}{0,07} = 4,09 \dfrac{m}{s}$

2. Η παροχή

$Q_A = Q_B = A_B \cdot U_B$ ή $Q_A = Q_B = 4,09 \times 0,07 = 0,286\ m^3/s$

3. Οι διατομές στις θέσεις Γ και Δ, είναι:

$$A_\Gamma = \frac{\pi \times 0,15^2}{4} = 0,0177 \frac{m}{s}$$

$$A_\Delta = \frac{\pi \times 0,225^2}{4} = 0,0397 \frac{m}{s}$$

4. Η παροχή στη θέση Δ, είναι:

$Q_\Delta = A_\Delta \cdot U_\Delta$ ή $Q_\Delta = 0,0397 \times 3,6 = 0,143\ m^3/s$

5. Η παροχή στη θέση Γ, είναι:

$Q_\Gamma = Q_B - Q_\Delta$

ή $Q_\Gamma = 0,286 - 0,143\ \dfrac{m^3}{s} = 0,143\ \dfrac{m^3}{s}$

6. Η ταχύτητα στη θέση Γ θα είναι

$Q_\Gamma = A_\Gamma \cdot U_\Gamma$

ή $U_\Gamma = \dfrac{Q_\Gamma}{A_\Gamma}$

αντικαθιστούμε

$$U_\Gamma = \frac{0,143}{0,0177} = 8,08 \frac{m}{s}$$

Απάντηση

$Q_\Gamma = 0,143\ m^3/s$

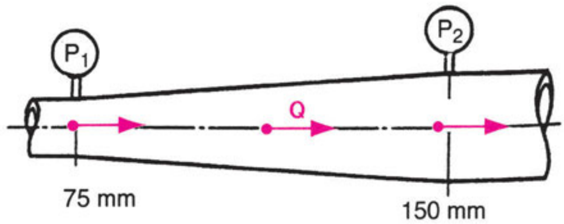
$Q_\Delta = 0,143\ m^3/s$

$U_B = 4.09\ m/s$

$U_\Gamma = 8,08\ m/s$

άσκηση 5

Οριζόντιος σωλήνας διευρύνεται ομαλά από μια διάμετρο 75mm σε 150mm κατά διεύθυνση ροής του νερού. Αν η ροή έχει παροχή $Q=85\times10^3 cm^3/s$, το μανόμετρο στη διατομή με διάμετρο τα 75mm δείχνει $p1=200Kp_\alpha$. Ποια θα είναι η ένδειξη του μανόμετρου στη διατομή με διάμετρο τα 150mm



Λύση

Δίνονται

d_1 = 75 mm

d_2 = 150 mm

Q = 85 × 10^3 cm^3/s

p_1 = 200 Kp_α

σωλήνας οριζόντιος

Ζητούνται

p_2

1. Η ταχύτητα ροής του νερού στη περιοχή της διαμέτρου d_1 = 75 mm είναι:

$$U_1 = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot d_1^2}{4}}$$

ή

$$U_1 = \frac{0{,}085 \times 4}{\pi \times (0{,}075)^2} = 19{,}24 \frac{m}{s}$$

2. Η ταχύτητα ροής στη περιοχή της διαμέτρου d_2 = 150 mm θα είναι:

$$U_2 = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}$$

ή

$$U_2 = \frac{0,085 \times 4}{\pi \times (0,15)^2} = 4,81 \frac{m}{s}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2}$$

3. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των δύο διατομών των διαμέτρων d_1 και d_2 (επειδή ο σωλήνας είναι οριζόντιος η δυναμική ενέργεια παραλείπεται γιατί είναι η ίδια και στις δύο διατομές).

Έχουμε:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2}$$

για το νερό παίρνουμε την πυκνότητα ρ = 1000 kg/m^3

άρα

$$\frac{2 \times 10^5}{1000} + \frac{19,24^2}{2} = \frac{p_2}{1000} + \frac{(4,81)^2}{2}$$

Λύνουμε ως προς p_2

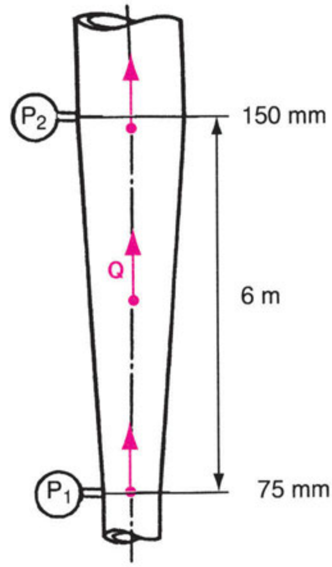
$$p_2 = \left[\frac{19,24^2 - 4,81^2}{2} + \frac{2 \times 10^5}{1000}\right] \times 1000$$

$$p_2 = 373520,75 N/m^2 = 373,5 KP_\alpha$$

Απάντηση

$P_2 = 373,5\ KP_\alpha$

Εάν ο σωλήνας του προηγούμενου προβλήματος είναι κατακόρυφος, με τη διατομή με τη μικρή διάμετρο προς τα κάτω και τη ροή του νερού προς τα πάνω, ποια θα είναι η ένδειξη του μανόμετρου στη θέση (2) αν η απόσταση των δύο διατομών είναι 6 m.



Λύση

Δίνονται

d_1 = 75 mm

d_2 = 150 mm

Q = 85 x 10^3 cm^3/s

p_1 = 200 KP_α

σωλήνας κατακόρυφος z_1 = 0

h = 6 m

Ζητούνται

p_2

1. Από το προηγούμενο πρόβλημα έχουμε:

U_1 = 19,24 m/s

d_1 = 75 mm στη διατομή με

και

U_2 = 4,81 m/s

d_2 = 150 mm στη διατομή με

2. Εφαρμόζουμε, πάλι, την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των ίδιων διατομών, αλλά τώρα έχουμε διάφορο την κινητική ενέργεια στις διατομές αυτές. Είναι z_1 = 0 και z_2 = 6 m.

Οπότε είναι:

$$\frac{2\times 10^5}{1000}+\frac{19{,}24^2}{2}=\frac{p_2}{1000}+\frac{4{,}81^2}{2}+9{,}81\times 6$$

άρα

$$p_2=\left(\frac{19{,}24^2-4{,}81^2}{2}+200-9{,}81\times 6\right)1000$$

ή

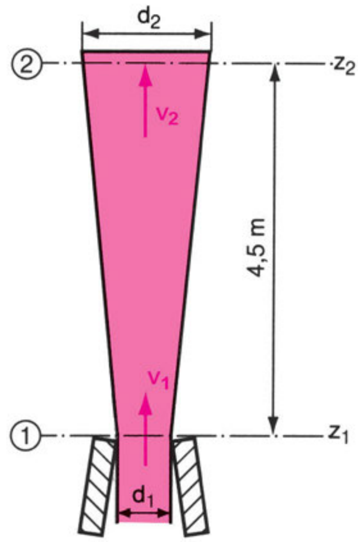
$$p_2 = 314660{,}75\ \frac{N}{m^2} = 314{,}6\ KPa$$

Απάντηση

P_2 = 314,6 $KP_α$

άσκηση 7

Από πίδακα διαμέτρου 25 mm φεύγει δέσμη νερού με ταχύτητα 12 m/s προς τα πάνω. Να υπολογισθεί η διάμετρος της δέσμης του νερού σε ύψος 4,5 m πάνω από τον πίδακα. (Οι απώλειες να θεωρηθούν αμελητέες).



Λύση

Δίνονται	**Ζητούνται**
d_1 = 25mm	d_2
U = 12 m/s	
z_2 = 4.5 m	

Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των διατομών (1) και (2). Παρατηρούμε

α) για τη δυναμική ενέργεια

$z_2 - z_1 = 4{,}5$ m

β) $p_1 = p_2 = 1$ atm

Επομένως έχουμε:

$$\frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} = z_2 - z_1$$

άρα

$$\frac{12^2 - U_2^2}{2 \times 9{,}81} = 4{,}5$$

ή

$$U_2 = \sqrt{12^2 - 2 \times 9{,}81 \times 4{,}5} = \sqrt{55{,}71} = 7{,}46\frac{m}{s}$$

Από την αρχή της συνέχειας, έχουμε:

$A_1 \cdot U_1 = A_2 \cdot U_2$ αλλά

$$A_1 = \frac{\pi \times 0{,}025^2}{4} = 0{,}00049 m^2$$

και έχουμε τις ταχύτητες U_1 και U_2 οπότε:

$$A_2 = \frac{A_1 U_1}{U_2}$$

$$A_2 = \frac{0{,}0049 \times 12}{7{,}46} = 0{,}000789 m^2$$

αλλά

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}$$

ή

$$d = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 0{,}000789}{\pi}} = \sqrt{0{,}001}$$

οπότε

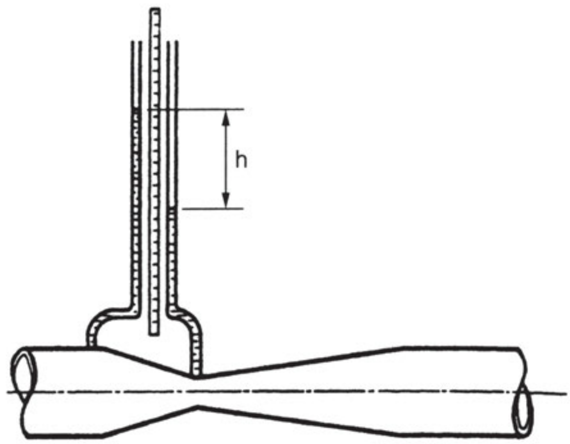
$d = 0{,}03169$ m $\cong$ 32 mm

Απάντηση

d = 32 mm

άσκηση 8

Ένας μετρητής Βεντούρι έχει διάμετρο εισόδου 150 mm και διάμετρο λαιμού 75 mm. Ποια η ένδειξη του οργάνου, σε m, μεταξύ της εισόδου και του λαιμού, αν η ποσότητα του νερού που διέρχεται δια του οργάνου είναι $Q = 0{,}04\ m^3/s$.



Λύση

Δίνονται

$d_1 = 150$ mm

$d_2 = 75$ mm

$Q = 0{,}04\ m^3/s$

Ζητούνται

h

1. Εμβαδόν διατομής εισόδου $A_1 = \frac{\pi}{4} \times 0{,}15^2 = 0{,}0177\ m^2$

εμβαδόν διατομής λαιμού $A_2 = \frac{\pi}{4} \times 0{,}075^2 = 0{,}004417\ m^2$

2. Ταχύτητα ροής στην είσοδο

$$U_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0{,}04}{0{,}0177} = 2{,}26 \frac{m}{s}$$

ταχύτητα ροής στο λαιμό του οργάνου $U_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0{,}04}{0{,}04417} = 9{,}06 \frac{m}{s}$

3. Έστω p_1 η πίεση στην είσοδο και p_2 η πίεση στο λαιμό. Η εξίσωση του Bernoulli μεταξύ εισόδου και λαιμού γράφεται:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{2,26^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{9,06^2}{2}$$

$$\frac{p_1-p_2}{\rho}=\frac{9,06^2-2,26^2}{2}$$

άρα

$$h=\frac{p_1-p_2}{\rho\cdot g}=\frac{9,06^2-2,26^2}{2\,g}=3,9\,m$$

Απάντηση

h = 3,9 m

Να υπολογίσετε τη πτώση πίεσης μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται σε ένα ευθύγραμμο σωλήνα, σε απόσταση μεταξύ τους 800 m. Ο σωλήνας έχει διάμετρο 150 mm και η παροχή του είναι 0, 0125 m^3/s .
Δίδονται συντελεστής απωλειών ζ = 0,21 N/m
πυκνότητα νερού ρ = 1000 kg/m^3

Λύση

Δίνονται

ℓ = 800 μ

d = 150 mm

Q = 0,0125 m^3/s

ζ = 0,21 N/m

ρ = 1000 kg/m^3

Ζητούνται

Δρ

1.Το εμβαδόν της διατομής του σωλήνα είναι:

$$A = \frac{\pi}{4} \times 0{,}15^2 = 0{,}0177 \ m^2$$

2. Η ταχύτητα ροής του νερού στον σωλήνα είναι

$$U = \frac{Q}{A} \quad ή$$

$$U = \frac{0{,}0125}{0{,}0177} = 0{,}70 \frac{m}{s}$$

3. Απώλειες λόγω τριβής

$$h = \zeta \frac{U^2}{2g} \ell$$

και

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \zeta \frac{U^2}{2g} \ell = \zeta \cdot \rho \, \frac{U^2}{2} \ell$$

δηλαδή

άρα

$$\Delta p = 0{,}21 \times 1000 \times \frac{0{,}707^2}{2} \times 800 = 41987{,}3 \frac{N}{m^2}$$

Απάντηση

$\Delta p = 41{,}98\ KP_{\alpha}$

Να υπολογίσετε την πραγματική παροχή τη πραγματική ταχύτητα εκροής και τη πραγματική διάμετρο της φλέβας νερού που εκρέει, από μία οπή διαμέτρου d = 40 mm που είναι στη πλευρά υδαποθήκης η οποία έχει, σταθερά, ύψος νερού 6 m.
Δίδονται συντελεστής μείωσης ταχύτητας C_v = 0,98 και συντελεστής συστολής C_c = 0,66.

Λύση

Δίνονται

d = 40 mm

$C_v = 0{,}98$

$C_c = 0{,}66$

h = 6 m

Ζητούνται

Q_π, U_π, d_π

1. Η θεωρητική ταχύτητα εκροής είναι κατά το θεώρημα Toricelli

$U_\theta = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ άρα

$$U_\theta = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 6} = 10{,}85 \frac{m}{s}$$

Επομένως η πραγματική ταχύτητα εκροής θα είναι

$$U_\pi = C_v \cdot U_\theta = 0{,}98 \times 10{,}85 = 10{,}6 \text{ m/s}$$

2. Η θεωρητική διατομή της δέσμης είναι η διατομή της οπής εκροής

$$A_\theta = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \times 0{,}04^2}{4} = 0{,}00127 m^2$$

άρα η πραγματική διατομή της δέσμης θα είναι

$$A_\pi = C_c \cdot A_\Theta = 0{,}66 \times 0{,}00127 = 0.00084 \text{ m}^2$$

Άρα η πραγματική παροχή θα είναι

$$Q_\pi = U_\pi \cdot A_\pi = 10{,}6 \times 0{,}00084 = 0{,}00888 \text{ m}^3/\text{s}$$

3. Η πραγματική διάμετρος της φλέβας θα προκύψει από τη πραγματική διατομή της είναι

$$A_\pi = \frac{\pi \cdot d_\pi^2}{4} \text{ ή}$$

$$d_\pi = \sqrt{\frac{4A_\pi}{\pi}} = \frac{\sqrt{4 \times 0.00084}}{\pi} = 0{,}0327\,m$$

Απάντηση

Q_π = 0,00888 m³/s

U_π = 10,6 m/s

d_π = 32,7 mm

Κωδικός βιβλίου: 0-24-0027
ISBN 978-960-06-2816-6

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 24 0027 3