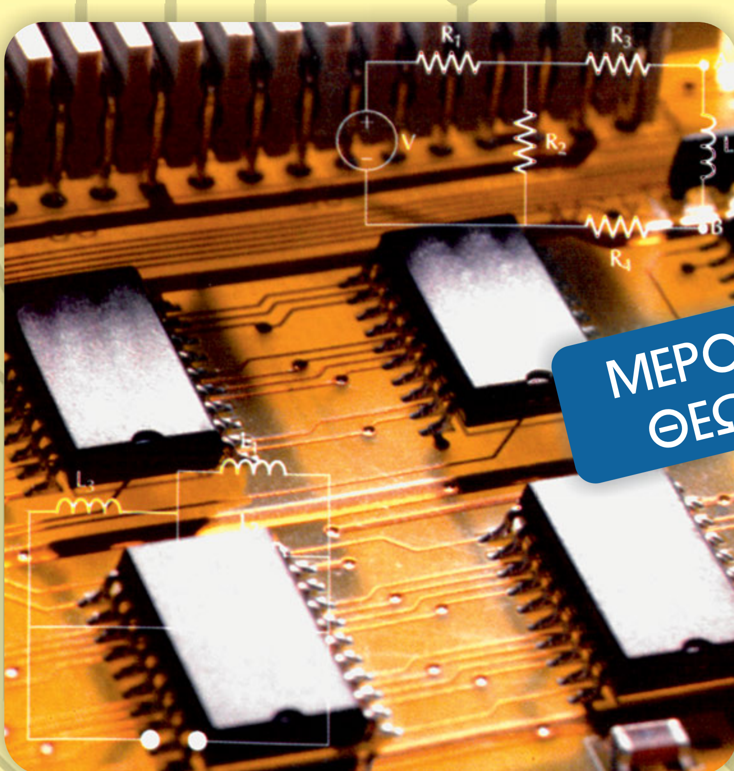
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΚΑΙ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ



ΜΕΡΟΣ Α΄
ΘΕΩΡΙΑ

Β΄ ΕΠΑ.Λ.

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑΣ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Χαράλαμπος Κανελλόπουλος **Γεώργιος Παληός**
Γεώργιος Χατζαράκης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΚΑΙ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Β΄ ΕΠΑ.Λ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑΣ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

- **Κανελλόπουλος Δ. Χαράλαμπος,** *Δρ. Φυσικός − Ραδιοηλεκτρολόγος (PH.D), Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.*
- **Παληός Κ. Γεώργιος,** *Δρ. Φυσικός − Ραδιοηλεκτρολόγος, Καθηγητής Δ/θμιας Εκπαίδευσης.*
- **Χατζαράκης Ε. Γεώργιος,** *Δρ. Ηλεκτρονικός − Ηλεκτρολόγος Μηχανικός Ε.Μ.Π., Καθηγητής ΑΣΕΤΕΜ/ΣΕΛΕΤΕ.*

ΟΜΑΔΑ ΚΡΙΣΗΣ

- Κούτσικος Ηλίας, *Δρ. Φυσικός, Καθηγητής Δ/θμιας Εκπαίδευσης.*
- Παντελιά Αθηνά, *Μηχανολόγος Ηλεκτρολόγος, Καθηγήτρια Δ/θμιας Εκπαίδευσης.*
- Ροζάκος Νικόλαος, *Μηχανολόγος Μηχανικός, Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.*

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

Καννελλόπουλος Δ. Χαράλαμπος, Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Νταραρά Μαρία, Φιλόλογος, Καθηγήτρια Δ/θμιας Εκπαίδευσης

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ & ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΣΗ ΒΙΒΛΙΟΥ

Σύνθεση

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας.

— ΠΡΟΛΟΓΟΣ —

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε σύμφωνα με την ύλη που καθόρισε το Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και θρησκευμάτων για τη διδασκαλία του μαθήματος "Κυκλώματα συνεχούς και εναλλασσόμενου ρεύματος" στην Α΄ τάξη του 1ου Κύκλου Ηλεκτρονικού Τομέα των ΤΕΕ, στα πλαίσια της Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης.

Η ύλη αυτή ξεκινά από τις πολύ βασικές έννοιες του ηλεκτρισμού (στατικός ηλεκτρισμός, δυναμικός ηλεκτρισμός) , περνά από το συνεχές ρεύμα, το μαγνητικό πεδίο, τους πυκνωτές, τα πηνία, το εναλλασσόμενο ρεύμα, τα μεταβατικά φαινόμενα και καταλήγει στις ηλεκτρικές μηχανές.

Βασικός στόχος του βιβλίου είναι να προσφέρει στο μαθητή τις απαραίτητες γνώσεις και τεχνικές των ηλεκτρικών κυκλωμάτων για την παρακολούθηση άλλων πιο ειδικευμένων μαθημάτων της ειδικότητάς του και βέβαια τις γνώσεις που θα του χρειαστούν κατόπιν στην άσκηση του επαγγέλματός του.

Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε στο να γίνουν τα διάφορα αντικείμενα όσο το δυνατόν πιο απλά και κατανοητά, χωρίς φυσικά να ζημιωθεί η ορθότητά τους. Έτσι, η περιγραφή και ερμηνεία των διαφόρων φαινομένων δεν αποτελεί αυτοσκοπό όπως στη διδασκαλία Φυσικής, αλλά το μέσο για να φθάσει ο μαθητής σύντομα και με τα απαραίτητα εφόδια στις πρακτικές εφαρμογές.

Εάν ληφθεί υπ' όψη ο χρόνος που γράφτηκε και εκδόθηκε το βιβλίο αυτό, θα πρέπει να υπάρχουν περιθώρια διόρθωσης τυπογραφικών κ.λ.π. λαθών, όπως και βελτιώσεων στην παρουσίαση της ύλης. Επομένως είναι ευπρόσδεκτη κάθε υπόδειξη προς την κατεύθυνση αυτή από καθηγητές και από μαθητές.

Οι συγγραφείς
Αθήνα, Δεκέμβριος 1999

— ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ —

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
ΒΑΣΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ–ΜΟΝΑΔΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
ΒΑΣΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΞΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
ΑΠΛΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΩΜΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΩΜΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο
ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ–ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο
ΠΥΚΝΩΤΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο
ΠΗΝΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο
ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ (A.C.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10ο
ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11ο
ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικα Ηλεκτρικα Μεγεθη - Μοναδες

Εισαγωγή

Η μελέτη της συμπεριφοράς των ηλεκτρικών κυκλωμάτων απαιτεί τη γνώση των βασικών εννοιών και φαινομένων του Ηλεκτρικού. Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται συνοπτικά, η αλληλεπίδραση των ηλεκτρικών φορτίων η ερμηνεία της φόρτισης και εκφόρτισης των σωμάτων, τα χαρακτηριστικά του ηλεκτρικού ρεύματος, η ενέργεια και η ισχύς του ηλεκτρικού ρεύματος.

*Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να **υπενθυμίσει** τα βασικά φυσικά μεγέθη του στατικού και του δυναμικού ηλεκτρισμού καθώς και τις μονάδες τους.*

1-1. Στοιχεία στατικού ηλεκτρισμού

1-1.1. Ηλεκτρικό φορτίο

Πρώτος ο Θαλής ο Μιλήσιος διαπίστωσε πως το κεχριμπάρι όταν τρίβεται σε μάλλινο ύφασμα αποκτά την ιδιότητα να έλκει τρίχες, μικρά τεμάχια δέρματος κ.λ.π. Τα φαινόμενα αυτά ονομάστηκαν *ηλεκτρικά φαινόμενα* από την αρχαία ονομασία του κεχριμπαριού «ήλεκτρο». Για να ερμηνευτούν τα ηλεκτρικά φαινόμενα, έγινε αποδεκτή η ύπαρξη ενός φυσικού μεγέθους που ονομάστηκε *ηλεκτρικό φορτίο.* Διαπιστώθηκε πως ο εβονίτης, όταν τρίβεται σε μάλλινο ύφασμα, αποκτά ηλεκτρικό φορτίο. Παρατηρήθηκε, πως όταν πλησιάσουν δύο ράβδοι εβονίτη που είναι ηλεκτρισμένες απωθούνται. Ομοίως το γυαλί ηλεκτρίζεται, όταν τρίβεται σε μεταξένιο ύφασμα. Όταν πλησιάσουν μια ηλεκτρισμένη ράβδος από εβονίτη και μια ηλεκτρισμένη ράβδος από γυαλί έλκονται. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις βγήκε το συμπέρασμα πως υπάρχουν δύο ειδών φορτία αυτό του εβονίτη όταν τρίβεται σε μάλλινο ύφασμα και αυτό του γυαλιού όταν τρίβεται σε μεταξένιο ύφασμα. Το πρώτο ονομάστηκε *αρνητικό* και το δεύτερο *θετικό.* Επίσης έγινε φανερό πως τα ομώνυμα φορτία απωθούνται, ενώ τα ετερώνυμα έλκονται. Η μονάδα του ηλεκτρικού φορτίου στο σύστημα S.I είναι το *Coulomb* του οποίου ο ορισμός θα δοθεί σε επόμενη παράγραφο.

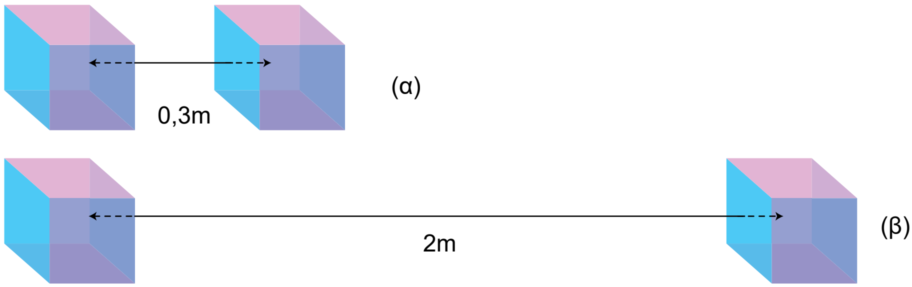
1-1.2. Νόμος του Coulomb

Όπως έχει αναφερθεί μεταξύ δύο φορτίων ασκούνται δυνάμεις ελκτικές ή απωστικές. Ο πρώτος που μελέτησε αυτές τις δυνάμεις ήταν ο Coulomb και διατύπωσε το γνωστό νόμο, που φέρει το όνομα του. Παρότι μεταξύ δύο ηλεκτρκών φορτίων υπάρχει πάντα αλληλεπίδραση, ο νόμος του Coulomb δεν ισχύει γενικά για κάθε φορτίο, αλλά για σημειακά φορτία ή για φορτισμένα σώματα που έχουν σχήμα σφαίρας.

❑ Σημειακό φορτίο ονομάζεται κάθε φορτίο που οι διαστάσεις του είναι ασήμαντες σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις που υπάρχουν στο πρόβλημα.

Για παράδειγμα δύο φορτισμένοι κύβοι που έχουν ακμή 0,1 m, όταν βρίσκονται σε απόσταση 0,3m θεωρούνται φορτισμένα σώματα, ενώ όταν απέχουν 2m θεωρούνται σημειακά φορτία

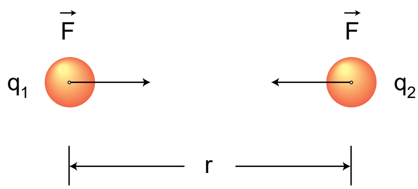
Σύμφωνα με το νόμο του Coulomb:



Σχήμα 1.1. *α) Οι κύβοι είναι ηλεκτρικά φορτισμένα σώματα.*
β) Οι φορτισμένοι κύβοι θεωρούνται ως σημειακά φορτία

❑ Οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ δύο σημειακών ηλεκτρικών φορτίων έχουν διεύθυνση την ευθεία που ορίζεται από τα φορτία, φορά ελκτική ή απωστική αντίστοιχα αν τα φορτία είναι ετερώνυμα ή ομώνυμα. Το μέτρο της δύναμης είναι ανάλογο του γινομένου των φορτίων και αντιστρόφως ανάλογο προς το τετράγωνο της απόστασής τους.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^2} \qquad (1.1)$$



Σχήμα 1.2. *Αλληλεπίδραση σημειακών φορτίων*

Ο συντελεστής $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ ονομάζεται **διηλεκτρική σταθερά του κενού** και η τιμή της εξαρτάται από το σύστημα μονάδων.

Ειδικά στο S.I έχει τη τιμή:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{N\cdot m^2} \qquad (1.2)$$

Ο συντελεστής **ε** ονομάζεται **διηλεκτρική σταθερά του μέσου** και εξαρτάται από τη φύση του υλικού μέσα στο οποίο βρίσκονται τα φορτία και είναι «καθαρός αριθμός».

Πολλές φορές αντί της σταθεράς ε_0 χρησιμοποιείται η ηλεκτρική σταθερά $K_{ηλ}$ και δίνεται από τη σχέση $K_{ηλ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$.

1-3.1. Δομή της ύλης

Τα υλικά σώματα που υπάρχουν στη φύση, χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τις *χημικές ουσίες* και τα *μίγματα.*

❑ Χημικές ουσίες ονομάζονται τα σώματα των οποίων η σύσταση είναι πάντοτε σταθερή και ανεξάρτητη από τον τρόπο παρασκευής τους.

Για παράδειγμα το νερό είναι χημική ουσία. Δεν υπάρχουν πολλά είδη (καθαρού) νερού. Όπως και να έχουν παραχθεί η σύσταση του είναι πάντοτε η ίδια. Αποτελείται, δηλαδή από υδρογόνο και οξυγόνο σε αναλογία μαζών 1:8.

❑ Μίγματα ονομάζονται τα σώματα των οποίων η σύσταση δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από τον τρόπο παρασκευής τους.

Για παράδειγμα το αλατόνερο είναι μίγμα. Αλατόνερο μπορεί να παρασκευασθεί αν σε 1 Kgr νερό προστεθούν 10gr ή 12gr ή 20gr αλάτι.

Οι χημικές ουσίες χωρίζονται στα *χημικά στοιχεία* και στις *χημικές ενώσεις.*

❑ Χημικά στοιχεία ονομάζονται οι χημικές ουσίες οι οποίες δεν μπορούν να διασπασθούν σε άλλες απλούστερες.

Για παράδειγμα το άζωτο είναι χημικό στοιχείο. Το άζωτο δεν μπορεί να διασπασθεί σε απλούστερες ουσίες.

❑ Χημικές ενώσεις ονομάζονται οι χημικές ουσίες που μπορούν να διασπασθούν σε άλλες απλούστερες.

Για παράδειγμα το διοξείδιο του άνθρακα μπορεί να διασπασθεί σε οξυγόνο και άνθρακα.

❑ Τα μικρότερα σωματίδια από τα οποία αποτελείται ένα χημικό στοιχείο ονομάζονται άτομα, δηλ. το μικρότερο σωματίδιο υδρογόνου που μπορεί να υπάρξει είναι το άτομο του υδρογόνου, ομοίως το μικρότερο σωματίδιο χρυσού που μπορεί να υπάρξει είναι το άτομο του χρυσού.

❑ Τα μικρότερα σωματίδια από τα οποία αποτελείται μια χημική ουσία και διατηρούν τις ιδιότητες της ουσίας ονομάζονται μόρια.

Τα άτομα αποτελούνται από τον *πυρήνα,* ο οποίος βρίσκεται στο κέντρο του ατόμου και τα *ηλεκτρόνια,* τα οποία περιστρέφονται γύρω από τον πυρήνα.

Ο πυρήνας αποτελείται από τα *πρωτόνια* και τα *νετρόνια.* Τα πρωτόνια έχουν περίπου την ίδια μάζα με τα νετρόνια (ελάχιστα μεγαλύτερη μάζα έχουν τα νετρόνια), ενώ τα ηλεκτρόνια έχουν μάζα περίπου 2000 φορές μικρότερη από τη μάζα του πρωτονίου.

Έχει διαπιστωθεί πως τα πρωτόνια φέρουν θετικό φορτίο, ενώ τα ηλεκτρόνια αρνητικό, επομένως μεταξύ του πυρήνα και των ηλεκτρονίων ασκούνται ελκτικές δυνάμεις Coulomb. Το φορτίο που φέρουν τα πρωτόνια είναι ίσο κατ' απόλυτη τιμή με το φορτίο που φέρουν τα ηλεκτρόνια ($1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C). Τα νετρόνια δεν φέρουν ηλεκτρικό φορτίο.

Σε κάθε άτομο ο αριθμός των πρωτονίων είναι ίσος με τον αριθμό των ηλεκτρονίων και έτσι τα άτομα είναι ηλεκτρικά ουδέτερα.

Τα ηλεκτρόνια κινούνται σε διαφορετικές περιοχές γύρω από τον πυρήνα, που ονομάζονται *στοιβάδες.* Ο μέγιστος αριθμός ηλεκτρονίων που υπάρχουν σε κάθε στοιβάδα είναι διαφορετικός, έτσι στην πρώτη στοιβάδα (πλησιέστερη προς τον πυρήνα) υπάρχουν το πολύ 2 ηλεκτρόνια, στη δεύτερη 8, στη τρίτη 18, στην τέταρτη 32 κ.λ.π. Γενικά ο μέγιστος αριθμός των ηλεκτρονίων, τα οποία μπορούν να υπάρχουν σε μια στοιβάδα δίνεται από τη σχέση $N = 2n^2$, όπου $n = 1, 2, 3...$ Η τελευταία όμως στοιβάδα δεν μπορεί να έχει περισσότερα από 8 ηλεκτρόνια, ενώ η προτελευταία περισσότερα από 18. Τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην τελευταία (εξωτερική) στοιβάδα ονομάζονται ηλεκτρόνια *σθένους.* Τα ηλεκτρόνια σθένους είναι αυτά που συμμετέχουν στο σχηματισμό χημικών ενώσεων και στα οποία οφείλονται οι χημικές ιδιότητες των στοιχείων.

Όταν ένα ηλεκτρόνιο σθένους αποσπασθεί από ένα άτομο προκύπτει ένα θετικό *ιόν.* Η ενέργεια που πρέπει να δοθεί σ' ένα ηλεκτρόνιο σθένους για να αποσπασθεί από το άτομο ονομάζεται ***ενέργεια ιονισμού.*** Η ενέργεια ιονισμού που απαιτείται για να αποσπασθεί από ένα θετικό ιόν δεύτερο ηλεκτρόνιο είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια ιονισμού που χρειάσθηκε για να αποσπασθεί το πρώτο ηλεκτρόνιο. Η απόσπαση και τρίτου ηλεκτρονίου είναι πολύ δυσκολότερη.

Εκτός από τα θετικά ιόντα υπάρχουν και τα αρνητικά ιόντα, που σχηματίζονται όταν ένα άτομο προσλάβει ένα επί πλέον ηλεκτρόνιο.

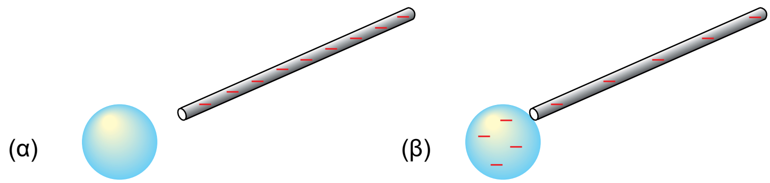
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την ερμηνεία των ηλεκτρικών φαινομένων παρουσιάζει η δομή των μετάλλων. Τα μέταλλα αποτελούνται από θετικά ιόντα που ισαπέχουν. Τα ηλεκτρόνια σθένους που έχουν διαφύγει από τα άτομα των μετάλλων κινούνται με τυχαίο τρόπο μέσα στη μάζα του μετάλλου και ονομάζονται *ελεύθερα ηλεκτρόνια.*

1-1.4. Φόρτιση ενός σώματος

Ένα σώμα που δεν φέρει φορτίο μπορεί να φορτιστεί με τρεις τρόπους.

α) Με *τριβή*. Όπως έχει αναφερθεί στην παράγραφο 1-1.1., όταν π.χ. ο εβονίτης τρίβεται σε μάλλινο ύφασμα αποκτά φορτίο.

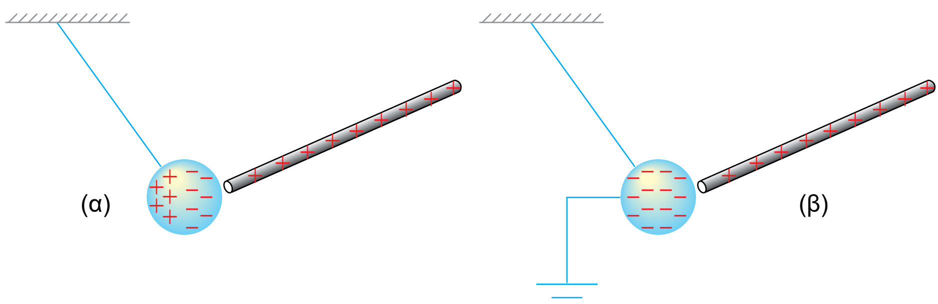
β) Με *επαφή* σε φορτισμένο σώμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1-3. Όταν η αφόρτιστη σφαίρα έλθει σε επαφή με τη φορτισμένη ράβδο αποκτά φορτίο ορόσημο με αυτό που φέρει η ράβδος.



Σχήμα 1.3. *Φόρτιση σώματος με επαφή*

γ) Με επαγωγή. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1-4. (α), στην κρεμασμένη αφόρτιστη σφαίρα επάγεται φορτίο όταν πλησιάσει τη φορτισμένη ράβδος. Το συνολικό φορτίο που φέρει η σφαίρα παραμένει μηδέν, αλλά έχουν διαχωριστεί τα θετικά από τα αρνητικά φορτία, δηλαδή τα ελεύθερα ηλεκτρόνια πλησιάζουν τη θετικά φορτισμένη ράβδο, έτσι στην αντιδιαμετρική περιοχή της σφαίρας εμφανίζεται περίσσεια θετικού φορτίου.

Επίσης, επειδή το αρνητικό φορτίο βρίσκεται πλησιέστερα στη ράβδο, η σφαίρα έλκεται από τη ράβδο. Αν η σφαίρα συνδεθεί με τη γη μέσω ενός σύρματος (γειωθεί), τότε ηλεκτρόνια έρχονται προς αυτήν από τη γη, με αποτέλεσμα να αποκτά αρνητικό φορτίο.



Σχήμα 1.4. *Φόρτιση σώματος με επαφή*

1-1.5. Το ηλεκτρικό πεδίο

Έχει παρατηρηθεί πως σε κάθε σημείο του χώρου στο οποίο βρίσκεται κάποιο φορτίο ή φορτία, αν τοποθετηθεί κάποιο άλλο φορτίο, τότε στο νέο φορτίο ασκείται δύναμη. Υπάρχουν περιοχές του χώρου που έχουν την ιδιότητα να ασκούν δύναμη σε κάθε φορτίο που φέρεται σε κάποιο σημείο τους, οι περιοχές **ονομάζονται ηλεκτρικά πεδία.** Γενικά:

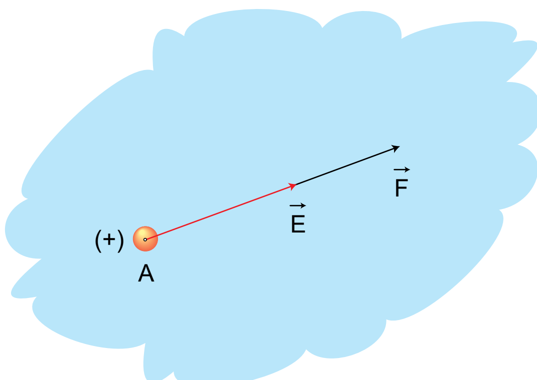
❑ Ηλεκτρικό πεδίο ονομάζεται η περιοχή του χώρου εντός της οποίας ασκείται δύναμη σε ηλεκτρικά φορτία, τα οποία βρίσκονται σε οποιοδήποτε σημείο της.

1-1.6. Ένταση ηλεκτρικού πεδίου

Για να περιγραφεί πόσο ισχυρό είναι ένα ηλεκτρικό πεδίο, χρησιμοποιείται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

❑ Ένταση ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο Α ονομάζεται το σταθερό πηλίκο της δύναμης $\vec{F}$, που ασκείται σε θετικό σημειακό φορτίο που φέρεται στο σημείο Α, προς το φορτίο.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{+q} \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.5. *Ένταση ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο Α του πεδίου*

Η μονάδα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σύστημα S.I είναι το $1\ \frac{N}{C}$. Ως μονάδα έντασης ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιείται και το $1\frac{V}{m}$ και είναι ίσο με το $1\ \frac{N}{C}$.

Όταν είναι γνωστή η ένταση σε ένα σημείο Α ηλεκτρικού πεδίου, τότε μπορούν να προσδιορισθούν τα χαρακτηριστικά της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στο φορτίο q, που τοποθετείται στο σημείο Α. Όπως προκύπτει από τον ορισμό της έντασης, η δύναμη $\vec{F}$ έχει την ίδια διεύθυνση με την ένταση $\vec{E}$. Φορά ομόρροπη προς το $\vec{E}$, αν το q είναι θετικό και αντίρροπη, αν το q είναι αρνητικό. Το μέτρο της $\vec{F}$ δίνεται από τη σχέση:

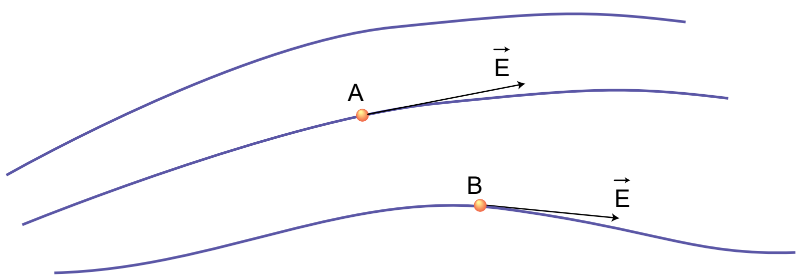
$$F = E \cdot q \tag{1.4}$$

1-1.7. Δυναμικές γραμμές ηλεκτρικού πεδίου

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου περιγράφει το πεδίο με μαθηματικό τρόπο. Ορισμένες όμως φορές είναι επιθυμητό να υπάρχει μια οπτική αναπαράσταση ενός ηλεκτρικού πεδίου. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση των δυναμικών γραμμών.

❑ Δυναμική γραμμή ηλεκτρικού πεδίου ονομάζεται η νοητή γραμμή που σε κάθε σημείο της η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι εφαπτομένη.

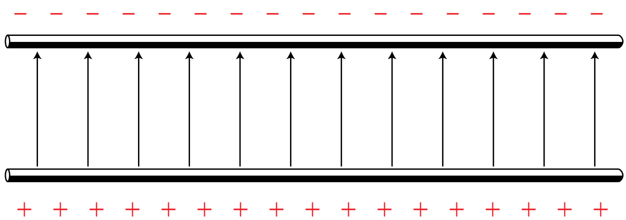
Όπως είναι φανερό από τον ορισμό, οι δυναμικές γραμμές δίνουν πληροφορίες για τη διεύθυνση και τη φορά της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και προσεγγιστικά για το μέτρο της. Στις περιοχές που η πυκνότητά τους είναι μεγάλη το ηλεκτρικό πεδίο είναι ισχυρό, ενώ στις περιοχές που η πυκνότητά τους είναι μικρή το πεδίο είναι ασθενές.



Σχήμα 1.6. *Δυναμικές γραμμές ηλεκτρικού πεδίου*

1-1.8. Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

❑ Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ονομάζεται το πεδίο στο οποίο η ένταση σε κάθε σημείο του είναι σταθερή (κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά).



Σχήμα 1.7. *Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο*

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται ανάμεσα σε δύο παράλληλες επίπεδες μεταλλικές πλάκες που φέρουν ίσο κατά μέτρο φορτίο αντίθετου προσήμου και η απόσταση τους είναι πολύ μικρή. Οι δυναμικές γραμμές ενός ομογενούς πεδίου είναι παράλληλες και ισαπέχουν.

1-1.9. Δυναμικό ηλεκτρικού πεδίου

Όταν ένα φορτίο τοποθετηθεί σε ένα σημείο Α ηλεκτρικού πεδίου αποκτά δυναμική ενέργεια.

❑ Δυναμικό ενός σημείου Α ηλεκτρικού πεδίου ονομάζεται το σταθερό πηλίκο της δυναμικής ενέργειας που αποκτά ένα θετικό σημειακό φορτίο που φέρεται στο σημείο Α διά του φορτίου.

$$V_A = \frac{E_A}{+q} \qquad (1.5)$$

Κάθε ηλεκτρικό φορτίο που βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο αποκτά δυναμική ενέργεια. Το μέγεθος της δυναμικής ενέργειας που αποκτά το φορτίο –που φέρεται σε ένα σημείο ηλεκτρικού πεδίου– καθορίζεται από το δυναμικό που υπάρχει στο συγκεκριμένο σημείο.

Η δυναμική ενέργεια σημειακού φορτίου, που βρίσκεται σε σημείο Α ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\Delta(A)} = V_A \cdot q \tag{1.6}$$

Το δυναμικό ορίζεται και ισοδύναμα ως:

❑ Δυναμικό σε σημείο Α ηλεκτρικού πεδίου ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του έργου που παράγεται ή καταναλίσκεται από τη δύναμη του ηλεκτρικού πεδίου για τη μετατόπιση θετικού σημειακού φορτίου από το σημείο Α στο άπειρο δια του φορτίου.

$$V_A = \frac{W_{A\to\infty}}{+q} \tag{1.7}$$

Ο ορισμός αυτός του δυναμικού βοηθά στον εύκολο υπολογισμό του έργου της δύναμης, που ασκεί το πεδίο στο φορτίο, το οποίο μετατοπίζεται από το σημείο αυτό στο άπειρο, δηλαδή σε θέση που η ένταση του πεδίου είναι ασήμαντη. Η τιμή του έργου δίνεται από τη σχέση:

$$W_{A\to\infty} = V_A \cdot q \tag{1.8}$$

Πρέπει να σημειωθεί πως το δυναμικό είναι θετικό ή αρνητικό. Θετικό δυναμικό σημαίνει δυναμικό μεγαλύτερο από το δυναμικό στο άπειρο, ενώ αρνητικό σημαίνει δυναμικό μικρότερο από το δυναμικό στο άπειρο. Το δυναμικό στο άπειρο θεωρείται μηδέν.

Ως μονάδα δυναμικού στο S.I χρησιμοποιείται το 1 Volt. $\left(1V = 1\frac{J}{C}\right)$

1-1.10. Διαφορά δυναμικού (τάση)

Όταν ένα φορτίο μετατοπίζεται από ένα σημείο Α σε άλλο σημείο Β ηλεκτρικού πεδίου μεταβάλλεται η δυναμική του ενέργεια.

❑ Ονομάζεται διαφορά δυναμικού δύο σημείων Α και Β ηλεκτρικού πεδίου, το σταθερό πηλίκο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας θετικού σημειακού φορτίου που μετατοπίζεται από το σημείο Α στο σημείο Β, δια του φορτίου αυτού.

$$V_{AB} = \frac{E_{\Delta(A)} - E_{\Delta(B)}}{+q} \tag{1.9}$$

Όταν είναι γνωστή η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Α και Β, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας φορτίου, που μετατοπίζεται από το Α στο Β υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta E_{\Delta} = V_{AB} \cdot q \qquad (1.10)$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Αν είναι θετική, σημαίνει πως η δυναμική ενέργεια του q στο Α είναι μεγαλύτερη από την δυναμική ενέργεια στο Β και τότε η κίνηση του q από το Α στο Β γίνεται αυθόρμητα. Αντίθετα αν η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι αρνητική, η δυναμική ενέργεια του q στο Α είναι μικρότερη από αυτή στο Β και επομένως πρέπει να δοθεί ενέργεια στο φορτίο, ώστε να κινηθεί από το Α στο Β.

Ισοδύναμος είναι και ο ορισμός:

❑ Διαφορά δυναμικού δύο σημείων Α και Β ηλεκτρικού πεδίου, ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του έργου που παράγεται ή καταναλίσκεται από τη δύναμη του πεδίου κατά τη μετατόπιση θετικού σημειακού ηλεκτρικού φορτίου από το Α στο Β, δια του φορτίου.

$$V_{AB} = \frac{W_{A \to B}}{+q} \qquad (1.11)$$

Ο ορισμός αυτός χρησιμεύει και στον υπολογισμό του έργου της δύναμης του πεδίου, όταν φορτίο q μετατοπίζεται από το Α στο Β, από τη σχέση:

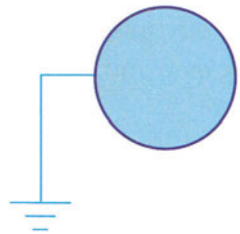
$$W_{A \to B} = V_{AB} \cdot q \qquad (1.12)$$

Αν η τιμή του έργου είναι θετική, τότε η δύναμη που ασκεί το πεδίο στο φορτίο παράγει έργο και η μετατόπιση του q από το Α στο Β, γίνεται αυθόρμητα, ενώ όταν το έργο είναι αρνητικό η δύναμη καταναλίσκει ενέργεια και επομένως, πρέπει να δοθεί ενέργεια στο φορτίο q, για να κινηθεί από το Α στο Β.

Η μονάδα διαφοράς δυναμικού στο S.I είναι το 1V.

1-1.11. Γείωση

Το δυναμικό της Γης θεωρείται συμβατικά μηδέν. Κάθε αγωγός που συνδέεται αγώγιμα με τη Γη, αποκτά το ίδιο δυναμικό με τη Γη δηλ. μηδέν. Η αγώγιμη σύνδεση ενός αγωγού με τη Γη ονομάζεται **γείωση** και ο αγωγός *γειωμένος*. Στο σχήμα 1.8. φαίνεται ένας γειωμένος σφαιρικός αγωγός.



Σχήμα 1.8. *Γειωμένος αγωγός*

1-2. Στοιχεία δυναμικού ηλεκτρισμού

1-2.1. Ηλεκτρικό ρεύμα

Όπως έχει αναφερθεί ένας μεταλλικός αγωγός αποτελείται από ιόντα που απέχουν σταθερή απόσταση το ένα από το άλλο και δημιουργούν το *πλέγμα* και τα ελεύθερα ηλεκτρόνια, που έχουν αποσπαστεί από τα άτομα του μετάλλου και κινούνται ατάκτως εντός του μετάλλου. Ομοίως στα διαλύματα ηλεκτρολυτών (οξέων, βάσεων, αλάτων) υπάρχουν θετικά και αρνητικά ιόντα που κινούνται ελεύθερα. Τα ιόντα αυτά, όπως και τα ελεύθερα ηλεκτρόνια, όταν δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο κινούνται ατάκτως. Επίσης και στα αέρια –κάτω από ορισμένες συνθήκες– ορισμένος αριθμός μορίων διασπάται σε θετικά ιόντα και ελεύθερα ηλεκτρόνια.

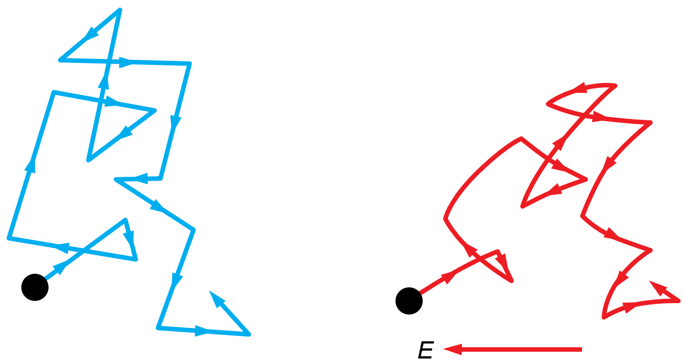
❑ Τα ηλεκτρικά φορτία που μπορούν να κινηθούν ονομάζονται ηλεκτρικοί φορείς ή απλά φορείς.

Όταν οι ηλεκτρικοί φορείς βρεθούν μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο κινούνται προς μια κατεύθυνση.

❑ Η κίνηση των ηλεκτρικών φορέων προς μια κατεύθυνση ονομάζεται ηλεκτρικό ρεύμα.

Η κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων στους μεταλλικούς αγωγούς όταν διαρρέονται από ρεύμα δεν είναι ευθύγραμμη.

Η μέση ταχύτητά τους εξαρτάται από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και τη φύση του υλικού. Γενικά όμως είναι πολύ μικρή και η τάξη μεγέθους της είναι μερικά mm/s.



Σχήμα 1.9. Κίνηση ελευθέρων ηλεκτρονίων σε αγωγό. α) χωρίς ηλεκτρικό πεδίο, β) με ηλεκτρικό πεδίο

❑ Αν η κίνηση των ηλεκτρικών φορέων έχει σταθερή φορά τότε το ρεύμα ονομάζεται συνεχές, ενώ αν η φορά μεταβάλλεται με το χρόνο το ρεύμα ονομάζεται εναλλασσόμενο

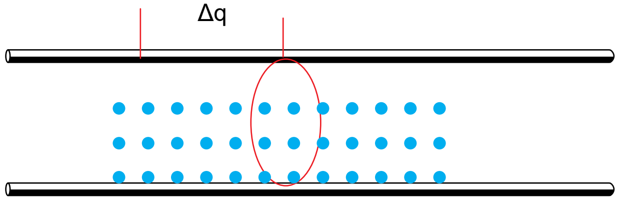
1-2.2. Ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος

Η ροή των ηλεκτρικών φορέων σε ένα αγωγό άλλοτε είναι έντονη άλλοτε λιγότερο έντονη ή αργή. Το φυσικό μέγεθος που εκφράζει το πόσο έντονη είναι η ροή των ηλεκτρικών φορέων σ’ ένα αγωγό είναι η *ένταση ρεύματος.* Στην περίπτωση που αυτή η ροή είναι σταθερή.

❑ Η ένταση του ρεύματος ορίζεται ως το σταθερό πηλίκο του φορτίου q που περνάει από μια διατομή του αγωγού σε χρόνο t προς τον χρόνο t.

$$I = \frac{q}{t} \qquad (1.13)$$

Επισημαίνεται πως η ένταση του ρεύματος είναι μονόμετρο μέγεθος (βαθμωτό) δηλ. έχει μόνο μέτρο και όχι διεύθυνση και φορά. Η φορά του ρεύματος



Σχήμα 1.10. Ορισμός της έντασης ρεύματος

που χρησιμοποιείται στα κυκλώματα συμπίπτει με τη φορά κίνησης των ηλεκτρικών φορέων όταν αυτοί φέρουν θετικό φορτίο. Όταν οι ηλεκτρικοί φορείς φέρουν αρνητικό φορτίο τότε η φορά του ρεύματος είναι αντίθετη από την κίνηση των φορέων και ονομάζεται *συμβατική φορά.*

Η μονάδα έντασης ρεύματος στο S.I είναι το 1 Ampere (1A). Το 1A είναι θεμελιώδες μέγεθος.

Όπως ήδη έχει επισημανθεί το Coulomb δεν ορίζεται από τον ομώνυμο νόμο αλλά από το Ampere ως εξής:

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

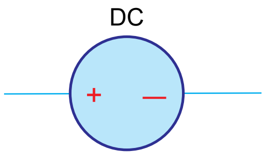
1-2.3. Ηλεκτρικές πηγές

Για να υπάρχει σ' έναν αγωγό ηλεκτρικό ρεύμα πρέπει στα άκρα του αγωγού να υπάρχει διαφορά δυναμικού. Οι διατάξεις που χρησιμοποιούνται για να δημιουργούνται διαφορές δυναμικού ονομάζονται ηλεκτρικές πηγές.

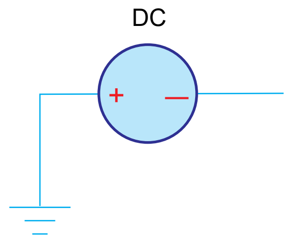
Όταν θέλουμε να έχουμε συνεχές ρεύμα σταθερής έντασης χρησιμοποιούμε πηγές που δίνουν σταθερή τάση δηλ. τάση σταθερού μέτρου και σταθερής πολικότητας. Οι πηγές αυτές ονομάζονται *πηγές συνεχούς ρεύματος* ή *συνεχούς τάσης.* Οι ακροδέκτες μιας πηγής ονομάζονται *πόλοι.* Στις πηγές συνεχούς ρεύματος οι πόλοι διακρίνονται σε *θετικό* και *αρνητικό* πόλο.

Ο θετικός πόλος έχει πάντοτε μεγαλύτερο δυναμικό από τον αρνητικό πόλο αλλά παρ' ότι φέρει το όνομα θετικός μπορεί σε κάποιο κύκλωμα το δυναμικό του να είναι μηδέν ή και αρνητικό. Ο θετικός πόλος της πηγής στο σχήμα 1-12 έχει δυναμικό μηδέν.

Το ηλεκτρικό ρεύμα μεταφέρει ενέργεια, που ονομάζεται **ηλεκτρική ενέργεια.**



Σχήμα 1.11. *Ηλεκτρική πηγή συνεχούς ρεύματος*



Σχήμα 1.12. *Ο θετικός πόλος έχει δυναμικό μηδέν*

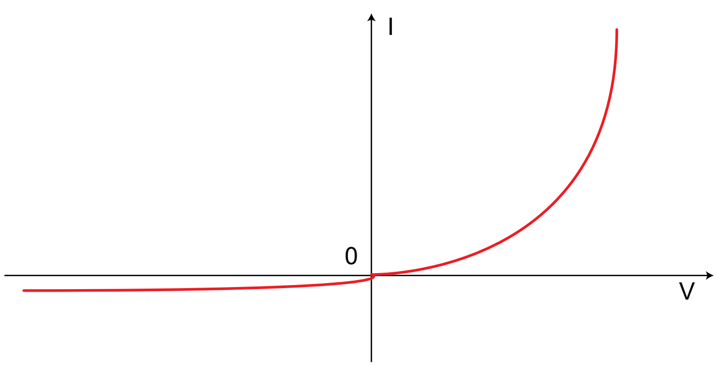
❑ Οι ηλεκτρικές πηγές είναι διατάξεις, οι οποίες μετατρέπουν ενέργεια κάποιας μορφής σε ηλεκτρική ενέργεια.

Για παράδειγμα, οι συσσωρευτές μετατρέπουν χημική ενέργεια σε ηλεκτρική. Τα ηλιακά ή φωτοβολταϊκά στοιχεία μετατρέπουν φωτεινή ενέργεια σε ηλεκτρική. Τα θερμοζεύγη μετατρέπουν θερμική ενέργεια σε ηλεκτρική.

1-2.4. Ηλεκτρικό δίπολο

❑ Κάθε διάταξη, που έχει δύο ακροδέκτες ονομάζεται ηλεκτρικό δίπολο.

Η συμπεριφορά ενός ηλεκτρικού δίπολου στο ηλεκτρικό ρεύμα περιγράφεται με ένα διάγραμμα της έντασης του ρεύματος που το διαρρέει, σε συνάρτηση με την τάση που υπάρχει στους ακροδέκτες του. Το διάγραμμα αυτό ονομάζεται χαρακτηριστική του διπόλου. Στο σχήμα 1-13 φαίνεται η χαρακτηριστική μιας κρυσταλλοδιόδου.



Σχήμα 1.13. *Χαρακτηριστική καμπύλη κρυσταλλοδιόδου*

1-2.5. Αντίσταση διπόλου

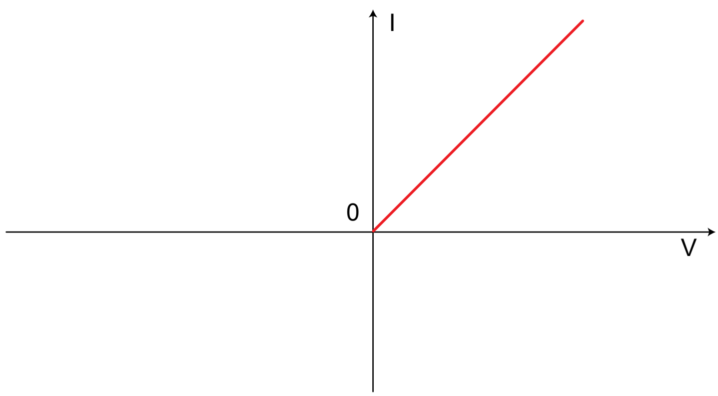
❑ Αντίσταση ενός δίπολου ονομάζεται το πηλίκο της τάσης, που υπάρχει στους ακροδέκτες του δίπολου προς την ένταση του ρεύματος, που διαρρέει το δίπολο.

$$R = \frac{V}{I} \qquad (1.14)$$

Γενικά η αντίσταση ενός δίπολου είναι συνάρτηση της τάσης του. Στην περίπτωση αυτή η χαρακτηριστική είναι μια καμπύλη, ενώ όταν η αντίσταση είναι ανεξάρτητη από την τάση, η χαρακτηριστική είναι ευθεία γραμμή.

❑ Τα δίπολα που έχουν αντίσταση ανεξάρτητη από τη τάση τους ονομάζονται αντιστάτες.

Στο σχήμα 1-14 φαίνεται η χαρακτηριστική ενός αντιστάτη.



Σχήμα 1.14 . *Χαρακτηριστική ενός αντιστάτη*

Η μονάδα αντίστασης στο S.I είναι το Ωμ (Ω). Το Ωμ ορίζεται από τη σχέση:

$$1\Omega = 1\ \frac{V}{A}$$

1-2.6. Αγωγιμότητα

Η αντίσταση ενός διπόλου εκφράζει, το πόσο δύσκολα κινούνται οι ηλεκτρικοί φορείς μέσα στο δίπολο. Αντίθετα η ευκολία με την οποία κινούνται μέσα στο δίπολο οι ηλεκτρικοί φορείς, εκφράζεται με την *αγωγιμότητα.*

❑ Η αγωγιμότητα ενός δίπολου είναι ίση με το αντίστροφο της αντίστασής του.

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{V} \tag{1.15}$$

Η μονάδα αγωγιμότητας στο S.I είναι το Ω^{-1}.

1-2.7. Ειδική αντίσταση

Η αντίσταση ενός αντιστάτη εξαρτάται από τις γεωμετρικές του διαστάσεις και το είδος του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένος, αν δηλαδή είναι από σίδηρο, χαλκό ή οποιοδήποτε άλλο υλικό. Όταν ο αντιστάτης έχει σταθερή διατομή S, και μήκος ℓ τότε η αντίστασή του δίνεται από τη σχέση:

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \tag{1.16}$$

το μέγεθος ρ ονομάζεται *ειδική αντίσταση.* Η ειδική αντίσταση είναι χαρακτηριστικό του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο αντιστάτης.

Η μονάδα ειδικής αντίστασης στο S.I είναι το 1Ωm.

1-2.8. Ειδική αγωγιμότητα

Όπως η αγωγιμότητα G ορίζεται ως το αντίστροφο της αντίστασης, έτσι και η ειδική αγωγιμότητα g, ορίζεται ως το αντίστροφο της ειδικής αντίστασης.

$$g = \frac{1}{\rho} \tag{1.17}$$

Η μονάδα της ειδικής αγωγιμότητας στο S.I είναι το $1\Omega^{-1}m^{-1}$.

1-2.9. Θερμικός συντελεστής αντίστασης

Η ειδική αντίσταση ρ εξαρτάται από τη θερμοκρασία και δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_\theta = \rho_0\,(1 + \alpha\theta) \tag{1.18}$$

όπου $ρ_θ$ η ειδική αντίσταση στους θ βαθμούς Κελσίου, $ρ_0$ η ειδική αντίσταση στους μηδέν βαθμούς κελσίου, α ένας συντελεστής που ονομάζεται θερμικός συντελεστής αντιστάσεως και εξαρτάται από τη φύση του υλικού.

Αν οι διαστάσεις του αγωγού μεταβάλλονται ελάχιστα με την θερμοκρασία, τότε η μεταβολή της αντίστασης του αγωγού ως συνάρτηση της θερμοκρασίας, δίνεται από τη σχέση:

$$R_θ = R_0\,(1 + αθ) \qquad (1.19)$$

όπου $R_θ$ η αντίσταση του αγωγού στους θ βαθμούς Κελσίου και R_0 η αντίσταση του αγωγού στους μηδέν βαθμούς Κελσίου.

Ο θερμικός συντελεστής αντιστάσεως μπορεί να είναι θετικός αριθμός, αρνητικός ή μηδέν. Όταν είναι θετικός η αντίσταση του αγωγού αυξάνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία όπως στα μέταλλα.

Όταν είναι αρνητικός η αντίσταση του μειώνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία όπως στον άνθρακα, τους ηλεκτρολύτες και τους ημιαγωγούς.

Όταν είναι μηδέν η αντίσταση παραμένει σταθερή σε κάθε μεταβολή της θερμοκρασίας, όπως σε ειδικά κράματα (κονσταντίνη, μαγγανίνη). Η μονάδα μέτρησης του θερμικού συντελεστού αντιστάσεως είναι το $1grad^{-1}$.

1-2.10. Αγωγοί

Τα υλικά που επιτρέπουν την εύκολη κίνηση των ηλεκτρικών φορέων, όταν διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα ονομάζονται *καλοί αγωγοί του ηλεκτρισμού* ή απλώς *αγωγοί.*

Οι αγωγοί αυτοί παρουσιάζουν πολύ μικρή ειδική αντίσταση. Αγωγοί είναι κυρίως τα μέταλλα.

1-2.11. Μονωτές

Σε αντίθεση με τους αγωγούς, οι *μονωτές* είναι υλικά στα οποία η κίνηση των ηλεκτρικών φορέων είναι πολύ δυσχερής. Οι μονωτές παρουσιάζουν πολύ μεγάλη ειδική αντίσταση, γιατί δεν υπάρχουν ελεύθεροι φορείς στη μάζα τους, αφού το σύνολο σχεδόν των ηλεκτρονίων των ατόμων τους είναι δέσμια.

Παρόλα αυτά ένας ελάχιστος αριθμός ηλεκτρονίων μπορεί να αποσπαστεί και σε αυτά οφείλεται η ειδική αγωγιμότητα των μονωτών. Συνήθεις μονωτές είναι τα πλαστικά, το ξύλο, το χαρτί κ.α.

1-2.12. Ημιαγωγοί

Οι ημιαγωγοί είναι υλικά, που παρουσιάζουν σχετικά μεγάλες τιμές ειδικής αντίστασης, η οποία μειώνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία. Οι ημιαγωγοί είναι τετρασθενή στοιχεία.

Οι περισσότερο γνωστοί ημιαγωγοί είναι το Γερμάνιο (Ge) και το Πυρίτιο (Si). Η αγωγιμότητα των ημιαγωγών αυξάνεται σημαντικά όταν σε αυτούς προστεθούν προσμίξεις τρισθενών ή πεντασθενών στοιχείων. Τα περισσότερα ηλεκτρονικά εξαρτήματα είναι φτιαγμένα από ημιαγωγούς προσμίξεων.

1-2.13. Ενέργεια και ισχύς του ηλεκτρικού ρεύματος

Η μεγάλη χρησιμότητα του ηλεκτρικού ρεύματος οφείλεται στο ότι με αυτό είναι πολύ εύκολη η μεταφορά ενέργειας από τον τόπο παραγωγής της στην κατανάλωση.

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται ή καταναλίσκεται η ενέργεια εκφράζεται από την *Ισχύ.*

Ειδικότερα:

❑ όταν η ισχύς είναι σταθερή ορίζεται ως το πηλίκο της ενέργειας W, που παράγεται ή καταναλώνεται σε χρόνο t, προς τον χρόνο t.

$$P = \frac{W}{t} \qquad (1.20)$$

Μονάδα ισχύος στο S.I είναι το 1Watt, και ορίζεται ως: $1W = 1\frac{J}{s}$.

Στην πράξη ως μονάδα καταναλισκόμενης ηλεκτρικής ενέργειας χρησιμοποιείται η 1Wh, που είναι ίση με την ενέργεια, που καταναλίσκεται ή παράγεται με ισχύ 1W σε μια ώρα.

1-2.14. Συντελεστής απόδοσης

Ο άνθρωπος για να βελτιώσει τις συνθήκες διαβίωσης του χρησιμοποιεί διατάξεις, που παρέχουν ενέργεια σε χρήσιμη μορφή. Η ενέργεια που παρέχουν αυτές οι διατάξεις ονομάζεται *ωφέλιμη ενέργεια,* και η αντίστοιχη ισχύς ονομάζεται *ωφέλιμη ισχύς.*

Κάθε διάταξη για να λειτουργήσει χρειάζεται ενέργεια, η ενέργεια αυτή ονομάζεται *καταναλισκόμενη ενέργεια,* και η αντίστοιχη ισχύς *καταναλισκόμενη ισχύς.*

❑ Συντελεστής απόδοσης μιας διάταξης, ονομάζεται το πηλίκο της ωφέλιμης ισχύος, που παρέχει η διάταξη, προς την ισχύ που καταναλίσκει για να λειτουργήσει.

$$\alpha = \frac{P_{\omega\varphi}}{P_{\kappa\alpha\tau}} \qquad (1.21)$$

Ο συντελεστής απόδοσης είναι καθαρός αριθμός και εκφράζει τι μέρος της ισχύος που χρησιμοποιεί μια μηχανή για να λειτουργήσει, μετατρέπεται σε ωφέλιμη ισχύ. Ο συντελεστής απόδοσης, όπως άμεσα προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, είναι μικρότερος της μονάδας.

Συχνά αντί των όρων καταναλισκόμενη ισχύς και ωφέλιμη ισχύς, χρησιμοποιούνται αντίστοιχα οι όροι *ισχύς εισόδου* (P_i) και *ισχύς εξόδου* (P_0), οπότε ο συντελεστής απόδοσης γράφεται:

$$\alpha = \frac{P_o}{P_i} \qquad (1.22)$$

1-3. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Δύο σφαιρίδια φέρουν το ίδιο φορτίο q και βρίσκονται σε απόσταση r = 2m. Τα σφαιρίδια απωθούνται με δύναμη F=360N. Να υπολογισθεί το φορτίο q, που φέρει κάθε σφαιρίδιο.

Δίνεται $K_{\eta\lambda} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}$

Λύση

$$F = K_{\eta\lambda}\frac{q^2}{r^2} \Rightarrow Fr^2 = K_{\eta\lambda} \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{F}{K_{\eta\lambda}} \cdot r^2 \Rightarrow q = \sqrt{\frac{F}{K_{\eta\lambda}}} \cdot r \Rightarrow$$

$$q = \sqrt{\frac{360N}{9 \cdot 10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2}}} \cdot 2m = \sqrt{40 \cdot 10^{-9}} \cdot 2C = 4 \cdot 10^{-4} C = 400\mu C.$$

Εφαρμογή 2η

Σε σημείο Α η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έχει μέτρο, $E = 3\ \frac{V}{m}$. Στο Α φέρεται φορτίο q= - 0,3mC.

α) Να υπολογισθεί το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στο q.

β) Η δύναμη $\vec{F}$ και η ένταση του πεδίου $\vec{E}$ έχουν την ίδια ή αντίθετη φορά;

Λύση

α) $F = E \cdot q \Rightarrow F = 3\ \frac{V}{m} \cdot 0{,}3\ m\,C = 0{,}9 \cdot 10^{-3}$ N.

β) Η δύναμη $\vec{F}$ και η ένταση του πεδίου $\vec{E}$ έχουν αντίθετη φορά γιατί το φορτίο q είναι αρνητικό.

Εφαρμογή 3η

Το δυναμικό ενός ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Α είναι V_A = -3V. Πόση είναι η δυναμική ενέργεια ηλεκτρικού φορτίου q = 2μC, που βρίσκεται στο Α;

Λύση

$$E_{\Delta(A)} = V_A \cdot q \Rightarrow E_{\Delta(A)} = (-3)V \cdot 2\ \mu C = -\ 5\ \mu J.$$

Η αρνητική τιμή που έχει η δυναμική ενέργεια σημαίνει, πως στο σημείο Α το φορτίο q έχει δυναμική ενέργεια κατά 6μJ μικρότερη από αυτή, την οποία θα είχε αν βρισκόταν στο άπειρο.

Εφαρμογή 4η

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Α και Β ηλεκτρικού πεδίου είναι V_{AB}=15V. Ένα φορτίο q= - 400 μC μετατοπίζεται από το Α στο Β.
α) Ποιο είναι το έργο της δύναμης του πεδίου;

β) Για να πραγματοποιηθεί η μετατόπιση του q απαιτείται να του προσφερθεί ενέργεια; Αν ναι πόση;

Λύση

α) $W_{A\to B} = V_{AB} \cdot q \Rightarrow W_{A\to B} = 15V \cdot (-400)\ \mu C = -6000\ \mu J = -6mJ$

β) Αφού το έργο της δύναμης του πεδίου είναι αρνητικό, πρέπει στο φορτίο q να προσφερθεί ενέργεια 6mj.

Εφαρμογή 5η

Αγωγός διαρρέεται από ρεύμα 3,2Α. Πόσα ηλεκτρόνια περνάνε από μία διατομή του αγωγού σε χρόνο 5min;

Δίνεται το φορτίο του ηλεκτρονίου $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Λύση

Αρχικά πρέπει να μετατραπεί ο χρόνος t=5min σε seconds.

$$t = 5\ \text{min} = 5\ \text{min} \cdot 60\ \frac{s}{\text{min}} = 300\ s.$$

Η σχέση $I = \frac{q}{t}$ λύνεται ως προς q. $q = I \cdot t$ (1)

Αν το φορτίο q αποτελείται από n ηλεκτρόνια, τότε:

$$q = n\,|e| \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται:

$$n|e| = I \cdot t \Rightarrow n = \frac{I \cdot t}{|e|} \Rightarrow n = \frac{3{,}2A \cdot 300s}{1{,}6 \cdot 10^{-19} C} = 6 \cdot 10^{21} \text{ ηλεκτρόνια.}$$

Εφαρμογή 6η

Ηλεκτρικό δίπολο διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I_1 = 2mA$, όταν στους ακροδέκτες του υπάρχει τάση $V_1 = 30V$. Ποια είναι η αντίσταση του διπόλου;

Όταν η τάση του δίπολου διπλασιαστεί, η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει γίνεται I_2 = 12mA. Είναι το δίπολο αντιστάτης;

Λύση

Η αντίσταση του διπόλου, όταν η τάση είναι V_1 = 30V είναι:

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} \Rightarrow R_1 = \frac{30V}{2mA} = 15K\Omega.$$

Για να διαπιστωθεί αν το δίπολο είναι αντιστάτης πρέπει να υπολογισθεί η αντίσταση R_2, όταν η τάση του δίπολου διπλασιαστεί. Αν η τιμή της R_2 είναι ίση με την τιμή της R_1=15 ΚΩ, τότε το δίπολο είναι αντιστάτης διαφορετικά δεν είναι.

Η τάση V_2 έχει τιμή $V_2 = 2V_1 = 2 \cdot 30$ V = 60 V.

Η αντίσταση R_2 είναι:

$R_2 = \frac{V_2}{I_1} \Rightarrow R_2 = \frac{60V}{12mA} = 5K\Omega$, άρα το δίπολο δεν είναι αντιστάτης.

Εφαρμογή 7η

Χάλκινο σύρμα έχει σταθερή διατομή και μήκος l=20m. Στα άκρα του σύρματος υπάρχει τάση V=0,34V, οπότε διαρρέεται από ρεύμα έντασης I = 1 A. Πόσα mm^2 είναι η διατομή του σύρματος; Δίνεται η ειδική αντίσταση του χαλκού $\rho_{Cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$.

Λύση

Αρχικά υπολογίζεται η αντίσταση R του σύρματος.

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = \frac{0{,}34\,V}{1\,A} = 0{,}34\Omega.$$

Η αντίσταση R σε συνάρτηση με τα γεωμετρικά στοιχεία του σύρματος δίνεται από τη σχέση:

$$R = \rho\frac{\ell}{S} \Rightarrow RS = \rho\ell \Rightarrow S = \frac{\rho\ell}{R} \Rightarrow S = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-8}\Omega m \cdot 20m}{0{,}34\Omega} = 10^{-6}m^2 = 10^{-6} \cdot 10^{6}mm^2 = 1mm^2.$$

Εφαρμογή 8η

Μολύβδινο σύρμα έχει αντίσταση R_1 = 100Ω, σε θερμοκρασία θ = 10°C να υπολογισθεί η αντίστασή του στους $θ_2$=100 °C. Ο θερμικός συντελεστής αντίστασης του μόλυβδου είναι, α = 0,004 $grad^{-1}$.

Λύση

Η αντίσταση του σύρματος στους $θ_2$ = 100°C δίνεται από τη σχέση:

$$R_2 = R_0(1 + αθ_2) \qquad (1)$$

όπου R_0 η τιμή της αντίστασης στους 0°C.

Η τιμή της αντίστασης στους $θ_1$ = 10°C είναι αντίστοιχα:

$$R_1 = R_0\,(1 + αθ_2) \qquad (2)$$

Με διαίρεση της (1) με τη (2) προκύπτει η σχέση:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_0(1+αθ_2)}{R_0(1+αθ_1)} = \frac{1+αθ_2}{1+αθ_1} \Rightarrow R_2 = R_1\frac{1+αθ_2}{1+αθ_1} \Rightarrow$$

$$R_2 = 100Ω\frac{1+0{,}004\cdot 100°C}{1+0{,}004\cdot 10°C} = 100Ω\cdot 1{,}346 = 134{,}6Ω.$$

Εφαρμογή 9η

Θερμοσίφωνας με στοιχεία (220V, 4KW) λειτουργεί επί τρεις ώρες. Ποιο είναι το κόστος της λειτουργίας του, αν η τιμή της KWh είναι 30 δρχ.;

Λύση

Η ενέργεια που καταναλίσκει ο θερμοσίφωνας είναι:

$$W = P \cdot t \Rightarrow W = 4KW \cdot 3h = 15KWh.$$

Το κόστος της ενέργειας είναι 15 KWh × 30 $\frac{δρχ.}{KWh}$ = 450 δρχ.

Εφαρμογή 10η

Η ισχύς εξόδου συσκευής είναι P_o=1,6KW. Η συσκευή έχει συντελεστή απόδοσης α=0,8. Αν η συσκευή λειτουργεί επί χρόνο t=10h, πόση ενέργεια καταναλίσκει;

Λύση

Αρχικά εκφράζονται οι τιμές των δεδομένων σε μονάδες του συστήματος S.I.

$$P_0 = 1,6 \text{ KW} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ W}$$

$$t = 10 \times 3600 \text{ s} = 36000 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Η ισχύς εισόδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{P_0}{P_i} \Rightarrow P_i = \frac{P_0}{\alpha} \Rightarrow P_i = \frac{1,6 \cdot 10^3 \text{ W}}{0,8} = 2 \cdot 10^3 \text{ W}$$

Η ενέργεια εισόδου υπολογίζεται από τη σχέση ορισμού της ισχύος.

$$P_i = \frac{W_i}{t} \Rightarrow W_i = P_i \cdot t \Rightarrow W_i = 2 \cdot 10^3 \text{ W} 3,6 \cdot 10^4 \text{s} = 7,2 \cdot 10^7 \text{ J} = 72 \text{ MJ.}$$

1-4. Προβλήματα προς λύση

1° Στα άκρα Α και Β ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ μήκους r=0,9m, βρίσκονται τα σημειακά φορτία Q_1 = +4μC και Q_2 = + 8μC αντίστοιχα. Στο σημείο Ν του ΑΒ, που απέχει d=0,6m από το Α, τοποθετείται φορτίο q= -1μC. Να βρεθεί η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο q. *(0,7N)*

2° Δύο σημειακά φορτία Q_1 = +16μC και Q_2 = +4μC βρίσκονται αντίστοιχα στα σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν κατά r=0,6m.Σε ποιο σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ πρέπει να τοποθετηθεί φορτίο q = + 1μC, ώστε να ισορροπεί; *(0,45m)*

3° Δύο ίσα σημειακά φορτία Q_1=Q_2=0,1μC απέχουν κατά r. Τα φορτία αλληλεπιδρούν με δυνάμεις που έχουν μέτρο F = 10^{-3} N. Να υπολογισθεί η μεταξύ τους απόσταση. Δίνεται $K_{ηλ}$ = 9 · 10^9 Nm^2/C^2. *(0,3m)*

4° Σημειακό φορτίο q βρίσκεται σε σημείο Α ηλεκτρικού πεδίου, που έχει δυναμικό V_A = - 3V. Όταν το q μεταφέρεται από το Α στο άπειρο, από την δύναμη του πεδίου παράγεται έργο $W = 3 \cdot 10^{-6}$ J. Να υπολογισθεί το φορτίο q. *(-1μC)*

5° Σημείο Α ηλεκτρικού πεδίου έχει δυναμικό V_A=-10V. Σημειακό φορτίο q = +2μC βρίσκεται στο Α και μεταφέρεται στο σημείο Β του πεδίου. Αν η τάση μεταξύ των σημείων Α και Β είναι V_{AB}=-30V, να υπολογισθούν:

α) Η δυναμική ενέργεια του q, όταν βρίσκεται στο Α.

β) Η δυναμική ενέργεια του q στο Β.

γ) Το έργο της δύναμης του πεδίου. *(-20μJ,40μJ, -60μJ)*

6° Σημείο Α ηλεκτρικού πεδίου έχει δυναμικό V_A=20V. Σε άλλο σημείο Β του πεδίου βρίσκεται φορτίο q = - 100μC. Αν το q έχει δυναμική ενέργεια $E_{\Delta(B)} = 10^{-3}$ J, να υπολογισθεί η τάση V_{AB}. *(30V)*

7° Στο σχήμα 1-15 φαίνεται η χαρακτηριστική ενός διπόλου.

α) Να προσδιορισθεί η αντίσταση του διπόλου, όταν η τάση στους ακροδέκτες του παίρνει τις τιμές: 1V, 2V, 3V, 4V, 5V, 6V, 7V, 8V, 9V, 10V.

β) Να κατασκευασθεί το διάγραμμα R=f(V).

8° Χάλκινο σύρμα έχει διατομή 0,1 mm^2 και αντίσταση 0,34Ω. Ποιο είναι το μήκος του σύρματος; Δίνεται: $\rho_{Cu} = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ωm. *(2m)*

9° Για τη μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας μεταξύ δύο θέσεων, που απέχουν κατά l=2000m, χρησιμοποιείται χάλκινος αγωγός. Αν η αντίσταση του αγωγού είναι R=340Ω, να υπολογισθεί η μάζα του.
Δίνονται: $\rho_{Cu} = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ωm, πυκνότητα χαλκού $d_{Cu} = 8,9 \cdot 10^3 \dfrac{\text{Kgr}}{\text{m}^3}$.
(1,78 Kgr)

10° Σύρμα νικελίου έχει αντίσταση R=13,8Ω και μήκος l = 10m. Αν η διατομή του σύρματος είναι 0,05mm^2, να υπολογισθεί η ειδική αγωγιμότητα του νικελίου. *($14,49 \cdot 10^6\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$)*

11° Αγωγός όταν βρίσκεται στους 0°C έχει αντίσταση R_0=10Ω, ενώ στους 25°C έχει αντίσταση R_{25} = 11Ω. Να προσδιορισθεί ο θερμικός συντελεστής αντίστασης του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο αγωγός. *(0,004grad^{-1})*

12° Χάλκινος αγωγός στους 0°C έχει αντίσταση R_0 = 10Ω, ενώ σε θερμοκρασία θ έχει αντίσταση R_θ = 10,39Ω. Να προσδιορισθεί η θερμοκρασία θ. Δίνεται ο θερμικός συντελεστής αντίστασης του χαλκού α_{Cu}=0.0039grad^{-1}.
(10 °C)

13° Χάλκινος αγωγός στους 0°C έχει αντίσταση $R_{0(cu)}$ = 10Ω. Στην ίδια θερμοκρασία αγωγός από άνθρακα έχει αντίσταση $R_{0(C)}$ = 12Ω. Να προσδιορισθεί η θερμοκρασία στην οποία οι δύο αγωγοί έχουν ίσες αντιστάσεις. Δίνονται: α_{Cu}=0,004grad^{-1}, α_C=-0,005grad^{-1}.
(20°C)

14° Δύο μηχανές είναι συνδεμένες ώστε, η ισχύς εξόδου της πρώτης να είναι ισχύς εισόδου της δεύτερης. Η ισχύς εισόδου της πρώτης μηχανής είναι $P_{i(1)}$ = 10W, ενώ η ισχύς εξόδου της δεύτερης είναι $P_{o(2)}$ = 7,2W. Αν ο συντελεστής απόδοσης της πρώτης μηχανής είναι α_1 = 0,8, να υπολογισθεί ο συντελεστής απόδοσης της δεύτερης. *(0,9)*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικα Κυκλωματα και Εξαρτηματα

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται τα βασικά στοιχεία των κυκλωμάτων συνεχούς ρεύματος καθώς και τα εξαρτήματα τους.

Επίσης, περιγράφονται βασικές αρχές και μέθοδοι υπολογισμού και μέτρησης ηλεκτρικών μεγεθών, όπως της τάσης, του ρεύματος, της αντίστασης, της ισχύος κ.λπ.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να ***κατανοήσουν*** *οι μαθητές τα βασικά στοιχεία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και τα εξαρτήματα αυτών και να* ***αναπτύξουν*** *ικανότητα υπολογισμού και μέτρησης ηλεκτρικών μεγεθών σε απλά κυκλώματα. Επίσης να* ***κατανοήσουν*** *τη λειτουργία των οργάνων μέτρησης και να* ***εξοικειωθούν*** *με τη χρήση τους.*

2-1. Βασικά στοιχεία κυκλωμάτων – Σύμβολα και διαγράμματα

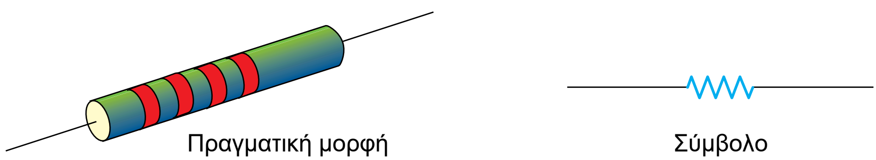
Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα περιλαμβάνει τα εξής επί μέρους δομικά στοιχεία:

- Πηγή ενέργειας για την παροχή τάσης που απαιτείται για τη ροή ρεύματος στο κύκλωμα.
- Αγωγούς από τους οποίους θα περάσει το ρεύμα.
- Μονωτές για τον περιορισμό του ρεύματος στις επιθυμητές διαδρομές (αγωγούς, αντιστάσεις κ.λ.π.).
- Ένα φορτίο, για να ελεγχθεί η ποσότητα του ρεύματος και να μετατραπεί η ηλεκτρική ενέργεια της πηγής σε άλλη μορφή ενέργειας (π.χ. θερμότητα).
- Συσκευή ελέγχου (συνήθως διακόπτη) για να ξεκινά και να σταματά τη ροή του ρεύματος.
- Μία συσκευή προστασίας για τη διακοπή του ρεύματος σε περίπτωση κακής λειτουργίας του κυκλώματος.

Τα τέσσερα πρώτα στοιχεία είναι απαραίτητα για οποιοδήποτε ηλεκτρικό κύκλωμα, ενώ η συσκευή ελέγχου και η συσκευή προστασίας συχνά παραλείπονται.

Για την αναπαράσταση ενός ηλεκτρικού κυκλώματος χρησιμοποιούνται συνήθως σύμβολα για τα ηλεκτρικά εξαρτήματα, αντί να σχεδιάζονται εικόνες των εξαρτημάτων αυτών.

Έτσι, ένας αντιστάτης παριστάνεται με το σύμβολό του, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.

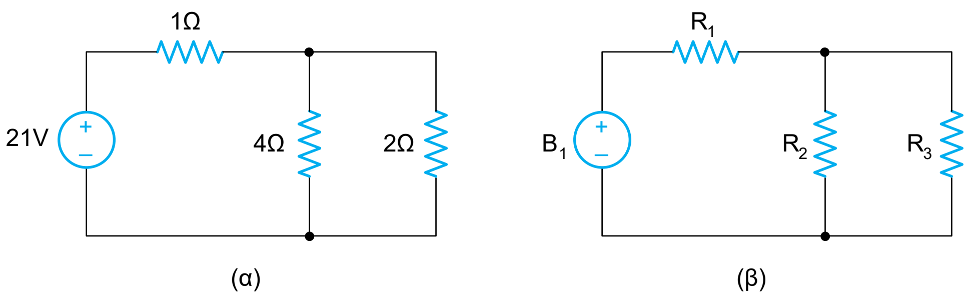


Σχήμα 2.1. *Αντιστάτης α) Πραγματική μορφή, β) σύμβολο*

Ανάλογα σύμβολα υπάρχουν για όλα τα ηλεκτρικά στοιχεία ενός ηλεκτρικού κυκλώματος. Η μόνη εξαίρεση είναι, ότι, δεν υπάρχει σύμβολο για να διακρίνονται οι μονωμένοι αγωγοί από όσους δεν είναι μονωμένοι. Υποτίθεται ότι, υπάρχει μόνωση εκεί όπου χρειάζεται, ώστε να αποφεύγεται η επαφή εξαρτημάτων και αγωγών.

❑ Το διάγραμμα το οποίο φέρει μόνο σύμβολα για να δείξει τη σύνδεση των εξαρτημάτων ονομάζεται Σχηματικό διάγραμμα του κυκλώματος.

Οι ηλεκτρικές τιμές των εξαρτημάτων που χρησιμοποιούνται στο κύκλωμα μπορούν επίσης να συμπεριληφθούν στο σχηματικό διάγραμμα του κυκλώματος είτε αναγράφοντας τις τιμές πάνω από τα αντίστοιχα εξαρτήματα (σχ. 2.2.(α)), είτε γράφοντας ένα αναγνωριστικό γράμμα ή σύμβολο πλάι σε κάθε εξάρτημα και οι τιμές των εξαρτημάτων δίνονται σε συνοδευτικό κατάλογο εξαρτημάτων (σχ. 2.2.(β)).



B_1: Πηγή τάσης 21V, R_1: Αντίσταση 1Ω
R_2: Αντίσταση 4Ω, R_3: Αντίσταση 2Ω

Σχήμα 2.2. *Τρόποι καθορισμού των τιμών των εξαρτημάτων*

2-2. Ηλεκτρικές πηγές τάσης και ρεύματος (ανεξάρτητες, εξαρτημένες)

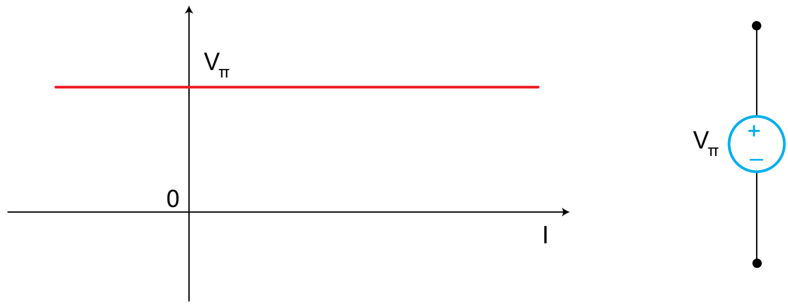
2-2.1. Πηγές τάσης

Οι πραγματικές πηγές τάσης είναι συσκευές που τείνουν να διατηρούν σταθερή τάση. Η ανάγκη μοντελοποίησης των πηγών αυτών οδήγησε στις ιδανικές πηγές τάσης οι οποίες διακρίνονται σε δύο κατηγορίες.

❑ **Ιδανικές ανεξάρτητες πηγές τάσης:** είναι στοιχεία κυκλώματος που διατηρούν μια σταθερή τάση στους ακροδέκτες τους ανεξάρτητα από το ρεύμα τους.

Επομένως, η τάση μιας τέτοιας πηγής σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητη της φύσης ή του μεγέθους των στοιχείων του κυκλώματος που συνδέονται μεταξύ των ακροδεκτών της και μόνο το ρεύμα εξαρτάται από τα συνδεόμενα μ' αυτήν στοιχεία.

Η χαρακτηριστική μιας ιδανικής ανεξάρτητης πηγής τάσης και το κυκλωματικό της σύμβολο φαίνονται στο σχ. 2.3.



Σχήμα 2.3. *Χαρακτηριστική και σύμβολο ιδανικής ανεξάρτητης πηγής τάσης*

❑ **Ιδανικές εξαρτημένες πηγές τάσης:** είναι στοιχεία κυκλώματος όπου μία τάση ή ένα ρεύμα σε κάποια άλλη θέση του κυκλώματος καθορίζουν την τάση των ακροδεκτών τους.

Επομένως, μια τέτοια πηγή μπορεί να είναι ελεγχόμενη είτε από τάση είτε από ρεύμα.

Εάν είναι ελεγχόμενη από κάποια τάση V_x τότε:

$$V_\pi = \mu \cdot V_x \qquad (2.1)$$

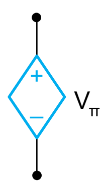
όπου μ σταθερός αδιάστατος συντελεστής.

Εάν είναι ελεγχόμενη από κάποιο ρεύμα I_x τότε:

$$V_\pi = \rho \cdot I_x \qquad (2.2)$$

όπου ρ σταθερός συντελεστής με διαστάσεις V/A.

Το κυκλωματικό σύμβολο μιας ιδανικής εξαρτημένης πηγής τάσης φαίνεται στο σχ. 2.4.



Σχήμα 2.4. *Σύμβολο ιδανικής εξαρτημένης πηγής τάσης*

Βασικό κοινό γνώρισμα των ανεξάρτητων και εξαρτημένων πηγών τάσης είναι το ότι, δεν μπορούμε να εκφράσουμε το ρεύμα στην πηγή σαν συνάρτηση της τάσης των ακροδεκτών τους. Με άλλα λόγια, αν το μόνο που γνωρίζουμε είναι η τάση στα άκρα μιας πηγής τάσης, είτε ανεξάρτητης είτε εξαρτημένης, δεν έχουμε αρκετές πληροφορίες για να προσδιορίσουμε το ρεύμα που διαρρέει την πηγή.

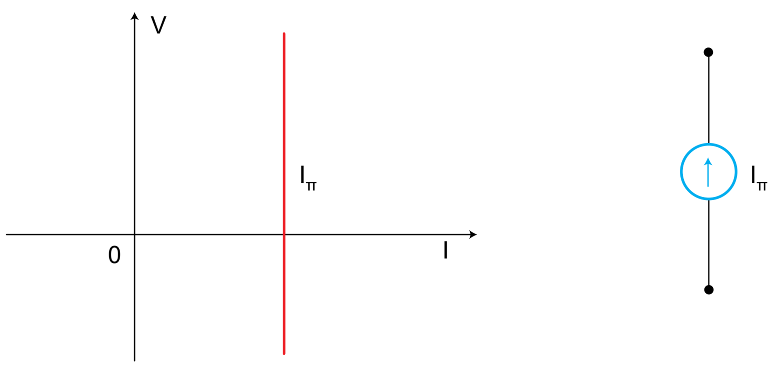
2-2.2. Πηγές ρεύματος

Οι πραγματικές πηγές ρεύματος είναι συσκευές που τείνουν να διατηρούν σταθερό ρεύμα. Η ανάγκη μοντελοποίησης αυτών των πηγών οδήγησε στις ιδανικές πηγές ρεύματος οι οποίες διακρίνονται σε δύο κατηγορίες.

❑ **Ιδανικές ανεξάρτητες πηγές ρεύματος:** είναι στοιχεία κυκλώματος που διατηρούν ένα σταθερό ρεύμα ανεξάρτητα από την τάση τους.

Επομένως, το ρεύμα μιας τέτοιας πηγής σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητο της φύσης ή του μεγέθους των στοιχείων του κυκλώματος που συνδέονται μεταξύ των ακροδεκτών της και μόνο η τάση εξαρτάται από τα συνδεόμενα μ’ αυτήν στοιχεία.

Η χαρακτηριστική μιας ιδανικής ανεξάρτητης πηγής ρεύματος και το κυκλωματικό της σύμβολο φαίνονται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5. *Χαρακτηριστική και σύμβολο ιδανικής ανεξάρτητης πηγής ρεύματος*

❑ **Ιδανικές εξαρτημένες πηγές ρεύματος:** είναι στοιχεία κυκλώματος όπου ένα ρεύμα ή μία τάση σε κάποια άλλη θέση του κυκλώματος καθορίζουν το ρεύμα τους.

Επομένως, μια τέτοια πηγή μπορεί να είναι ελεγχόμενη είτε από ρεύμα είτε από τάση.

Εάν είναι ελεγχόμενη από κάποιο ρεύμα I_x τότε

$$I_{\pi} = \beta \cdot I_x \tag{2.3}$$

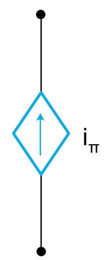
όπου β σταθερός αδιάστατος συντελεστής.

Εάν είναι ελεγχόμενη από κάποια τάση V_x τότε

$$I_{\pi} = \alpha \cdot V_x \tag{2.4}$$

όπου α σταθερός συντελεστής με διαστάσεις A / V.

Το κυκλωματικό σύμβολο μιας ιδανικής εξαρτημένης πηγής ρεύματος φαίνεται στο σχ. 2.6.



Σχήμα 2.6. *Σύμβολο ιδανικής εξαρτημένης πηγής ρεύματος*

Βασικό κοινό γνώρισμα των ανεξάρτητων και εξαρτημένων πηγών ρεύματος είναι το ότι, δεν μπορούμε να εκφράσουμε την τάση στην πηγή σαν συνάρτηση του ρεύματός των. Με άλλα λόγια, αν το μόνο που γνωρίζουμε είναι το ρεύμα μιας πηγής ρεύματος, είτε ανεξάρτητης είτε εξαρτημένης, δεν έχουμε αρκετές πληροφορίες για να προσδιορίσουμε την τάση των ακροδεκτών της πηγής.

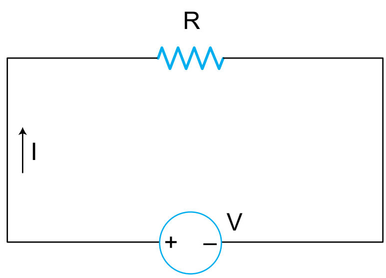
2-3. Νόμος του Ωμ (Ohm) και υπολογισμός τάσης, ρεύματος, αντίστασης

2-3.1. Νόμος του Ωμ (Ohm)

Η σχέση μεταξύ του ρεύματος (I), της τάσης (V) και της αντίστασης (R) ενός αντιστάτη μελετήθηκε από τον Γερμανό επιστήμονα Georg Ohm και προς τιμή του ονομάσθηκε νόμος του Ohm.

Ο Ohm ανακάλυψε ότι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει έναν αντιστάτη είναι ανάλογη με την τάση, στα άκρα του αντιστάτη. Έτσι, σε κάθε περίπτωση όταν διαιρούσε την τάση με το ρεύμα, το αποτέλεσμα ήταν το ίδιο.

Ο νόμος του Ohm διατυπώνεται ως εξής:



Σχήμα 2.7. Κύκλωμα έκφρασης του νόμου του Ohm.

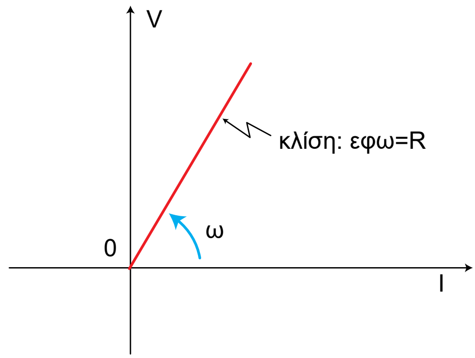
❑ Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει έναν αντιστάτη, είναι ανάλογη της τάσης που επικρατεί στα άκρα του.

δηλαδή

$$I = \frac{V}{R} \qquad (2.5)$$

Η χαρακτηριστική ενός αντιστάτη (ή απλά αντίσταση) που αποτελεί ταυτόχρονα και τη γραφική παράσταση του νόμου του Ohm, είναι ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.8.

Ειδικές περιπτώσεις: Δύο ειδικοί τύποι αντιστάσεων που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι το *ανοικτό κύκλωμα* και το *βραχυκύκλωμα.*

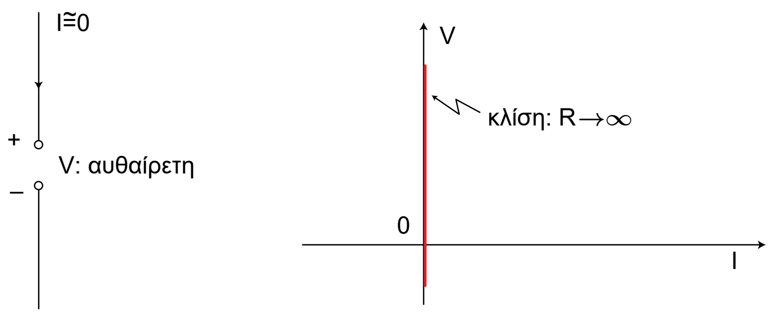


Σχήμα 2.8. *Νόμος του Ohm για σταθερή αντίσταση*

❑ **Ανοικτό κύκλωμα:** είναι ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών του οποίου το ρεύμα είναι μηδέν ανεξάρτητα από την εφαρμοζόμενη κάθε φορά τάση.

Στην πράξη, ανοικτό κύκλωμα έχουμε όταν σε κάποιο σημείο του κυκλώματος υπάρχει διακοπή με αποτέλεσμα να μην περνάει ηλεκτρικό ρεύμα.

Η χαρακτηριστική ενός ανοικτού κυκλώματος και το κυκλωματικό σύμβολο του φαίνονται στο σχήμα 2.9.

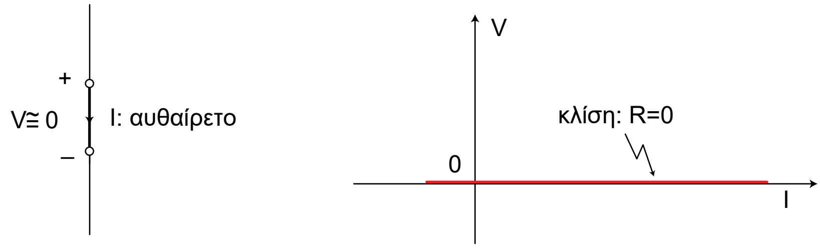


Σχήμα 2.9. *Σύμβολο και χαρακτηριστική του ανοικτού κυκλώματος*

❑ **Βραχυκύκλωμα:** είναι ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών του οποίου η τάση είναι μηδέν ανεξάρτητα από το διερχόμενο κάθε φορά ρεύμα.

Στην πράξη βραχυκύκλωμα έχουμε όταν δύο σημεία ενός κυκλώματος συνδεθούν με αγωγό μηδενικής αντίστασης.

Η χαρακτηριστική ενός βραχυκυκλώματος και το κυκλωματικό σύμβολο του φαίνονται στο σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.10. Σύμβολο και χαρακτηριστική βραχυκυκλώματος

2-3.2. Υπολογισμός τάσης, ρεύματος και αντίστασης

Από το νόμο του Ohm (σχέση 2.1.) είναι εύκολος ο υπολογισμός ενός εκ των τριών μεγεθών V, I, R εάν είναι γνωστά τα άλλα δύο μεγέθη.

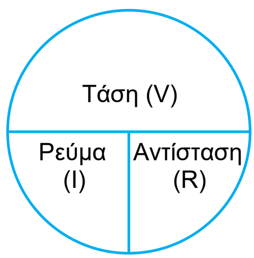
Λύνοντας τη σχέση (2.1) ως προς την τάση προκύπτει:

$$V = I \cdot R \tag{2.6}$$

Τέλος για την αντίσταση προκύπτει:

$$R = \frac{V}{I} \tag{2.7}$$

Ένα βοήθημα για την εύκολη χρήση του νόμου του Ohm φαίνεται στο χωρισμένο σε τμήματα κύκλο του σχήματος 2.11.



Σχήμα 2.11. Ο κύκλος του νόμου του Ohm

Για να χρησιμοποιήσετε το βοήθημα, απλά καλύψετε την ποσότητα που θέλετε να βρείτε και κάνετε τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση που υποδεικνύετε. Π.χ. Καλύψτε το R και το υπόλοιπο του κύκλου δείχνει την τάση (V) διαιρεμένη με το ρεύμα (I).

2-4. Υπολογισμός ισχύος – ενέργειας – κόστους ηλεκτρικής ενέργειας

Εφόσον το ρεύμα και η τάση είναι ποσότητες οι οποίες μπορούν εύκολα να υπολογισθούν, η ισχύς (P) που καταναλώνεται σε κάποιο φορτίο ή προσφέρεται από κάποια πηγή εύκολα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P = V \cdot I \tag{2.8}$$

Η ηλεκτρική ενέργεια (W), προϋποθέτει γνώση της ισχύος (P) και του χρονικού διαστήματος (t), για το οποίο ζητείται και υπολογίζεται από τη σχέση

$$W = P \cdot t \tag{2.9}$$

Το κόστος της ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να καθοριστεί από την ποσότητα της ενέργειας που καταναλώθηκε και τη χρέωση ανά μονάδα ενέργειας. Συνήθως η χρέωση δίνεται σε δραχμές ανά κιλοβατώρα. Έτσι, το κόστος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{gathered}\text{Κόστος} = (\text{τιμή μονάδας ενέργειας}) \times (\text{ενέργεια}) = \\ = (\text{δρχ} / \text{KWh}) \times (\text{KWh})\end{gathered} \tag{2.10}$$

2-5. Μέτρηση ηλεκτρικών μεγεθών με τη βοήθεια οργάνων και σφάλματα μετρήσεων

Οι ηλεκτρικές μετρήσεις χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο και επομένως για τη σωστή και αποδοτική λειτουργία των ηλεκτρικών εγκαταστάσεων, των ηλεκτρικών εξαρτημάτων και των ηλεκτρικών μηχανών.

Κατά τις ηλεκτρικές μετρήσεις με τη χρήση κατάλληλων μεθόδων και οργάνων προσδιορίζονται τα διάφορα ηλεκτρικά μεγέθη.

2-5.1. Είδη οργάνων και αρχές λειτουργίας αυτών

• Με βάση την αρχή λειτουργίας τους, τα κλασικά όργανα διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

α) **Όργανα στρεπτού πηνίου (ή μαγνητοηλεκτρικά όργανα):** Η λειτουργία τους στηρίζεται στη ροπή που αναπτύσσεται σε στρεπτό πηνίο, το οποίο διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο μόνιμου μαγνήτη.

β) **Όργανα κινητού σιδήρου (ή ηλεκτρομαγνητικά όργανα):** Η λειτουργία τους στηρίζεται σε μια δύναμη που ασκείται στο σιδηρομαγνητικό υλικό, το οποίο βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Το πεδίο δημιουργείται από ένα σταθερό πηνίο, το οποίο διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα.

γ) **Ηλεκτροδυναμικά όργανα:** Η λειτουργία τους είναι ίδια με εκείνη των οργάνων στρεπτού πηνίου με τη διαφορά ότι υπάρχει ηλεκτρομαγνήτης αντί μόνιμου μαγνήτη.

δ) **Ηλεκτροστατικά όργανα:** Η λειτουργία τους στηρίζεται σε μηχανικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ σωμάτων που βρίσκονται υπό τάση.

ε) **Θερμικά όργανα:** Η λειτουργία τους στηρίζεται στη θερμότητα που ελκύεται κατά τη διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος από έναν αγωγό.

στ) **Επαγωγικά όργανα:** Η λειτουργία τους είναι ίδια με τη λειτουργία των ασύγχρονων κινητήρων.

• Με βάση το μέγεθος το οποίο μετρούν, τα όργανα διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

α) **Αμπερόμετρα:** μετρούν την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος.

β) **Βολτόμετρα:** μετρούν την τάση μεταξύ δύο σημείων.

γ) **Βατόμετρα:** μετρούν την ισχύ που απορροφά μία κατανάλωση.

δ) **Συχνόμετρα:** μετρούν τη συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος.

ε) **Θερμόμετρα:** μετρούν τη θερμοκρασία ενός σώματος.

στ) **Υγρόμετρα:** μετρούν την υγρασία ενός χώρου.

• Με βάση τον τρόπο με τον οποίο μας παρέχουν την τιμή του μετρούμενου μεγέθους, τα όργανα διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

α) **Ενδεικτικά όργανα:** παρέχουν μέσω δείκτη ή φωτεινού σήματος ή ψηφιακού συστήματος την τιμή που έχει το μετρούμενο μέγεθος κατά τη στιγμή της μέτρησης.

β) **Καταγραφικά όργανα:** καταγράφουν αυτόματα (αργά ή γρήγορα) συναρτήσει του χρόνου ή άλλου μεγέθους το μέγεθος που μετρούν.

γ) **Αθροιστικά όργανα:** παρέχουν αθροιστικά την τιμή ενός μεγέθους από κάποια χρονική στιγμή και μετά.

2-5.2. Μέτρηση έντασης – Αμπερόμετρα

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος μετριέται με ειδικά όργανα, τα **αμπερόμετρα.** Με βάση την αρχή λειτουργίας των οργάνων, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, διαπιστώνουμε ότι όλα τα όργανα, εκτός από τα ηλεκτροστατικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αμπερόμετρα, καθότι η κινούσα ροπή τους, οφείλεται στη διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος.

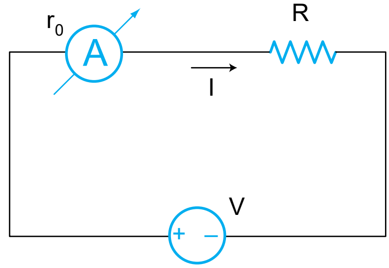
Η μέτρηση έντασης σε συνεχή ρεύματα μπορεί να γίνει με όργανα κινητού πηνίου και κινητού σιδήρου, ενώ για τη μέτρηση τάσης σε εναλλασσόμενα ρεύματα τα όργανα αυτά πρέπει να διαθέτουν και ανορθωτικές διατάξεις.

Τα όργανα κινητού σιδήρου, τα ηλεκτροδυναμικά, τα θερμικά και τα επαγωγικά είναι κατάλληλα για απευθείας μετρήσεις συνεχών και εναλλασσόμενων ρευμάτων.

Τα αμπερόμετρα συνδέονται **σε σειρά** στο κύκλωμα στο οποίο θέλουμε να μετρήσουμε την ένταση. Η σύνδεση όμως του οργάνου στο κύκλωμα αλλάζει την κατάσταση που επικρατούσε πριν από τη σύνδεση επειδή αυξάνεται η αντίσταση του κυκλώματος με την παρεμβολή της εσωτερικής αντίστασης r_0 του οργάνου. Έτσι, υπάρχει σφάλμα κατά τη μέτρηση της έντασης του ρεύματος.

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος 2.12 το αμπερόμετρο εσωτερικής αντίστασης r_0 συνδέθηκε για να μετρήσει το ρεύμα του κυκλώματος.

Πριν από τη σύνδεση του αμπερομέτρου το ρεύμα του κυκλώματος ήταν $I_0 = V / R$, ενώ μετά τη σύνδεσή του το ρεύμα είναι $I = V / (R + r_0)$. (Βλέπε Κεφ. 3ο, συνδεσμολογία αντιστάσεων σε σειρά).



Σχήμα 2.12. *Μέτρηση έντασης*

Το σχετικό σφάλμα μέτρησης της έντασης ορίζεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{\Delta I}{I_0} = \frac{I_0 - I}{I_0}$$

Άρα, στην περίπτωση αυτή, αυτό είναι:

$$\sigma = \frac{\Delta I}{I_0} = \frac{I_0 - I}{I_0} = \frac{\frac{V}{R} - \frac{V}{R+r_0}}{\frac{V}{R}} = \frac{r_0}{r_0 + R} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma = \frac{1}{1 + \frac{R}{r_0}}} \qquad (2.11)$$

Από τη σχέση αυτή είναι φανερό ότι:

Αν $r_0 \rightarrow 0$, τότε $\sigma \rightarrow 0$. Επομένως, το σφάλμα μέτρησης ελαχιστοποιείται, αν η εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου είναι πολύ μικρή.

Με βάση τα παραπάνω, τα αμπερόμετρα πρέπει να κατασκευάζονται με πολύ μικρή εσωτερική αντίσταση r_0. Η αντίστασή τους είναι συνήθως μερικά δέκατα ή εκατοστά του (Ω).

2-5.3. Μέτρηση τάσης – Βολτόμετρα

Η ηλεκτρική τάση μετριέται με ειδικά όργανα, τα **βολτόμετρα.**

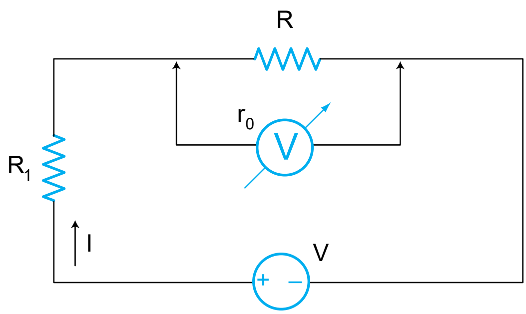
Με βάση την αρχή λειτουργίας των οργάνων διαπιστώνουμε και πάλι (όπως και στα αμπερόμετρα), ότι όλα τα όργανα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βολτόμετρα, καθόσον η κινούσα ροπή τους οφείλεται στη διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος.

Για τη μέτρηση τάσης Σ.Ρ. χρησιμοποιούνται όργανα κινητού πηνίου. Για τη μέτρηση τάσης Ε.Ρ. χρησιμοποιούνται όργανα θερμικά, επαγωγικά και ηλεκτροστατικά.

Για τη μέτρηση τάσης Σ.Ρ. και Ε.Ρ. χρησιμοποιούνται όργανα κινητού σιδήρου εφοδιασμένα με ανορθωτικές διατάξεις.

Τα βολτόμετρα συνδέονται **παράλληλα** στο τμήμα του ηλεκτρικού κυκλώματος του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε την τάση. Η σύνδεση όμως του οργάνου στο κύκλωμα αλλάζει την κατάσταση που επικρατούσε πριν από τη σύνδεση, καθόσον μειώνεται η αντίσταση του κυκλώματος λόγω της εσωτερικής αντίστασης r_0. Συνεπώς, υπεισέρχεται κάποιο σφάλμα στη μέτρηση της τάσης.

Στο κύκλωμα του σχήματος 2.13 το βολτόμετρο εσωτερικής αντίστασης r_0 συνδέεται για να μετρήσει την τάση στα άκρα της αντίστασης R.



Σχήμα 2.13. *Μέτρηση τάσης*

Πριν από τη σύνδεση του βολτομέτρου η τάση στα άκρα της αντίστασης R είναι:

$$V_0 = I \cdot R = \frac{V}{R+R_1} \cdot R \quad \Rightarrow \quad V_0 = V \cdot \frac{R}{R+R_1}$$

Μετά τη σύνδεση η τάση γίνεται $V_M = V \cdot \dfrac{R // r_0}{R // r_0 + R_1}$

(βλέπε Κεφ. 3ο, συνδεσμολογίες αντιστάσεων)

Κατόπιν πράξεων, το σχετικό σφάλμα μέτρησης της τάσης προκύπτει ίσο με:

$$\sigma = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_0 - V_M}{V_0} = \frac{1}{1 + r_0 \cdot \frac{R + R_1}{RR_1}} \qquad (2.12)$$

Αν $r_0 \to \infty$, τότε $\sigma \to 0$ και επομένως το σφάλμα μέτρησης ελαχιστοποιείται, όταν η εσωτερική αντίσταση του βολτομέτρου είναι πολύ μεγάλη.

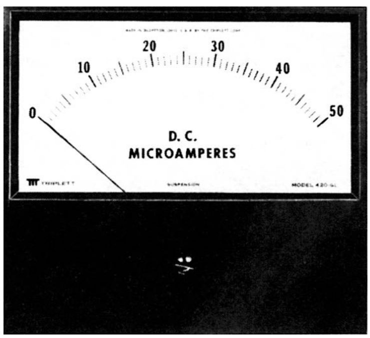
Με βάση τα παραπάνω, τα βολτόμετρα πρέπει να κατασκευάζονται με πολύ μεγάλη εσωτερική αντίσταση.

Στην πράξη η αντίστασή τους είναι μεγαλύτερη από 10 (ΚΩ).

2-5.4. Όργανα πίνακα

❑ Ένα όργανο μέτρησης που μετρά μόνο μία από τις ποσότητες V, I, R ονομάζεται όργανο πίνακα.

Αυτά τα όργανα είναι συχνά μόνιμα συνδεδεμένα σε ένα κύκλωμα, ώστε να μπορεί κάποιος να παρακολουθεί συνέχεια την τιμή μιας ηλεκτρικής ποσότητας. Τα όργανα αυτά είναι αναλογικά ή ψηφιακά. Στο σχήμα 2.14 φαίνεται ένα αναλογικό όργανο πίνακα.



Σχήμα 2.14. *Αναλογικό όργανο πίνακα*

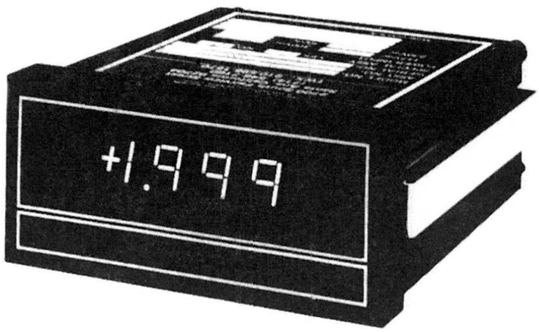
Όταν διαβάζεται ένα αναλογικό όργανο, ως τιμή μέτρησης λαμβάνεται η πλησιέστερη ένδειξη μικρότερης υποδιαίρεσης.

Πριν διαβάσετε την ένδειξη ενός αναλογικού οργάνου πρέπει να αναγνωρίσετε την τιμή υποδιαίρεσης της κλίμακας.

Κοιτάξτε την κλίμακα του οργάνου στο σχήμα 2.14. Παρατηρείστε ότι υπάρχει μια παχιά γραμμή ανάμεσα στο 0 και το 10. Αυτή αντιπροσωπεύει 5 μονάδες. Μετρήστε τώρα τον αριθμό των υποδιαιρέσεων (δευτερεύουσες υποδιαιρέσεις) μεταξύ του 0 και 5. Αφού υπάρχουν 5 υποδιαιρέσεις σημαίνει ότι κάθε δευτερεύουσα υποδιαίρεση αντιπροσωπεύει 1 μονάδα. Άρα, κάθε δευτερεύουσα υποδιαίρεση στην κλίμακα αντιπροσωπεύει 1 μA.

Έτσι, π.χ. εάν η βελόνα δείχνει τη δεύτερη υποδιαίρεση δεξιά του αριθμού 30, η ένδειξη του οργάνου θα είναι 32 μA.

Στο σχήμα 2.15. φαίνεται ένα ψηφιακό όργανο πίνακα.



Σχήμα 2.15. *Ψηφιακό όργανο πίνακα*

Στα όργανα αυτά δεν υπάρχει ανάγκη να αποφασίσετε ποια υποδιαίρεση είναι η πλησιέστερη στο δείκτη. Η ένδειξη του οργάνου είναι σαφής.

Τα ψηφιακά όργανα χαρακτηρίζονται από τον αριθμό των ψηφίων που απεικονίζουν.

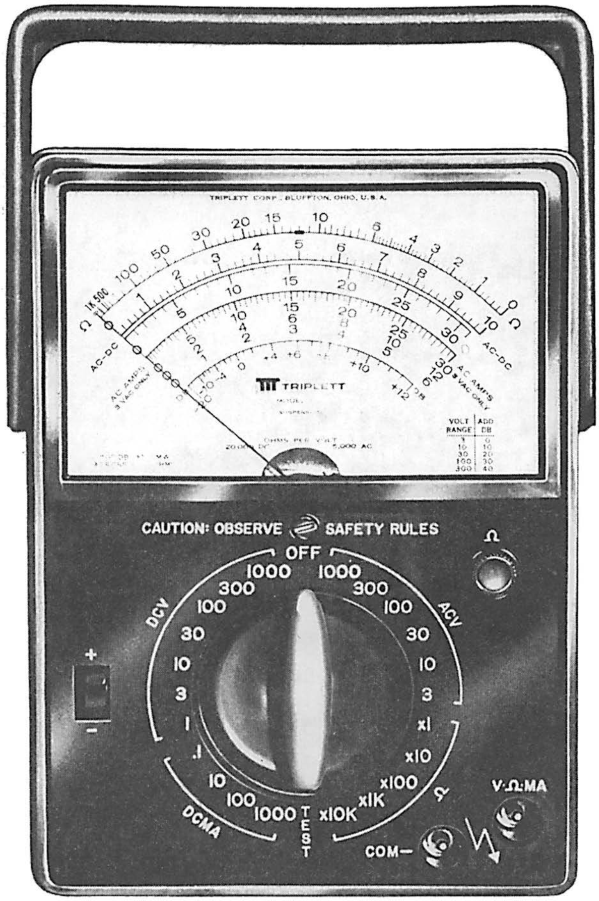
Εάν το πιο σημαντικό ψηφίο (στα αριστερά) μπορεί να είναι μόνο 0 ή 1 υπολογίζεται σαν μισό ψηφίο. Έτσι, το όργανο του σχήματος 2.15 είναι ένα όργανο $3\frac{1}{2}$ ψηφίων, και παρόλο που αποκαλείται όργανο μέτρησης 2 V, η μέγιστη τάση που μπορεί να μετρήσει είναι 1,999 V.

2-5.5. Πολύμετρα

❑ Πολύμετρα ονομάζονται τα όργανα που μπορούν να μετρήσουν δύο ή περισσότερες ηλεκτρικές ποσότητες.

Αυτά χρησιμοποιούν τον ίδιο βασικό μηχανισμό για την ένδειξη ενός μεγέθους με τα όργανα πίνακα, με τη διαφορά ότι έχουν περισσότερες από μία τυπωμένες κλίμακες στην πρόσοψή τους καθώς και επί πλέον κυκλώματα (διακόπτες, αντιστάσεις, κ.λπ.) στο εσωτερικό τους.

Τα όργανα αυτά είναι είτε αναλογικά ή ψηφιακά. Στο σχήμα 2.16 φαίνεται ένα αναλογικό πολύμετρο.



Σχήμα 2.16. *Αναλογικό πολύμετρο*

Παρότι τα διάφορα αναλογικά πολύμετρα μπορεί να φαίνονται διαφορετικά, εν τούτοις όλα έχουν λειτουργίες, περιοχές και κλίμακες.

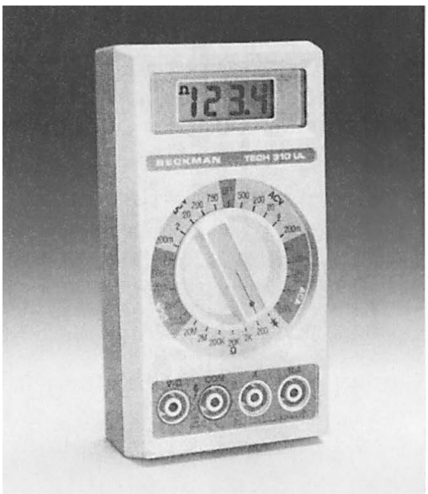
- Η λειτουργία αναφέρεται στο μέγεθος που μετριέται.
- Η περιοχή αναφέρεται στην τιμή του μεγέθους που μπορεί να μετρηθεί.

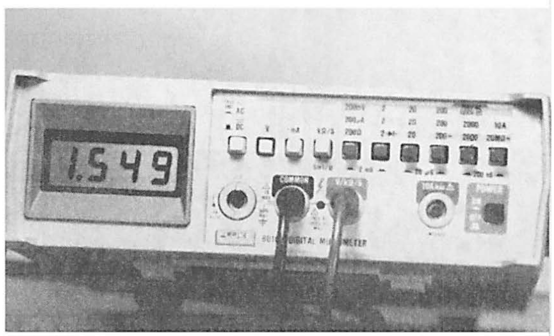
- Το ποια κλίμακα του οργάνου θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται και από τη λειτουργία και από την περιοχή στην οποία έχει ρυθμιστεί το όργανο.

Το πολύμετρο του σχήματος 2.16 έχει τέσσερις λειτουργίες (DCV, ACV, Ω και DCMA), όπως φαίνεται με τις τέσσερις κυκλικές αγκύλες γύρω από το μεγάλο διακόπτη επιλογής. Σε κάθε λειτουργία, είναι διαθέσιμος ένας αριθμός κλιμάκων.

Εκτός από τη λειτουργία (Ω), η περιοχή δείχνει τη μέγιστη τιμή του μεγέθους που μπορεί να μετρηθεί σε μια δεδομένη περιοχή. Για τη λειτουργία (Ω), η περιοχή δείχνει την τιμή με την οποία πρέπει να πολλαπλασιαστεί η κλίμακα των Ohm.

Στο σχήμα 2.17 φαίνονται δύο τύποι ψηφιακών πολυμέτρων.





Σχήμα 2.17. *Ψηφιακά πολύμετρα*

2-5.6. Μέτρηση αντίστασης

Όταν πρόκειται να μετρηθεί μια αντίσταση, το πολύμετρο πρέπει πρώτα να μηδενισθεί. Αυτό γίνεται με το περιστροφικό κουμπί που φέρει την ένδειξη Ω (βλέπε σχ. 2.16).

Αυτό περιστρέφεται μέχρι το όργανο να δείξει 0 στην κλίμακα των Ohm όταν οι ακροδέκτες μέτρησης είναι σε επαφή μεταξύ τους. Η διαδικασία αυτή γίνεται για κάθε περιοχή λειτουργίας Ohm. Στα ψηφιακά πολύμετρα, δεν απαιτείται τέτοια ρύθμιση.

Όταν ένα πολύμετρο λειτουργεί ως ωμόμετρο χρησιμοποιεί ένα στοιχείο, μπαταρία ή τροφοδοτικό που βρίσκεται στο εσωτερικό του. Δηλαδή, έχει τη δική του πηγή ενέργειας.

Επομένως, πρέπει να αποσυνδεθεί οποιαδήποτε άλλη πηγή ενέργειας από το κύκλωμα στο οποίο θα μετρηθεί η αντίσταση. Ποτέ μη μετράτε την αντίσταση ενός φορτίου όταν είναι συνδεδεμένο με πηγή ενέργειας. Εάν συμβεί κάτι τέτοιο, το ωμόμετρο θα πάθει ζημιά.

Η διαδικασία μέτρησης μιας αντίστασης είναι η ακόλουθη.

- Διακόπτουμε την παροχή ισχύος στο κύκλωμα.
- Επιλέγουμε μια κατάλληλη περιοχή στη λειτουργία των ohm. Η κατάλληλη περιοχή είναι αυτή που δίνει την καλύτερη αναλυτική ικανότητα μέτρησης.
- Όταν χρησιμοποιείται το αναλογικό πολύμετρο, βραχυκυκλώνουμε (φέρνουμε σε επαφή) τους ακροδέκτες μέτρησης. Κατόπιν, ρυθμίζουμε με το κομβίο ohm, μέχρι ο δείκτης να δείξει 0 ohm.
- Συνδέουμε ή φέρνουμε σε επαφή, τους ακροδέκτες μέτρησης με τους ακροδέκτες της συσκευής της οποίας πρόκειται να μετρηθεί η αντίσταση. Εκτός από την περίπτωση ορισμένων ηλεκτρονικών εξαρτημάτων, η πολικότητα των ακροδεκτών του ωμομέτρου δεν έχει σημασία.

Όταν μετράμε αντίσταση, δεν πρέπει να αγγίζουμε τα μεταλλικά μέρη των ακροδεκτών. Αν γίνει αυτό, μαζί με την αντίσταση του κυκλώματος μετράμε και την αντίσταση του σώματός μας. Αυτό δεν είναι επικίνδυνο για μας, δεν θα είναι όμως σωστή η μέτρησή της αντίστασης.

2-5.7. Μέτρηση τάσης

Οι μετρήσεις τάσης είναι οι πλέον εύκολες και συνήθεις. Οι μετρήσεις αυτές γίνονται με συνδεδεμένη στο κύκλωμα την ισχύ. Η διαδικασία μέτρησης τάσης είναι η ακόλουθη.

- Επιλέγουμε τη σωστή λειτουργία μέτρησης τάσης (AC για εναλλασσόμενο DC για συνεχές).
- Επιλέγουμε μία περιοχή τάσης μεγαλύτερη από την αναμενόμενη τάση.
- Καθορίζουμε την πολικότητα της τάσης που πρόκειται να μετρήσουμε εξετάζοντας το σχηματικό διάγραμμα ή τους ακροδέκτες της μπαταρίας. Αυτό το βήμα παραλείπεται όταν μετράμε AC, επειδή η πολικότητα αντιστρέφεται κάθε κλάσμα του δευτερολέπτου.

- Συνδέουμε τον αρνητικό (μαύρο) ακροδέκτη του πολυμέτρου στο αρνητικό της τάσης που πρόκειται να μετρηθεί. Αγγίζουμε (ή συνδέουμε) το θετικό (κόκκινο) ακροδέκτη στο θετικό της τάσης. Με άλλα λόγια, ελέγχουμε την πολικότητα όταν μετράμε την τάση με αναλογικό πολύμετρο. Εάν δεν γίνει αυτό, η βελόνα του οργάνου μπορεί να λυγίσει στην προσπάθειά της να περιστραφεί αντίθετα από το κανονικό.

2-5.8. Μέτρηση ρεύματος

Οι μετρήσεις ρεύματος είναι πολύ πιο σπάνιες από τις μετρήσεις τάσης ή αντίστασης. Αυτό συμβαίνει γιατί το κύκλωμα πρέπει να διακοπεί για την εισαγωγή του οργάνου, καθότι γνωρίζουμε ότι το αμπερόμετρο συνδέεται σε σειρά με το στοιχείο του οποίου το ρεύμα θα μετρήσει.

Η διαδικασία μέτρησης ενός ρεύματος είναι η ακόλουθη.

- Επιλέγουμε τη λειτουργία μέτρησης ρεύματος.
- Επιλέγουμε μια περιοχή μεγαλύτερη από το αναμενόμενο ρεύμα.
- Διακόπτουμε το κύκλωμα.
- Προσέχοντας την πολικότητα, συνδέουμε το πολύμετρο στα σημεία που δημιουργήθηκαν από τη διακοπή του κυκλώματος.

2-6. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Ένας λαμπτήρας έχει αντίσταση 96 (Ω). Ποιο είναι το ρεύμα του λαμπτήρα όταν συνδέεται με τάση 120 (V).

Λύση

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm (σχέση 2.5) προκύπτει:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120}{96} \Rightarrow I = 1{,}25 \text{ (A)}$$

Εφαρμογή 2η

Ποια είναι η αντίσταση ενός λαμπτήρα που διαρρέεται από ρεύμα 240 (mA) όταν συνδεθεί με μπαταρία 12,6 (V);

Λύση

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm (σχέση 2.7) προκύπτει:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{12{,}6}{24 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow R = 52{,}5\ (\Omega)$$

Εφαρμογή 3η

Ποια τάση πρέπει να εφαρμοστεί σε μια αντίσταση 1 (ΚΩ) ώστε το διερχόμενο ρεύμα να είναι 30 (mA).

Λύση

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm (σχέση 2.6) προκύπτει:

$$V = I \cdot R = (30 \cdot 10^{-3}) \cdot (1 \cdot 10^{3}) = 30\ (V)$$

Εφαρμογή 4η

Πόση ισχύ απορροφά μία θερμάστρα, η οποία όταν συνδέεται σε τάση 240 (V) διαρρέται από ρεύμα 11 (A);

Λύση

Εφαρμόζοντας τη σχέση 2.8 προκύπτει:

$$P = V \cdot I = 240 \cdot 11 \Rightarrow P = 2640\ (W)$$

Εφαρμογή 5η

Μια τοστιέρα διαρρέεται από ρεύμα 5 (A) όταν τροφοδοτείται από τάση 120 (V). Πόση ενέργεια καταναλώνει σε 2 ώρες και πόσο θα κοστίζει η λειτουργία της εάν το κόστος μιας KWh είναι 40 δρχ.;

Λύση

Η απορροφούμενη από την τοστιέρα ισχύς είναι:

$$P = V \cdot I = 120 \cdot 5 \Rightarrow P = 600\ (W) = 0{,}6\ (KW)$$

Η ενέργεια που καταναλώνει σε 2 (h) προκύπτει εφαρμόζοντας τη σχέση 2.9:

$$W = P \cdot t = 0{,}6 \cdot 2 \rightarrow W = 1{,}2\ (KWh)$$

Το απαιτούμενο κόστος της τοστιέρας (σχέση 2.10) είναι:

$$\text{Κόστος} = (\text{δρχ} / KWh) \cdot (KWh) = 40 \cdot 1{,}2 \Rightarrow \text{Κόστος} = 48\ \text{δρχ.}$$

Εφαρμογή 6η

Το ρεύμα δια μέσου μιας αντίστασης 100 (Ω) είναι 200 (mA). Πόση ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα στην αντίσταση σε χρόνο 10 min;

Λύση

Η απορροφούμενη από την αντίσταση ισχύς είναι:

$$P = V \cdot I = (I \cdot R) \cdot I = I^2 \cdot R = (200 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 100 \Rightarrow P = 4\ (W).$$

Επομένως, η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα πάνω στην αντίσταση σε χρόνο 10 min είναι:

$$W = P \cdot t = 4 \cdot (10 \cdot 60) = 2400\ (J)$$

Εφαρμογή 7η

Ένας θερμοσίφωνας έχει αντίσταση ισχύος 3 (KW) και λειτουργεί για 3 h. Ποιο είναι το κόστος λειτουργίας, εάν η τιμή της κιλιβατώρας είναι 40 δρχ.;

Λύση

Η ενέργεια που απορροφά ο θερμοσίφωνας από το δίκτυο είναι:

$$W = P \cdot t = 3 \cdot 3 \Rightarrow W = 9 \text{ (KWh)}$$

Επομένως, το κόστος λειτουργίας του είναι:

$$\text{Κόστος} = (\text{δρχ / KWh}) \cdot (\text{KWh}) = 9 \cdot 40 \Rightarrow \text{Κόστος} = 360 \text{ δρχ.}$$

Εφαρμογή 8η

Μια σειρά από Χριστουγεννιάτικα φωτάκια διαρρέεται από ρεύμα 1 (A) όταν συνδέεται σε τάση 220 (V). Εάν η τιμή της κιλοβατώρας είναι 8 δρχ., πόσο κοστίζει η λειτουργία τους όταν ανάψουν επί 40 ώρες;

Λύση

Η απορροφούμενη ισχύς από τα φωτάκια είναι:

$$P = V \cdot I = 220 \cdot 1 \Rightarrow P = 220 \text{ (W)} = 0{,}22 \text{ (KW)}$$

Η καταναλισκώμενη σε 40 h ενέργεια είναι:

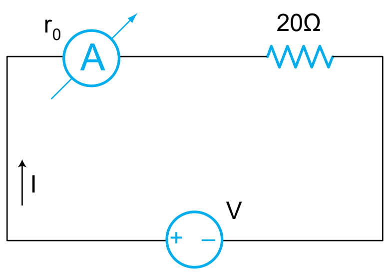
$$W = P \cdot t = 0{,}22 \cdot 40 \Rightarrow W = 8{,}8 \text{ (KWh)}$$

Επομένως, το κόστος λειτουργίας είναι:

$$\text{Κόστος} = (\text{δρχ / KWh}) \cdot (\text{KWh}) = 8 \cdot 8{,}8 \Rightarrow \text{Κόστος} = 70{,}4 \text{ δρχ}$$

Εφαρμογή 9η

Στο παρακάτω κύκλωμα το αμπερόμετρο έχει εσωτερική αντίσταση 1 (Ω). Ποιο είναι το σφάλμα μέτρησης του ρεύματος;



Λύση

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.11) προκύπτει:

$$\sigma=\frac{1}{1+\frac{R}{r_0}}=\frac{1}{1+\frac{20}{1}}=\frac{1}{21}=0{,}047 \quad ή \quad \sigma=4{,}7\%$$

Επομένως, το σφάλμα μέτρησης του ρεύματος είναι 4,7%.

Εφαρμογή 10η

Το αναλογικό πολύμετρο του σχήματος 2.16 βρίσκεται σε λειτουργία (Ω), κλίμακα × 1 K. Η βελόνα δείχνει την πρώτη υποδιαίρεση αριστερά από την υποδιαίρεση 30. Πόση αντίσταση δείχνει το όργανο;

Λύση

Ανάμεσα στο 30 και στο 50, υπάρχουν δύο κύριες υποδιαιρέσεις, επομένως η κάθε μία έχει αξία 20:2 = 10 μονάδων. Ανάμεσα στο 30 και το 40 υπάρχουν δύο δευτερεύουσες υποδιαιρέσεις, επομένως η κάθε μία έχει αξία 10:2 = 5 μονάδων.

Επειδή το όργανο δείχνει την πρώτη υποδιαίρεση αριστερά του 30, δείχνει αξία 35 μονάδων και αφού είναι ρυθμισμένο στην κλίμακα × 1 K, η αντίσταση που δείχνει το όργανο είναι:

$$R = 35 \cdot 1\ \text{KΩ} = 35\ (\text{KΩ})$$

Εφαρμογή 11η

Το αναλογικό πολύμετρο του σχήματος 2.16 βρίσκεται σε λειτουργία (DCV) και ο διακόπτης επιλογής είναι τοποθετημένος στην κλίμακα 1000. Η βελόνα δείχνει την πρώτη υποδιαίρεση δεξιά του 7 στην κλίμακα 0 μέχρι 10. Ποια τάση δείχνει το όργανο;

Λύση

Ανάμεσα στο 7 και το 8 υπάρχουν πέντε δευτερεύουσες υποδιαιρέσεις, επομένως η κάθε μια έχει αξία 1:5 = 0,2 μονάδων. Η ένδειξη της κλίμακας, είναι λοιπόν 7,2. Η κλίμακα όμως από 0 έως 10 πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το 100, για να γίνει ισοδύναμη με την κλίμακα 1000.

Επομένως, η τάση που δείχνει το όργανο είναι:

$$V = 7{,}2 \cdot 100 \Rightarrow V = 720 \text{ (V)}$$

2-7. Προβλήματα προς λύση

1° Λαμπτήρας διαρρέεται από ρεύμα 1,6 (A) όταν συνδεθεί σε τάση 240 (V). Ποια είναι η αντίσταση του λαμπτήρα; *(150 Ω.)*

2° Πόση τάση χρειάζεται για να προκληθεί ροή ρεύματος 1,6 (A) σε μια συσκευή που έχει αντίσταση 30 (Ω); *(48 V)*

3° Ποια είναι η ισχύς μιας ηλεκτρικής θερμάστρας που τραβά ρεύμα 6 (A) από μια παροχή 220 (V); *(1320 W)*

4° Τα θερμαντικά στοιχεία ενός στεγνωτήρα ρούχων έχουν ισχύ 4 (KW) και τάση λειτουργίας 240 (V). Πόσο ρεύμα καταναλώνουν; *(16,7 A)*

5° Να βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται σε αντίσταση 100 (Ω) η οποία διαρρέεται από ρεύμα 0,2 (A). *(4 W)*

6° Συσκευή διαρρέεται από ρεύμα 1,5 (A) όταν τροφοδοτείται από μπαταρία 12 (V). Πόση ενέργεια απορροφά σε 2 ώρες; *(36 Wh)*

7° Ένα ηλεκτρικό σίδερο λειτουργεί σε τάση 220 (V) και διαρρέεται από ρεύμα 15 (A). Εάν η χρέωση είναι 20 δρχ. ανά κιλοβατώρα, πόσο κοστίζει η λειτουργία του για 2 ώρες; *(132 δρχ.)*

8° Ένας λαμπτήρας πυρακτώσεως λειτουργεί με τάση 220 (V) και καταναλώνει ισχύ 150 (W). Ποια θα είναι η ένταση του ρεύματος που θα διαρρέει τον λαμπτήρα και ποια η αντίστασή του. *(0,682 A, 322,67 Ω)*

9° Η αντίσταση ενός ηλεκτρικού θερμοσίφωνα είναι 30 Ω και επιτρέπει να περάσει ρεύμα 10 (A). Μετά από πόσο χρόνο λειτουργίας καταναλώνει ενέργεια 4 (KWh) και πόσο θα κοστίσει εάν η χρέωση είναι 20 δρχ/ KWh;

(1,33 h, 80 δρχ.)

10° Το αναλογικό πολύμετρο του σχήματος 2.16 βρίσκεται σε λειτουργία (Ω), κλίμακα x 10 K. Η βελόνα δείχνει την πρώτη υποδιαίρεση δεξιά του 30. Πόση αντίσταση δείχνει το όργανο; *(280 KΩ)*

11° Το αναλογικό πολύμετρο του σχήματος 2.16 βρίσκεται σε λειτουργία (DCV) και ο διακόπτης επιλογής είναι τοποθετημένος στην κλίμακα 1000. Η βελόνα δείχνει τη δεύτερη υποδιαίρεση αριστερά του 7 στην κλίμακα 0 μέχρι 10. Ποια τάση δείχνει το όργανο; *(660 V)*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Απλα Γραμμικα Ωμικα Κυκλωματα

Εισαγωγή

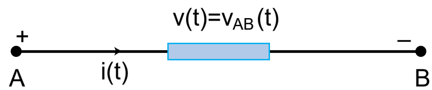
Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται βασικές τοπολογικές έννοιες των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και στη συνέχεια οι νόμοι του Kirchhoff με μερικές εφαρμογές τους.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι, να ***αναπτύξουν*** *οι μαθητές ευχέρεια στη εφαρμογή των νόμων του Kirchhoff, και ειδικότερα σε σημαντικές εφαρμογές (συνδεσμολογίες αντιστάσεων, πηγών, διαιρετών τάσης και ρεύματος).*

3-1. Τοπολογικοί ορισμοί

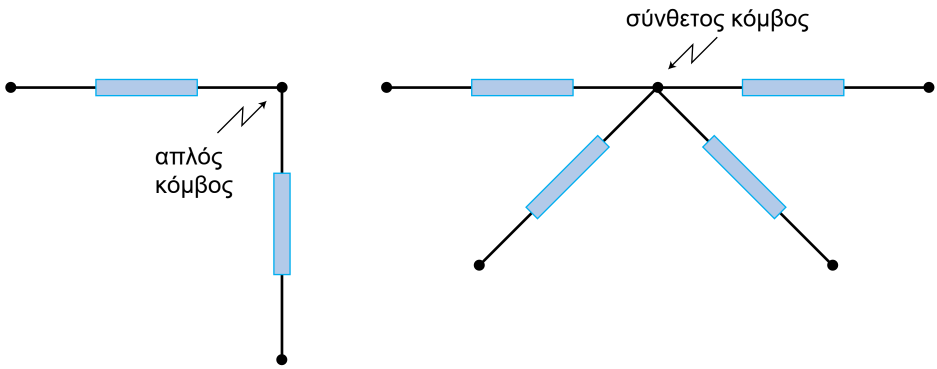
Σε όλους του κλάδους της Ηλεκτροτεχνίας χρησιμοποιείται πλήθος ηλεκτρικών συσκευών, οι οποίες συνδέονται με διάφορους τρόπους. Το σύνολο που προκύπτει από τις συνδέσεις αυτές ονομάζεται **κύκλωμα ή δίκτυο.** Συνήθως, ο όρος κύκλωμα χρησιμοποιείται για απλές συνδέσεις, ενώ ο όρος δίκτυο για πολύπλοκες συνδέσεις.

❑ **Κλάδος:** Είναι οποιαδήποτε ομάδα συνδεδεμένων στοιχείων που σχηματίζουν ένα σύνολο δύο ακροδεκτών, «μια γραμμή» στην οποίαν ορίζονται οι συναρτήσεις v(t) και i(t).



Σχήμα 3.1. *Καθορισμός κλάδου*

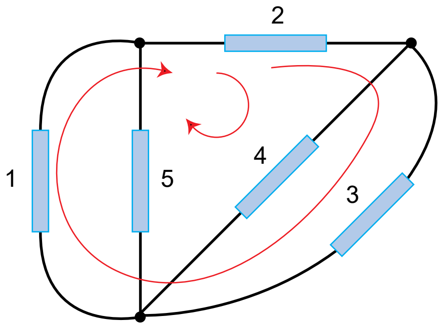
❑ **Κόμβος:** Είναι ο κοινός ακροδέκτης, δηλαδή το σημείο στο οποίο καταλήγουν δύο ή περισσότεροι κλάδοι. Διακρίνεται σε απλό και σύνθετο κόμβο.



Σχήμα 3.2. *Καθορισμός κόμβου*

❑ **Βρόχος:** Είναι οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή κλάδων. Διακρίνεται σε απλό και μη απλό βρόχο.

Τα ηλεκτρικά κυκλώματα ανάλογα με το μέγεθος των στοιχείων που περιέχουν σε σχέση με το μήκος κύματος της συχνότητας λειτουργίας τους, διακρίνονται σε δύο κατηγορίες.



Βρόχος 2, 4, 5: απλός
Βρόχος 2, 3, 1: όχι απλός

Σχήμα 3.3. *Καθορισμός βρόχου*

❑ **Συγκεντρωμένα κυκλώματα:** Τα στοιχεία των κυκλωμάτων αυτών έχουν μέγεθος πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος της συχνότητας λειτουργίας.

Αυτό έχει σαν συνέπεια για στοιχεία όπως π.χ. του σχ. 3.1., η τάση v(t) να προσδιορίζεται με μετρήσεις στους ακροδέκτες A και B και το ρεύμα i(t) που μπαίνει στο κόμβο A να ισούται με το ρεύμα που καταλήγει στο κόμβο B.

❑ **Κατανεμημένα κυκλώματα:** Τα στοιχεία των κυκλωμάτων αυτών έχουν συγκρίσιμο μέγεθος με το μήκος κύματος της συχνότητας λειτουργίας.

Αυτό έχει σαν συνέπεια, το ρεύμα στην έξοδο σε κάθε χρονική στιγμή να είναι διαφορετικό από το ρεύμα εισόδου.

Η ανάλυση τέτοιων κυκλωμάτων απαιτεί ξεχωριστή θεωρία η οποία λαμβάνει υπόψη της την κατανομή του Η/Μ πεδίου που αναπτύσσεται κατά τη διάδοση της Η/Μ ισχύος. Τέτοια κυκλώματα δεν εξετάζονται στο βιβλίο αυτό.

3-2. Συμβάσεις αναφοράς

Αναφερόμενοι στο σχ. 3.1 παρατηρούμε ότι, το ρεύμα και η τάση δίνονται από κάποιους αριθμούς, οι οποίοι φυσικά δεν μας δίνουν πληροφορίες για τη φορά του ρεύματος στον κλάδο, ούτε για το ποιος ακροδέκτης βρίσκεται σε ψηλότερο ή χαμηλότερο δυναμικό.

Για να έχουμε τις πληροφορίες αυτές ορίζουμε σε κάθε κλάδο **φορά αναφοράς ρεύματος** και **πολικότητα αναφοράς τάσης.**

Έτσι, λέγοντας ότι $v(t) > 0$ εννοούμε ότι το δυναμικό στον ακροδέκτη Α είναι μεγαλύτερο από το δυναμικό στον ακροδέκτη Β. Λέγοντας επίσης, ότι $i(t) > 0$ εννοούμε ότι θετικά φορτία μπαίνουν στον κλάδο από τον ακροδέκτη Α και βγαίνουν από τον ακροδέκτη Β τη χρονική στιγμή t.

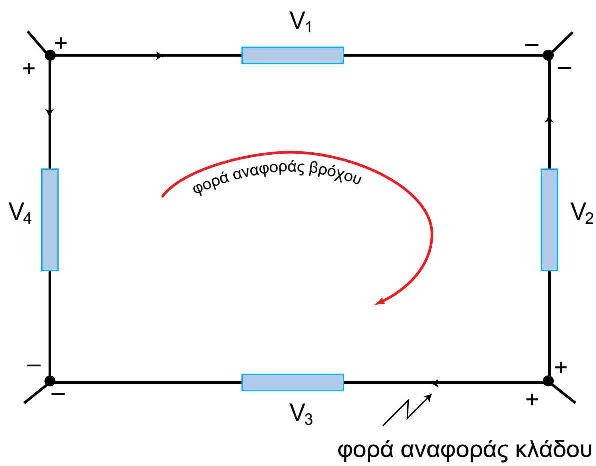
Είναι φανερό ότι, η φορά αναφοράς ρεύματος και η πολικότητα αναφοράς τάσης μπορούν να εκλεγούν αυθαίρετα. Στην περίπτωση του σχ. 3.1 ισχύει

$$v(t) \cdot i(t) > 0$$

και δείχνει την ισχύ που *καταναλώνεται* (απορροφάται) από το στοιχείο του κλάδου. Στην αντίθετη περίπτωση, δείχνει την ισχύ που *αποδίδει* το στοιχείο του κλάδου στο υπόλοιπο κύκλωμα.

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι, έχουμε φορά και πολικότητα **συσχετισμένες** και συνήθως αυτές χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

❑ **Πολικότητα ή φορά αναφοράς βρόχου:** Είναι η φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού ή η αντίθετη.



Σχήμα 3.4. *Πολικότητα ή φορά αναφοράς βρόχου*

3-3. Νόμοι του Κίρκωφ (Kirchhoff)

Η σύνδεση των ηλεκτρικών στοιχείων (αντιστάσεων, πυκνωτών, πηνίων, πηγών) στα κυκλώματα θέτει ορισμένες συνθήκες στις σχέσεις τάσεων και ρευμάτων. Οι συνθήκες αυτές είναι γνωστοί ως **νόμοι του Kirchhoff** από το όνομα του Gustav Kirchhoff ο οποίος πρώτος τους διατύπωσε σε μια εργασία του η οποία δημοσιεύτηκε το 1848. Τους νόμους αυτούς δεχόμαστε ως βασικά αξιώματα των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

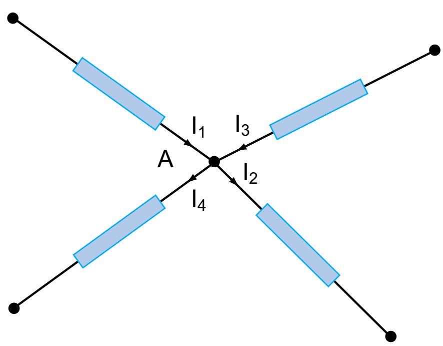
❑ **Νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff (N.P.K.):** Το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων σε κάθε κόμβο του κυκλώματος ισούται με μηδέν, δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \tag{3.1}$$

(Το σύμβολο Σ παριστάνει το αλγεβρικό άθροισμα)

- Το ρεύμα $I_κ$ που εισρέει (εισέρχεται σε έναν κόμβο) θεωρείται ως θετικό και λαμβάνεται με πρόσημο (+).

- Το ρεύμα που εκρέει (αποχωρεί) από έναν κόμβο θεωρείται ως αρνητικό και λαμβάνεται με πρόσημο (-).



Σχήμα 3.5. *Εφαρμογή του N.P.K.*

Συνεπώς η εφαρμογή του N.P.K. για τον κόμβο Α του σχήματος 3.5 δίνει:

$$\sum_{k=1}^{4} I_k = 0 \Rightarrow I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

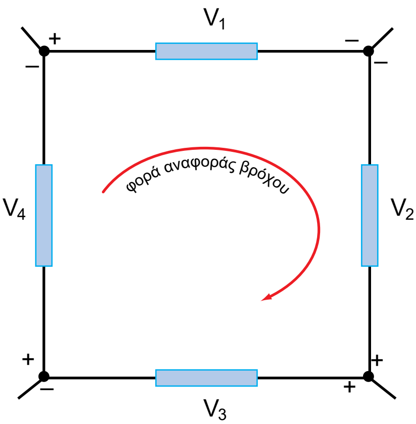
❑ **Νόμος τάσεων του Kirchhoff (N.T.K.):** Το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων σε κάθε βρόχο ενός κυκλώματος ισούται με μηδέν, δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = 0$$

- Η τάση V_K λαμβάνεται με πρόσημο (+), εάν η φορά αναφοράς στον κλάδο (+ → -) συμπίπτει με τη φορά αναφοράς του βρόχου (φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού), διαφορετικά λαμβάνεται με πρόσημο (-).

Έτσι, ο Ν.Τ.Κ. για το βρόχο του σχήματος 3.6 παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{k=1}^{4} V_k = 0 \Rightarrow V_1 - V_2 + V_3 + V_4 = 0$$



Σχήμα 3.6. *Εφαρμογή του Ν.Τ.Κ.*

3-4. Εφαρμογές του νόμου του Ohm και των νόμων του Kirchhoff

3-4.1. Συνδεσμολογία αντιστάσεων

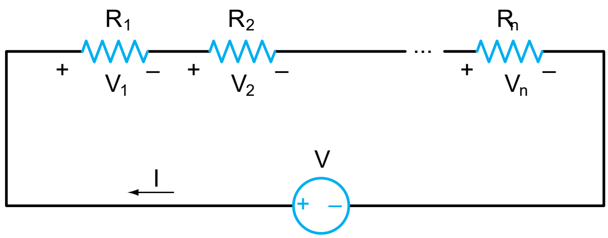
Οι αντιστάσεις ως βασικά στοιχεία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων μπορούν να συνδεθούν με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με το τι επιδιώκεται κάθε φορά από αυτόν που συνθέτει ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.

Για την καλύτερη όμως και ευκολότερη αντιμετώπιση σύνθετων κυκλωμάτων, παρουσιάζεται πολλές φορές η ανάγκη αντικατάστασης ενός συστήματος αντιστάσεων με μια ισοδύναμη αντίσταση, στα άκρα της οποίας θα επικρατεί η ίδια τάση με την τάση των ακροδεκτών του συστήματος των αντιστάσεων και θα διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα που διαρρέει το σύστημα των αντιστάσεων αυτών.

Στη συνέχεια εξετάζονται αναλυτικά οι διάφοροι τρόποι συνδεσμολογίας αντιστάσεων που συναντώνται στην πράξη.

α) Συνδεσμολογία αντιστάσεων σε σειρά

❑ Δύο ή περισσότερες αντιστάσεις είναι συνδεσμολογημένες σε σειρά, όταν το τέλος της μιας αντίστασης συνδέεται με την αρχή της άλλης κ.ο.κ. και δεν υπάρχει πουθενά σημείο λήψης (διακλάδωση) ανάμεσά τους, ώστε όλες να διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα.



Σχήμα 3.7. *Σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά*

Για την εύρεση της ισοδύναμης αντίστασης $R_{ολ}$ εφαρμόζουμε το Ν.Τ.Κ.

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n - V = 0 \xrightarrow{N \cdot Ohm}$$

$$I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 + \ldots + I \cdot R_n = V \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{ισοδύναμο κύκλωμα}} I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 + \ldots + I \cdot R_n = I \cdot R_{ΟΛ} \Rightarrow$$

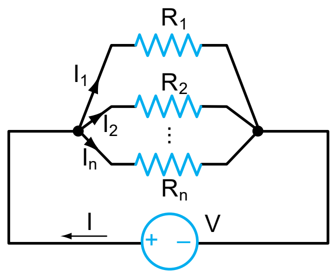
$$\boxed{R_{ΟΛ} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n} \qquad (3.3)$$

☞ *Παρατηρήσεις*

- Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{ΟΛ}$ είναι μεγαλύτερη και από τη μεγαλύτερη αντίσταση.
- Εάν όλες οι αντιστάσεις είναι ίσες (με τιμή R) τότε $R_{ολ} = n \cdot R$.

β) Παράλληλη συνδεσμολογία αντιστάσεων

❑ Δύο ή περισσότερες αντιστάσεις είναι συνδεσμολογημένες παράλληλα, όταν έχουν κοινά άκρα με αποτέλεσμα να βρίσκονται όλες στην ίδια τάση.



Σχήμα 3.8. *Παράλληλη σύνδεση αντιστάσεων*

Για την εύρεση ισοδύναμη αντίστασης $R_{ΟΛ}$ εφαρμόζουμε το Ν.Ρ.Κ. στον κόμβο Α

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 \Rightarrow I - I_1 - I_2 - I_3 - \ldots - I_n = 0 \xrightarrow{\text{N.Ohm}} I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \ldots + \frac{V}{R_n}$$

$$\xrightarrow{\text{ισοδύναμο κύκλωμα}} \frac{V}{R_{ΟΛ}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \ldots + \frac{V}{R_n} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{ΟΛ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n} \qquad (3.4)$$

☞ *Παρατηρήσεις*

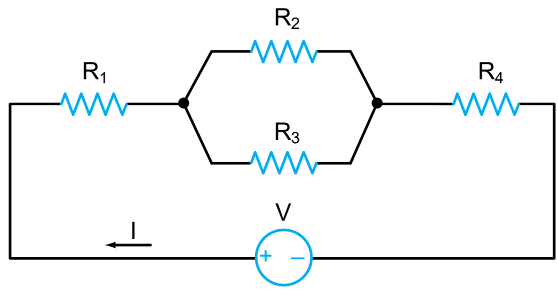
- Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{ΟΛ}$ είναι μικρότερη και από τη μικρότερη αντίσταση.
- Αν όλες οι αντιστάσεις είναι ίσες (με τιμή R), τότε $R_{ΟΛ} = R/n$
- Αν R_1 // R_2 τότε $R_{ΟΛ} = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

γ) Μικτή συνδεσμολογία αντιστάσεων

❑ Είναι η συνδεσμολογία στην οποία συνυπάρχουν οι δύο προηγούμενες περιπτώσεις και για την εύρεση της ισοδύναμης αντίστασης $R_{ΟΛ}$ εφαρμόζονται οι κανόνες που προέκυψαν στις περιπτώσεις αυτές, με τη σειρά που επιβάλλει το εκάστοτε ηλεκτρικό κύκλωμα.

Έτσι, για το σχήμα 3.9 η ισοδύναμη αντίσταση είναι:

$$R_{ΟΛ} = R_1 + R_2 // R_3 + R_4 = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4 \Rightarrow R_{ΟΛ} = \frac{(R_2 + R_3)\cdot(R_1 + R_4) + R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$



Σχήμα 3.9. *Μικτή σύνδεση αντιστάσεων*

3-4.2. Συνδεσμολογία πηγών τάσης

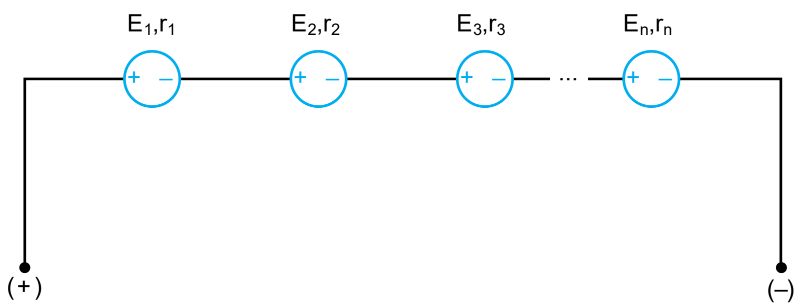
Κάθε «πραγματική» πηγή τάσης χαρακτηρίζεται από μια ηλεκτρεγερτική δύναμη (Η.Ε.Δ) **E** (τάση στα άκρα της, όταν δε διαρρέεται από ρεύμα) και από μια εσωτερική αντίσταση **r.**

Οι πηγές τάσης ως βασικά στοιχεία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων μπορούν να συνδεθούν με διάφορους τρόπους ανάλογα με το τι επιδιώκεται κάθε φορά από αυτόν που συνθέτει ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Αυτό διότι κάθε πηγή τάσης μπορεί να δώσει ένα ρεύμα που δεν μπορεί να ξεπεράσει κάποια οριακή τιμή, η οποία καθορίζει τις δυνατότητες αυτής. Αν όμως υπάρχει ανάγκη μεγαλύτερης τάσης ή μεγαλύτερου ρεύματος ή και τα δύο μαζί, τότε πρέπει να συνδεθούν δύο ή περισσότερες πηγές τάσης μαζί.

Στη συνέχεια εξετάζονται αναλυτικά οι διάφοροι τρόποι συνδεσμολογίας πηγών τάσης που συναντώνται στην πράξη.

α) Συνδεσμολογία πηγών τάσης σε σειρά

❑ Δύο ή περισσότερες πηγές τάσης είναι συνδεδεμένες σε σειρά, όταν ο αρνητικός πόλος της μιας συνδέεται με το θετικό πόλο της επόμενης κ.ο.κ.



Σχήμα 3.10. *Σύνδεση πηγών τάσης σε σειρά*

Το ισοδύναμο κύκλωμα αυτής της συνδεσμολογίας είναι προφανώς μια πηγή τάσης με τα εξής χαρακτηριστικά:

$$E_{ολ} = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n$$
$$r_{ολ} = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n \qquad (3.5)$$

Στη σύνδεση αυτή δεν είναι απαραίτητο οι πηγές να είναι απόλυτα όμοιες, **αλλά να είναι του αυτού τύπου.** Δεν μπορούμε να συνδέσουμε π.χ. ένα ξηρό στοιχείο με συσσωρευτές ή με ηλεκτρικές πηγές που δίνουν ρεύμα σε βιομηχανική κλίμακα.

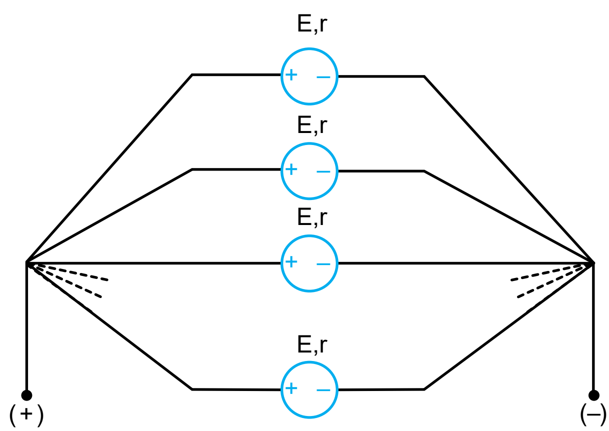
☞ *Παρατηρήσεις*

- Εάν όλες οι πηγές είναι απόλυτα όμοιες (E,r), τότε $E_{ΟΛ} = n \cdot E$ και $r_{ΟΛ} = n \cdot r$.
- Επειδή στη σύνδεση αυτή παίρνουμε μεγάλη τάση, λέμε ότι έχουμε σύνδεση **κατά τάση.**
- Αν στη σύνδεση αυτή αντιστραφούν οι πόλοι μιας πηγής (π.χ. της E_2), λέμε ότι η E_2 είναι συνδεδεμένη με τις υπόλοιπες **κατά αντίθεση.** Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$E_{ολ} = E_1 - E_2 + E_3 + \ldots + E_n \quad \text{και} \quad r_{ολ} = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n$$

β) Παράλληλη συνδεσμολογία πηγών τάσης

❑ Δύο ή περισσότερες πηγές τάσης είναι συνδεδεμένες παράλληλα, όταν όλοι οι θετικοί πόλοι συνδέονται σε κοινό κόμβο και όλοι οι αρνητικοί σε άλλο επίσης κοινό κόμβο.



Σχήμα 3.11. *Σύνδεση πηγών τάσης παράλληλα*

Το ισοδύναμο κύκλωμα της συνδεσμολογίας αυτής είναι προφανώς μια πηγή τάσης με τα εξής χαρακτηριστικά:

$$E_{ΟΛ} = E \qquad r_{ΟΛ} = \frac{E}{n} \tag{3.6}$$

Στη σύνδεση αυτή, για την καλή απόδοση της συστοιχίας πρέπει οι πηγές να είναι **απόλυτα όμοιες.** Στην αντίθετη περίπτωση οι πηγές με τη μεγαλύτερη ΗΕΔ θα στέλνουν ρεύματα σε εκείνες με τη μικρότερη ΗΕΔ, ακόμη και αν το εξωτερικό κύκλωμα είναι ανοικτό. Αυτά είναι τα λεγόμενα "**ρεύματα κυκλοφορίας**" και έχουν ως αποτέλεσμα οι πηγές να εξαντλούνται πρωτού χρησιμοποιηθούν.

☞ *Παρατήρηση*

- Επειδή στη σύνδεση αυτή μπορούμε να πάρουμε ρεύματα με πολύ μεγάλη ένταση, λέμε ότι έχουμε σύνδεση **κατά ένταση.**

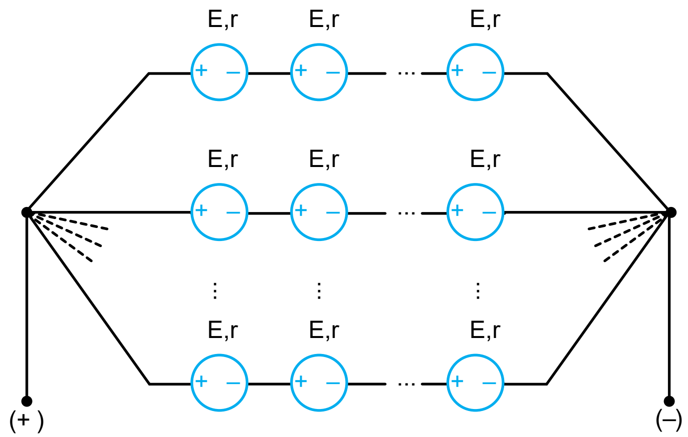
γ) Μικτή συνδεσμολογία πηγών τάσης

❑ Είναι η συνδεσμολογία στην οποία συνυπάρχουν οι δύο προηγούμενες περιπτώσεις και για την εύρεση της ισοδύναμης πηγής τάσης εφαρμόζουμε τους κανόνες που προέκυψαν στις περιπτώσεις αυτές, με τη σειρά που επιβάλλει το εκάστοτε ηλεκτρικό κύκλωμα.

Έτσι, για το κύκλωμα του σχήματος 3.12 η ισοδύναμη πηγή τάσης έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$E_{ΟΛ} = n \cdot E \text{ και } r_{ΟΛ} = \frac{n \cdot r}{m} \tag{3.7}$$

Η μικτή συνδεσμολογία πηγών τάσης χρησιμοποιείται σε εφαρμογές στις οποίες απαιτείται **μεγάλη τάση και μεγάλο ρεύμα.**

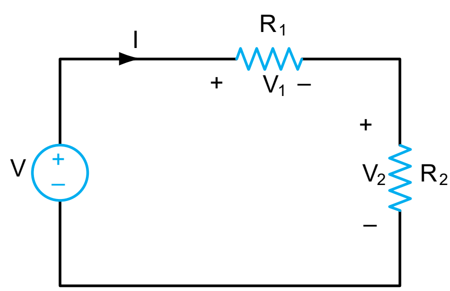


Σχήμα 3.12. Μικτή συνδεσμολογία πηγών τάσης

3-4.3 Διαιρέτες τάσης και ρεύματος

α) Διαιρέτες τάσης

Πολλές φορές -ιδίως σε ηλεκτρονικά κυκλώματα- για τον καταμερισμό της τάσης σε δύο ή περισσότερες αντιστάσεις, χρησιμοποιείται το παρακάτω κύκλωμα γνωστό με το όνομα **«διαιρέτης τάσης».**



Σχήμα 3.13. Κύκλωμα διαιρέτη τάσης

Από το Ν.Τ.Κ. έχουμε

$$V = V_1 + V_2 = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 \Rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Άρα,

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= I\cdot R_1 \\ V_2 &= I\cdot R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} V_1 &= \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot V \\ V_2 &= \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot V \end{aligned} \qquad (3.8)$$

δηλαδή,

❑ η τάση στα άκρα μιας αντίστασης ισούται με την τάση που εφαρμόζεται στο κύκλωμα (ολική τάση) πολλαπλασιασμένη με ένα κλάσμα του οποίου ο αριθμητής είναι η αντίσταση αυτή και ο παρονομαστής είναι το άθροισμα των σειριακών αντιστάσεων

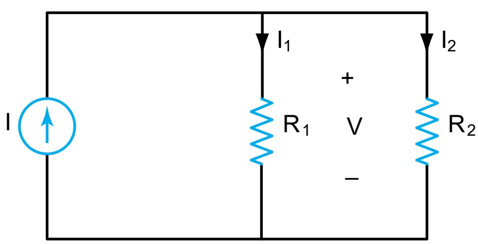
☞ *Παρατηρήσεις*

- Οι δύο αντιστάσεις μπορεί σε ένα πολύπλοκο κύκλωμα να αντιπροσωπεύουν συστήματα αντιστάσεων η καθεμιά, αρκεί τα συστήματα αυτά να είναι συνδεδεμένα σε σειρά.
- *Ο* διαιρέτης τάσης μπορεί να εφαρμοστεί και στη γενική περίπτωση κατά την οποία μια πηγή τάσης V τροφοδοτεί **n** αντιστάσεις R_1, R_2, ..., R_n συνδεσμολογημένες σε σειρά. Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$V_i = \frac{R_i}{R_1+R_2+\ldots+R_n}\cdot V\ ,\ \text{όπου } i = 1,2,3,\ldots,n$$

β) Διαιρέτης ρεύματος

Για τον καταμερισμό του ρεύματος σε διαφορετικούς κλάδους χρησιμοποιείται το παρακάτω κύκλωμα, γνωστό με το όνομα **«διαιρέτης ρεύματος».**



Σχήμα 3.14. *Κύκλωμα διαιρέτη ρεύματος*

Από το Ν.Ρ.Κ. έχουμε:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = V \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow V = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

Άρα,

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{V}{R_1} \\ I_2 &= \frac{V}{R_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} I_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \\ I_2 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I \end{aligned} \qquad (3.9)$$

δηλαδή,

❑ το ρεύμα σε μια αντίσταση ισούται με το ολικό ρεύμα, πολλαπλασιασμένο με ένα κλάσμα του οποίου ο αριθμητής είναι η άλλη αντίσταση και ο παρονομαστής είναι το άθροισμα των δύο παράλληλων αντιστάσεων.

☞ *Παρατηρήσεις*

- Οι δύο αντιστάσεις μπορεί σε ένα πολύπλοκο κύκλωμα να αντιπροσωπεύουν συστήματα αντιστάσεων η καθεμιά, αρκεί τα συστήματα αυτά να είναι συνδεδεμένα παράλληλα.
- Ο διαιρέτης ρεύματος μπορεί να εφαρμοστεί και στη γενική περίπτωση κατά την οποία μια πηγή ρεύματος I τροφοδοτεί **n** αντιστάσεις R_1, R_2, R_3, ..., R_n συνδεσμολογημένες παράλληλα.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$I_j = \frac{\frac{1}{R_j}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}} \cdot I, \quad \text{όπου } j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

3-4.4. Ρυθμιζόμενες αντιστάσεις

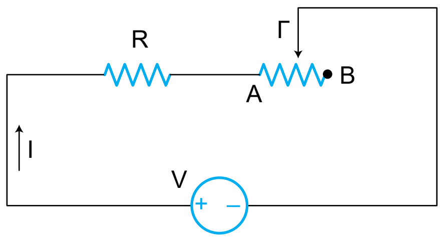
❑ Είναι αντιστάσεις των οποίων η τιμή μπορεί να αλλάξει σύμφωνα με τη θέλησή μας και πάντοτε μέσα στα όρια μια περιοχής τιμών που δίνεται από τον κατασκευαστή.

Οι αντιστάσεις αυτές χρησιμοποιούνται ως ***ροοστάτες*** και ***ποτενσιόμετρα.***

α) Ροοστάστες

Όταν θέλουμε να ρυθμίσουμε την ένταση του ρεύματος σε ένα κύκλωμα, συνδέουμε σε σειρά μια ρυθμιζόμενη αντίσταση που ονομάζεται ***ροοστάτης.***

Ένας ροοστάτης έχει δύο ακροδέκτες Α και Β και μια ενδιάμεση λήψη Γ (σχήμα 3.15).



Σχήμα 3.15. *Σύνδεση ροοστάτη*

Αν μετακινήσουμε το δρομέα (σημείο Γ) μεταβάλλεται η αντίσταση του κυκλώματος και κατά συνέπεια η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Στη γενική περίπτωση ισχύει

$$I = \frac{V}{R + R_{A\Gamma}} \qquad (3.10)$$

Η περιοχή τιμών για το ρεύμα I καθορίζεται από τις ακραίες θέσεις Α, Β. Έτσι, εάν $\Gamma \equiv B$ τότε $I_{min} = \frac{V}{R + R_{AB}}$ ενώ, εάν $\Gamma \equiv A$ τότε $I_{max} = \frac{V}{R}$.

Επομένως, η περιοχή τιμών για το ρεύμα I είναι:

$$\frac{V}{R + R_{AB}} \leq I \leq \frac{V}{R}$$

και εξαρτάται φυσικά από την τιμή R_{AB}.

β) Ποτενσιόμετρα

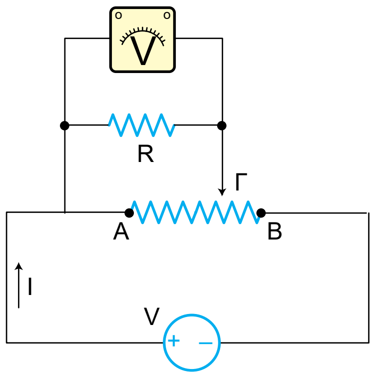
Όταν θέλουμε να ρυθμίσουμε την τάση σε μια αντίσταση ενός κυκλώματος, συνδέουμε παράλληλα μια ρυθμιζόμενη αντίσταση που ονομάζεται ***ποτενσιόμετρο.***

Ένα ποτενσιόμετρο έχει δυο ακροδέκτες Α και Β και μια ενδιάμεση λήψη Γ (σχήμα 3.16).

Αν μετακινήσουμε το δρομέα (σημείο Γ) μεταβάλλεται η αντίσταση, στα άκρα της οποίας μετρείται η τάση και κατά συνέπεια μεταβάλλεται η τάση στην αντίσταση R.

Στην γενική περίπτωση ισχύει:

$$V_R = \frac{R // R_{ΑΓ}}{R // R_{ΑΓ} + R_{ΓΒ}} \cdot V \qquad (3.11)$$



Σχήμα 3.16. *Σύνδεση ποτενσιόμετρου*

Η περιοχή τιμών για την τάση V_R καθορίζεται από τις ακραίες θέσεις Α, Β. Έτσι, εάν Γ ≡ Α τότε $V_{R\ min} = 0$, ενώ εάν Γ≡Β τότε $V_{R\ max} = V$.

Επομένως, η περιοχή τιμών για την τάση V_R είναι:

$$0 \leq V_R \leq V$$

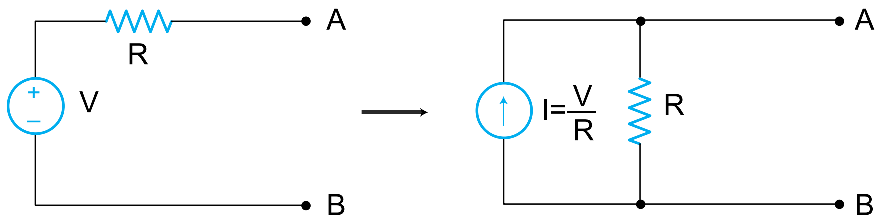
Η τιμή της στην περιοχή [0,V] εξαρτάται προφανώς από τη θέση του δρομέα Γ.

3-4.5. Ειδικές περιπτώσεις ισοδύναμων κυκλωμάτων

Τα ισοδύναμα κυκλώματα που αναφέρονται παρακάτω (χωρίς απόδειξη) είναι πολύ χρήσιμα στην επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων και για το λόγο αυτό κρίθηκε σκόπιμο να παρουσιασθούν.

α) Μετατροπή πηγής τάσης σε πηγή ρεύματος

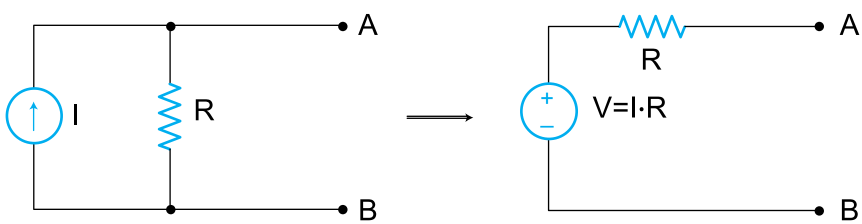
Μια πηγή τάσης V σε σειρά με μία αντίσταση R μετατρέπεται ισοδύναμα σε μία πηγή ρεύματος I = V / R παράλληλη με την αντίσταση R (σχ. 3.17). Η αντίσταση R συμβολίζει στην πραγματικότητα την εσωτερική αντίσταση της πηγής, η οποία είναι πραγματική πηγή και όχι ιδανική.



*Σχήμα **3.17.** Μετατροπή Π.Τ. σε Π.Ρ.*

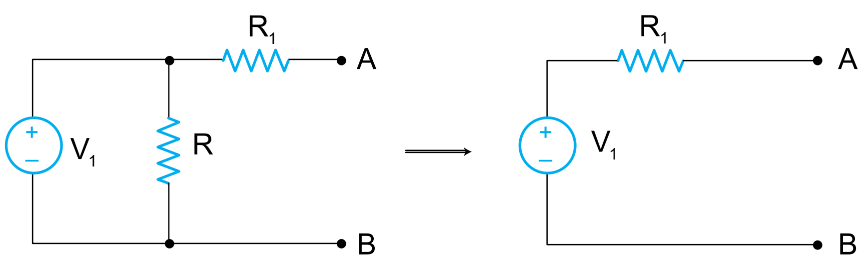
β) Μετατροπή πηγής ρεύματος σε πηγή τάσης

Μία πηγή ρεύματος I παράλληλη με αντίσταση R μετατρέπεται ισοδύναμα σε μία πηγή τάσης $V = I \cdot R$ σε σειρά με την αντίσταση R (σχ. 3.18.). Η αντίσταση R συμβολίζει στην πραγματικότητα την εσωτερική αντίσταση της πηγής, η οποία είναι πραγματική και όχι ιδανική.



*Σχήμα **3.18.** Μετατροπή Π.Ρ. σε Π.Τ.*

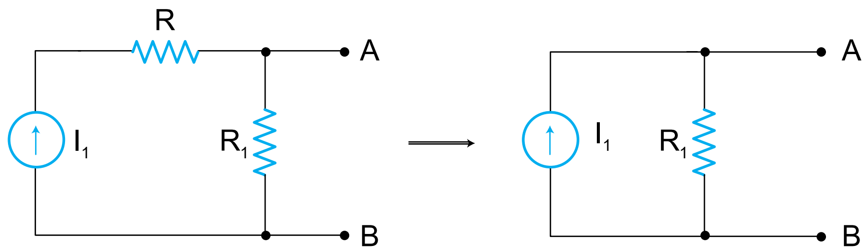
γ) Αντίσταση παράλληλα σε πηγή τάσης



*Σχήμα **3.19.** Αντίσταση παράλληλα σε πηγή τάσης και το ισοδύναμο κύκλωμα*

Παρατηρήστε ότι, η αντίσταση R είναι κυκλωματικά ανύπαρκτη.

δ) Αντίσταση σε σειρά με πηγή ρεύματος



Σχήμα 3.20. *Αντίσταση σε σειρά με πηγή ρεύματος και το ισοδύναμο κύκλωμα*

Παρατηρείστε και πάλι ότι, η αντίσταση R είναι κυκλωματικά ανύπαρκτη.

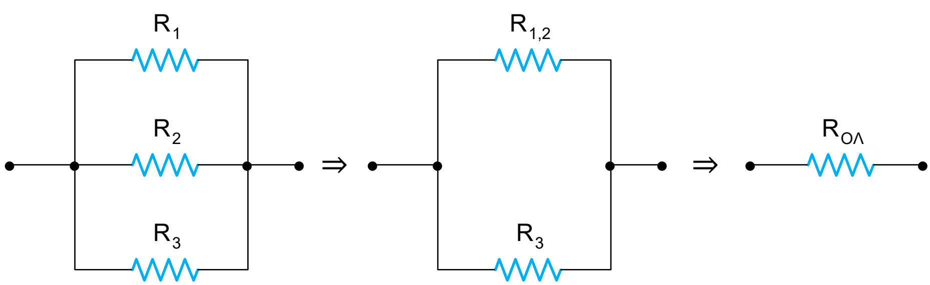
3-5. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Τρεις αντιστάσεις R_1 = 30 Ω, R_2 = 20 Ω, R_3 = 6 Ω συνδέονται παράλληλα. Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση.

Λύση

Για την εύρεση της ισοδύναμης αντίστασης (ή ολικής αντίστασης), υπολογίζουμε πρώτα την ισοδύναμη αντίσταση $R_{1,2}$ εφαρμόζοντας τον τύπο της παράλληλης συνδεσμολογίας και στη συνέχεια εφαρμόζουμε και πάλι παράλληλη συνδεσμολογία μεταξύ των αντιστάσεων $R_{1,2}$ και R_3 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



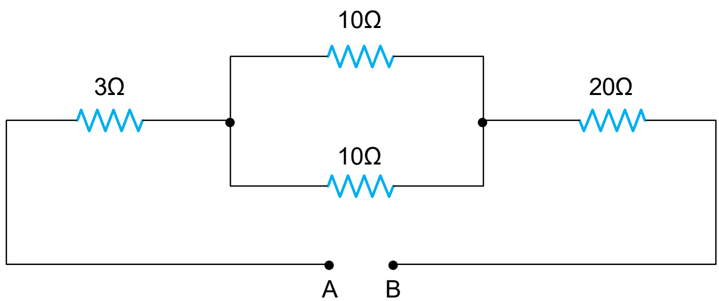
όπου

$$R_{1,2} = R_1 \,//\, R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{30 \cdot 20}{30 + 20} = \frac{600}{50} \Rightarrow R_{1,2} = 12\ (\Omega)$$

$$R_{ΟΛ} = R_{1,2} \,//\, R_3 = \frac{R_{1,2} \cdot R_3}{R_{1,2} + R_3} = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} \Rightarrow R_{ΟΛ} = 4\ (\Omega)$$

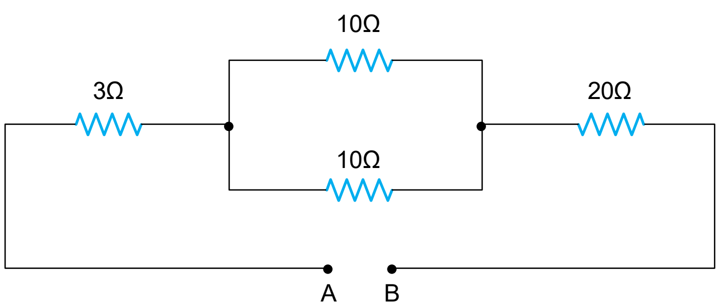
Εφαρμογή 2η

Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση R_{AB} στο παρακάτω κύκλωμα.

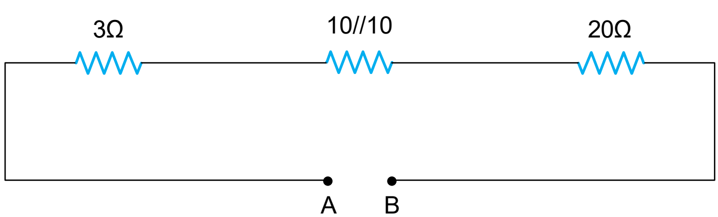


Λύση

Απλοποιώντας διαδοχικά το κύκλωμα (με τη σειρά που επιβάλλεται) προκύπτει:

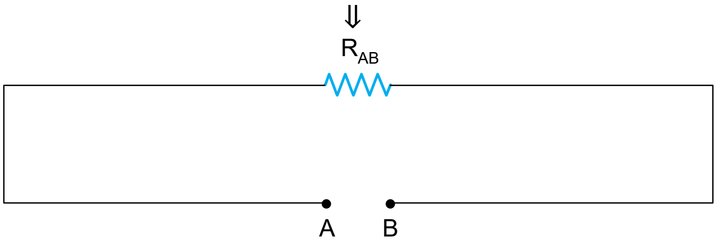


⇓



$$10\,//\,10 = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5\ (\Omega)$$

⇓



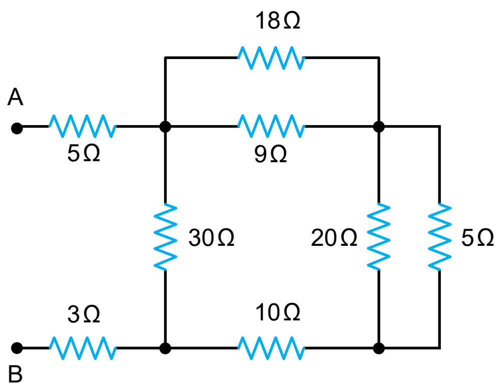
$R_{AB} = 3 + 5 + 20 \quad \Rightarrow$

$R_{AB} = 28\ (\Omega)$

Επομένως, η ισοδύναμη αντίσταση R_{AB} είναι 28 (Ω).

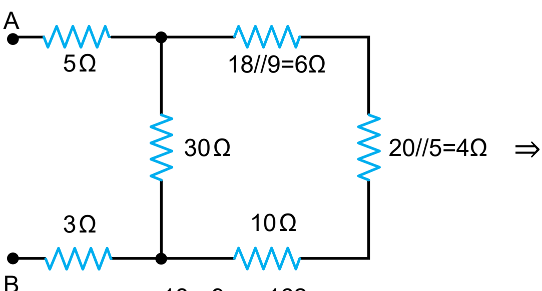
Εφαρμογή 3η

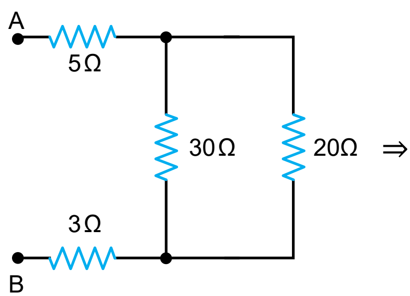
Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση R_{AB} για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος.



Λύση

Απλοποιώντας διαδοχικά το κύκλωμα, προκύπτει:



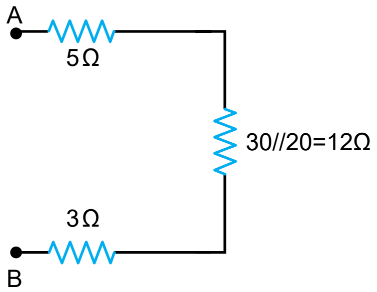


$$18//9 = \frac{18 \cdot 9}{18 + 9} = \frac{162}{27} = 6\Omega$$

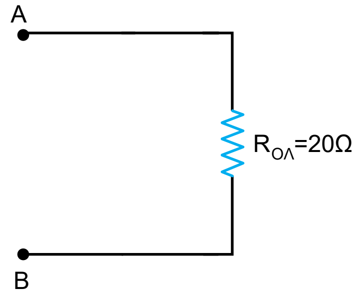
$$20//5 = \frac{20 \cdot 5}{20 + 5} = \frac{100}{25} = 4\Omega$$

6+4+10=20(Ω)

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$$30//20 = \frac{30 \cdot 20}{30 + 20} = \frac{600}{50} = 12\Omega$$

$$R_{ΟΛ} = 5 + 12 + 3 = 20\Omega$$

Επομένως, η ισοδύναμη αντίσταση R_{AB} είναι 20 (Ω).

Εφαρμογή 4η

Συσκευή τροφοδοτείται από ηλεκτρικά στοιχεία και λειτουργεί με τάση 54 V και ρεύμα 2 A. Αν η ηλεκτρεγερτική δύναμη κάθε στοιχείου είναι 1,8 V και η εσωτερική του αντίσταση 0,6 Ω, και είναι συνδεδεμένα, ώστε το καθένα να διαρρέεται από ρεύμα έντασης 0,5 A, να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων.

Λύση

Εφόσον η συσκευή λειτουργεί με τάση 54 V και ρεύμα 2 A και τα διαθέσιμα ηλεκτρικά στοιχεία έχουν το καθένα ηλεκτρεγερτική δύναμη 1,8 V και διαρρέονται από ρεύμα 0,5 A, συμπεραίνουμε, ότι η συνδεσμολογία αυτών είναι μικτή, έτσι ώστε να προκύψουν τα ηλεκτρικά μεγέθη που απαιτούνται για τη λειτουργία της συσκευής.

Έστω, λοιπόν, **n** πηγές τάσης σε κάθε κλάδο και **m** το πλήθος των κλάδων (βλέπε παρ. 3 – 4.2, γ)

Επειδή το ρεύμα κάθε κλάδου είναι 0,5 A και το ολικό ρεύμα είναι 2 A, θα έχουμε:

$$0{,}5 \cdot m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{0{,}5} \Rightarrow m = 4$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι όλο το σύστημα ισοδυναμεί με μια πηγή τάσης ηλεκτρογεγερτικής δύναμης $E_{ολ} = n \cdot E$ και εσωτερικής αντίστασης $r_{ολ} = \frac{n \cdot r}{m}$.

Επομένως θα ισχύει:

$$E_{ΟΛ} - I_{ΟΛ} \cdot r_{ΟΛ} = 54 \Rightarrow n \cdot 1{,}8 - 2 \cdot \frac{n \cdot 0{,}6}{4} = 54 \Rightarrow 1{,}8 \cdot n - 0{,}3 \cdot n = 54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}5\, n = 54 \Rightarrow n = 36$$

Άρα, ο αριθμός των απαιτούμενων ηλεκτρικών στοιχείων είναι:

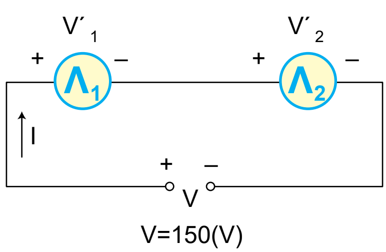
$$m \cdot n = 4 \cdot 36 = 144$$

Εφαρμογή 5η

Δύο λαμπτήρες $Λ_1$ και $Λ_2$ αναγράφουν (60V, 200W) και (60V, 300W) αντίστοιχα. Οι λαμπτήρες συνδέονται σε σειρά και στα άκρα τους εφαρμόζεται τάση 150 (V). Να εξετασθεί εάν οι λαμπτήρες εργάζονται κανονικά.

Λύση

Από τα κατασκευαστικά στοιχεία των λαμπτήρων υπολογίζονται οι αντιστάσεις τους από τη σχέση $P = \frac{V^2}{R}$



$$P_1 = \frac{V_1^2}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{V_1^2}{P_1} = \frac{60^2}{200} \Rightarrow R_1 = 18\,(\Omega)$$

$$P_2 = \frac{V_2^2}{R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{V_2^2}{P_2} = \frac{60^2}{300} \Rightarrow R_2 = 12(\Omega)$$

Εφόσον οι λαμπτήρες συνδέονται σε σειρά, $R_{ΟΛ} = R_1 + R_2 = 18 + 12 = 30$ (Ω) και κατά συνέπεια, το ρεύμα του κυκλώματος είναι:

$$I = \frac{V}{R_{ΟΛ}} = \frac{150}{30} \Rightarrow I = 5(A)$$

Άρα οι τάσεις V'_1 και V'_2 που επικρατούν στα άκρα των λαμπτήρων είναι:

$$V'_1 = I \cdot R_1 = 5 \cdot 18 \Rightarrow V'_1 = 90 \text{ (V)}$$

$$\text{και } V'_2 = I \cdot R_2 = 5 \cdot 12 \Rightarrow V'_2 = 60 \text{ (V)}$$

Επειδή, η τάση που επικρατεί στα άκρα του πρώτου λαμπτήρα $Λ_1$ είναι μεγαλύτερη από αυτήν του κατασκευαστή (90 > 60), προκύπτει ότι δεν εργάζεται κανονικά και κινδυνεύει να καεί, ενώ ο δεύτερος λαμπτήρας $Λ_2$ εργάζεται κανονικά διότι βρίσκεται σε τάση ίση με αυτήν του κατασκευαστή.

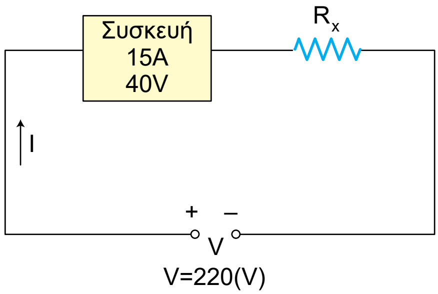
Εφαρμογή 6η

Συσκευή λειτουργεί με ρεύμα 15 (A) και τάση 40 (V). Πρόκειται όμως να συνδεθεί σε τάση 220 (V). Ποια η τιμή της αντίστασης που πρέπει να συνδεθεί, ώστε η συσκευή να λειτουργήσει κανονικά;

Λύση

Εάν δεν συνδεθεί κάποια αντίσταση, προφανώς η συσκευή δεν θα λειτουργήσει κανονικά αλλά θα καταστραφεί, γιατί η τάση των 220 (V) είναι πολύ μεγαλύτερη από την τάση των 40 (V) του κατασκευαστή.

Πρέπει λοιπόν, να συνδεθεί σε σειρά μία αντίσταση R_x η οποία θα προκαλέσει πτώση τάσης ίση με τη διαφορά 220 - 40 = 180 (V).

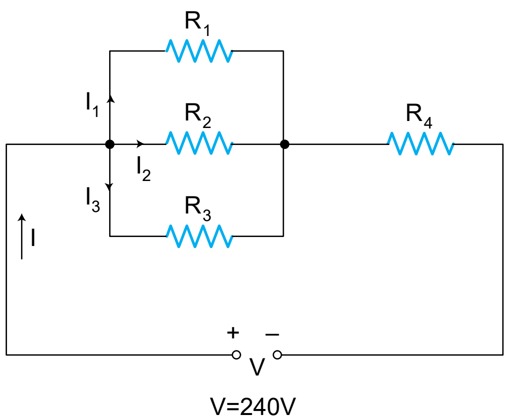


Άρα η τιμή της αντίστασης R_x είναι:

$$R_x = \frac{180}{15} \Leftarrow R_x = 12\ (\Omega)$$

Εφαρμογή 7η

Τρεις αντιστάσεις $R_1 = 10\ (\Omega)$, $R_2 = 20\ (\Omega)$, $R_3 = 60\ (\Omega)$ συνδέονται παράλληλα και σε σειρά με αυτές συνδέεται αντίσταση $R_4 = 18\ (\Omega)$. Στα άκρα του συστήματος εφαρμόζεται τάση 240 (V). Να βρεθούν α) Το ολικό ρεύμα β) Η ένταση του ρεύματος κάθε αντίστασης και γ) η τάση σε κάθε αντίσταση.



Λύση

Οι τρεις αντιστάσεις δίνουν ισοδύναμη αντίσταση,

$$\frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{1}{6} \Rightarrow R_{1,2,3} = 6\ (\Omega)$$

Άρα $$R_{ΟΛ} = R_{1,2,3} + R_4 = 6 + 18 \Rightarrow R_{ΟΛ} = 24\ (\Omega)$$

Επομένως

α) Το ολικό ρεύμα είναι ίσο με: $I = \dfrac{V}{R_{ΟΛ}} = \dfrac{240}{24} \Rightarrow I = 10$ (A).

β) Στα άκρα των τριών αντιστάσεων εφαρμόζεται τάση:

$$V_{1,2,3} = I \cdot R_{1,2,3} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ (V)}$$

Επομένως

$$I_1 = \frac{V_{1,2,3}}{R_1} = \frac{60}{10} = 6\,(A)$$

$$I_2 = \frac{V_{1,2,3}}{R_2} = \frac{60}{20} = 3\,(A)$$

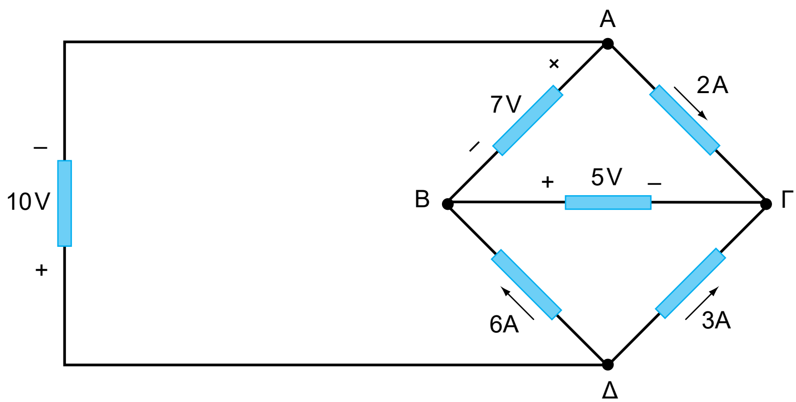
$$I_3 = \frac{V_{1,2,3}}{R_3} = \frac{60}{60} = 1(A)$$

και $I_4 = 10$ (A)

γ) Στις τρεις παράλληλες αντιστάσεις επικρατεί τάση $V_{1,2,3} = 60$ (V) και στην R_4, τάση $V_4 = I_4 \cdot R_4 = 10 \cdot 18 = 180$ (V).

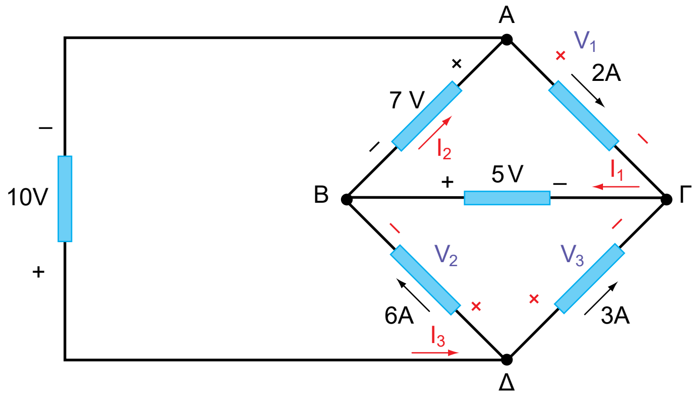
Εφαρμογή 8η

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος να βρεθούν οι τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων χρησιμοποιώντας τους νόμους του Kirchhoff.



Λύση

Εφαρμόζοντας τους Ν.Ρ.Κ. και Ν.Τ.Κ. έχουμε:



Κόμβος Γ: Από το Ν.Ρ.Κ. $\Rightarrow$ $2 + 3 - I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 5$ (A)

Κόμβος Β: Από το Ν.Ρ.Κ. $\Rightarrow$ $6 + I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow 6 + 5 - I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 11$ (A)

Κόμβος Δ: Από το Ν.Ρ.Κ. $\Rightarrow$ $I_3 - 6 - 3 = 0 \Rightarrow I_3 = 9$ (A)

Βρόχος ΑΓΒΑ: Από το Ν.Τ.Κ. $\Rightarrow$ $V_1 - 5 - 7 = 0 \Rightarrow V_1 = 12$ (V)

Βρόχος ΑΒΔΑ: Από το Ν.Τ.Κ. $\Rightarrow$ $7 - V_2 + 10 = 0 \Rightarrow V_2 = 17$(V)

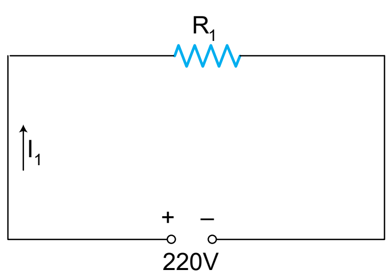
Βρόχος ΒΓΔΒ: Από το Ν.Τ.Κ. $\Rightarrow$ $5 - V_3 + V_2 = 0 \Rightarrow 5 - V_3 + 17 = 0 \Rightarrow V_3 = 22$ (V)

Εφαρμογή 9η

Ηλεκτρική θερμάστρα δυο αντιστάσεων R_1 και R_2 τροφοδοτείται με τάση 220 V. Όταν λειτουργεί η R_1 η θερμάστρα ξοδεύει ισχύ 800 W, ενώ όταν λειτουργούν και οι δύο αντιστάσεις (παράλληλα) η θερμάστρα ξοδεύει ισχύ 2000 W. Να υπολογιστούν οι R_1 και R_2.

Λύση

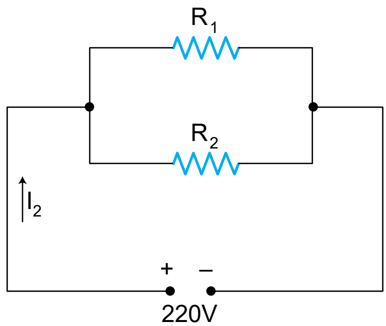
Όταν λειτουργεί μόνο η R_1 το ισοδύναμο κύκλωμα είναι:



Επομένως

$$P_1 = V \cdot I_1 = V \cdot \frac{V}{R_1} = \frac{V^2}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{V^2}{P_1} = \frac{220^2}{800} \Rightarrow R_1 = 60{,}5\ (\Omega).$$

Όταν λειτουργούν και οι δύο παράλληλα το ισοδύναμο κύκλωμα είναι:



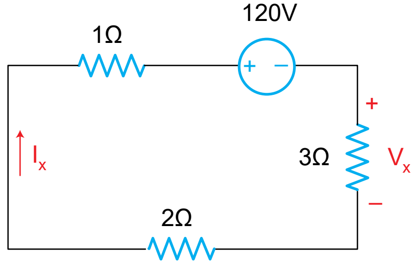
Επομένως

$$P_2 = V \cdot I_2 = V \cdot \frac{V}{R_{1,2}} = \frac{V^2}{R_{1,2}} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{V^2}{P_2} = \frac{220^2}{2000} = 24{,}2 \Rightarrow \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 24{,}2 \Rightarrow$$

$$\frac{60{,}5 \cdot R_2}{60{,}5 + R_2} = 24{,}2 \Rightarrow R_2 = 40{,}25\,(\Omega)$$

Εφαρμογή 10η

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος να βρεθεί η τάση V_x και το ρεύμα I_x με χρήση του διαιρέτη τάσης και του νόμου του Ohm.



Λύση

Εφαρμόζοντας το διαιρέτη τάσης (παράγρ. 3 - 4.3, α)) για τρεις αντιστάσεις προκύπτει:

$$V_x = -120 \cdot \frac{3}{3+2+1} = -120 \cdot \frac{3}{6} \Rightarrow V_x = -60\,(V)$$

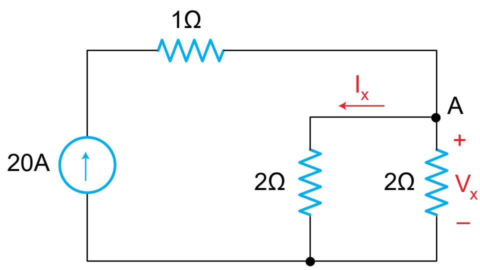
Το ρεύμα I_x προκύπτει με εφαρμογή του νόμου του Ohm

$$I_x = -\frac{V_{ΟΛ}}{R_{ΟΛ}} = -\frac{120}{3+2+1} = -\frac{120}{6} \Rightarrow I_x = -20\ (A)$$

Σχόλιο: Το πρόσημο (-) της τάσης V_x φανερώνει ότι, η πολικότητά της είναι αντίθετη με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση. Το πρόσημο (-) του ρεύματος I_x φανερώνει ότι, η φορά του είναι αντίθετη από αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση.

Εφαρμογή 11η

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος να βρεθεί το ρεύμα I_x και η τάση V_x με χρήση του διαιρέτη ρεύματος και του νόμου του Ohm.



Λύση

Εφαρμόζοντας το διαιρέτη ρεύματος (παράγρ. 3 – 4.3, β)) στον κόμβο Α προκύπτει:

$$I_x = 20 \cdot \frac{2}{2+2} = 20 \cdot \frac{2}{4} \Rightarrow I_x = 10\ (A)$$

Άρα, και το ρεύμα στην αντίσταση των 2 (Ω) στην οποία ζητείται η V_x είναι ίσο με 10 (Α) όπως προκύπτει εύκολα με εφαρμογή και πάλι του διαιρέτη ρεύματος.

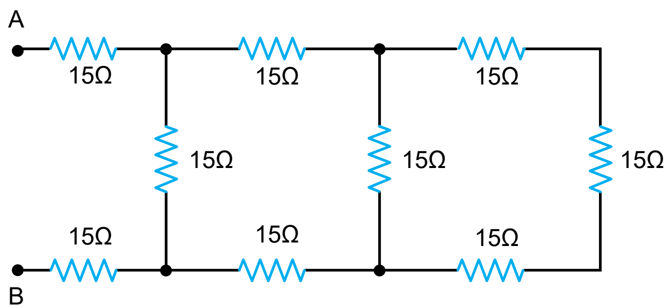
Κατά συνέπεια, η τάση V_x με εφαρμογή του νόμου του Ohm είναι:

$$V_x = 10 \cdot 2 = 20 \text{ (V)}$$

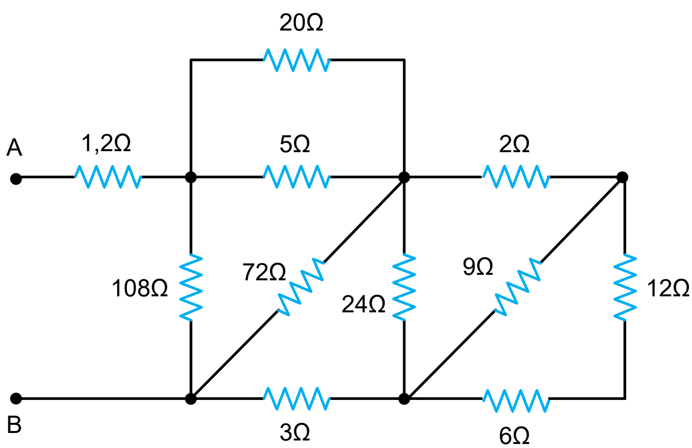
3-6. Προβλήματα προς λύση

1° Τρεις αντιστάσεις R_1 = 10 (Ω), R_2 =10 (Ω), R_3 = 5 (Ω) συνδέονται παράλληλα και το σύστημά τους σε σειρά με αντίσταση R_4 = 15 (Ω).
Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση. *(17,5 (Ω)).*

2° Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση R_{AB} στο παρακάτω κύκλωμα.
(R_{AB} = 41 (Ω))



3° Να βρεθεί η ισοδύναμη αντίσταση R_{AB} στο παρακάτω κύκλωμα *(12 Ω).*



4° 12 λάμπες με αντίσταση 6 Ω η καθεμιά σχηματίζουν τρεις όμοιες σειρές συνδεδεμένες παράλληλα. α) Να υπολογιστεί η ολική αντίσταση. β) Πόσα στοιχεία ΗΕΔ = 1,8 V και r = 0,2 Ω συνδεόμενα σε σειρά πρέπει να τροφοδοτήσουν το κύκλωμα, ώστε το ρεύμα κάθε λάμπας να μην είναι μικρότερο των 1,2 A; *(α) $R_{ΟΛ}$ = 8 Ω, β) n ≥ 27).*

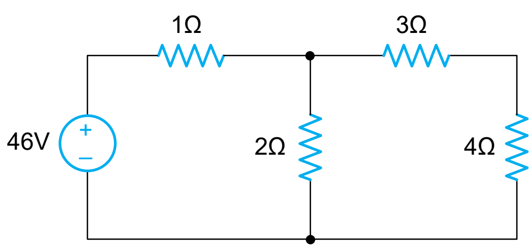
5° Πόσες παράλληλα συνδεδεμένες λάμπες τάσης 110 V και έντασης 0,5 A μπορούμε να τροφοδοτήσουμε κανονικά με τη βοήθεια συστοιχίας, η οποία αποτελείται από 60 σε σειρά συνδεδεμένα στοιχεία, εάν το καθένα έχει ΗΕΔ = 1,86 V και εσωτερική αντίσταση r = 0,005 Ω; *(11)*

6° Ηλεκτρική λάμπα με ισχύ 45 W και τάση λειτουργίας 6 V συνδέεται σε σειρά με ηλεκτρική θερμάστρα με ισχύ 870 W και τάση λειτουργίας 110V. Να εξεταστεί αν η λάμπα λειτουργεί κανονικά ή όχι. (απάντ. λειτουργεί κανονικά).

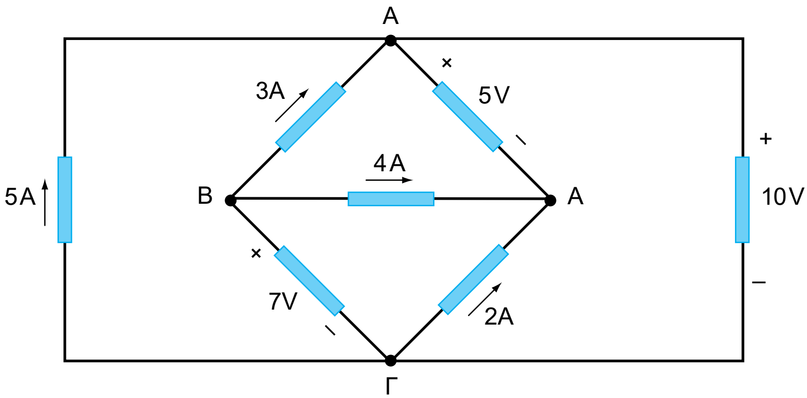
7° Συσκευή λειτουργεί με τάση 120 (V) και καταναλίσκει ισχύ 600 (W). Ποια αντίσταση πρέπει να συνδεθεί με τη συσκευή και με ποιο τρόπο ώστε το σύστημα να καταναλώνει 900 (W); *(48 Ω παράλληλα).*

8° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος να βρεθούν: α) Το ολικό ρεύμα β) Η ένταση του ρεύματος που περνάει από κάθε αντίσταση και γ) η τάση σε κάθε αντίσταση.

(α) $I_{ολ}$ = 18 A, β, γ) Αντίσταση 1 Ω: 18 A, 18 V, Αντίσταση 2 Ω: 14 A, 28 V Αντίσταση 4 Ω: 4 A, 16 V, Αντίσταση 3 Ω: 4 A, 12 V



9° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος να βρεθούν με χρήση των νόμων του Kirchhoff οι τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων.

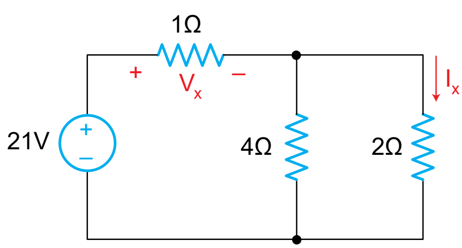


10° Ηλεκτρική θερμάστρα τριών αντιστάσεων R_1, R_2, R_3 τροφοδοτείται με τάση 220 V. Όταν λειτουργεί η R_1, η θερμάστρα ξοδεύει 880 (W). Όταν λειτουργούν οι R_1, R_2 (παράλληλα) η θερμάστρα ξοδεύει 1280 (W). Τέλος, όταν λειτουργούν και οι τρεις αντιστάσεις (παράλληλα) η θερμάστρα ξοδεύει 2280 (W). Να υπολογισθούν οι αντιστάσεις R_1, R_2, R_3.

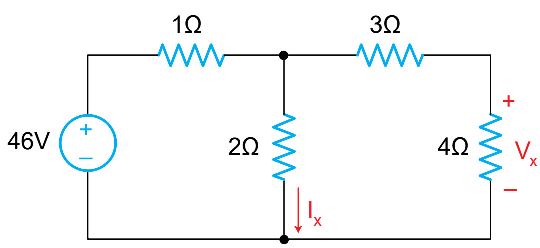
(55 Ω, 121 Ω, 48,8 Ω).

11° Για καθένα από τα παρακάτω κυκλώματα να βρεθεί η τάση V_x και το ρεύμα I_x με χρήση διαιρετών τάσης και ρεύματος.

(α) V_x = 9V, I_x = 6A, β) V_x = 16V, I_x = 14A)



(α)



(β)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μεθοδοι Επιλυσης Συνθετων Ωμικων Κυκλωματων

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται και αναλύονται διεξοδικά τεχνικές επίλυσης γραμμικών ωμικών κυκλωμάτων (Μέθοδος Βρόχων (Μ.Α.Β), Μέθοδος Κόμβων (Μ.Κ)) και λύνονται προβλήματα για κάθε περίπτωση, με σκοπό την πλήρη κατανόηση των μεθόδων αυτών.

Επίσης, περιγράφονται και αναλύονται διεξοδικά μέθοδοι με χρήση ειδικών τρόπων, γνωστών με το όνομα θεωρήματα κυκλωμάτων (θεωρήματα Thevenin και Norton, θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος, θεώρημα επαλληλίας, συμμετρικά κυκλώματα).

Σκοπός του κεφαλαίου είναι, να ***αναπτύξουν*** *οι μαθητές κριτική ικανότητα σχετικά με τις διάφορες μεθόδους επίλυσης των προβλημάτων που αποτελούν αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού ώστε να είναι σε θέση να τα* ***επιλύουν*** *κάθε φορά με τον πιο κατάλληλο τρόπο.*

Γενικά

Η επίλυση ενός κυκλώματος οδηγεί πάντα στην εύρεση του ρεύματος σε κάθε κλάδο αυτού και κατά συνέπεια και των τάσεων όλων των κλάτων (με εφαρμογή του νόμου του Ohm για κάθε κλάδο).

Επομένως, εάν ένα κύκλωμα έχει **b** κλάδους, οι άγνωστοι του προβλήματος είναι στην πραγματικότητα **b** και ως εκ τούτου απαιτούνται **b** ανεξάρτητες εξισώσεις (Μία εξίσωση είναι ανεξάρτητη από τις άλλες, εάν περιέχει ένα ή περισσότερα στοιχεία (πηγές, αντιστάσεις, ρεύματα) που δεν περιέχονται σε όλες τις άλλες εξισώσεις).

Με την εφαρμογή όμως των νόμων Kirchhoff (N.T.K., N.P.K) προκύπτουν περισσότερες από **b** εξισώσεις. Πως όμως διασφαλίζεται το γεγονός ότι, αυτές που πάρθηκαν είναι ανεξάρτητες ώστε να λυθεί το πρόβλημα;

Η δυσκολία λοιπόν για την επίλυση ενός κυκλώματος δεν είναι να βρεθούν b εξισώσεις, αλλά να βρεθούν b ανεξάρτητες εξισώσεις.

Αυτή η δυσκολία άρθηκε μέσα από θεωρήματα που διασφάλισαν τη συστηματική αναζήτηση ανεξάρτητων εξισώσεων, ικανών να επιλύσουν οποιοδήποτε ηλεκτρικό κύκλωμα.

Τα θεωρήματα αυτά είναι:

α) Ο αριθμός των απλών βρόχων (βλέπε παρ. 3-1) ενός κυκλώματος με **b** κλάδους και **n** κόμβους είναι **b - n + 1** και το πλήθος των εξισώσεων που προκύπτουν με εφαρμογή του N.T.K σε κάθε απλό βρόχο είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

β) Σε ένα κύκλωμα με **n** κόμβους η εφαρμογή του N.P.K. σε **n-1** κόμβους δίνει ένα σύνολο ανεξάρτητων εξισώσεων.

4-1. Μέθοδος των Απλών Βρόχων (M.A.B)

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο θεώρημα **α)** και είναι κατάλληλη για μεγάλο πλήθος ηλεκτρικών κυκλωμάτων, ιδίως εάν οι περισσότερες πηγές τους είναι πηγές τάσης.

Για την καλύτερη κατανόηση της M.A.B η ανάλυση θα περιοριστεί για κυκλώματα τα οποία έχουν δύο (2) μόνο απλούς βρόχους, με την πεποίθηση ότι η γενίκευσή της για περισσότερους βρόχους θα είναι πλέον εύκολη.

Η ανάπτυξη και η πορεία της M.A.B εξαρτάται και από το είδος των πηγών που υπάρχουν στο κύκλωμα. Έτσι, διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

α) Κύκλωμα με ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος.

Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Α.Β έχει ως εξής:

α.1) Εάν όλες οι πηγές ρεύματος μετατρέπονται σε πηγές τάσης (παρ. 3- 4.5, β), τότε αυτές μετατρέπονται και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο ανεξάρτητες πηγές τάσης, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στους δύο (2) (απλούς βρόχους ορίζονται τα ρεύματα βρόχων I_1, I_2 ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

ii) Γράφονται οι εξισώσεις των Α.Β ως εξής:

$$\begin{aligned} R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned} \qquad (4.1)$$

όπου: R_{11} ονομάζεται **ιδία αντίσταση** του $(A.B)_1$ και ισούται με το άθροισμα όλων των αντιστάσεων του βρόχου αυτού.

Το ίδιο ισχύει και για την R_{22} του $(A.B)_2$.

$R_{12} = R_{21}$, ονομάζεται **αμοιβαία αντίσταση** των $(A.B)_1$ και $(A.B)_2$ και ισούται με το άθροισμα των αντιστάσεων που συναντώνται στους κοινούς κλάδους των βρόχων αυτών. Το πρόσημα αυτής είναι "+", εάν οι φορές των ρευμάτων των βρόχων πάνω στους κοινούς κλάδους συμπίπτουν, αλλιώς είναι "-"

ΣV_1, παριστάνει το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσης του $(A.B)_1$.

Θετικές λαμβάνονται εκείνες που το ρεύμα βρόχου τις διαπερνά από τον αρνητικό πόλο προς το θετικό, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνονται αρνητικές.

Το ίδιο ισχύει και για το ΣV_2 του $(A.B)_2$.

iii) Το γραμμικό σύστημα 2 x 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται με τη μέθοδο Gramer, (βλέπε παράρτημα Α) και τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πλέον γνωστά.

iv) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).

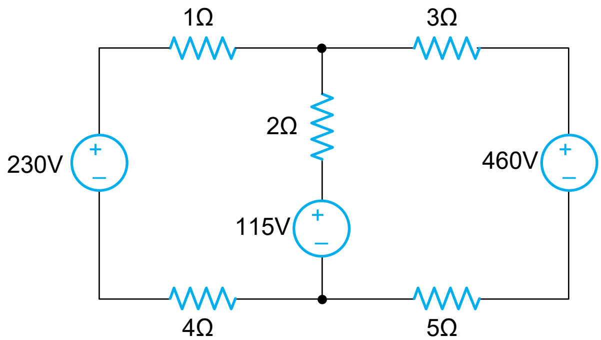
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ Παρατήρηση

• Εφόσον τα ρεύματα των βρόχων λαμβάνονται ομόστροφα, το πρόσημο των R_{12}, R_{21} είναι πάντα "-", αφού στους κοινούς κλάδους των βρόχων τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πάντα αντίρροπα.

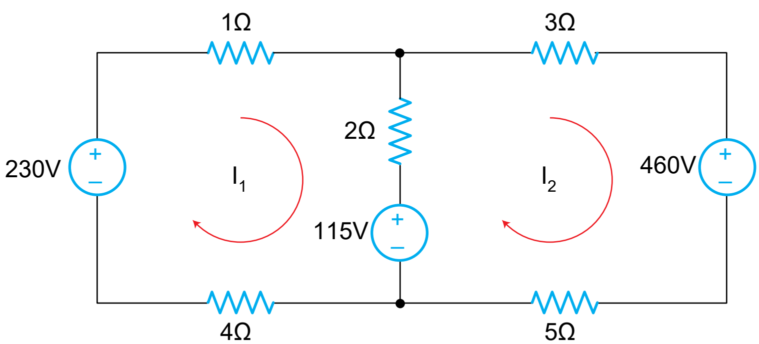
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Ορίζοντας τα ρεύματα βρόχων δεξιόστροφα, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\begin{aligned} R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου $R_{11} = 1 + 2 + 4 = 7$, $R_{22} = 3 + 5 + 2 = 10$, $R_{12} = R_{21} = -2$

$$\Sigma V_1 = 230 - 115 = 115,\ \Sigma V_2 = 115 - 460 = -345$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} 7 \cdot I_1 - 2 \cdot I_2 &= 115 \\ -2 \cdot I_1 + 10 \cdot I_2 &= -345 \end{aligned} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (2) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτουν:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 115 & -2 \\ -345 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{115 \cdot 10 - (-2) \cdot (-345)}{7 \cdot 10 - (-2) \cdot (-2)} = \frac{460}{66} \Rightarrow I_1 = 6,97\ (A)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 115 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & -345 \end{vmatrix}} = \frac{7 \cdot (-345) - 115 \cdot (-2)}{7 \cdot 10 - (-2) \cdot (-2)} = \frac{-2185}{66} \Rightarrow I_2 = -33,11 (A)$$

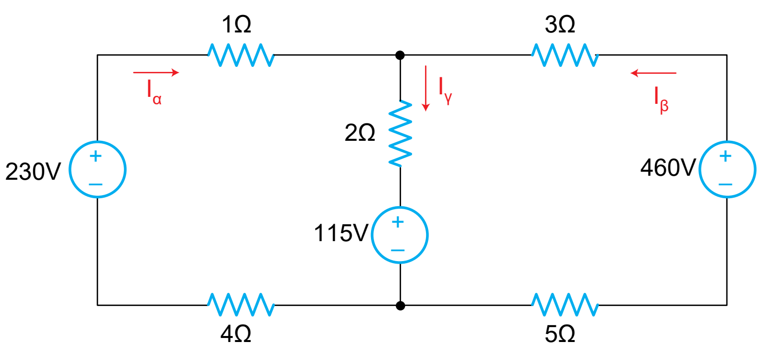
Για τα ρεύματα των κλάδων, προκύπτει:

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 1Ω, 4Ω: Ρεύμα $I_\alpha = I_1 = 6,97$ (A)

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 3Ω,5Ω: Ρεύμα $I_\beta = -I_2 = 33,11$ (A)

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 2Ω: Ρεύμα $I_\gamma = -I_1 - I_2 = 40,8$ (A)

Οι φορές των ρευμάτων των κλάδων φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί



Η καταναλισκόμενη ισχύς στις αντιστάσεις είναι:

$$P_{ANT} = I_\alpha^2 \cdot 1 + I_\alpha^2 \cdot 4 + I_\beta^2 \cdot 3 + I_\beta^2 \cdot 5 + I_\gamma^2 \cdot 2 =$$

$$= 6{,}97^2 \cdot 1 + 6{,}97^2 \cdot 4 + 33{,}11^2 \cdot 3 + 33{,}11^2 \cdot 5 + 40{,}08^2 \cdot 2 = 12.225{,}89 \ \ (W)$$

Η πηγή των 115(V) καταναλίσκει ενέργεια (φορτίζεται) διότι το ρεύμα κινείται από το (+) στο (-).

$$P_{(115V)} = 115 \cdot I_\gamma = 115 \cdot 40{,}08 = 4609{,}2 \ (W)$$

Επομένως:

$$P_{KATAN.} = P_{ANT.} + P_{115(V)} = 12225{,}89 + 4609{,}2 = 16.835{,}09 \ (W)$$

Η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι:

$$P_{\Pi APEX.} = P_{(230V)} + R_{(460V)} = 230 \cdot I_\alpha + 460 \cdot I_\beta =$$

$$= 230 \cdot 6{,}97 + 460 \cdot 33{,}11 = 16834 \ (W)$$

Άρα

$$P_{\Pi APEX.} = P_{KATAN.} \cong 16{,}835 \ (KW)$$

Σχόλιο: Η μικρή απόκλιση των ισχύων οφείλεται στις πράξεις λόγω ύπαρξης δεκαδικών ψηφίων

α.2) Εάν μια πηγή ρεύματος δεν μεταρέπεται σε πηγή τάσης (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής), εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στη θέση της πηγής ρεύματος που παρουσιάζεται το πρόβλημα της μη μετατροπής σε πηγή τάσης, θεωρούμε "εικονικά" πηγή τάση με τιμή ίση με την αντίστοιχη τιμή που επικρατεί στα άκρα της μη μετατρέψιμης πηγής ρεύματος.

ii) Στους δύο (2) απλούς βρόχους ορίζονται τα ρεύματα βρόχων I_1, I_2 ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις των Α.Β όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

iv) Για την "εικονική" πηγή τάσης γράφεται μία εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή ρεύματος με τα ρεύματα βρόχων και φτιάχνεται ένα καινούργιο σύστημα εξισώσεων με πρώτη εξίσωση αυτήν και δεύτερη όποια από τις αρχικές δύο βολεύει (να μην περιέχει την εικονική τάση). Υπάρχει περίπτωση καμμία από τις δύο να μη βολεύει, οπότε προσθέτουμε ή αφαιρούμε αυτές με στόχο την εξαφάνιση της εικονικής τάσης που εμφανίστηκε στην αρχή.

v) Το γραμμικό σύστημα 2×2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται πάλι με τη μέθοδο Cramer και τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πλέον γνωστά.

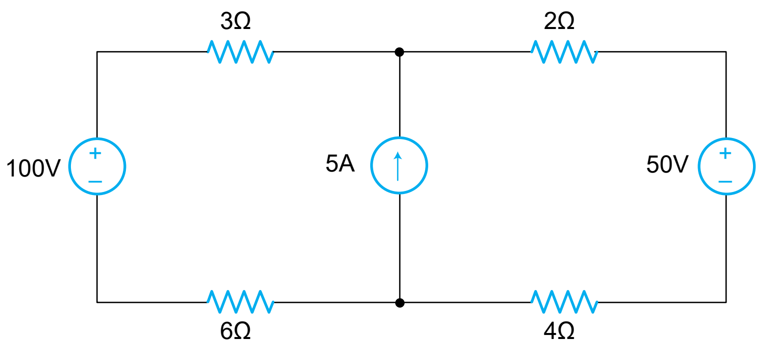
vi) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατήρηση*

• Ο υπολογισμός της τάσης που επικρατεί στη μη μετατρέψιμη πηγή ρεύματος, γίνεται από την εξίσωση που αφαιρέθηκε από την αρχική μορφή του συστήματος, αφού πλέον τα ρεύματα βρόχων είναι γνωστά.

➢ Παράδειγμα

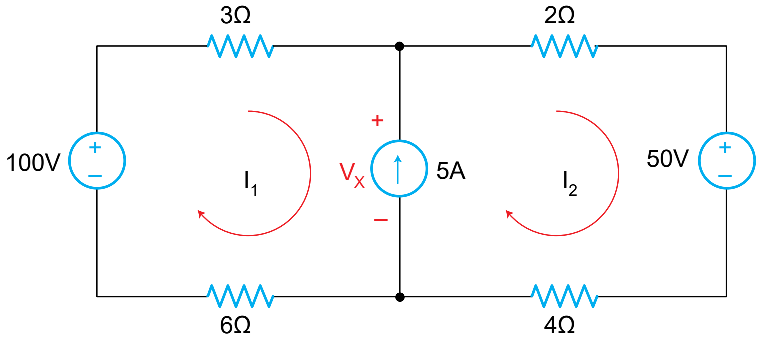
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Παρατηρείστε ότι η πηγή των 5(Α) δεν μετατρέπεται σε πηγή τάσης διότι δεν υπάρχει αντίσταση παράλληλη σ' αυτήν. Επομένως, θεωρούμε ότι στη θέση της υπάρχει μία εικονική πηγή τάσης με τιμή V_x ίση με την τάση που επικρατεί στα άκρα αυτής.

Ορίζοντας στη συνέχεια τα ρεύματα βρόχων δεξιόστροφα, το κύκλωμα γίνεται:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\begin{aligned} R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου $R_{11} = 3 + 6 = 9,\ R_{22} = 2 + 4 = 6,\ R_{12} = R_{21} = 0$

$$\Sigma V_1 = 100 - V_x,\ \Sigma v_2 = V_x - 50$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} 9 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 &= 100 - V_x \\ 0 \cdot I_1 + 6 \cdot I_2 &= V_x - 50 \end{aligned} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την 1η γραμμή της σχέσης (2) με την εξίσωση $I_2 - I_1 = 5(A)$ που χαρακτηρίζει την πηγή ρεύματος, και τη 2η γραμμή με το άθροισμα της 1ης και 2ης γραμμής της σχέσης (2), προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} -1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 &= 5 \\ 9 \cdot I_1 + 6 \cdot I_2 &= 50 \end{aligned} \qquad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα (3) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 50 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 6 - 1 \cdot 50}{(-1) \cdot 6 - 1 \cdot 9} = \frac{-20}{-15} \Rightarrow I_1 = 1{,}33\ (A)$$

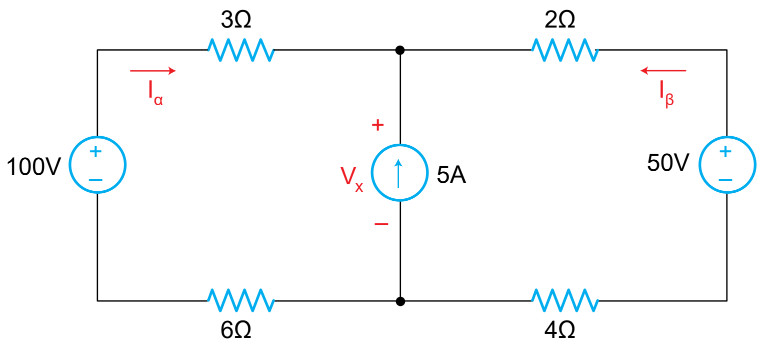
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 9 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)\cdot 50 - 5\cdot 9}{(-1)\cdot 6 - 1\cdot 9} = \frac{-95}{-15} \Rightarrow I_2 = 6{,}33 \text{ (A)}$$

Για τα ρεύματα των κλάδων προκύπτει:

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 3Ω,6Ω: $I_\alpha = I_1 = 1{,}33$ (A)

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 2Ω,4Ω: $I_\beta = I_2 = 6{,}33$ (A)

Οι φορές των ρευμάτων των κλάδων φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Η τάση V_x της πηγής ρεύματος προκύπτει από την 1η ή 2η εξίσωση της σχέσης (2)

$$9 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 = 100 - V_x \Rightarrow 9 \cdot 1{,}33 + 0 = 100 - V_x \Rightarrow V_x = 88{,}03 \text{ (V)}$$

Η καταναλισκόμενη ισχύς στο κύκλωμα είναι:

$$P_{KATAN.} = P_{ANT.} + P_{(50V)} = I_\alpha^2 \cdot 3 + I_\alpha^2 \cdot 6 + I_\beta^2 \cdot 2 + I_\beta^2 \cdot 4 + 50 \cdot I_\beta =$$

$$= 1{,}33^2 \cdot 3 + 1{,}33^2 \cdot 6 + 6{,}33^2 \cdot 2 + 6{,}33^2 \cdot 4 + 50 \cdot 6{,}33 = 572{,}83 \text{ (W)} \cong 573 \text{ (W)}$$

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι:

$$P_{ΠΑΡΕΧ.} = P_{(100V)} + P_{(5A)} = 100 \cdot I_\alpha + 5 \cdot V_x = 100 \cdot 1{,}33 + 5 \cdot 88{,}03 = 573 \text{ (W)}$$

Άρα

$$P_{ΠΑΡΕΧ.} = P_{KATAN.} = 573 \text{ (W)}$$

β) Κύκλωμα με ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές τάσης και ρεύματος

Εάν το κύκλωμα περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές τάσης και ρεύματος, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Α.Β έχει ως εξής:

β.1) Εάν όλες οι πηγές ρεύματος (ανεξάρτητες και εξαρτημένες) μετατρέπονται σε πηγές τάσης (ανεξάρτητες και εξαρτημένες αντίστοιχα), τότε αυτές ματατρέπονται και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο πηγές τάσης, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στους δύο (2) απλούς βρόχους ορίζονται τα ρεύματα βρόχων I_1, I_2 ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

ii) Γράφονται οι εξισώσεις των Α.Β όπως και στην περίπτωση α)

iii) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στο 2ο μέλος των εξισώσεων εκφράζονται με αγνώστους του προβλήματος, δηλαδή με τα ρεύματα βρόχων. Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι και στο 2ο μέλος των εξισώσεων.

iv) Ανακατατάσσουμε τις εξισώσεις ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο πρώτο μέλος αυτών.

v) Το γραμμικό σύστημα 2 x 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται πάλι με τη μέθοδο Cramer και τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πλέον γνωστά.

vi) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).

Με άλλα λόγα ολοκληρώνεται η επίλυση των ηλεκτρικού κυκλώματος.

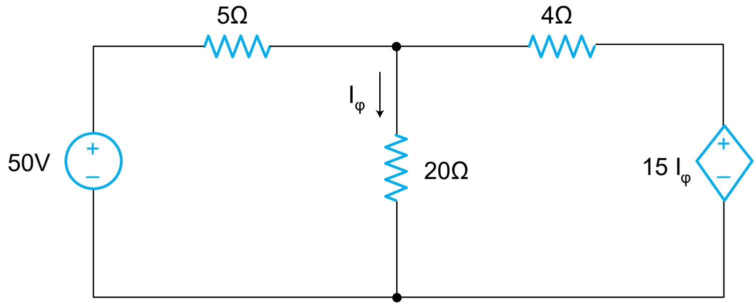
☞ *Παρατηρήσεις*

• Μια εξαρτημένη πηγή ρεύματος θεωρείται μετατρέψιμη σε εξαρτημένη πηγή τάσης όταν υπάρχει παράλληλα κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα το εξαρτώμενο μέγεθος αυτής δεν βρίσκεται στην παράλληλη αυτή αντίσταση.

• Μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος θεωρείται μετατρέψιμη σε ανεξάρτητη πηγή τάσης, όταν υπάρχει παράλληλα κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα δεν εμφανίζεται στην αντίσταση αυτή ή στην πηγή εξαρτώμενο μέγεθος κάποιας εξαρτημένης πηγής ρεύματος ή τάσης.

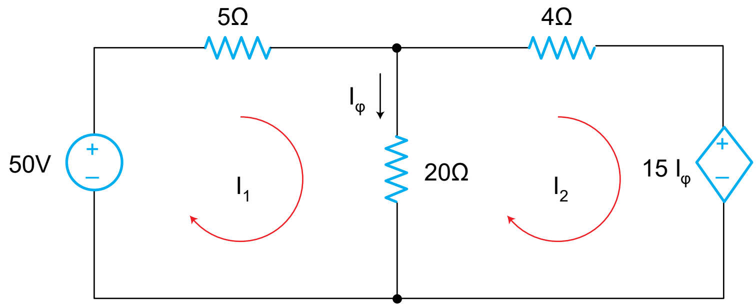
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας της Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Ορίζοντας τα ρεύματα των βρόχων, το κύκλωμα γίνεται:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\begin{aligned} R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου $R_{11} = 5 + 20 = 25,\ R_{22} = 24,\ R_{12} = R_{21} = -20$

$$\Sigma V_1 = 50,\ \Sigma V_2 = -15 I_\varphi$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} 25 \cdot I_1 - 20 \cdot I_2 &= 50 \\ -20 \cdot I_1 + 24 \cdot I_2 &= -15 \cdot I_\varphi \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_\varphi = I_1 - I_2} \left.\begin{aligned} 25 \cdot I_1 - 20 \cdot I_2 &= 50 \\ -20 \cdot I_1 + 24 \cdot I_2 &= -15 \cdot (I_1 - I_2) \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{στη 2η εξίσωση}]{\text{ανακατανομή}} \begin{aligned} 25 \cdot I_1 - 20 \cdot I_2 &= 50 \\ -20 \cdot I_1 + 9 \cdot I_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (2) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & -20 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 & -20 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{50 \cdot 9 - (-20) \cdot 0}{25 \cdot 9 - (-20) \cdot (-5)} = \frac{450}{125} \Rightarrow I_1 = 3{,}6 \text{ (A)}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 50 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 & -20 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{25 \cdot 0 - 50 \cdot (-5)}{25 \cdot 9 - (-20) \cdot (-5)} = \frac{250}{125} \Rightarrow I_2 = 2 \text{ (A)}$$

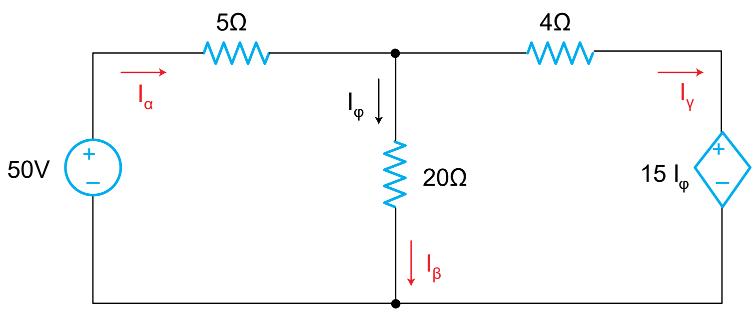
Για τα ρεύματα των κλάδων, προκύπτει:

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 5Ω: Ρεύμα $I_\alpha = I_1 = 3{,}6$ (A)

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 20Ω: Ρεύμα $I_\beta = I_1 - I_2 = 1{,}6 \text{ (A)} = I_\varphi$

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 4Ω: Ρεύμα $I_\gamma = I_2 = 2$ (A)

Οι φορές των ρευμάτων των κλάδων φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Η τάση της εξαρτημένης πηγής είναι: $V_{(15I\varphi)} = 15 \cdot I_\varphi = 15 \cdot 1{,}6 = 24$(V) και κατά συνέπεια η πολικότητά της είναι αυτή που δόθηκε στην εκφώνηση.

Η καταναλισκόμενη ισχύς στο κύκλωμα είναι:

$$P_{ΚΑΤΑΝ.} = P_{ΑΝΤ.} + P_{(15I\varphi)} = I_\alpha^2 \cdot 5 + I_\beta^2 \cdot 20 + I_\gamma^2 \cdot 4 + I_\gamma^2 \cdot 24 =$$

$$= 3{,}6^2 \cdot 5 + 1{,}6^2 \cdot 20 + 2^2 \cdot 4 + 2 \cdot 24 = 180 \text{ (W)}$$

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι

$$P_{ΠΑΡΕΧ} = P_{(50V)} = 50 \cdot I_\alpha = 50 \cdot 3{,}6 = 180 \text{ (W)}$$

Άρα

$$P_{ΠΑΡΕΧ.} = P_{ΚΑΤΑΝ.} = 180 \text{ (W)}$$

β.2) *Εάν μία πηγή ρεύματος (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) δεν μετατρέπεται σε πηγή τάσης (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής,* εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στη θέση της πηγής ρεύματος που παρουσιάζεται το πρόβλημα της μη μετατροπής σε πηγή τάσης, θεωρούμε "εικονικά" πηγή τάση με τιμή ίση με την αντίστοιχη τιμή που επικρατεί στα άκρα της μη μετατρέψιμης πηγής ρεύματος.

ii) Στους δύο (2) απλούς βρόχους ορίζονται τα ρεύματα βρόχων I_1, I_2 ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις των Α.Β όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

iv) Για την "εικονική" πηγή τάσης γράφεται μία εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή ρεύματος με τα ρεύματα βρόχων και φτιάχνεται ένα καινούργιο σύστημα εξισώσεων με πρώτη εξίσωση αυτήν και δεύτερη όποια από τις αρχικές δύο βολεύει (να μην περιέχει την εικονική τάση). Υπάρχει περίπτωση καμμία από τις δύο να μη βολεύει, οπότε προσθέτουμε ή αφαιρούμε αυτές με στόχο την εξαφάνιση της εικονικής τάσης που εμφανίστηκε στην αρχή.

v) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στο 2ο μέλος των εξισώσεων εκφράζονται με αγνώστους του προβλήματος, δηλαδή με τα ρεύματα βρόχων. Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι και στο 2ο μέλος των εξισώσεων.

vi) Ανακατατάσσουμε τις εξισώσεις ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο πρώτο μέλος αυτών.

vii) Το γραμμικό σύστημα 2×2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται πάλι με τη μέθοδο Cramer και τα ρεύματα I_1, I_2 είναι πλέον γνωστά.

viii) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).

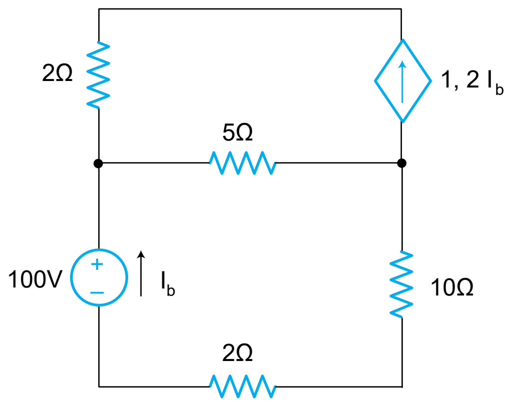
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατήρηση*

Ο υπολογισμός της τάσης που επικρατεί στην μη μετατρέψιμη πηγή ρεύματος (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) γίνεται από την εξίσωση που αφαιρέθηκε από την αρχική μορφή του συστήματος, καθότι τα ρεύματα βρόχων είναι πλέον γνωστά.

➢ Παράδειγμα

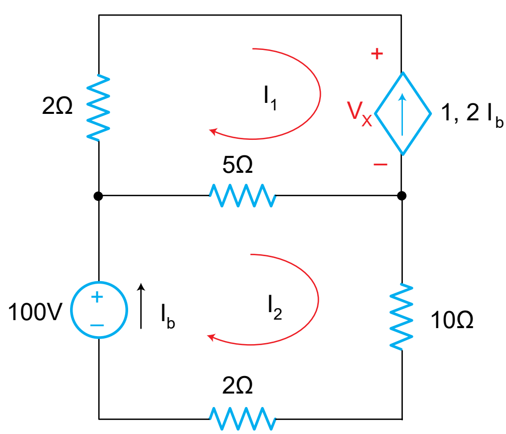
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας την Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Παρατηρείστε ότι, η εξαρτημένη πηγή ρεύματος δεν μετατρέπεται σε πηγή τάσης (τουλάχιστον εύκολα) διότι δεν υπάρχει αντίσταση παράλληλη σ' αυτήν. Επομένως, θεωρούμε ότι στη θέση της υπάρχει μια εικονική πηγή τάσης με τιμή V_x ίση με την τάση που επικρατεί στα άκρα αυτής.

Ορίζοντας στη συνέχεια τα ρεύματα βρόχων δεξιόστροφα, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των Α.Β. είναι:

$$\begin{aligned} R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου $R_{11} = 2 + 5 = 7,\ R_{22} = 5 + 10 + 2 = 17,\ R_{12} = R_{21} = -5$

$$\Sigma V_1 = -V_x, \quad \Sigma V_2 = 100$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} 7 \cdot I_1 - 5 \cdot I_2 &= -V_x \\ -5 \cdot I_1 + 17 \cdot I_2 &= 100 \end{aligned} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την 1η εξίσωση της σχέσης (2) με την εξίσωση $-I_1 = 1,2\ I_b$ που χαρακτηρίζει την εξαρτημένη πηγή ρεύματος και τη 2η εξίσωση όπως είναι, προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} -1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 &= 1,2 \cdot I_b \\ -5 \cdot I_1 + 17 \cdot I_2 &= 100 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_b = I_2} \left.\begin{aligned} -1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 &= 1,2 \cdot I_2 \\ -5 \cdot I_1 + 17 \cdot I_2 &= 100 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{1ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή}} \begin{aligned} -1 \cdot I_1 - 1,2 \cdot I_2 &= 0 \\ -5 \cdot I_1 + 17 \cdot I_2 &= 100 \end{aligned} \qquad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα (3) μ τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1,2 \\ 100 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1,2 \\ -5 & 17 \end{vmatrix}} = \frac{0 \cdot 17 - (-1,2) \cdot 100}{(-1) \cdot 17 - (-1,2) \cdot (-5)} = \frac{120}{-23} \Rightarrow I_1 = -5,217\ (A)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1,2 \\ -5 & 17 \end{vmatrix}} = \frac{(-1) \cdot 100 - 0 \cdot (-5)}{(-1) \cdot 17 - (-1,2) \cdot (-5)} = \frac{-100}{-23} \Rightarrow I_2 = 4,347\ (A)$$

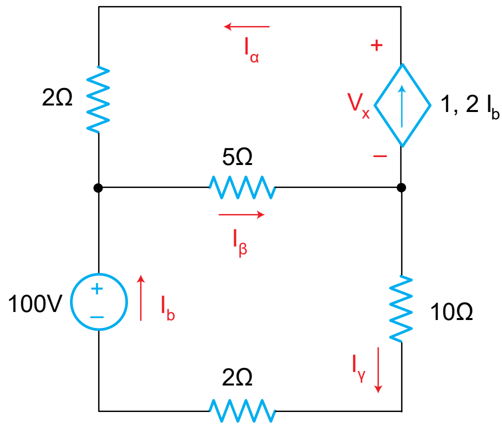
Για τα ρεύματα των κλάδων προκύπτει:

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 2Ω: $I_\alpha = -I_1 = 5,217$ (A)

Κλάδος που περιέχει την αντίσταση 5Ω: $I_\beta = I_2 - I_1 = 9,564$ (A)

Κλάδος που περιέχει τις αντιστάσεις 10Ω, 2Q: $I_\gamma = I_2 = 4,347$ (A)

Οι φορές των ρευμάτων των κλάδων φαίνονται στο σχήματα που ακολουθεί



Η τάση V_x της εξαρτημένης πηγής ρεύματος προκύπτει από την πρώτη εξίσωση της σχέσης (1).

$$7 \cdot I_1 - 5 \cdot I_2 = -V_x \Rightarrow 7 \cdot (-5{,}217) - 5 \cdot 4{,}347 = -V_x \Rightarrow V_x = 58{,}254 \text{ (V)}$$

και το ρεύμα της $1{,}2\ I_b = 1{,}2 \cdot I_2 = 5{,}217$ (A)

και επειδή κινείται από το (-) στο (+) η πηγή παρέχει ισχύ στο κύκλωμα.

Η καταναλισκόμενη ισχύς στο κύκλωμα είναι:

$$P_{KATAN.} = P_{ANT.} = I_\alpha^2 \cdot 2 + I_\beta^2 \cdot 5 + I_\gamma^2 \cdot (10+2) =$$

$$= 5{,}217^2 \cdot 2 + 9{,}564^2 \cdot 5 + 4{,}347^2 \cdot (10 + 2) = 738{,}5 \text{ (W)}$$

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι:

$$P_{\Pi APEX.} = P_{(100V)} + P_{(1{,}2I_b)} = 100 \cdot I_\gamma + 1{,}2I_b \cdot V_x =$$

$$= 100 \cdot 4{,}347 + 5{,}217 \cdot 58{,}254 = 738{,}5 \text{ (W)}$$

Άρα $$P_{\Pi APEX.} = P_{KATAN.} = 738{,}5 \text{ (W)}$$

4-2. Μέθοδος των Κόμβων (Μ.Κ.)

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο θεώρημα β) και είναι κατάλληλη για μεγάλο πλήθος κυκλωμάτων, ιδίως εάν οι περισσότερες πηγές τους είναι πηγές ρεύματος.

Για την καλύτερη κατανόηση της Μ.Κ. η ανάλυση θα περιοριστεί για κυκλώματα τα οποία έχουν τρεις (3) μόνο κόμβους, με την πεποίθηση ότι η γενίκευσή της για περισσότερους κόμβους θα είναι πλέον εύκολη.

Η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Κ. εξαρτάται και από το είδος των πηγών που υπάρχουν στο κύκλωμα. Έτσι, διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

α) Κύκλωμα με ανεξάρτητες πηγές ρεύματος και τάσης

Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές ρεύματος και τάσης, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Κ. έχει ως εξής:

α. ***1) Εάν όλες οι πηγές τάσης μετατρέπονται σε πηγές ρεύματος*** (παρ. 3-4.5,α) τότε αυτές μετατρέπονται και το ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο ανεξάρτητες πηγές ρεύματος, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Ορίζεται ένας κόμβος ως κόμβος αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, σκόπιμο είναι να ορίζεται ο κόμβος που συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους, διότι έτσι προκύπτουν απλούστερες εξισώσεις. Ο κόμβος αναφοράς συμβολίζεται με "$\downarrow$".

ii) Για τους υπόλοιπους δύο (2) κόμβους αφού αριθμηθούν, ορίζονται οι τάσεις τους V1, V2 ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις των κόμβων ως εξής:

$$\begin{aligned} G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 &= \Sigma I_1 \\ G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 &= \Sigma I_2 \end{aligned} \qquad (4.2)$$

όπου: G_{11} ονομάζεται **ιδία αγωγιμότητα** του κόμβου 1 και ισούται με το άθροισμα όλων των αγωγιμοτήτων που καταλήγουν απ' ευθείας στον κόμβο αυτό.

Το ίδιο ισχύει και για την G_{22} του κόμβου 2.

$G_{12} = G_{21}$, ονομάζεται **αμοιβαία αγωγιμότητα** των κόμβων 1 και 2 και ισούται με το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που συνδέουν απ' ευθείας τους κόμβους αυτούς. Το πρόσημα αυτής είναι πάντα "-".

ΣI_1, παριστάνει το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών ρεύματος του κόμβου 1. Θετικές λαμβάνονται εκείνες που κατευθύνονται προς τον κόμβο 1 ενώ εκείνες που απομακρύνονται απ' αυτόν λαμβάνονται αρνητικές.

Το ίδιο ισχύει και για το ΣI_1 του κόμβου 2.

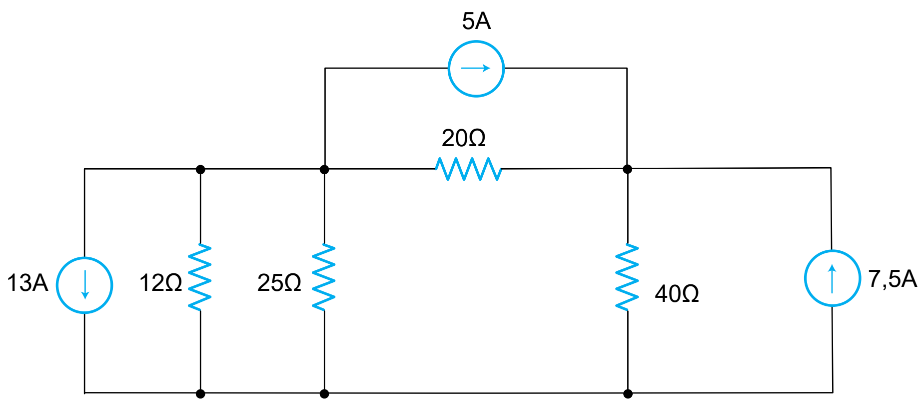
iv) Το γραμμικό σύστημα 2 × 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται με τη μέθοδο Cramer (βλέπε παράρτημα Α) και οι τάσεις V_1, V_2 είναι πλέον γνωστές.

v) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων V_1, V_2 και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).

Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

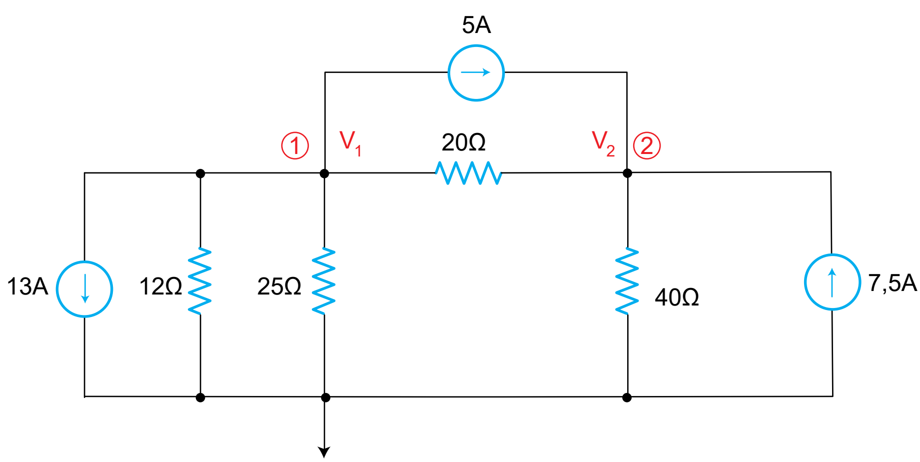
☞ *Παρατήρηση*

• Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ., υπολογίστε τις τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων.



Λύση

Ορίζοντας τον κόμβο αναφοράς και αριθμώντας τους υπόλοιπους για τους οποίους ορίζονται οι κομβικές τάσεις V_1,V_2, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των κόμβων είναι:

$$\begin{aligned} G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 = \Sigma I_1 \\ G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 = \Sigma I_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου $$G_{11} = \frac{1}{12} + \frac{1}{25} + \frac{1}{20} = 0,173, \quad G_{22} = \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = 0,075$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{20} = 0,05$$

$$\Sigma I_1 = -5 - 13 = -18, \ \ \Sigma I_2 = 5 + 7,5 = 12,5$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} 0,173 \cdot V_1 - 0,05 \cdot V_2 = -18 \\ -0,05 \cdot V_1 + 0,075 \cdot V_2 = 12,5 \end{aligned} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (2) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$V_1 = -69,212 \text{ (V)}, V_2 = 120,525 \text{ (V)}$$

Για τις τάσεις των κλάδων, προκύπτει:

Κλάδος πηγής 5Α: $V_α = V_2 - V_3 = 189,737$ (V), το "-" είναι στον κόμβο (1)
Κλάδος πηγής 20Ω: $V_b = V_α = 189,737$ (V), το "-" είναι στον κόμβο (1)
Κλάδος πηγής 13Α: $V_c = -V_1 = 69,212$ (V), το "-" είναι στον=κόμβο (1)
Κλάδος αντίστασης 12Ω: $V_d = V_c = 69,212$ (V), το "-" είναι στον κόμβο (1)
Κλάδος αντίστασης 25Ω: $V_e = V_c = 69,212$ (V), το "-" είναι στον κόμβο (1)
Κλάδος ανίστασης 40Ω: $V_f = V_2 = 120,525$ (V), το "-" είναι στον κόμβο $\downarrow$
Κλάδος πηγής 7,5Ω: $V_g = V_f = 120,525$ (V), το "-" είναι στον κόμβο $\downarrow$

Για τα ρεύματα των κλάδων προκύπτει:

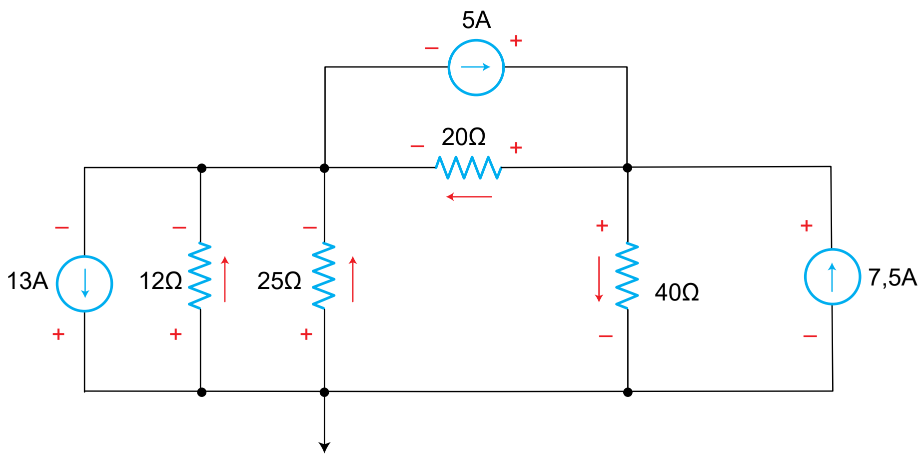
Κλάδος αντίστασης 20Ω: $I_b = \frac{189,737}{20} = 9,486$ (A), φορά από κόμβο (2) σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 12Ω: $I_d = \frac{69,212}{12} = 5,767$ (A), φορά από κόμβο $\downarrow$ σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 25Ω: $I_e = \frac{69,212}{25} = 2,768$ (A), φορά από κόμβο $\downarrow$ σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 40Ω: $I_f = \dfrac{120{,}525}{40} = 3{,}013$ (A), φορά από κόμβο (2) σε κόμβο ⏚

Έτσι, το κύκλωμα με τις τάσεις και τα ρεύματα των κλάδων είναι



Παρατηρείστε ότι όλες οι πηγές παρέχουν ισχύ στο κύκλωμα, διότι το ρεύμα τους κατευθύνεται από το (-) στο (+).

α.2) Εάν μία πηγή τάσης δεν μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής), εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Στη θέση της πηγής τάσης που παρουσιάζεται το πρόβλημα της μη μετατροπής σε πηγή ρεύματος, θεωρούμε "εικονικά" πηγή ρεύματος με τιμή ίση με το αντίστοιχο ρεύμα του κλάδου που περιέχει τη μη μετατρέψιμη πηγή τάσης.

ii) Ορίζεται ένας κόμβος ως κόμβος αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, σκόπιμο είναι να ορίζεται ο κόμβος που συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους, διότι έτσι προκύπτουν απλούστερες εξισώσεις. Ο κόμβος αναφοράς συμβολίζεται με "⏚".

iii) Για τους υπόλοιπους δύο (2) κόμβους αφού αριθμηθούν, ορίζονται οι τάσεις τους V_1 ,V_2 ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iv) Γράφονται οι εξισώσεις των κόμβων όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

v) Για την "εικονική" πηγή ρεύματος γράφεται μια εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή τάσης με τις κομβικές τάσεις V_1 ,V_2 και φτιάχνεται ένα καινούργιο σύστημα εξισώσεων με πρώτη εξίσωση αυτήν και δεύτερη όποια από τις αρχικές δύο βολεύει (να μην περιέχει το εικονικό ρεύμα). Υπάρχει περίπτωση καμμία από τις δύο να μη βολεύει, οπότε προστίθενται ή αφαιρούνται αυτές με στόχο την εξαφάνιση του εικονικού ρεύματος που εμφανίστηκε στην αρχή.

vi) Το γραμμικό σύστημα 2 × 2 (δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους) που προκύπτει λύνεται πάλι με τη μέθοδο Cramer και οι τάσεις V_1,V_2 είναι πλέον γνωστές.

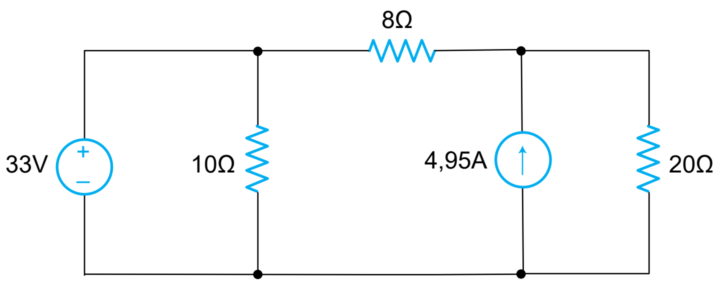
vii) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων V_1, V_2 και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά (με εφαρμογή του νόμου του Ohm).
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατήρηση*

• Ο υπολογισμός του ρεύματος που διαρρέει τη μη μετατρέψιμη πηγή τάσης, γίνεται από την εξίσωση που αφαιρέθηκε από την αρχική μορφή του συστήματος, αφού πλέον οι τάσεις V_1 ,V_2 είναι γνωστές.

➤ Παράδειγμα

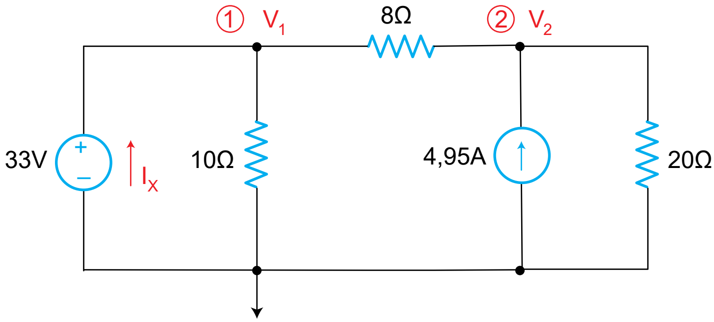
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ. υπολογίστε τις τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων και στη συνέχεια υπολογίστε τις ισχείς των πηγών.



Παρατηρείστε ότι η πηγή των 33 (V) δεν μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος διότι δεν υπάρχει αντίσταση σε σειρά με αυτήν.

Θεωρείται λοιπόν, ότι στη θέση της υπάρχει μια εικονική πηγή ρεύματος με τιμή I_X ίσο με το ρεύμα που διαρρέει την πηγή των 33 (V).

Ορίζοντας τον κόμβο αναφοράς και αριθμώντας τους υπόλοιπους για τους οποίους ορίζουμε τις κομβικές τάσεις, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των κόμβων είναι:

$$\begin{aligned} G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 &= \Sigma I_1 \\ G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 &= \Sigma I_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου: $G_{11} = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} = 0{,}225 \qquad G_{22} = \frac{1}{8} + \frac{1}{20} = 0{,}175$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{8} = -0{,}125$$

$$\Sigma I_1 = I_x,\ \Sigma I_2 = 4{,}95$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} 0{,}225 \cdot V_1 - 0{,}125 \cdot V_2 &= I_x \\ -0{,}125 \cdot V_1 + 0{,}175 \cdot V_2 &= 4{,}95 \end{aligned} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την 1η εξίσωση της σχέσης (2) με την εξίσωση $V_1 = 33$ (V) που χαρακτηρίζει την πηγή τάσης, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} 1 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 &= 33 \\ -0{,}125 \cdot V_1 + 0{,}175 \cdot V_2 &= 4{,}95 \end{aligned} \qquad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα (3) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτουν:

$$V_1 = 33\ (V),\ V_2 = 51{,}857\ (V)$$

Το ρεύμα που διαρρέει την πηγή των 33 (V) προκύπτει από την 1η εξίσωση της σχέσης (2).

$$0{,}225 \cdot V_1 - 0{,}125 \cdot V_2 = I_x \rightarrow 0{,}225 \cdot 33 - 0{,}125 \cdot 51{,}857 \Rightarrow I_x = 0{,}942\ (A)$$

Για τις τάσεις των κλάδων, προκύπτουν:

Κλάδος πηγής 33Α: $V_α = V_1 = 33$ (V), το "-" είναι στον κόμβο ↓

Κλάδος αντίστασης 10Ω: $V_b = V_1 = 33$ (V), το "-" είναι στον κόμβο ↓

Κλάδος αντίστασης 8Ω: $V_c = V_2 - V_1 = 18{,}857$ (V), το "-" είναι στον κόμβο (1)

Κλάδος πηγής 4,95Α: $V_d = V_2 = 51{,}857$ (V), το "-" είναι στον κόμβο ↓

Κλάδος αντίστασης 20Ω: $V_e = V_2 = 51{,}857$(V), το "-" είναι στον κόμβο ↓

Τα ρεύματα στους κλάδους προκύπτουν:

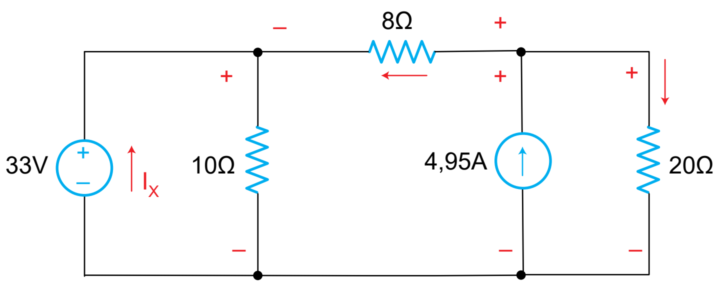
Κλάδος πηγής 33(V) : $I_α = I_x = 0{,}942$(A), φορά από κόμβο ↓ σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 10Ω: $I_b = \dfrac{33}{10} = 3{,}3$ (A), φορά από κόμβο (1) σε κόμβο ↓

Κλάδος αντίστασης 8Ω: $I_c = \dfrac{18{,}857}{8} = 2{,}357$ (A), φορά από κόμβο (2) σε κόμβο (1)

Κλάδος αντίστασης 20Ω: $I_e = \dfrac{51{,}857}{20} = 2{,}592$ (A), φορά από κόμβο (2) σε κόμβο ↓

Έτσι, το κύκλωμα με τις τάσεις και με τις φορές των ρευμάτων, γίνεται:



Οι ισχείς των πηγών, προκύπτουν:

$$P_{(33V)} = 33 \cdot I_x = 33 \cdot 0{,}942 \Rightarrow P_{(33v)} = 31{,}086 \text{ (W), παρεχόμενη}$$

$$P_{(4,95A)} = 4{,}95 \cdot V_d = 4{,}95 \cdot 51{,}857 = 256{,}69 \text{ (W), παρεχόμενη}$$

β) Κύκλωμα με ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές ρεύματος και τάσης

Εάν το κύκλωμα περιέχει και ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές ρεύματος και τάσης, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Κ. έχει ως εξής:

β.1)Εάν όλες οι πηγές τάσεις (ανεξάρτητες και εξαρτημένες) μετατρέπονται σε πηγές ρεύματος (ανεξάρτητες και εξαρτημένες αντίστοιχα), τότε μετατρέπονται και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο πηγές ρεύματος, εκτελούνται τα εξής βήματα:

i) Ορίζεται ένας κόμβος σαν κόμβος αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, σκόπιμο είναι να ορίζεται ο κόμβος που συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους, διότι έτσι θα προκύψουν απλούστερες εξισώσεις.

ii) Για τους υπόλοιπους δύο (2) κόμβους αφού αριθμηθούν, ορίζονται οι τάσεις V_1, V_2 ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις κόμβων όπως και στην περίπτωση α).

iv) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις εκφράζονται με τους αγνώστους του προβλήματος, δηλαδή με τις κομβικές τάσεις.
Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι (κομβικές τάσεις) και στο 2ο μέλος των εξισώσεων.

v) Ανακατατάσσονται τα στοιχεία των εξισώσεων ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο αριστερό μέλος αυτών.

vi) Το γραμμικό σύστημα 2×2 που προκύπτει λύνεται όπως και στην περίπτωση α) και οι κομβικές τάσεις είναι πλέον γνωστές.

vii) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά. Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

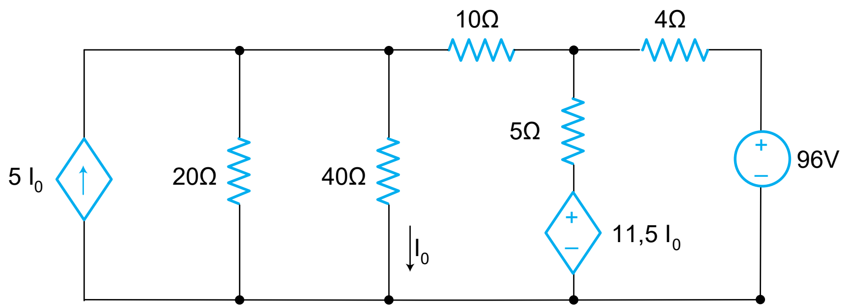
☞ *Παρατηρήσεις*

• Μια εξαρτημένη πηγή τάσης θεωρείται μετατρέψιμη σε εξαρτημένη πηγή ρεύματος όταν υπάρχει σε σειρά κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα το εξαρτώμενο μέγεθος αυτής δεν βρίσκεται στην αντίσταση αυτή.

• Μια ανεξάρτητη πηγή τάσης θεωρείται μετατρέψιμη σε ανεξάρτητη πηγή ρεύματος όταν υπάρχει σε σειρά κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα δεν εμφανίζεται στην αντίσταση αυτή ή στην πηγή εξαρτώμενου μέγεθος κάποιας εξαρτημένης πηγής τάσης ή ρεύματος.

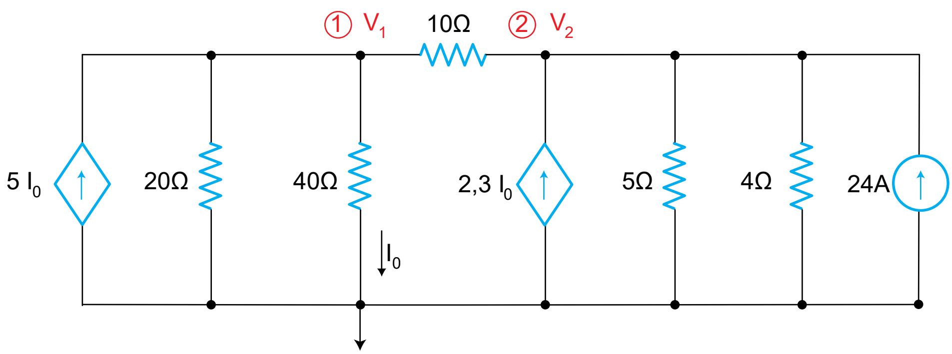
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ., υπολογίστε τις τάσεις όλων των κόμβων.



Λύση

Μετατρέποντας τις πηγές τάσης σε πηγές ρεύματος το κύκλωμα παίρνει τη μορφή



Οι εξισώσεις των κόμβων είναι:

$$\begin{aligned} G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 &= \Sigma I_1 \\ G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 &= \Sigma I_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου: $$G_{11} = \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{10} = 0{,}175 \qquad G_{22} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = 0{,}55$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{10} = -0{,}1$$

$$\Sigma I_1 = 5I_0,\ \Sigma I_2 = 2{,}3I_0 + 24$$

Επομένως, οι εξισώσεις της σχέσης (1) παίρνουν τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}175 \cdot V_1 - 0{,}1 \cdot V_2 &= 5I_0 \\ -0{,}1 \cdot V_1 + 0{,}55 \cdot V_2 &= 2{,}3I_0 + 24 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_0 = \frac{V_1}{40}} \left.\begin{aligned} 0{,}175 \cdot V_1 - 0{,}1 \cdot V_2 &= \frac{5}{40} I_0 \\ -0{,}1 \cdot V_1 + 0{,}55 \cdot V_2 &= \frac{2{,}3}{40} V_1 + 24 \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{1ης και 2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{array}{l} 0{,}05 \cdot V_1 - 0{,}1 \cdot V_2 = 0 \\ -0{,}1575 \cdot V_1 + 0{,}55 \cdot V_2 = 24 \end{array} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (2) με τη μέθοδο Cramer, προκύπτει:

$$V_1 = 204{,}25(V),\ V_2 = 102{,}127(V)$$

β.2) Εάν μία πηγή τάσης δεν μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής), εκτελούνται τα εξής βήματα.

i) Ορίζεται και πάλι ο κόμβος αναφοράς

ii) Για τους υπόλοιπους δύο (2) κόμβους αφού αριθμηθούν, ορίζονται οι τάσεις τους V_1, V_2 ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iii) Γράφονται οι εξισώσεις κόμβων όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

iv) Για την "εικονική" πηγή ρεύματος γράφεται μια εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή τάσης με τις κομβικές τάσεις V_1 , V_2 και φτιάχνεται ένα καινούριο σύστημα εξισώσεων με πρώτη εξίσωση αυτήν και δεύτερη όποια από τις αρχικές δύο βολεύει (να μην περιέχει το εικονικό ρεύμα). Υπάρχει περίπτωση καμμία από τις δύο να μη βολεύει, οπότε προστίθενται ή αφαιρούνται αυτές με στόχο την εξαφάνιση του εικονικού ρεύματος που εμφανίστηκε στην αρχή.

v) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις εκφράζονται με τους αγνώστους που προβλήματος, δηλαδή με τις κομβικές τάσεις.

vi) Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι (κομβικές τάσεις) και στο 2ο μέλος των εξισώσεων.

vii) Ανακατατάσσονται στοιχεία των εξισώσεων ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο αριστερό μέλος αυτών.

vii) Το γραμμικό σύστημα 2×2 που προκύπτει λύνεται όπως και στην περίπτωση α) και οι κομβικές τάσεις είναι πλέον γνωστές.

viii) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά. Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

☞ *Παρατήρηση*

• Ο υπολογισμός του ρεύματος που διαρρέει τη μη μετατρέψιμη πηγή τάσης (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) γίνεται από την εξίσωση που αφαιρέθηκε από την αρχική μορφή του συστήματος, καθότι οι κομβικές τάσεις είναι πλέον γνωστές.

Σχόλιο: Σαν παράδειγμα, να λυθεί το προηγούμενο κύκλωμα (περίπτωση β.1) αφαιρώντας την αντίσταση των 4Ω (οπότε, η πηγή των 96V είναι μη μετατρέψιμη).

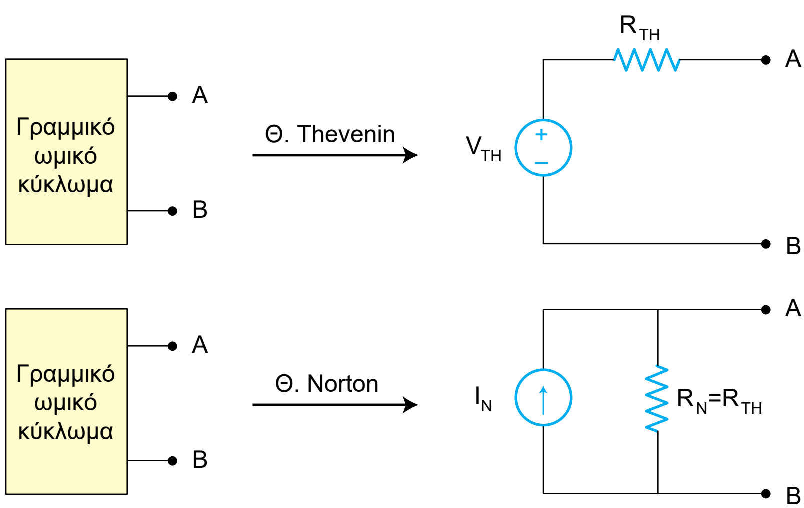
4-3. Θεώρημα Thevenin και Norton

Είναι από τα σπουδαιότερα θεωρήματα των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, κυρίως όταν ενδιαφερόμαστε για ένα συγκεκριμένο μέρος του κυκλώματος ή όταν εξετάζουμε προβλήματα προσαρμογής (για μέγιστη μεταφορά ισχύος).

Για τα γραμμικά ωμικά κυκλώματα το θεώρημα Thevenin και Norton διατυπώνεται ως εξής:

❑ Δοθέντος ενός γραμμικού ωμικού κυκλώματος και δύο ανοικτών ακροδεκτών αυτού Α και Β, μπορεί να αντικατασταθεί το κύκλωμα αυτό από μια ανεξάρτητη πηγή τάσης σε σειρά με μία αντίσταση (θεώρημα Thevenin) ή από μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος παράλληλη με την ίδια αντίσταση (θεώρημα Norton).

Σχηματικά το θεώρημα Thevenin και Norton έχει ως εξής:



Σχήμα 4.1. *Θεώρημα Thevenin και Norton*

Η φυσική σχημασία των παραμέτρων που εμφανίζονται στα ισοδύναμα κυκλώματα κατά Thevenin και Norton είναι:

V_{TH}: Είναι η τάση ανοικτοκυκλώσεως του γραμμικού ωμικού κυκλώματος μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β.

I_N: Είναι το ρεύμα βραχυκυκλώσεως του γραμμικού ωμικού κυκλώματος μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β.

$R_{TH} = R_N$: Είναι η αντίσταση του γραμμικού ωμικού κυκλώματος μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β όταν αυτό είναι "ανενεργό", δηλαδή όταν έχουν μηδενισθεί οι πηγές του.

Οι τρεις αυτές παράμετροι συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$R_{TH} = R_N = \frac{V_{TH}}{I_N} \tag{4.3}$$

Η ανάλυση και η πορεία της τεχνικής που ακολουθείται για τον υπολογισμό των παραμέτρων των ισοδυνάμων κυκλωμάτων κατά Thevenin και Norton, εξαρτάται από το είδος των πηγών που περιέχει το γραμμικό ωμικό κύκλωμα.

Διακρίνονται λοιπόν οι εξής περιπτώσεις:

α) Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές

i) Για την εύρεση της V_{TH} υπολογίζεται η τάση ανοικτοκλώσεως μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β, εφαρμόζοντας όλες τις τεχνικές που αναλύθηκαν μέχρι τώρα (Μ.Α.Β, Μ.Κ, διαιρέτη τάσης, διαιρέτη ρεύματος, κ.λ.π.).

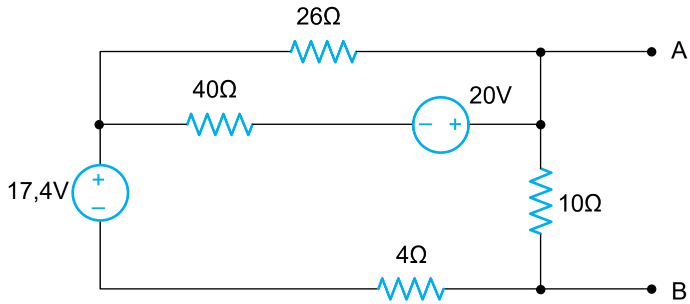
ii) Για την εύρεση της R_{TH} μηδενίζονται όλες οι πηγές (πηγές τάσης βραχυκυκλώνονται, πηγές ρεύματος ανοικτοκυκλώνονται) και υπολογίζεται η ολική αντίσταση του κυκλώματος "κοιτώντας" από τους ακροδέκτες Α και Β.

iii) Για την εύρεση του I_N βραχυκυκλώνονται οι ακροδέκτες Α και Β και υπολογίζεται το ρεύμα που περνάει από το βραχυκύκλωμα αυτό, εφαρμόζοντας όλες τις τεχνικές (Μ.Α.Β, Μ.Κ. διαιρέτη τάσης, διαιρέτη ρεύματος, κ.λ.π.).

iv) Για την εύρεση της R_N ισχύουν ότι και για την R_{TH}, καθότι $R_N = R_{TH}$.

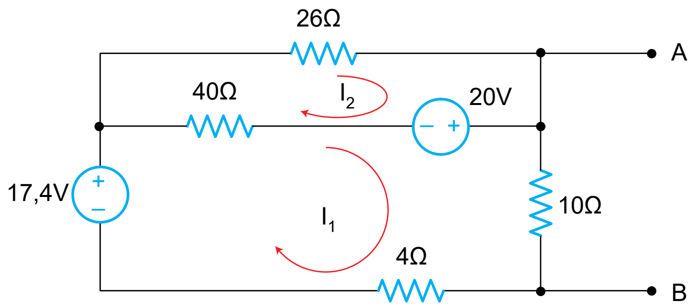
➢ Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα από τους ακροδέκτες Α και Β και στη συνέχεια το ισοδύναμο κατά Norton.



Λύση

Εύρεση της V_{TH}:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\left.\begin{array}{l} R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 = \Sigma V_1 \\ R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 = \Sigma V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 54\cdot I_1 - 40\cdot I_2 = 37,4 \\ -40\cdot I_1 + 66\cdot I_2 = -20 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα (1) προκύπτει:

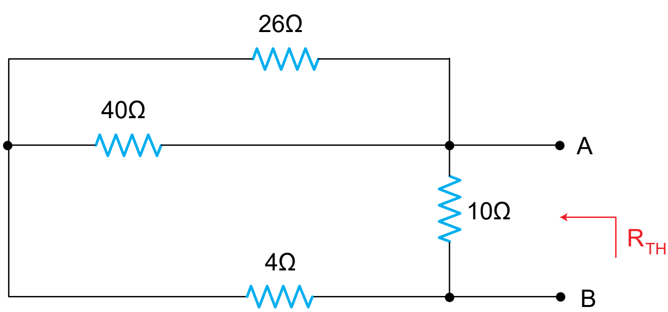
$$I_1 = 0{,}849\ (A) \qquad I_2 = 0{,}219\ (A)$$

Επομένως,

$$V_{TH} = V_{AB} = v_{(10\Omega)} = I_1 \cdot 10 = 0{,}849 \cdot 10 \Rightarrow V_{TH} = 8{,}49\ (V)$$

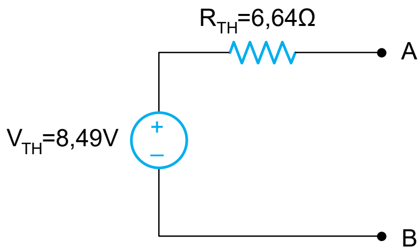
Εύρεση της R_{TH}:

Μηδενίζοντας όλες τις πηγές το κύκλωμα γίνεται:



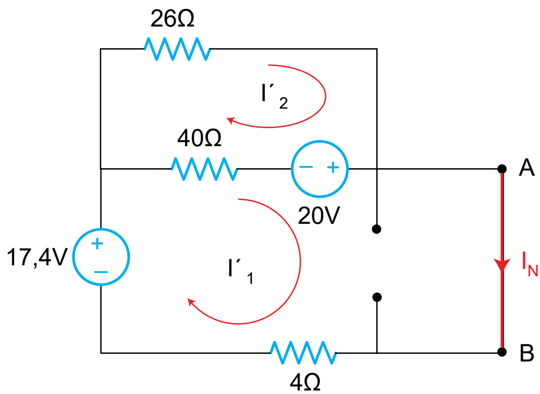
$R_{TH} = R_{AB} = [26//40 + 4]//10 = (15,75 + 4)//10 = 19,75//10 \Rightarrow R_{TH} = 6,64\ (\Omega)$

Άρα, το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα είναι:



Εύρεση του I_N:

Βραχυκυκλώνοντας τους ακροδέκτες Α και Β, το κύκλωμα παίρνει τη μορφή: (η αντίσταση των 10Ω βραχυκλώνεται και επομένως αγνοείται).



Οι εξισώσεις Α.Β είναι:

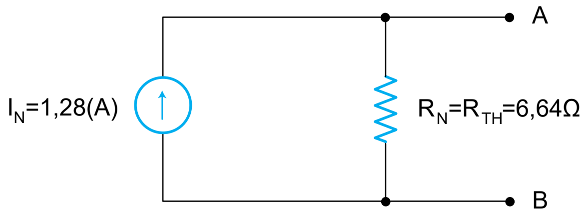
$$\left.\begin{array}{l} R'_{11}\cdot I'_1 + R'_{12}\cdot I'_2 = \Sigma V'_1 \\ R'_{21}\cdot I'_1 + R'_{22}\cdot I'_2 = \Sigma V'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 44\cdot I'_1 - 40\cdot I'_2 = 37,4 \\ -40\cdot I'_1 + 66\cdot I'_2 = -20 \end{array} \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα (1) προκύπτει:

$$I'_1 = 1,28\ (A) \text{ και } I'_2 = 0,47(A)$$

Άρα $\qquad I_N = I'_1 = 1,28\ (A)$

Επομένως, το ισοδύναμο κατά Norton κύκλωμα είναι:



Σχόλιο: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσε κάποιος να βρεθεί και έμμεσα από το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα, αφού

$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{8,49}{6,64} = 1,28\ (A)$$

β) Εάν το κύκλωμα περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές

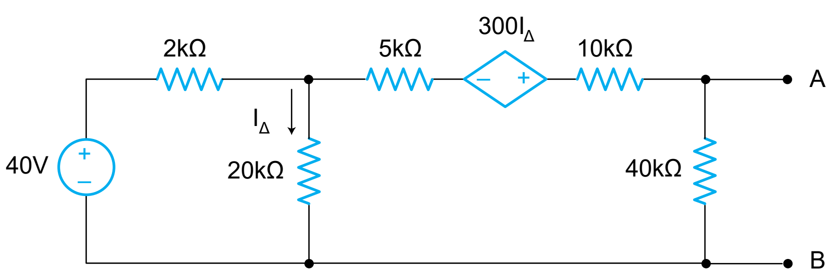
Στην περίπτωση αυτή, εκτελούνται τα εξής βήματα:
i) Υπολογίζεται η V_{TH} όπως και στην περίπτωση (α)
ii) Υπολογίζεται το I_N όπως και στην περίπτωση (α) και
iii) Υπολογίζεται η αντίσταση R_{TH} (ή R_N) από τη σχέση $R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N} = R_N$

☞ *Παρατήρηση*

• Η αντίσταση R_{TH} (ή R_N) δεν μπορεί να υπολογιστεί όπως και στην περίπτωση (α) διότι το κύκλωμα δεν μπορεί να "αδρανοποιηθεί" αφού οι εξαρτημένες πηγές είναι πάντα ενεργές.

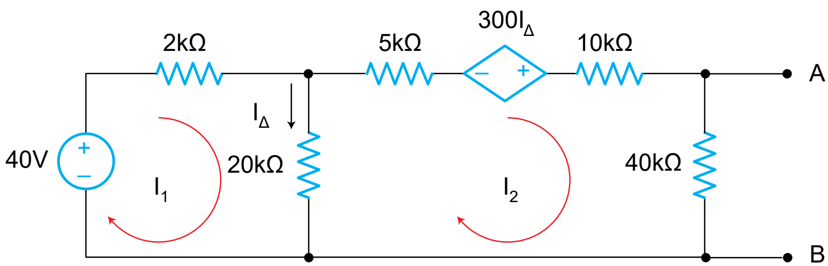
➢ Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα από τους ακροδέκτες A και B.



Λύση

Υπολογισμός της V_{TH}:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 &= \Sigma V_1 \\ R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 &= \Sigma V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 22\cdot I_1 - 20\cdot I_2 &= 40 \\ -20\cdot I_1 + 75\cdot I_2 &= 300\cdot I_\Delta \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_\Delta = I_1 - I_2}$$

$$\left.\begin{aligned} 22\cdot I_1 - 20\cdot I_2 &= 40 \\ -20\cdot I_1 + 75\cdot I_2 &= 300\cdot (I_1 - I_2) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{aligned} 22\cdot I_1 - 20\cdot I_2 &= 40 \\ -320\cdot I_1 + 375\cdot I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα (1), προκύπτει:

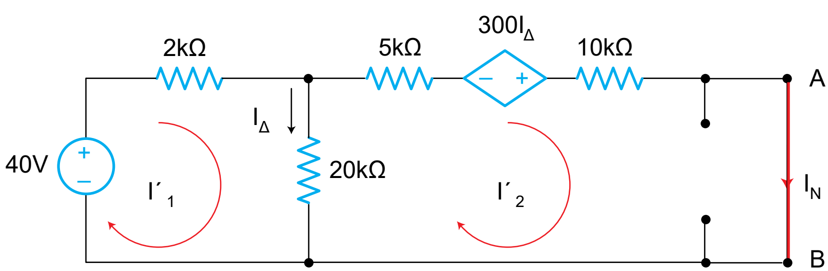
$$I_1 = 8{,}11\ (mA) \qquad I_2 = 6{,}92\ (mA)$$

Επομένως

$$V_{TH} = V_{AB} = V_{(40K\Omega)} = 40 \cdot I_1 = 40 \cdot 8{,}11 \Rightarrow V_{TH} = 324{,}4\ (V)$$

Υπολογισμός του I_N:

Βραχυκλώνοντας τους ακροδέκτες Α, Β (η αντίσταση των 40(ΚΩ) βραχυκλώνεται) το κύκλωμα παίρνει τη μορφή:



Οι εξισώσεις των Α.Β είναι:

$$\left.\begin{aligned} R'_{11}\cdot I'_1 + R'_{12}\cdot I'_2 &= \Sigma V'_1 \\ R'_{21}\cdot I'_1 + R'_{22}\cdot I'_2 &= \Sigma V'_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 22\cdot I'_1 - 20\cdot I'_2 &= 40 \\ -20\cdot I'_1 + 35\cdot I'_2 &= 300\cdot I_\Delta \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_\Delta = I'_1 - I'_2}$$

$$\left.\begin{aligned} 22\cdot I'_1 - 20\cdot I'_2 &= 40 \\ -20\cdot I'_1 + 35\cdot I'_2 &= 300\left(I'_1 - I'_2\right) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{aligned} 22\cdot I'_1 - 20\cdot I'_2 &= 40 \\ -320\cdot I'_1 + 335\cdot I'_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

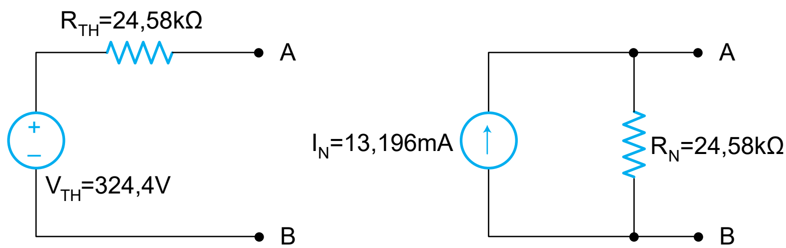
Λύνοντας το σύστημα (2), προκύπτει:

$$I_1' = 13{,}81\ (\text{mA}) \quad I_2' = 13{,}196\ (\text{mA})$$

Επομένως: $I_N = I_2' = 13{,}96$ (mA) και κατά συνέπεια:

$$R_{TH} = R_N = \frac{V_{TH}}{I_N} = \frac{324{,}4}{13{,}196} \Rightarrow R_{TH} = R_N = 24{,}58\ (\text{K}\Omega)$$

Άρα, τα ισοδύναμα κυκλώματα κατά Thevenin και Norton είναι:



γ) Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο εξαρτημένες πηγές

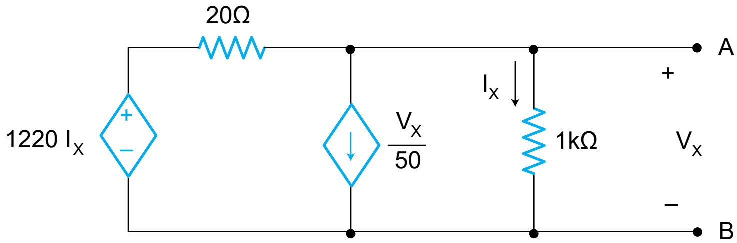
Στην περίπτωση αυτή επειδή δεν υπάρχουν ανεξάρτητες πηγές, προφανώς $V_{TH} = 0$, $I_N = 0$. Επομένως, η εύρεση του ισοδυνάμου κυκλώματος κατά Thevenin και Norton, αποσκοπεί στον υπολογισμό της αντίστασης $R_{TH} = R_N$, έτσι ώστε να γνωρίζει κανείς την ωμική συμπεριφορά του όταν αυτό συνδεθεί σε άλλο κύκλωμα.

Αυτό πετυχαίνεται ως εξής:

Συνδέουμε στους ακροδέκτες Α και Β μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος 1 (A) και υπολογίζουμε με τις γνωστές τεχνικές την τάση V_x που επικρατεί στα άκρα αυτής. Επειδή δε $V_x = R_{TH}\cdot 1$ (A), συμπεραίνουμε ότι η R_{TH} έχει τιμή ίση με την τιμή της τάσης V_x σε μονάδες αντίστασης, δηλαδή σε (Ω).

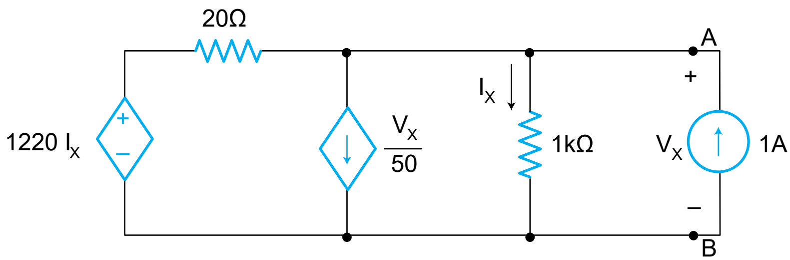
➢ Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα από τους ακροδέκτες Α και Β.

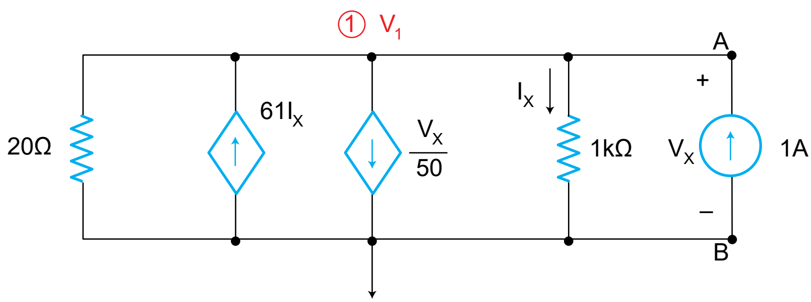


Λύση

Συνδέουμε τους ακροδέκτες A και B μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος 1 (A) και το κύκλωμα γίνεται:



Μετατρέποντας την εξαρτημένη πηγή τάσης σε εξαρτημένη πηγή ρεύματος και εφαρμόζοντας τη Μ.Κ. προκύπτει:



$$G_{11} \cdot V_1 = \Sigma I_1 \Rightarrow \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{1000}\right) \cdot V_1 = 61 I_x - \frac{V_x}{50} + 1 \xrightarrow[V_x = V_1]{I_x = \frac{V_1}{1000}}$$

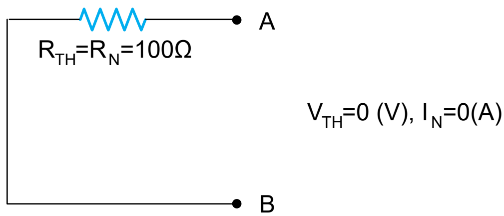
$$\rightarrow 0{,}051 \cdot V_1 = 61 \cdot \frac{V_1}{1000} - \frac{V_1}{50} + 1 \Rightarrow 0{,}051 \cdot V_1 = 0{,}061 V_1 - 0{,}02 V_1 + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}01 \cdot V_1 = 1 \ \rightarrow V_1 = 100 \ (V) = V_x$$

και κατά συνέπεια

$$R_{TH} = 100\ (\Omega)$$

Άρα, το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα είναι:

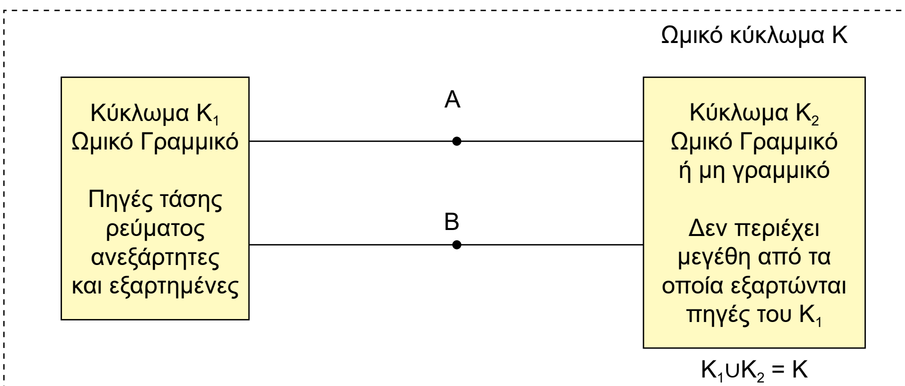


☞ *Παρατηρήσεις*

Και οι τρεις περιπτώσεις που εξετάσθηκαν στην παράγραφο αυτή με στόχο την εύρεση του ισοδυνάμου κατά Thevenin και Norton κυκλώματος, συναντώνται πολύ συχνά στην πράξη.

- Η βασική όμως προϋπόθεση της γραμμικότητας του ωμικού κυκλώματος για την εφαρμογή των θεωρημάτων αυτών, δεν είναι απαραίτητη για το φορτίο (συνήθως ωμικό) το οποίο συνδέεται στους ακροδέκτες A και B με σκοπό την εύρεση της τάσης, του ρεύματος ή της ισχύος σ' αυτό. Το φορτίο μπορεί να είναι είτε γραμμικό είτε μη γραμμικό.
- Ένα άλλο σημείο το οποίο πρέπει κανείς να προσέχει είναι ότι, όταν απομονώνει κάποιο τμήμα του κυκλώματος με σκοπό στο υπόλοιπο να εφαρμόσει τα θεωρήματα αυτά, πρέπει να είναι σίγουρος ότι δεν υπάρχει εξαρτώμενο μέγεθος το οποίο να ανήκει στο απομονωμένο τμήμα, καθότι η διαδικασία μετατροπής του υπολοίπου κυκλώματος κατά Thevenin και Norton είναι ανεξάρτητη από τα δομικά στοιχεία του απομονωμένου τμήματος.

Αυτές οι παρατηρήσεις φαίνονται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα.

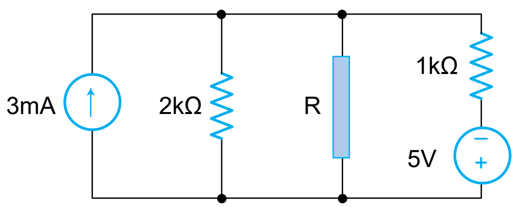


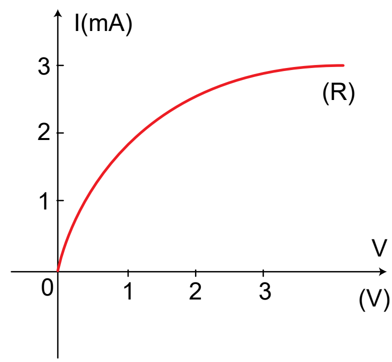
***Σχήμα 4.2** Απαραίτητες προϋποθέσεις για την εφαρμογή των θεωρ. Thevenin και Norton*

• Μία σπουδαία εφαρμογή του θεωρήματος Thevenin για τον υπολογισμό ισχύος σ' ένα συγκεκριμένο τμήμα ενός κυκλώματος, είναι όταν το τμήμα αυτό αποτελείται από μη γραμμική αντίσταση γνωστής χαρακτηριστικής καμπύλης V - I. Ο τρόπος εργασίας στις περιπτώσεις αυτές, φαίνεται μέσα από το ακόλουθο παράδειγμα.

➢ Παράδειγμα

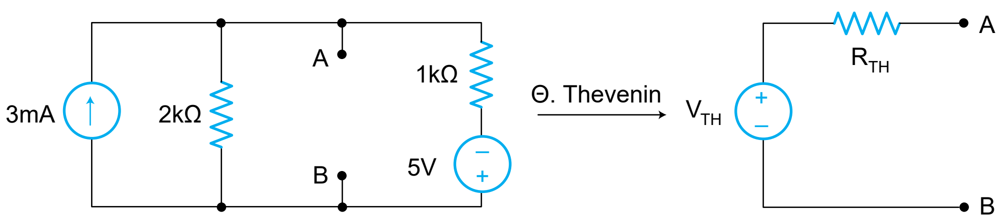
Να υπολογισθεί η ισχύς στη μη γραμμική αντίσταση του παρακάτω κυκλώματος της οποίας δίνεται η χαρακτηριστική καμπύλη.





Λύση

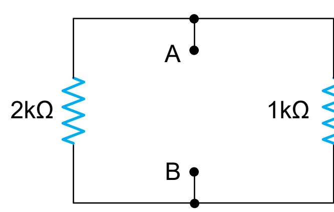
Απομονώνουμε τη μη γραμμική αντίσταση R και για το υπόλοιπο κύκλωμα θα βρούμε το ισοδύναμο κατά Thevenin αυτού, δηλαδή



Εύρεση της R_{TH}:

Μηδενίζοντας τις πηγές του κυκλώματος έχουμε:

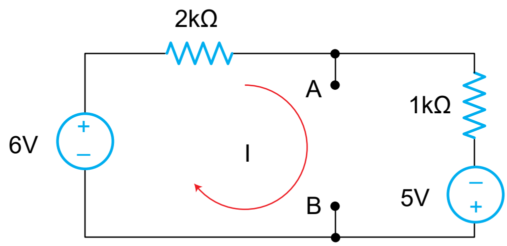
$$R_{TH} = R_{AB} = 2 \,//\, 1 = \frac{2 \cdot 1}{2+1} = \frac{2}{3}\ (\mathrm{K\Omega})$$



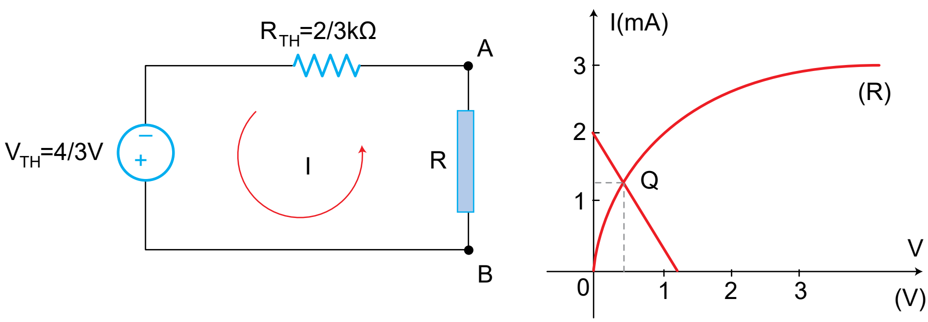
Εύρεση της V_{TH}:

Μετατρέποντας την πηγή ρεύματος σε πηγή τάσης και εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm, προκύπτει:

$$I = \frac{6+5}{2+1} = \frac{11}{3}(mA) \quad \text{και} \quad V_{TH} = V_{AB} = I \cdot 1 - 5 = \frac{11}{3} \cdot 1 - 5 \Rightarrow V_{TH} = -\frac{4}{3}(V)$$



Άρα, το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα είναι:



Αν V η τάση που επικρατεί στα άκρα της μη γραμμικής αντίστασης τότε:

$$V_{TH} = I \cdot R_{TH} + V \Rightarrow \frac{4}{3} = I \cdot \frac{2}{3} + V$$

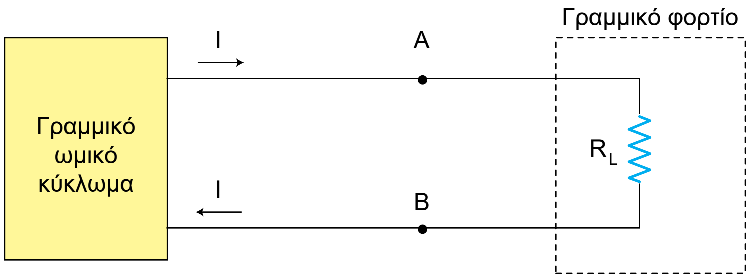
Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής (ευθεία γραμμή) τέμνει τη χαρακτηριστική της μη γραμμικής αντίστασης στο σημείο Q (σημείο λειτουργίας) του οποίου οι συντεταγμένες είναι: V = 0,45 (V) και I = 1,45 (mA).

Επομένως, η ισχύς στη μη γραμμική αντίσταση είναι:

$$P_R = 0{,}45 \cdot 1{,}45 = 0{,}6525 \text{ (mW)}$$

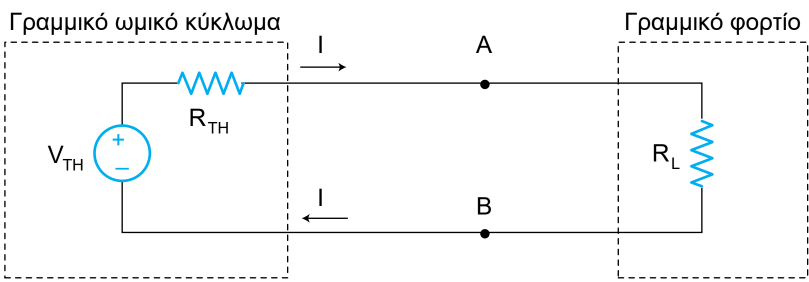
4-4. Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος

Έστω γραμμικό ωμικό κύκλωμα το οποίο τροφοδοτεί γραμμικό φορτίο R_L όπως φαίνεται στο παρακάτω σχημα.



Σχήμα 4.3. Τροφοδοσία γραμμικού φορτίου από γραμμικό ωμικό κύκλωμα

Σύμφωνα με το θεώρημα Thevenin, το κύκλωμα αυτό μετασχηματίζεται ως εξής



Σχήμα 4.4. Ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα του κυκλώματος του σχ. 4.3.

Για μεγίστη μεταφορά ισχύος στο φορτίο R_L, αποδεικνύεται ότι

$$R_L = R_{TH} \tag{4.4}$$

και η μεγίστη μεταφερόμενη ισχύς πάνω στο φορτίο είναι ίση με:

$$P_{max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} \tag{4.5}$$

Εάν, αντί του πολύπλοκου γραμμικού κυκλώματος έχουμε μία πραγματική πηγή τάσης V_s και εσωτερικής αντίστασης R_s, τότε προφανώς για μέγιστη μεταφορά ισχύος σε φορτίο R_L πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\boxed{R_L = R_s} \tag{4.6}$$

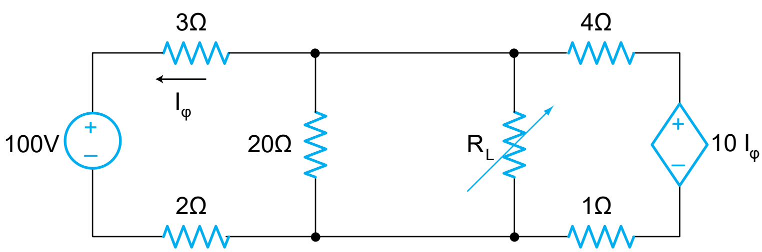
δηλαδή, το εξωτερικό φορτίο πρέπει να είναι ίσο με την εσωτερική αντίσταση της πηγής, η δε μέγιστη ισχύς είναι

$$\boxed{P_{max} = \frac{V_s^2}{4R_s}} \tag{4.7}$$

Το θεώρημα αυτό έχει πολλές εφαρμογές στην πράξη, κυρίως σε θέματα προσαρμογής φορτίου -πηγής μέσω γραμμών μεταφοράς, στις τηλεπικοινωνίες, σε ηλεκτρονικά κυκλώματα, κ.λ.π.

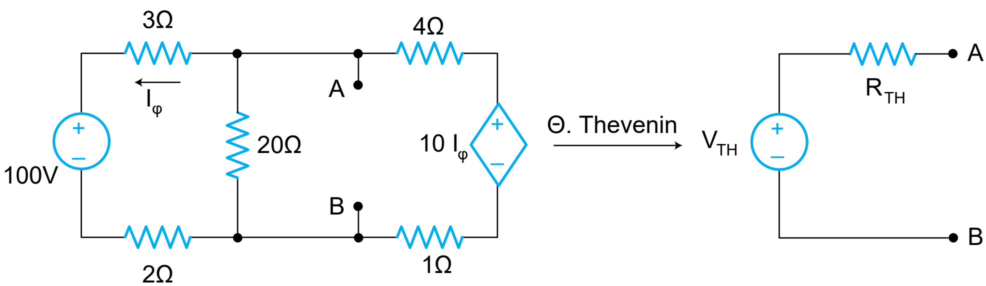
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τιμή της μεταβλητής αντίστασης R_L έτσι ώστε να έχουμε μέγιστη μεταφορά ισχύος σ' αυτήν και στη συνέχεια βρείτε τη μέγιστη αυτή ισχύ.

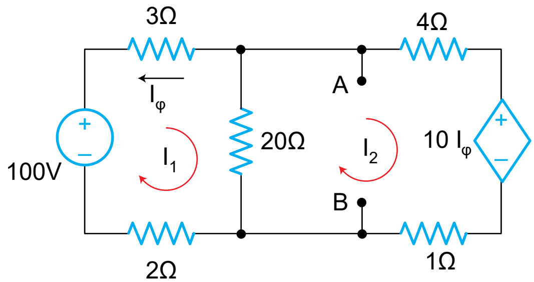


Λύση

Απομονώνουμε τη μεταβλητή αντίσταση R_L και για το υπόλοιπο κύκλωμα θα προσπαθήσουμε να βρούμε το ισοδύναμο κατά Thevenin αυτού, δηλαδή



Εύρεση της V_{TH}:



Οι εξισώσεις των A·B είναι:

$$\left.\begin{array}{l} R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 = \Sigma V_1 \\ R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 = \Sigma V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 25\cdot I_1 - 20\cdot I_2 = 100 \\ -20\cdot I_1 + 25\cdot I_2 = -10\ I_\varphi \end{array}\right\} \xrightarrow{I_\varphi = -I_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 25\cdot I_1 - 20\cdot I_2 = 100 \\ -20\cdot I_1 + 25\cdot I_2 = -10\ (-I_1) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{array}{l} 25\cdot I_1 - 20\cdot I_2 = 100 \\ -30\cdot I_1 + 25\cdot I_2 = 0 \end{array} \qquad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα (1) προκύπτει:

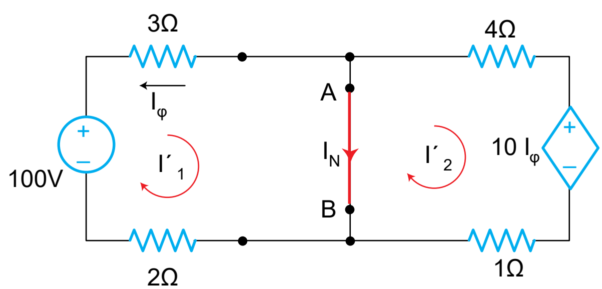
$$I_1 = 100\ (A),\ I_2 = 120\ (A)$$

Επομένως

$$V_{TH} = V_{AB} = 20\ (I_1 - I_2) = 20\ (100 - 120) = -400\ (V)$$

Εύρεση του I_N:

Βραχυκυκλώνοντας τους ακροδέκτες A, B (η αντίσταση 20Ω παραλείπεται) το κύκλωμα παίρνει τη μορφή:



Οι εξισώσεις των A.B είναι:

$$\left.\begin{array}{l} R'_{11}\cdot I'_1 + R'_{12}\cdot I'_2 = \Sigma V'_1 \\ R'_{21}\cdot I'_1 + R'_{22}\cdot I'_2 = \Sigma V'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot I'_1 + 0\cdot I'_2 = 100 \\ 0\cdot I'_1 + 5\cdot I'_2 = -10\cdot I_\varphi \end{array}\right\} \xrightarrow{I_\varphi = -I'_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot I_1' + 0\cdot I_2' = 100 \\ 0\cdot I_1' + 5\cdot I_2' = -10\cdot\left(-I_1'\right) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{2ης εξίσωσης}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{array}{l} 5\cdot I_1' + 0\cdot I_2' = 100 \\ -10\cdot I_1' + 5\cdot I_2' = 0 \end{array} \qquad (2)$$

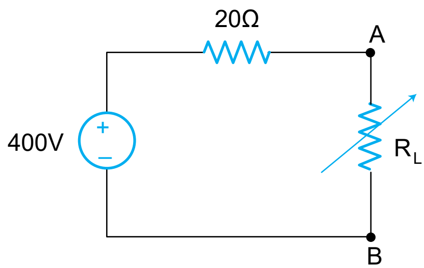
Λύνοντας το σύστημα (2) προκύπτει:

$$I'_1 = 20\ (A) \quad I'_2 = 40\ (A)$$

Επομένως $I_N = I'_1 - I'_2 = 20 - 40 \Rightarrow I_N = -20\ (A)$ και κατά συνέπεια:

$$R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_N} = \frac{-400}{-20} \Rightarrow R_{TH} = 20\ (\Omega)$$

Άρα, το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα είναι:



Για μέγιστη μεταφορά ισχύος στην αντίσταση R_L πρέπει

$$R_L = R_{TH} = 20\ (\Omega)$$

η δε μέγιστη αυτή ισχύς είναι

$$P_{max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = \frac{400^2}{4\cdot 20} \Rightarrow \quad P_{max} = 2000\ (W) = 2\ (KW)$$

4-5. Θεώρημα Επαλληλίας (ή Υπέρθεσης)

Είναι ίσως η σπουδαιότερη αρχή που χαρακτηρίζει τη λειτουργία των γραμμικών ηλεκτρικών κυκλωμάτων και γενικά των γραμμικών συστημάτων.

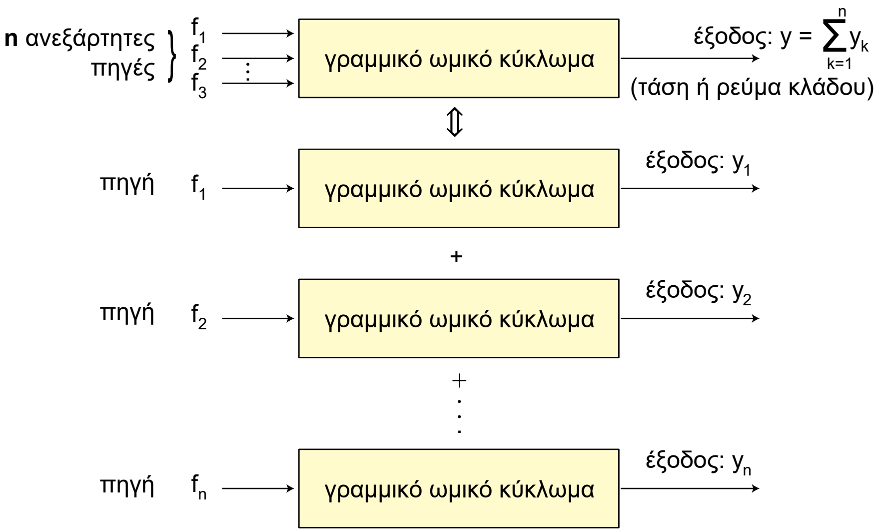
Ανάλογα με το είδος των πηγών του κυκλώματος, διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

α) Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές

❑ Σ' ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα το οποίο διεγείρεται από **n** ανεξάρτητες πηγές (τάσης, ρεύματος), η τάση ή το ρεύμα ενός κλάδου ισούται με το άθροισμα των **n** επιμέρους τάσεων ή ρευμάτων που προκύπτουν όταν κάθε πηγή ενεργήσει μόνη της στο κύκλωμα.

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε φορά μία πηγή είναι ενεργός ενώ οι υπόλοιπες μηδενοποιούνται, δηλαδή, οι πηγές τάσης βραχυκυκλώνονται και οι πηγές ρεύματος ανοικτοκυκλώνονται.

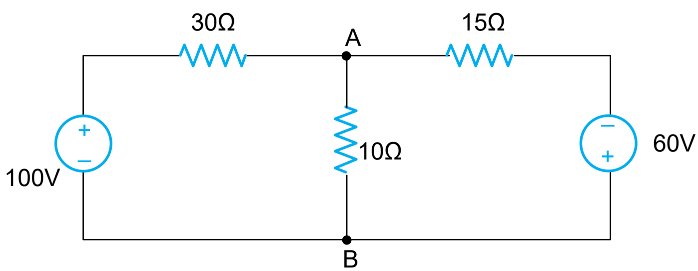
Σχηματικά η αρχή της επαλληλίας έχει ως εξής:



Σχήμα 4.5. *Θεώρημα της Επαλληλίας*

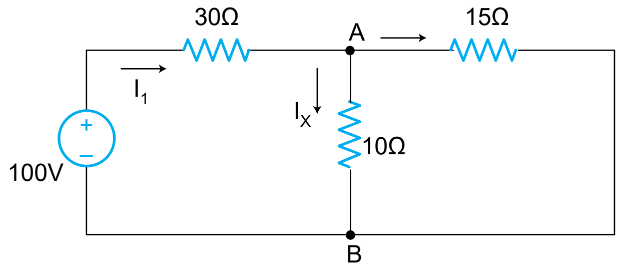
➤ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ρεύμα που διέρχεται από την αντίσταση των 10 (Ω) εφαρμόζοντας το θεώρημα της επαλληλίας.



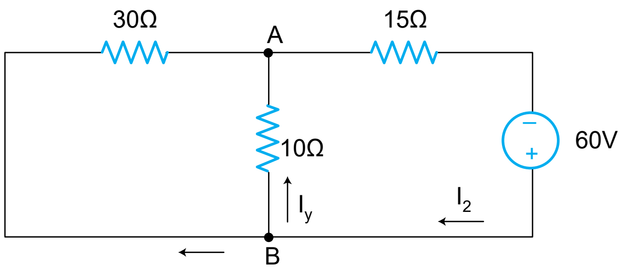
Επίδραση της πηγής των 100 (V):

$$I_x = I_1 \cdot \frac{15}{15+10} = \frac{100}{15 // 10 + 30} \cdot \frac{15}{25} \Rightarrow I_x = \frac{100}{6+30} \cdot \frac{15}{25} \Rightarrow I_x = 1,67 \text{ (A)}$$



Επίδραση της πηγής των 60 (V):

$$I_y = I_2 \cdot \frac{30}{30+10} = \frac{60}{30\,//\,10+15} \cdot \frac{30}{40} \Rightarrow I_y = \frac{60}{7{,}5+15} \cdot \frac{30}{40} \Rightarrow I_y = 2\ (A)$$



Επομένως, το ρεύμα της αντίστασης των 10 (Ω) είναι

$$I_{(10\Omega)} = I_y - I_x = 2 - 1{,}67 = 0{,}33\ (A)$$

με φορά από τον κόμβο Β στον κόμβο Α.

β) Εάν το κύκλωμα περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές

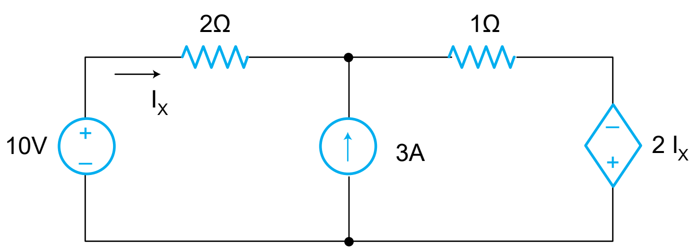
❑ Σ' ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα το οποίο περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές (τάσης, ρεύματος), η τάση ή το ρεύμα ενός κλάδου ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τάσεων ή ρευμάτων που προκύπτουν όταν κάθε ανεξάρτητη πηγή ενεργήσει μόνη της στο κύκλωμα παρουσία όλων των εξαρτημένων πηγών.

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε φορά μία ανεξάρτητη πηγή είναι ενεργός ενώ οι υπόλοιπες *μηδενοποιούνται,* δηλαδή οι ανεξάρτητες πηγές τάσης βραχυκυκλώνονται και οι ανεξάρτητες πηγές ρεύματος ανοικτοκυκλώνονται, ενώ όλες οι εξαρτημένες πηγές είναι ενεργές (εκτός και αν μηδενιστεί το εξαρτώμενο μέγεθος αυτών).

Σχηματικά το θεώρημα της επαλληλίας και στην περίπτωση αυτή είναι όπως και προηγουμένως με τη διαφορά ότι, το πλήθος των επιμέρους κυκλωμάτων είναι ίσο με το πλήθος των ανεξαρτήτων πηγών και όχι όλων των πηγών του κυκλώματος.

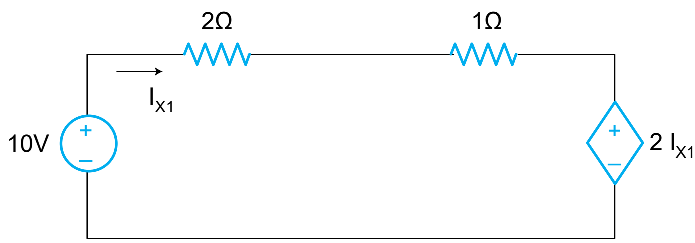
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ρεύμα I_x εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας.



Λύση

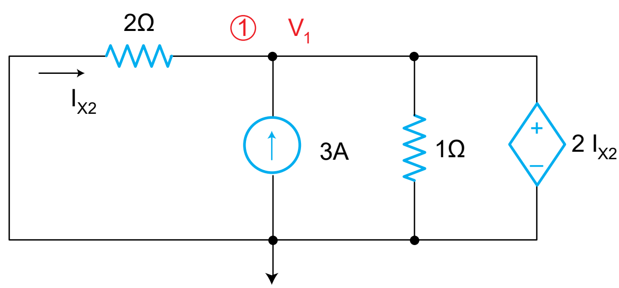
Επίδραση της πηγής των 10 (V):



$$I_{x_1} = \frac{10 - 2I_{x_1}}{3} \Rightarrow 3I_{x_1} = 10 - 2I_{x_1} \Rightarrow I_{x_1} = 2\ (A)$$

Επίδραση της πηγής των 3 (A):

Μετατρέποντας την πηγή τάσης σε πηγή ρεύματος, το κύκλωμα γίνεται:



$$G_{11} \cdot V_1 = \left(\frac{1}{2}+1\right) \cdot V_1 = 3 - 2 I_{x_2} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot V_1 = 3 - 2 \cdot \left(-\frac{V_1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2{,}5 \cdot V_1 = 3 \Rightarrow V_1 = 1{,}2 \text{ (V)}$$

Άρα $I_{x_2} = -\frac{V_1}{2} = -\frac{1{,}2}{2} \Rightarrow I_{x_2} = -0{,}6 \text{ (A)}$

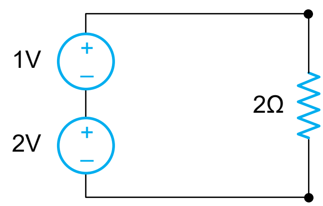
Επομένως,

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = 2 - 0{,}6 \Rightarrow I_x = 1{,}4 \text{(A)}$$

☞ *Παρατήρηση*

• Το θεώρημα της επαλληλίας ισχύει μόνο για την τάση και το ρεύμα. Δεν ισχύει όμως για την ισχύ $P = V \cdot I$ διότι αυτή δεν είναι γραμμικό μέγεθος.

Για την καλύτερη κατανόηση αυτού του πράγματος, ας επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε την ισχύ που καταναλίσκεται στην αντίσταση του παρακάτω κυκλώματος με την αρχή της επαλληλίας.



$$P_{(2\Omega)} = \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} = \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5 \text{(W)} \quad \text{(χρήση επαλληλίας)}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προφανώς είναι λάθος καθότι,

$$P_{(2\Omega)} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{(W)}$$

και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, δεν μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή της επαλληλίας σε μη γραμμικό μέγεθος, όπως είναι η ισχύς.

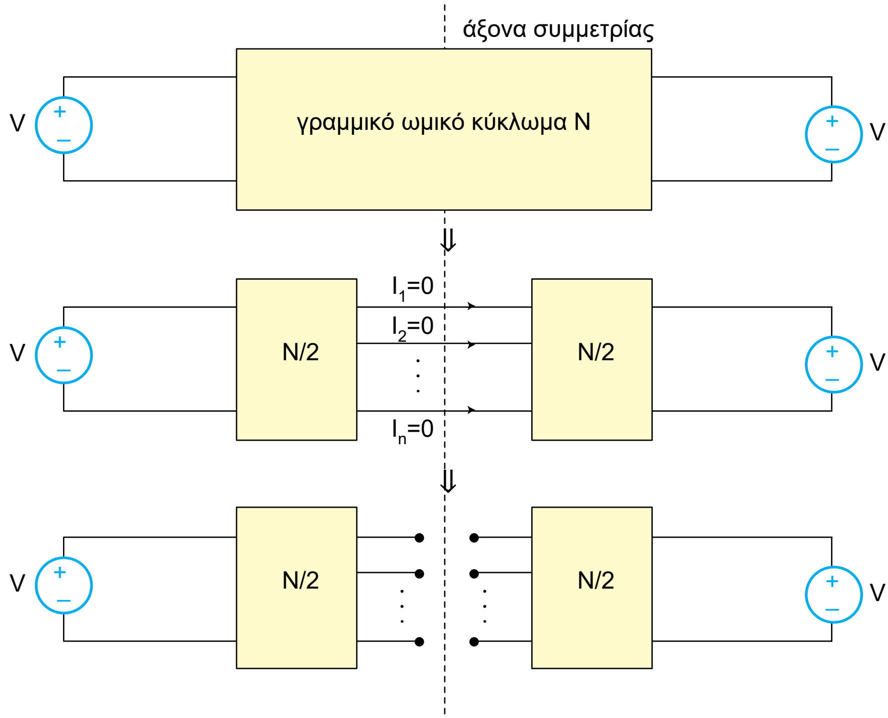
4-6. Θεωρήματα συμμετρικών κυκλωμάτων

Η επίλυση ενός γραμμικού ωμικού κυκλώματος με τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν έως τώρα, μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά εάν το κύκλωμα είναι συμμετρικό, δηλαδή εάν έχει κάποιον άξονα συμμετρίας.

Ανάλογα με το είδος της συμμετρίας διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Κυκλώματα με κατακόρυφη συμμετρία και συμμετρική διέγερση

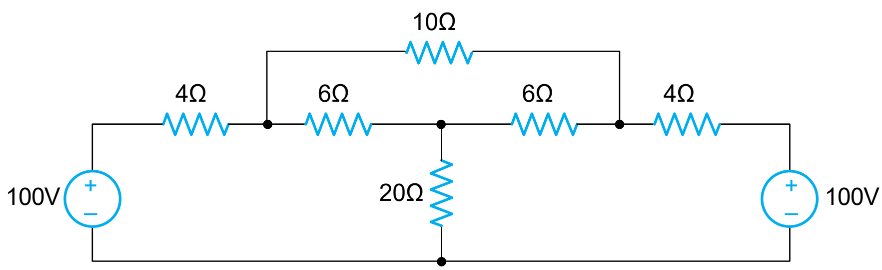
❑ Εάν ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα παρουσιάζει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του είναι συμμετρική, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να ανοικτοκυκλώσουμε τις συνδέσεις μεταξύ των δύο συμμετρικών μισών του κυκλώματος και να μελετήσουμε ένα τμήμα αυτού, απλοποιώντας έτσι σημαντικά την ανάλυση του αρχικού κυκλώματος.



Σχήμα 4.6. *Κύκλωμα με κατακόρυφη συμμετρία και διέγερση συμμετρική*

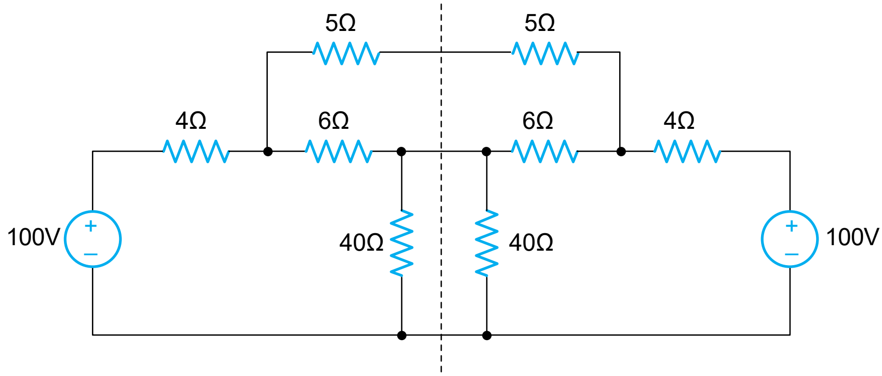
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε τα ρεύματα των αντιστάσεων.

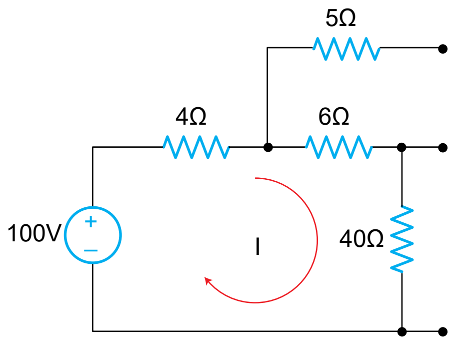


Λύση

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται ως εξής:



Επειδή υπάρχει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του κυκλώματος είναι συμμετρική, μπορούμε να μελετήσουμε το μισό κύκλωμα με ανοικτοκυκλωμένες τις συνδέσεις.



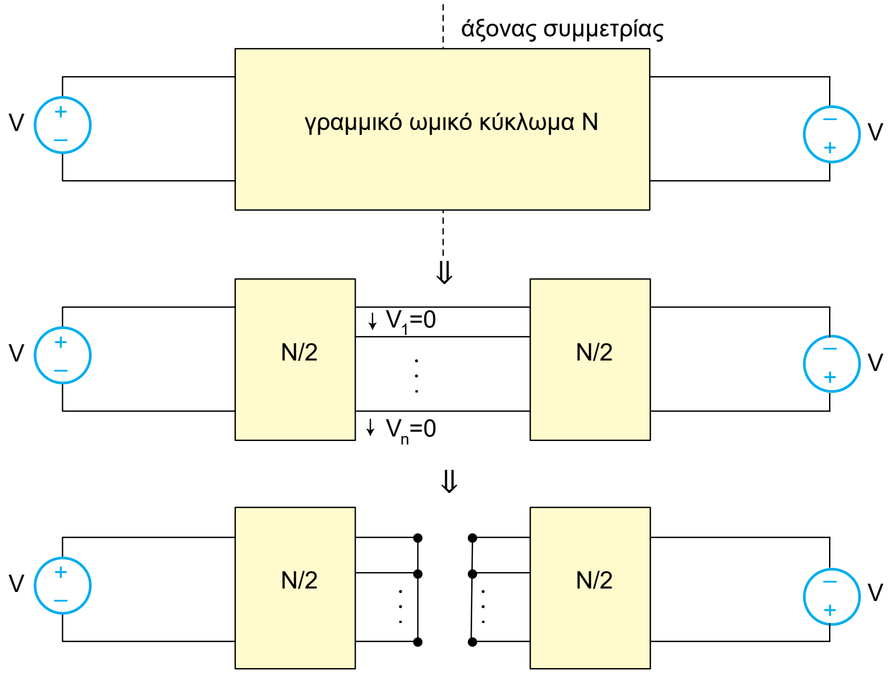
όπου το ρεύμα του απλού βρόχου είναι $I = \dfrac{100}{4+6+40} = 2(A)$

Επομένως, τα ρεύματα των αντιστάσεων του αρχικού κυκλώματος είναι:

αντιστάσεων των 4 (Ω): 2 (A)
αντιστάσεις των 6 (Ω): 2 (A)
αντιστάσεις των 20 (Ω): 2 + 2 = 4 (A)

β) Κυκλώματα με κατακόρυφη συμμετρία και αντισυμμετρική διέγερση

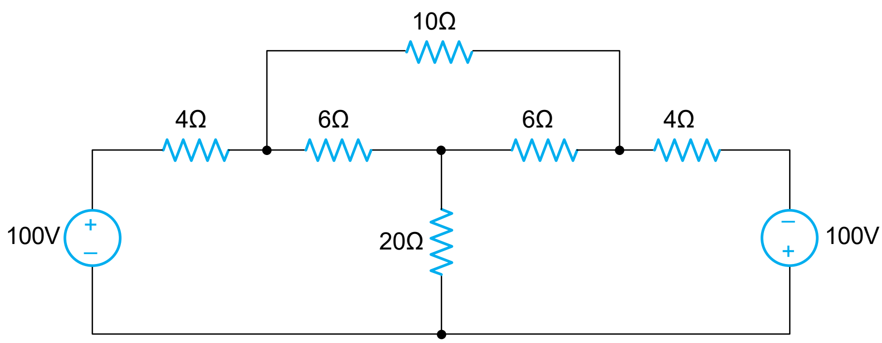
❑ Εάν ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα παρουσιάζει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερσή του είναι αντισυμμετρική, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να βραχυκυκλώσουμε τις συνδέσεις μεταξύ των δύο συμμετρικών μισών του κυκλώματος και να μελετήσουμε ένα τμήμα αυτού, απλοποιώντας έτσι σημαντικά την ανάλυση του αρχικού κυκλώματος.



Σχήμα 4.7. *Κύκλωμα με κατακόρυφη συμμετρία και διέγερση αντισυμμετρική*

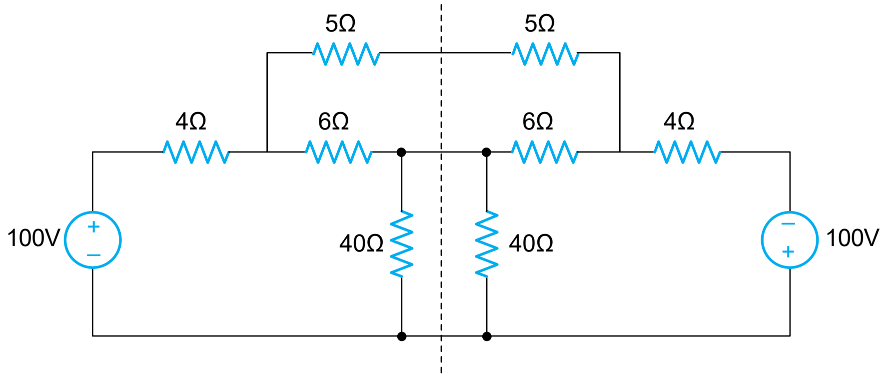
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε τα ρεύματα των αντιστάσεων.

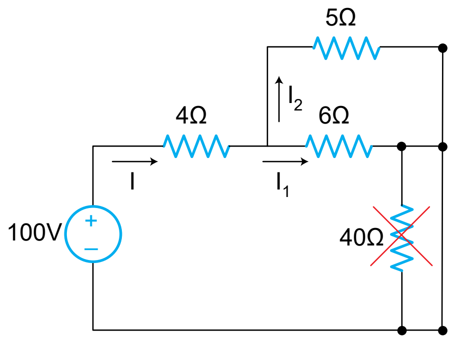


Λύση

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται ως εξής:



Επειδή υπάρχει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του κυκλώματος είναι αντισυμμετρική, μπορούμε να μελετήσουμε το μισό κύκλωμα με βραχυκυκλωμένες τις συνδέσεις.



όπου,

$$I = \frac{100}{5 \,//\, 6 + 4} = 14,86\,(A)$$

Με διαιρέτη ρεύματος, προκύπτει

$$I_1 = I \cdot \frac{5}{5+6} = 14,86 \cdot \frac{5}{11} = 6,75\,(A)$$

και $$I_2 = I - I_1 = 14,86 - 6,75 = 8,11\ (A)$$

Επομένως τα ρεύματα των αντιστάσεων του αρχικού κυκλώματος είναι:

αντιστάσεις των 4 (Ω):	14,86 (A)
αντιστάσεις των 6 (Ω):	6,75 (A)
αντιστάσεις των 10 (Ω):	8,11 (A)
αντιστάσεις των 20 (Ω):	14,86 - 14,86 = 0 (A)

γ) Κυκλώματα με κατακόρυφη συμμετρία και τυχαία διέγερση

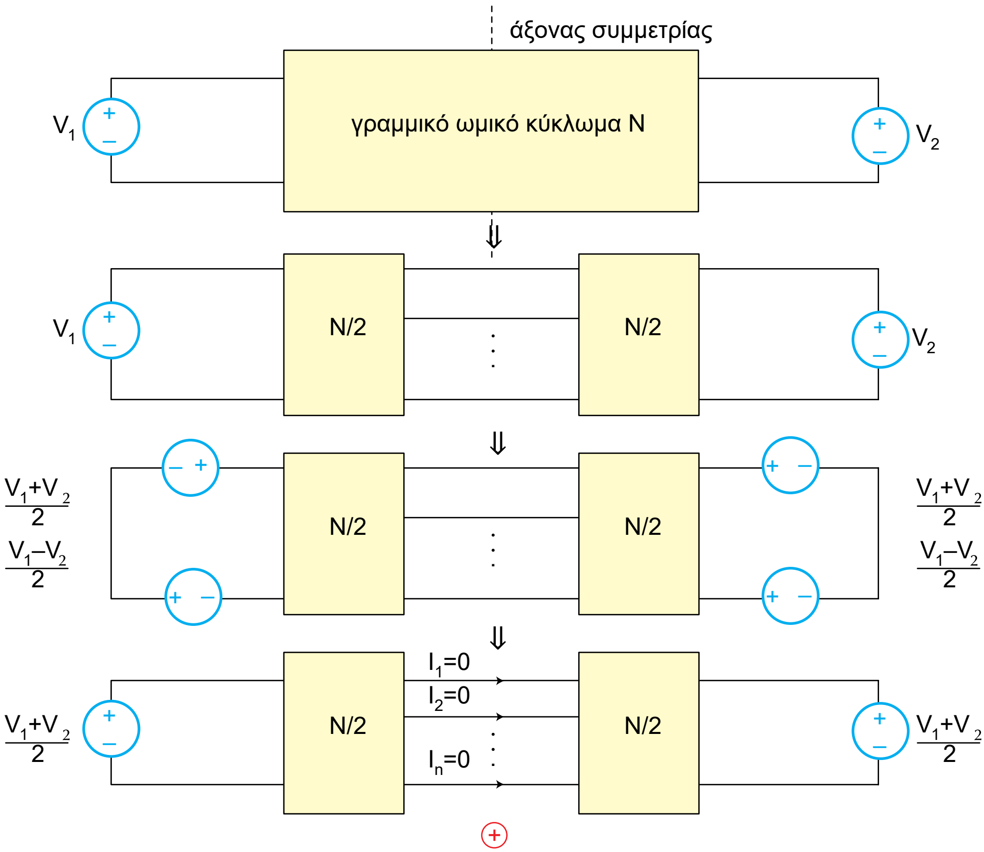
❑ Εάν το γραμμικό ωμικό κύκλωμα παρουσιάζει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του είναι τυχαία (V1, V_2), αποδεικνύεται ότι μπορούμε, αναπτύσσοντας τη διέγερση σε μια επαλληλία μιας συμμετρικής και μιας αντισυμμετρικής διέγερσης, να οδηγηθούμε σε δύο επιμέρους κυκλώματα αντίστοιχα των περιπτώσεων α) και β).

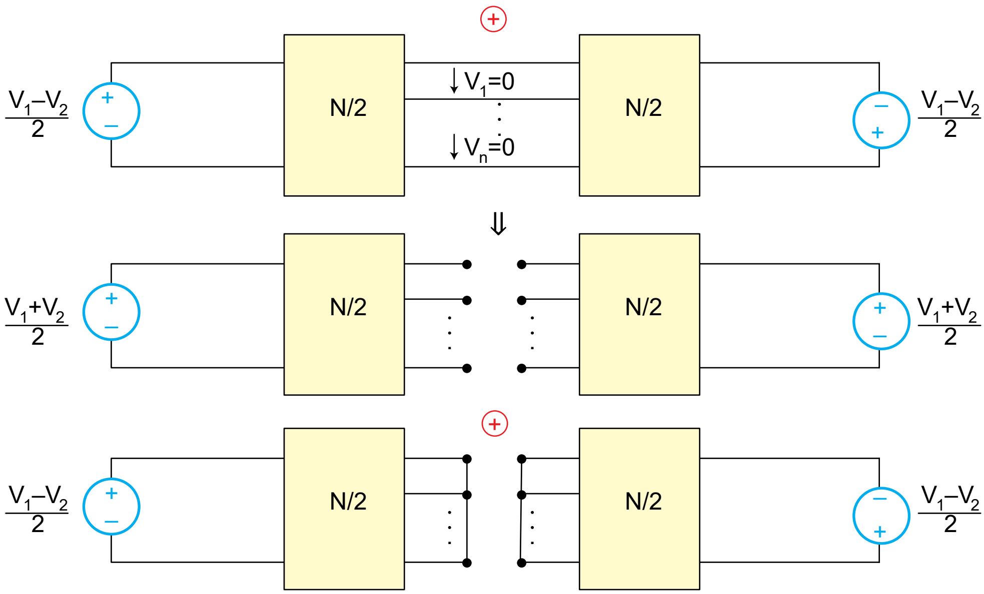
Η ανάπτυξη της διέγερσης στις δύο συνιστώσες (συμμετρική, αντισσυμετρική) γίνεται βάσει των σχέσεων.

$$V_1 = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{2} \tag{4.8}$$

$$V_2 = \frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{V_1 - V_2}{2} \tag{4.9}$$

Η πορεία εργασίας τέτοιων κυκλωμάτων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

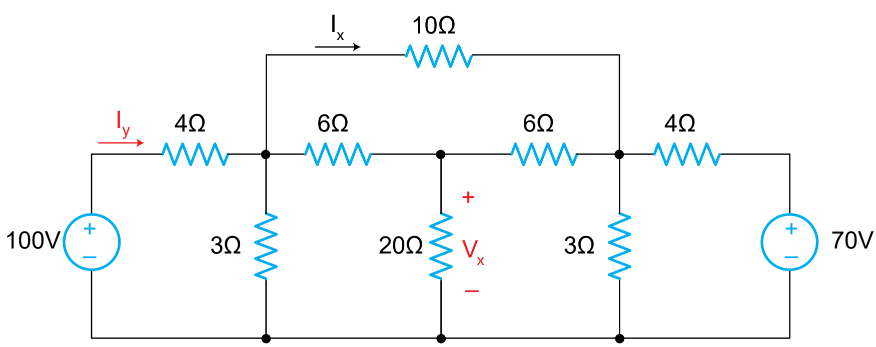




Σχήμα 4.8. Κύκλωμα με κατακόρυφη συμμετρία και διέγερση τυχαία

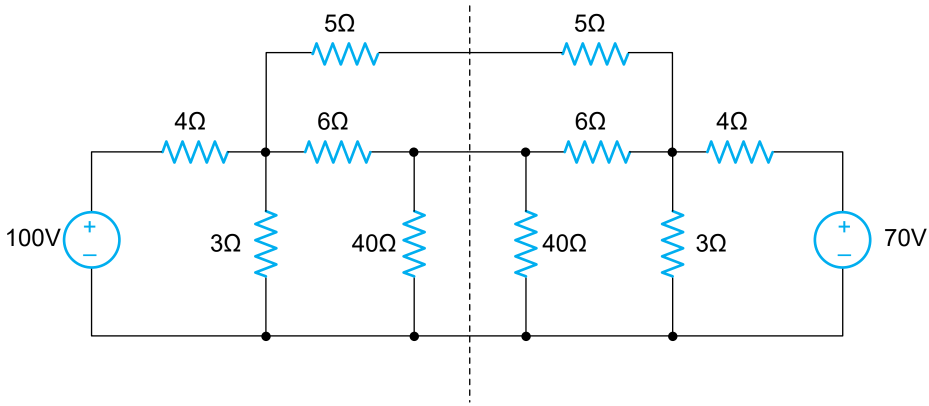
➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος υπολογίστε το ρεύμα I_y καθώς επίσης και την τάση V_x.

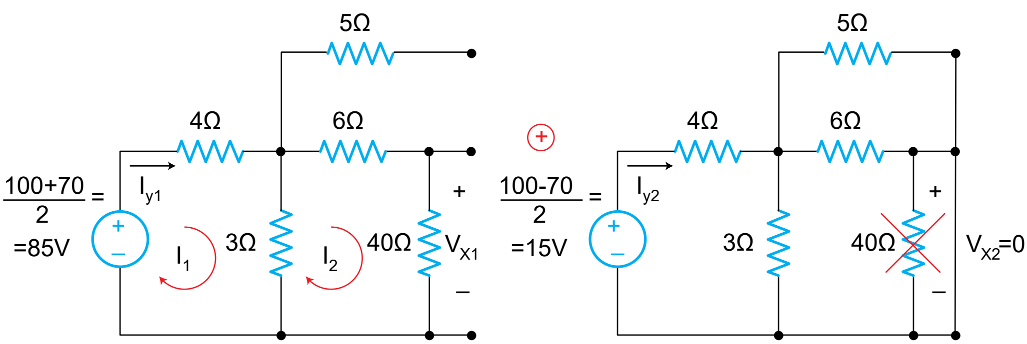


Λύση

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται ως εξής:



Επειδή υπάρχει κατακόρυφη συμμετρία και η διέγερση του κυκλώματος είναι τυχαία, μπορούμε να μελετήσουμε τις παρακάτω δύο ημιτομές (συμμετρική, αντισυμμετρική).



Συμμετρική ημιτομή

Αντισυμμετρική ημιτομή

Επίδραση της συμμετρικής συνιστώσας των 85 (V):

Οι εξισώσεις των απλών βρόχων είναι:

$$\left.\begin{array}{l} R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 = \Sigma V_1 \\ R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 = \Sigma V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7\cdot I_1 - 3\cdot I_2 = 85 \\ -3\cdot I_1 + 49\cdot I_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα (1) προκύπτει:

$$I_1 = 12{,}47 \text{ (A) } I_2 = 0{,}763 \text{ (A)}$$

Επομένως

$$I_{y1} = I_1 = 12{,}47 \text{ (A) και } V_{x1} = I_2 \cdot 40 = 0{,}763 \cdot 40 = 30{,}5 \text{ (V)}$$

Επίδραση της αντισυμμετρικής συνιστώσας των 15 (V):

$$I_{y2} = I_{ολ} = \frac{ΣV}{R_{ολ}} = \frac{15}{5 // 6 // 3 + 4} = \frac{15}{5,428} = 2,76 \text{ (A)}$$

$$\text{και } V_{x2} = 0 \text{ (βραχυκύκλωμα)}$$

Τέλος, με εφαρμογή επαλληλίας προκύπτουν:

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = 12,47 + 2,76 \Rightarrow I_y = 15,23 \text{ (A)}$$

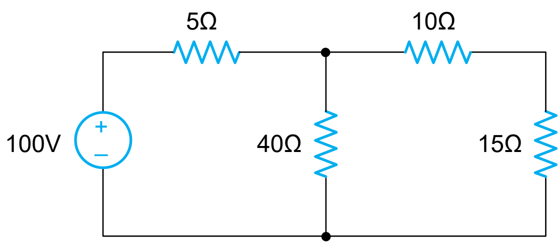
και

$$V_x = V_{x1} + V_{x2} = 30,5 + 0 \Rightarrow V_x = 30,5 \text{ (A)}$$

4-7. Προβλήματα προς λύση

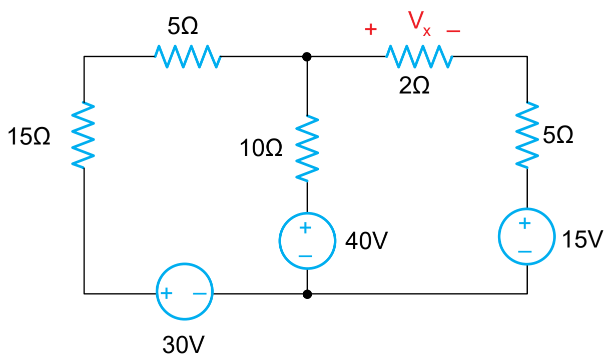
1° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β υπολογίστε α) την ισχύ που παρέχει στο κύκλωμα η πηγή των 100 (V) και β) την ισχύ που καταναλίσκεται στην αντίσταση των 15 (Ω).

((α) 491 W, β) 136,81 W)

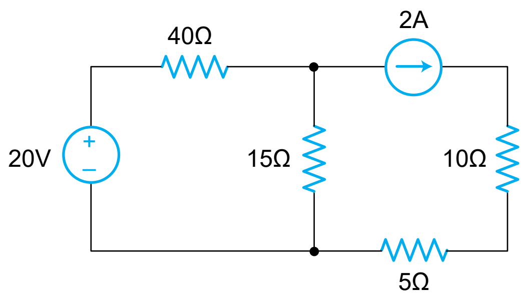


2° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_x χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β.

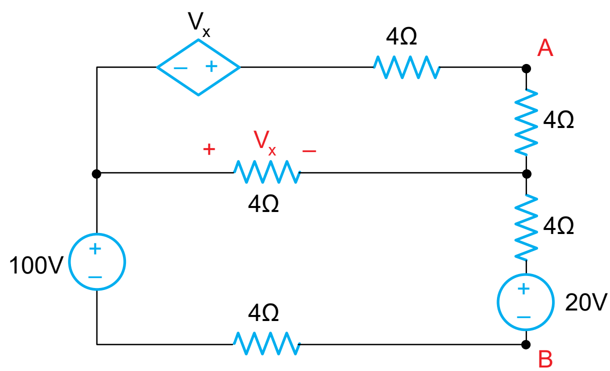
(V_x = 3,17V)



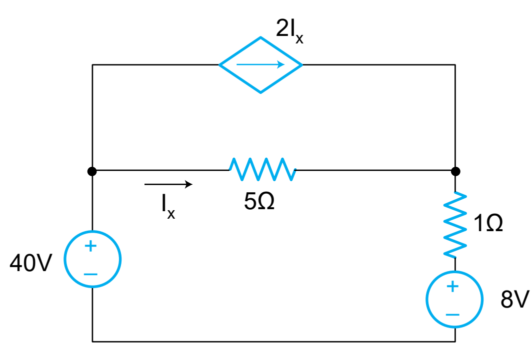
3° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ της πηγής των 2(A), χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β. $(P_{(2A)} = 92{,}73\ W)$



4° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_{AB} χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β και στη συνέχεια δείξτε ότι η παρεχόμενη ισχύς είναι ίση με την καταναλισκόμενη. *(68V, $P_{ΠΑΡΕΧ.} = P_{ΚΑΤΑΝ.} = 864W$)*



5° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται στην αντίσταση 1(Ω), χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β καθώς

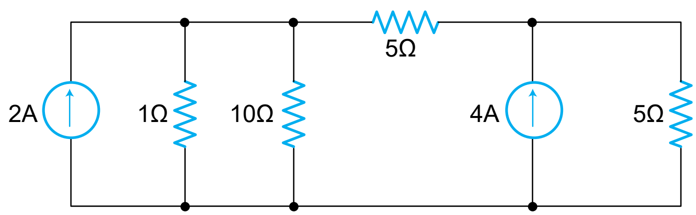


επίσης και την ισχύ της πηγής ρεύματος $2I_x$.

($P_{(1\Omega)}$ = 144W, $P_{(2Ix)}$ = 160V καταναλισκόμενη)

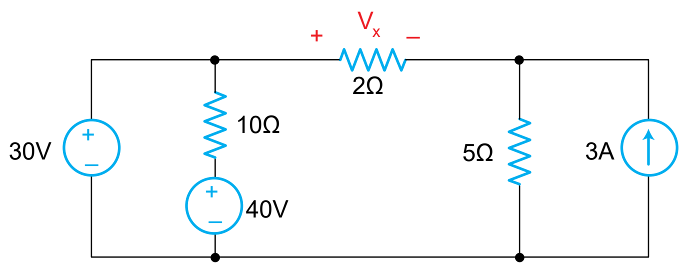
6° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται στην αντίσταση των 10(Ω), χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ.

($P_{(10\Omega)}$ = 1,1 W)

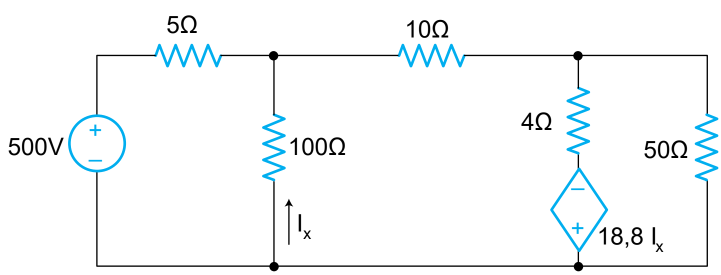


7° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_x χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ. και στη συνέχεια την ισχύ της πηγής των 30V.

(V_x = 4,286V, $P_{(30V)}$ = 34,29W παρεχόμενη)

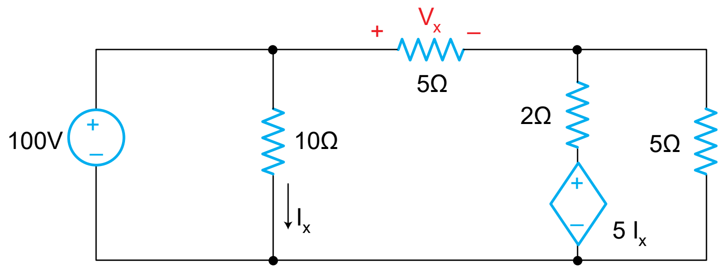


8° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ της εξαρτημένης πηγής τάσης, χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ. *(απορροφά 1346,68 W)*

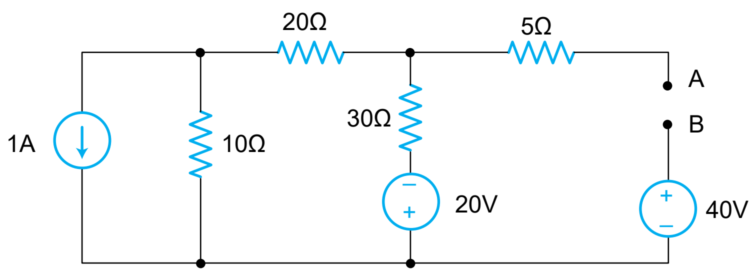


9° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_x χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ. και στη συνέχεια την ισχύ της πηγής των 100 V.

(V_x = 50V, $P_{(100V)}$ = 2000W αποδιδόμενη)

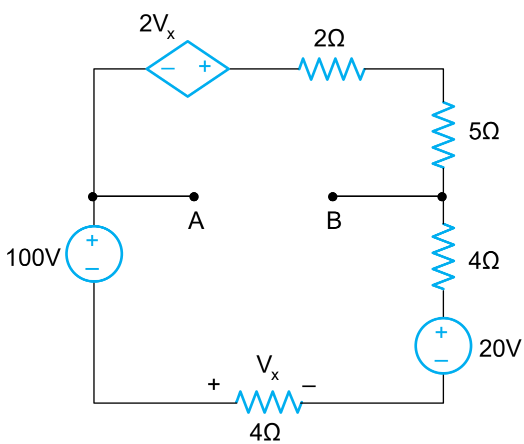


10° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα. *(R_{TH} = 20Ω, V_{TH} = 55V, I_N = 2,75A)*

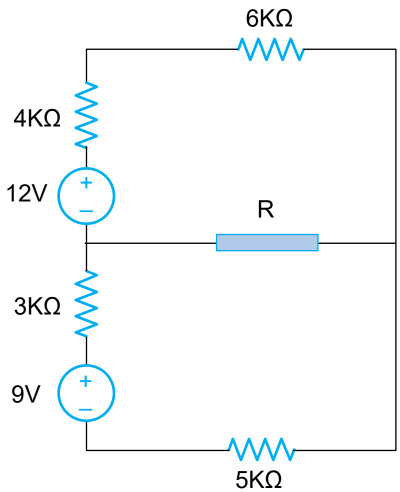


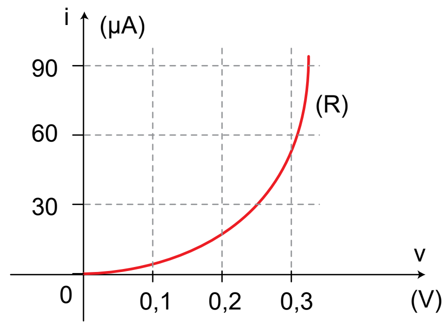
11° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε το ισοδύναμο κατά Thevenin και Norton κύκλωμα.

(R_{TH} = 2,43Ω, V_{TH} = 52,17V, I_N = 21,428A)



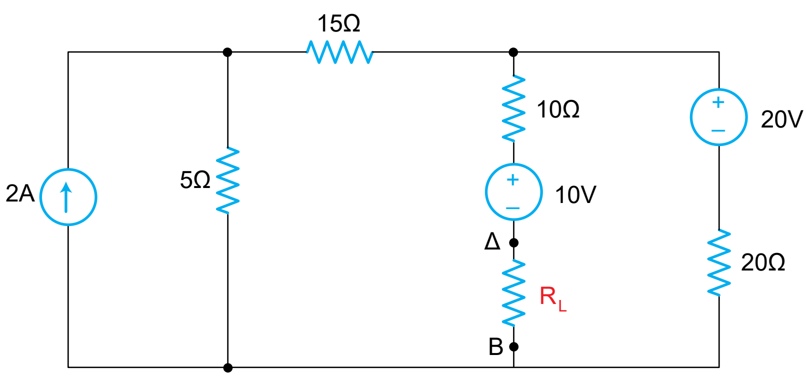
12° Να υπολογισθεί η ισχύς στη μη γραμμική αντίσταση του παρακάτω κυκλώματος, της οποίας η χαρακτηριστική καμπύλη δίνεται στο διπλανό σχήμα. *(5,0 μW)*



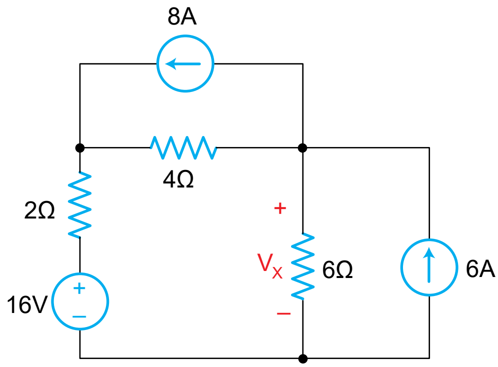


13° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την αντίσταση R_L για μέγιστη ισχύ καθώς επίσης και τη μέγιστη ισχύ.

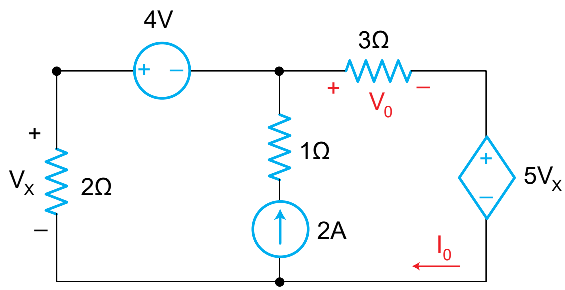
(R_L = 20Ω, P_{max} = 312,5 mW)



14° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_x, χρησιμοποιώντας το θεώρημα επαλληλίας. *(V_x = 10V)*

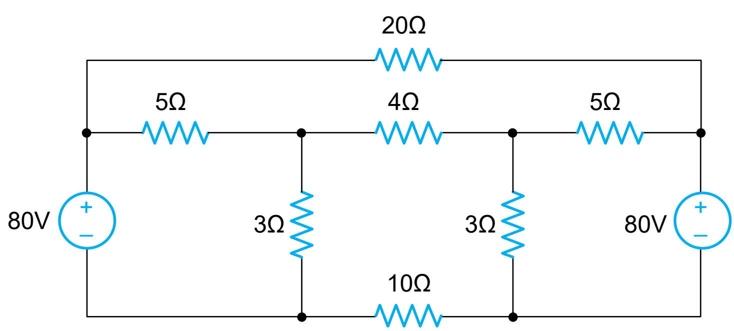


15° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την τάση V_0 και το ρεύμα I_0, εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας. *(V_0 = 12V, I_0 = 4A)*

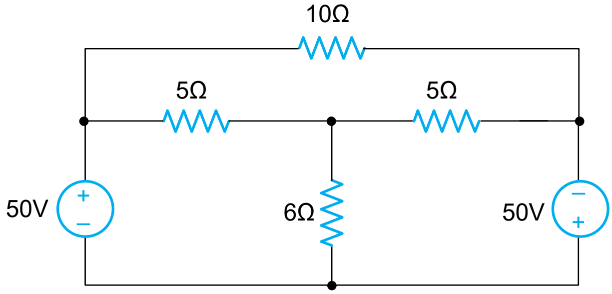


16° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση.

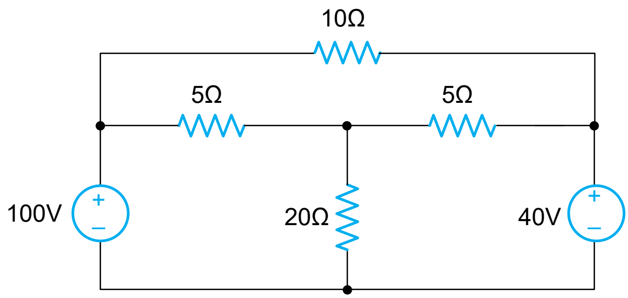
(αντιστάσεις των 5(Ω) : 500W, αντιστάσεις των 3(Ω): 300W σε όλες τις άλλες η ισχύς είναι 0 W)



17° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση. *($P_{(10\Omega)}$ = 1000W, $P_{(5\Omega)}$ = 500W, $P_{(6\Omega)}$ = 0W)*



18° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος βρείτε ισχύ που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση.
($P_{(10\Omega)}$ = 360W, $R_{(20\Omega)}$ = 193,44W, $R_{(5\Omega,\ \alpha\rho.)}$ = 285,01W, $P_{(5\Omega,\ \delta\varepsilon\xi.)}$ = 98,57W)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σηματα Και Χαρακτηριστικα Τους

Εισαγωγή

Τα ηλεκτρολογικά και ηλεκτρονικά κυκλώματα δεν τροφοδοτούνται μόνο με συνεχείς και εναλλασσόμενες τάσεις ή συνεχή και εναλλασσόμενα ρεύματα αλλά με τάσεις και ρεύματα, γενικότερα σήματα, τα οποία έχουν διαφορετική μορφή. Τέτοια σήματα χρησιμοποιούνται π.χ στη τηλεόραση στο κύκλωμα σάρωσης, στα ψηφιακά κυκλώματα χρονισμού, στα κυκλώματα αυτοματισμού. Γενικά τα σήματα περιγράφονται αναλυτικά δηλ. με τη χρήση συναρτήσεων του χρόνου ή με τη χρήση διαγραμμάτων σε συνάρτηση με το χρόνο, ή με τη χρήση βασικών χαρακτηριστικών όπως η μέση τιμή, η ενεργός τιμή, το πλάτος, η τιμή από κορυφή σε κορυφή.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι η ***κατανόηση*** *της περιγραφής και χρήσης των σημάτων που συνήθως χρησιμοποιούνται τόσο στα αναλογικά όσο και στα λογικά κυκλώματα.*

5-1. Ορισμοί – Κατηγορίες σημάτων

❑ Σήμα ονομάζεται η τάση ή η ένταση του ρεύματος που μεταβάλλεται ως συνάρτηση του χρόνου.

Τα σήματα μπορεί να είναι φορείς ενέργειας οπότε έχουν προορισμό την τροφοδότηση καταναλωτών ηλεκτρικής ενέργειας ή να είναι φορείς πληροφορίας, όπως π.χ τα τηλεπικοινωνιακά σήματα.

Τα σήματα ταξινομούνται με βάση:

α) **Τα στοιχεία του σήματος**

Τα σήματα διακρίνονται σε *αιτιοκρατικά* και σε *στατιστικά.*

❑ Αιτιοκρατικά ονομάζονται τα σήματα που περιγράφονται από ορισμένο αριθμό παραμέτρων.

Για παράδειγμα μια εναλλασσόμενη τάση είναι αιτιοκρατικό σήμα.

❑ Στατιστικά ονομάζονται τα σήματα που έχουν τυχαία τιμή σε κάθε χρονική στιγμή.

Για παράδειγμα ο θόρυβος είναι στατιστικό σήμα.

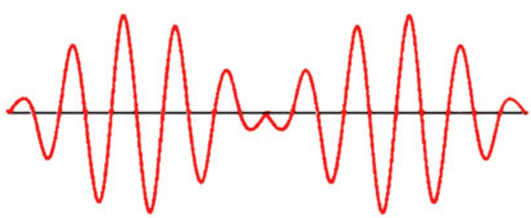
β) **Μερικές βασικές μαθηματικές ιδιότητες** όπως:

I) Η συνέχεια

Τα σήματα διακρίνονται σε *αναλογικά* και *ψηφιακά.*

❑ Αναλογικά ονομάζονται τα σήματα που είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.

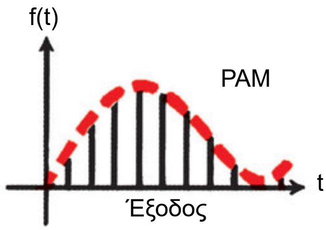
Στο σχήμα 5-1 φαίνεται το διάγραμμα ενός αναλογικού σήματος.



Σχήμα 5.1. *Αναλογικό σήμα*

❑ Ψηφιακό ονομάζεται το σήμα που έχει διακριτές τιμές.

Στο διάγραμμα 5-2 φαίνεται ένα ψηφιακό σήμα.



Σχήμα 5.2. *Ψηφιακό σήμα*

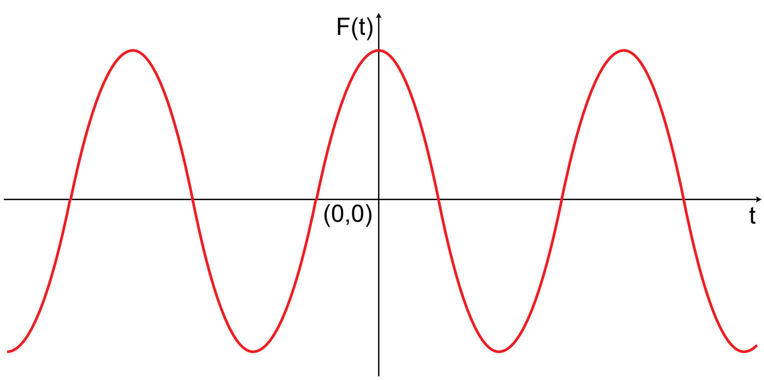
II) Η συμμετρία

Τα σήματα διακρίνονται σε *άρτια* και *περιττά*.

❑ Άρτια ονομάζονται τα σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$f(t)=f(-t) \text{ για κάθε } t.$$

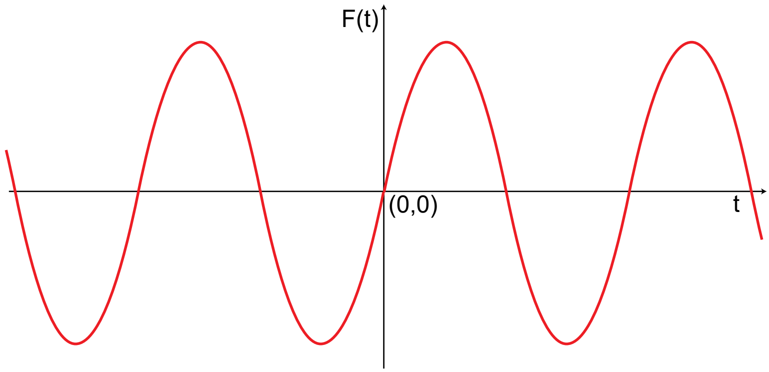
Στο σχήμα 5-3 φαίνεται το διάγραμμα ενός αρτίου σήματος.



Σχήμα 5.3. *Άρτιο σήμα*

❑ Περιττά ονομάζονται τα σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση:
$f(t)=-f(-t)$ για κάθε t.

Στο σχήμα 5.4 φαίνεται το διάγραμμα ενός περιττού σήματος.

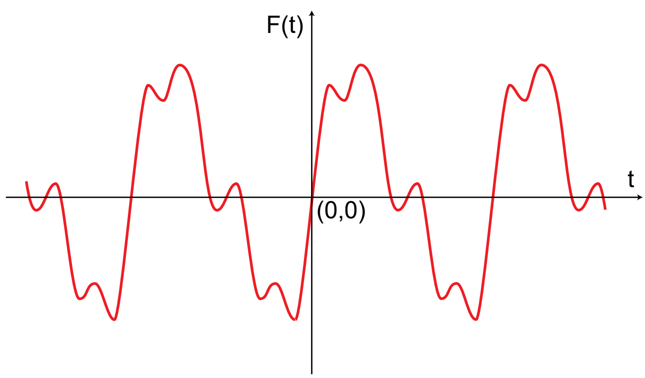


Σχήμα 5.4. *Περιττό σήμα*

III) Η περιοδικότητα

❑ Περιοδικά ονομάζονται τα σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση:
$f(t+nT)=f(t)$ για κάθε t, όπου **n** ακέραιος.

Η παράμετρος T ονομάζεται περίοδος.
Στο σχήμα 5.5 φαίνεται το διάγραμμα ενός περιοδικού σήματος.



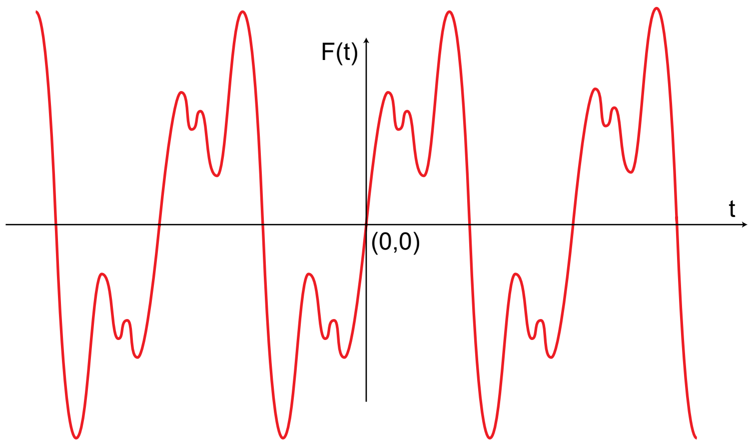
Σχήμα 5.5. *Περιοδικό σήμα*

5-2. Περιγραφή σημάτων

Η περιγραφή ενός σήματος μπορεί να είναι *πλήρης* ή *μερική*.

Η πλήρης περιγραφή του σήματος πραγματοποιείται:

- Αναλυτικά, δηλαδή με μαθηματικές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν ως ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο. Για παράδειγμα η συνάρτηση V=220ημ(314t) περιγράφει μια εναλλασσόμενη τάση.
- Γραφικά, δηλαδή με διαγράμματα σε συνάρτηση με το χρόνο. Στο σχήμα 5-6 φαίνεται το διάγραμμα ενός σήματος.
- Με πίνακες τιμών, δηλαδή πίνακες που για ορισμένες χρονικές στιγμές δίνουν τη τιμή του σήματος. Ο πίνακας 5-1 περιγράφει ένα σήμα.



Σχήμα 5.6. *Περιγραφή σήματος με τη χρήση διαγράμματος*

t (s)	I
	(mA)
1	0,67
2	0,87
3	0,42
4	0,56
5	0,38

Πίνακας 5.1

❑ Μερική περιγραφή σήματος ονομάζεται η περιγραφή ενός σήματος με βάση ορισμένες χαρακτηριστικές τιμές οι οποίες παρέχουν πλήρως τις επιθυμητές πληροφορίες.

5-3. Χαρακτηριστικές τιμές σημάτων

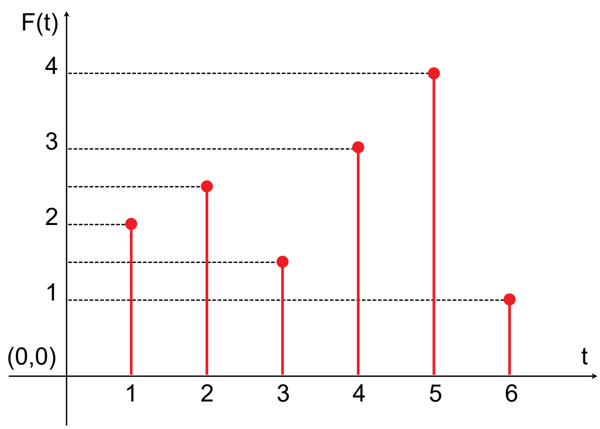
Οι σπουδαιότερες χαρακτηριστικές τιμές για τη μερική περιγραφή είναι:

α) Η μέση τιμή σήματος

❑ Μέση τιμή ψηφιακού σήματος ονομάζεται το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών του ψηφιακού σήματος προς το πλήθος τους.

$$f_{av} = \frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)}{n} \tag{5.1}$$

Για παράδειγμα η μέση τιμή του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 5-7 υπολογίζεται:



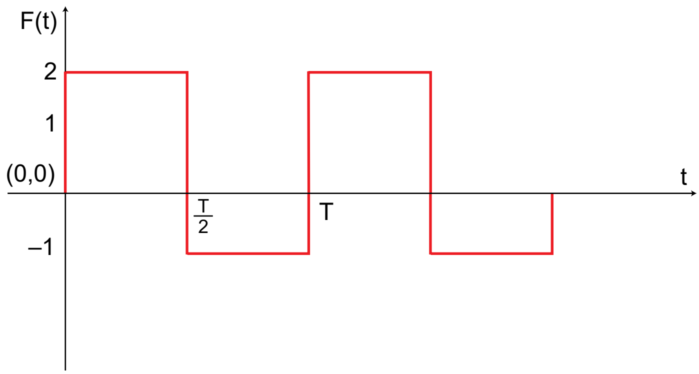
Σχήμα 5.7. *Υπολογισμός μέσης τιμής ψηφιακού σήματος*

$$f_{av} = \frac{2 + 2{,}5 + 1{,}5 + 3 + 4 + 1}{6} = \frac{14}{6} = 2.33$$

❑ Μέση τιμή περιοδικού σήματος ονομάζεται το πηλίκο του εμβαδού του σήματος για μια περίοδο προς την περίοδο.

$$f_{av} = \frac{\text{Εμβαδόν σήματος για μια περίοδο}}{T} \tag{5.2}$$

Πρέπει να σημειωθεί, ότι το εμβαδόν του μέρους του σήματος που είναι πάνω από τον άξονα t λαμβάνεται με θετικό πρόσημο, ενώ το εμβαδόν του μέρους που είναι κάτω από τον άξονα t λαμβάνεται με αρνητικό πρόσημο.



Σχήμα 5.8. Υπολογισμός μέσης τιμής περιοδικού σήματος

Για παράδειγμα η μέση τιμή του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 5-8 υπολογίζεται:

$$f_{av} = \frac{2 \cdot \frac{T}{2} + (-1) \cdot \frac{T}{2}}{T} = \frac{1}{2}$$

β) Ενεργός τιμή σήματος

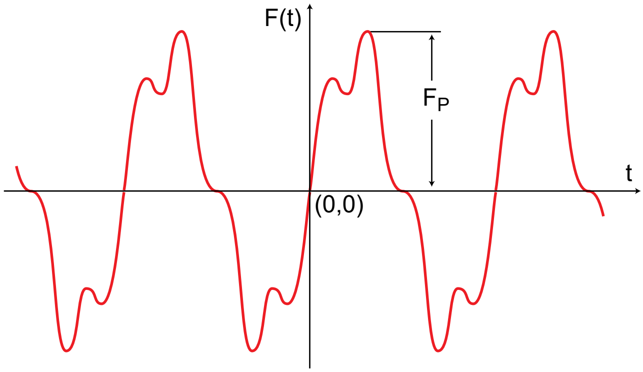
❑ Ενεργός τιμή σήματος (έντασης ή τάσης) ονομάζεται το υποθετικό συνεχές σήμα (ένταση ή τάση), το οποίο όταν τροφοδοτεί τον ίδιο αντιστάτη που τροφοδοτεί το σήμα επί τον ίδιο χρόνο έχει ως συνέπεια ο αντιστάτης να καταναλώνει το ίδιο ποσό θερμότητας.

Η ενεργός τιμή σήματος f συμβολίζεται ως f_{rms}.

γ) Πλάτος σήματος

❑ Πλάτος σήματος ονομάζεται η μέγιστη θετική τιμή του σήματος.

Στο σχήμα 5-9 σημειώνεται το πλάτος περιοδικού σήματος.

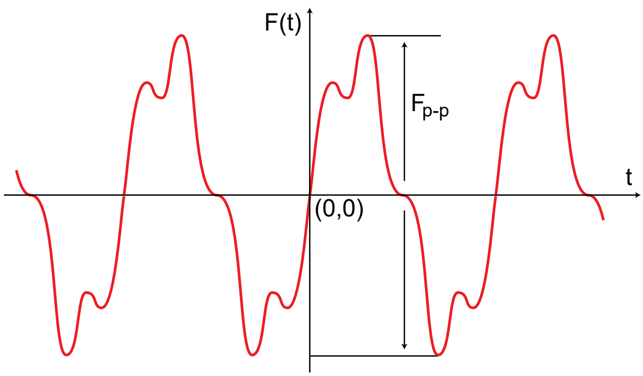


Σχήμα 5.9. Πλάτος σήματος

Το πλάτος σήματος f συμβολίζεται ως f_p.

δ) Τιμή σήματος από κορυφή σε κορυφή.

❑ Η τιμή σήματος από κορυφή σε κορυφή είναι ίση με τη διαφορά της μέγιστης θετικής του σήματος και της ελάχιστης αρνητικής τιμής του σήματος.



Σχήμα 5.10. Τιμή σήματος από κορυφή σε κορυφή

Στο σχήμα 5-10 σημειώνεται η τιμή του σήματος από κορυφή σε κορυφή. Η από σε κορυφή σε κορυφή τιμή σήματος f συμβολίζεται ως $f_{p\text{-}p}$.

5-4. Χαρακτηριστικά σήματα

α) Αρμονικά σήματα

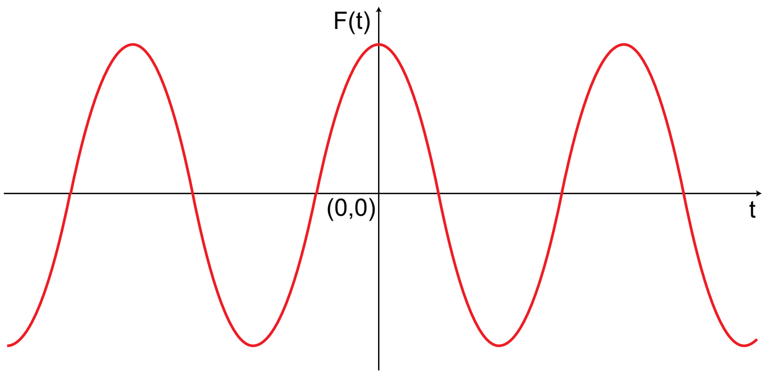
❑ Αρμονικά ονομάζονται τα ημιτονοειδή και τα συνημιτονοειδή σήματα.

Η μέση τιμή των αρμονικών σημάτων είναι μηδέν. Μέση τιμή μηδέν έχουν όλα τα σήματα που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα του χρόνου t.

Η ενεργός τιμή αρμονικού σήματος δίνεται από τη σχέση:

$$f_{rms} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

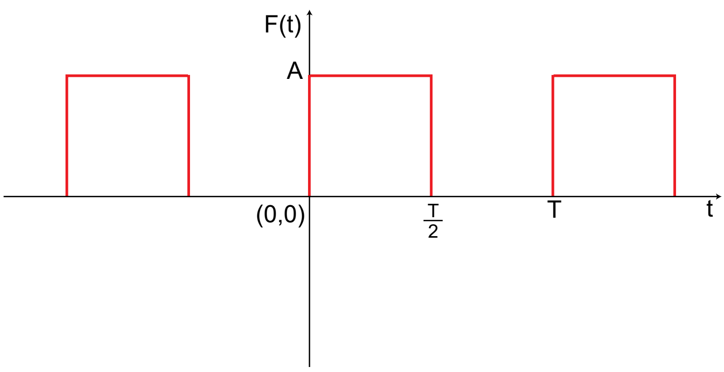
Στο σχήμα 5-11 φαίνεται ένα αρμονικό σήμα.



Σχήμα 5.11. *Αρμονικό σήμα*

β) Θετικοί τετραγωνικοί παλμοί

Στο σχήμα 5-12 φαίνεται το διάγραμμα θετικών τετραγωνικών παλμών.



Σχήμα 5.12. *Θετικοί τετράγωνοι παλμοί*

Η μέση τιμή του σήματος υπολογίζεται ως εξής:

$$f_{av} = \frac{\text{Εμβαδόν σήματος για μια περίοδο}}{T} \Rightarrow f_{av} = \frac{A \cdot \frac{T}{2}}{T} \Rightarrow$$

$$f_{av} = \frac{A}{2}$$

Η ενεργός τιμή υπολογίζεται ως εξής:

Χωρίς να καταστρατηγηθεί η γενικότητα υποτεθέτομε πως το σήμα συνίσταται από παλμούς έντασης ρεύματος. Το ποσό της θερμότητας Q που καταναλώνεται από αντιστάτη R, ο οποίος διαρρέεται από το σήμα σε χρόνο T είναι:

$Q = A^2R\frac{T}{2}$ (1) Η σχέση αυτή ισχύει γιατί στο διάστημα $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ το σήμα είναι συνεχές, ενώ στο διάστημα $\frac{T}{2} \leq t \leq T,\ \ Q = 0$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ενεργού τιμής:

$$Q = f_{rms}^2 RT \tag{2}$$

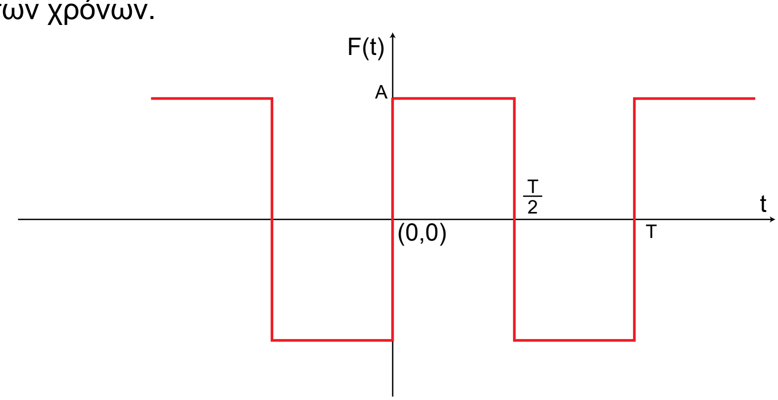
Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται:

$$f_{rms}^2 RT = A^2R\frac{T}{2} \Rightarrow f_{rms}^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow$$

$$f_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

γ) Τετραγωνικοί παλμοί συμμετρικοί ως προς τον άξονα t.

Στο σχήμα 5-13 φαίνονται τετραγωνικοί παλμοί συμμετρικοί ως προς τον άξονα των χρόνων.



Σχήμα 5.13. *Τετραγωνικοί παλμοί συμμετρικοί ως προς t*

Η μέση τιμή του σήματος είναι μηδέν, αφού είναι συμμετρικό ως προς t.
Η ενεργός τιμή του σήματος υπολογίζεται:

Αν το σήμα θεωρηθεί ένταση ρεύματος, τότε το ποσό θερμότητας που καταναλώνεται από αντιστάτη R, που τροφοδοτείται από το σήμα, για χρόνο T είναι:

$$\left.\begin{array}{ll} Q = Q_1 + Q_2 & \\ Q_1 = A^2 R \dfrac{T}{2} & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \\ Q_2 = A^2 R \dfrac{T}{2} & \dfrac{T}{2} \leq t \leq T \end{array}\right\} \qquad (1)$$

όπου Q_1 η θερμότητα που καταναλώνεται από την R στη μία ημιπερίοδο και Q_2 η θερμότητα που καταναλώνεται από την R στην άλλη ημιπερίοδο. Από την (1) έπεται:

$$Q = A^2 R \frac{T}{2} + A^2 R \frac{T}{2} = A^2 RT \qquad (2)$$

Αλλά από τον ορισμό της ενεργού τιμής έπεται:

$$Q = f_{rms}^2 RT \qquad (3)$$

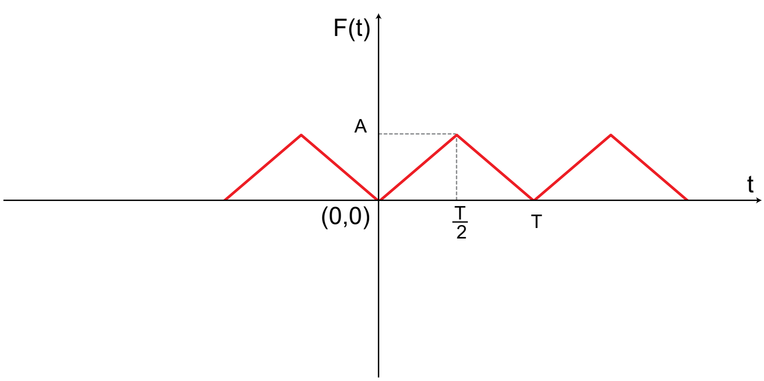
Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται:

$$f_{rms}^2 RT = A^2 RT \Rightarrow$$

$$f_{rms} = A$$

δ) Τριγωνικός παλμός

Στο σχήμα 5-14 φαίνεται το διάγραμμα τριγωνικού παλμού.



Σχήμα 5.14. *Διάγραμμα τριγωνικού παλμού*

Η μέση τιμή του παλμού είναι:

$f_{av} = \dfrac{\text{Εμβαδόν σήματος για μια περίοδο}}{T}$, το εμβαδόν του παλμού είναι το εμβαδόν τριγώνου με πλευρά T και ύψος A. Επομένως:

$$f_{av} = \frac{\frac{1}{2}AT}{T} \Rightarrow$$

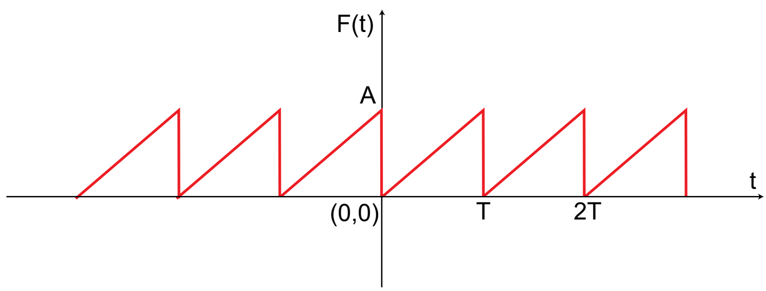
$$f_{av} = \frac{1}{2}A$$

Η ενεργός τιμή είναι:

$$f_{rms} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

ε) Παλμός σάρωσης

Στο σχήμα 5.15 φαίνεται το διάγραμμα θεωρητικού σήματος σάρωσης.



Σχήμα 5.15. *Διάγραμμα σήματος σάρωσης*

Η μέση τιμή του σήματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$f_{av} = \dfrac{\text{Εμβαδόν σήματος για μια περίοδο}}{T}$, το εμβαδόν του σήματος είναι εμβαδόν τριγώνου με βάση T και ύψος A. Επομένως:

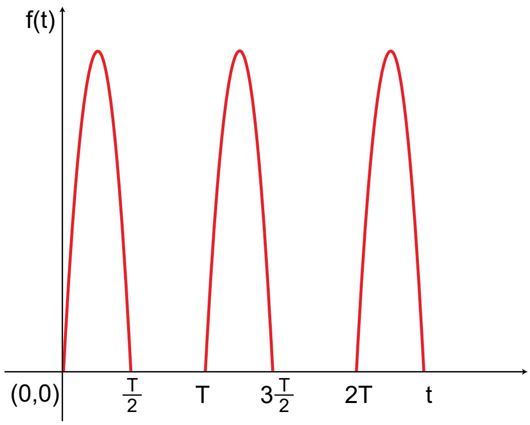
$$f_{av} = \frac{\frac{1}{2}AT}{T} \Rightarrow f_{av} = \frac{1}{2}A$$

Η ενεργός τιμή του σήματος είναι:

$$f_{rms} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

στ) Ημιανορθωμένο ημιτονοειδές σήμα:

Στο σχήμα 5-16 φαίνεται το διάγραμμα ημιανορθωμένου ημιτονοειδούς σήματος.



Σχήμα 5.16. *Το διάγραμμα ημιανορθωμένου ημιτονοειδούς σήματος*

Η μέση τιμή του σήματος δίνεται από τη σχέση:

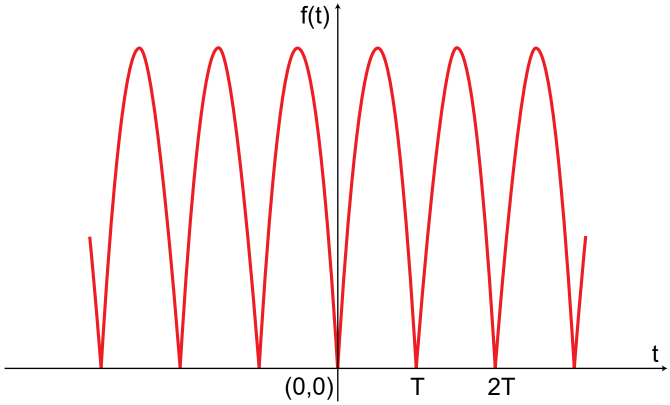
$$f_{av} = \frac{A}{\pi}$$

Η ενεργός τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$f_{rms} = \frac{A}{2}$$

ζ) Πλήρως ανορθωμένο ημιτονοειδές σήμα:

Στο σχήμα 5-1 7 φαίνεται το διάγραμμα πλήρως ανορθωμένου ημιτονοειδούς σήματος.



Σχήμα 5.17. Το διάγραμμα πλήρως ανορθωμένου ημιτονοειδούς σήματος

Η μέση τιμή του πλήρως ανορθωμένου σήματος είναι:

$$f_{av} = \frac{2A}{\pi}$$

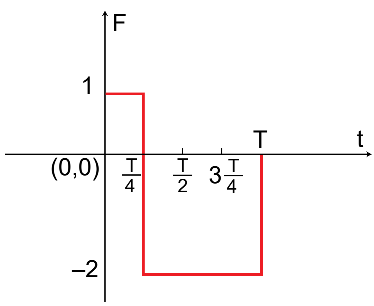
Η ενεργός τιμή είναι:

$$f_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

5-5. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Για το σήμα που φαίνεται στο σχήμα, να υπολογιστούν:
α) Η μέση τιμή
β) Η ενεργός τιμή.



Λύση

α) Η μέση τιμή ορίζεται ως:

$$f_{αν} = \frac{\text{εμβαδόν σήματος για μια περίοδο}}{T} \tag{1}$$

Το εμβαδόν του θετικού μέρος του σήματος είναι:

$$S_1 = 1 \cdot \frac{T}{4} \tag{2}$$

Το εμβαδόν του αρνητικού μέρους του σήματος είναι:

$$S_2 = 2 \cdot \frac{3T}{4} \tag{3}$$

Από τις σχέσεις (1) (2) και (3) προκύπτει:

$$f_{av} = \frac{1\frac{T}{4} - 2 \cdot \frac{3T}{4}}{T} = -\frac{5}{4} = -1,25$$

β) Το σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως ένταση. Για το διάστημα $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$ η τιμή του σήματος έχει σταθερή τιμή, επομένως το ποσόν θερμότητας που καταλώνεται από αντίσταση R σ' αυτό το χρονικό διάστημα θα είναι:

$$Q_1 = 1^2 R\frac{T}{4} = 1R\frac{T}{4} \tag{4}$$

Όμοια το ποσόν θερμότητας στο διάστημα $\frac{T}{4} < t \leq T$ θα είναι:

$$Q_2 = 2^2 R\frac{3T}{4} = 3RT \tag{5}$$

Επομένως το ολικό ποσό θερμότητας θα είναι:

$$Q = Q_1 + Q_2 \xrightarrow{(4)\,(5)} Q = \frac{RT}{4} + 3RT \Rightarrow Q = \frac{13RT}{4} \tag{6}$$

Από τον ορισμό της ενεργού τιμής προκύπτει:

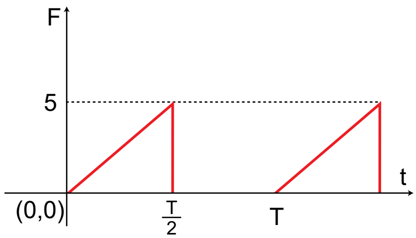
$$Q = f^2_{rms}\,RT \tag{7}$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) έπεται:

$$f_{rms}RT = \frac{13}{4}RT \Rightarrow f_{rms} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Εφαρμογή 2η

Να υπολογιστεί η μέση τιμή του σήματος.



Λύση

Η μέση τιμή σήματος ορίζεται ως

$$f_{av} = \frac{\text{εμβαδόν σήματος για μια περίοδο}}{T} \qquad (1)$$

Το εμβαδόν του σήματος για $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ είναι: το εμβαδόν τριγώνου με βάση $\frac{T}{2}$ και ύψος 5 άρα:

$$S_1 = \frac{1}{2}\frac{T}{2} \cdot 5 \Rightarrow S_1 = \frac{5T}{4} \qquad (2)$$

Το εμβαδόν του σήματος για $\frac{T}{2} < t \leq T$ είναι μηδέν άρα:

$$S_2 = 0 \qquad (3)$$

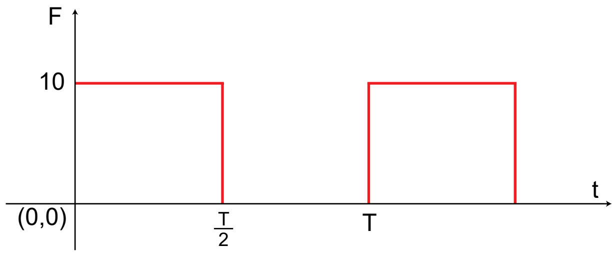
Από τις σχέσεις (1) (2) και (3) έπεται:

$$f_{av} = \frac{S_1 + S_2}{T} \Rightarrow f_{av} = \frac{5\frac{T}{4} + 0}{T} \Rightarrow$$

$$f_{av} = \frac{5}{4} \Rightarrow f_{av} = 1,25$$

Εφαρμογή 3η

Να υπολογιστούν:
α) Η μέση τιμή.
β) Η ενεργός τιμή του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



Λύση

α) Η μέση τιμή του θετικού τετραγωνικού παλμού δίνεται από τη σχέση:

$$f_{av} = \frac{A}{2} \Rightarrow f_{av} = 5$$

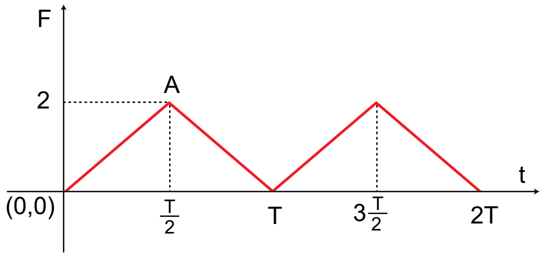
β) Η ενεργός τιμή του θετικού τετραγωνικού παλμού δίνεται από τη σχέση:

$$f_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_{rms} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}07$$

Εφαρμογή 4η

Για τον τριγωνικό παλμό του σχήματος, να υπολογιστούν
α) Η μέση τιμή
β) Η ενεργός τιμή

Λύση



α) Η μέση τιμή του παλμού δίνεται από τον τύπο:

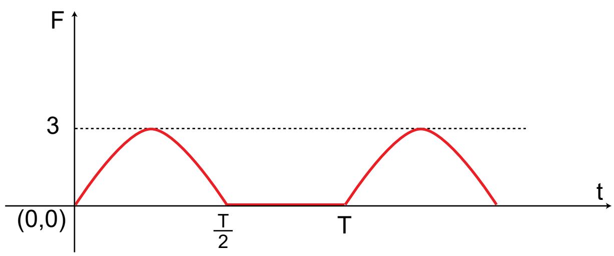
$$f_{av} = \frac{1}{2}A \Rightarrow f_{av} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

β) Η ενεργός τιμή του παλμού είναι:

$$f_{rms} = \frac{A}{\sqrt{3}} \Rightarrow f_{rms} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Εφαρμογή 5η

Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η ενεργός τιμή, του ημιανορθωμένου ημιτονικού σήματος του παρακάτω σχήματος.



Λύση

α) Η μέση τιμή δίνεται από τη σχέση

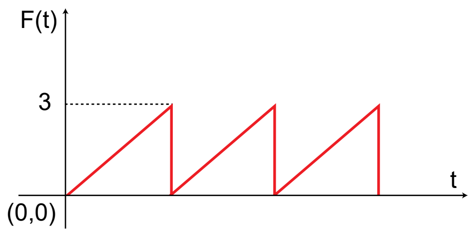
$$f_{av} = \frac{A}{\pi} \Rightarrow f_{av} = \frac{3}{\pi}$$

β) Η ενεργός τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$f_{rms} = \frac{A}{2} \Rightarrow f_{rms} = \frac{3}{2} \Rightarrow f_{rms} = 1,5$$

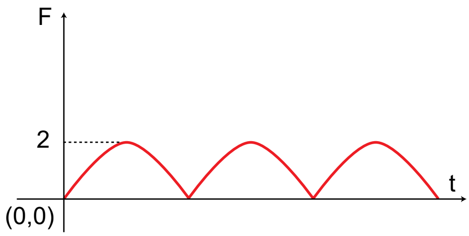
5-6. Προβλήματα προς λύση

1° Για το σήμα σάρωσης που φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογισθούν:
α) Η μέση τιμή
β) Η ενεργός τιμή



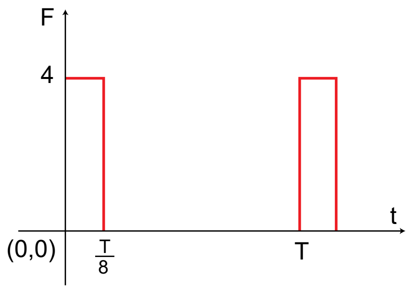
($1,5$, $\sqrt{3}$)

2° Να υπολογισθούν:
α) Η μέση τιμή
β) Η ενεργός τιμή
γ) Το πλάτος
Για το σήμα που φαίνεται στο σχήμα.



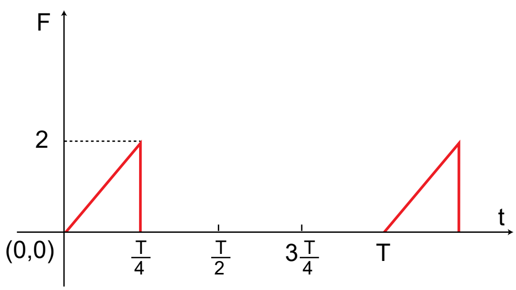
($\frac{4}{\pi}$, $\sqrt{2}$, 2)

3° Ποια είναι η μέση τιμή και ποια είναι η ενεργός τιμή του σήματος που φαίνεται στο σχήμα;



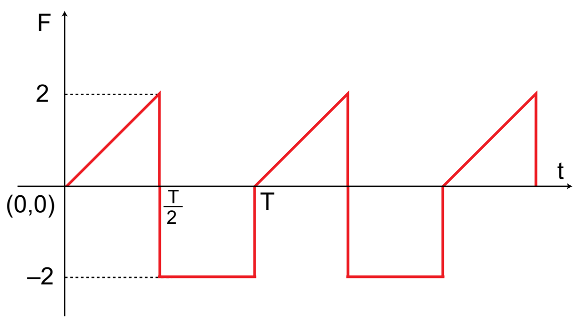
(0,5 $\sqrt{2}$)

4° Να υπολογισθεί η μέση τιμή του σήματος που φαίνεται στο σχήμα:



(0,25)

5° Για το σχήμα σήμα του σχήματος να υπολογισθεί η μέση τιμή:



(-0, 5)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο μελετάται η αλληλεπίδραση των μαγνητών, περιγράφεται το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται γύρω από ρευματοφόρους αγωγούς και η αλληλεπίδραση μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών. Επίσης εξηγείται γιατί ορισμένα υλικά παρουσιάζουν μαγνητικές ιδιότητες.

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η ***κατανόηση*** *των μαγνητικών πεδίων που δημιουργούνται από ρευματοφόρους αγωγούς, του τρόπου μαγνήτισης των υλικών και της αλληλεπίδρασης μαγνητικού πεδίου με κινούμενα ηλεκτρικά φορτία.*

6-1. Μαγνήτες

Ορισμένα ορυκτά οξειδίων του σιδήρου (Fe_3O_4) έχουν την ιδιότητα να έλκουν ρινίσματα σιδήρου. Τα υλικά αυτά αρχικά ανακαλύφθηκαν στη Μαγνησία της Μ. Ασίας και γι' αυτό ονομάστηκαν *μαγνήτες* οι δε ιδιότητες τους μαγνητικές ιδιότητες.

Όταν ένας ραβδόμορφος μαγνήτης βυθιστεί σε ρινίσματα σιδήρου προσκολλούνται σ' αυτόν ρινίσματα. Τα ρινίσματα συγκεντρώνονται στα δύο άκρα του μαγνήτη που ονομάζονται *μαγνητικοί πόλοι*, ενώ στο μέσο του μαγνήτη, που ονομάζεται *ουδέτερη ζώνη* δεν παρατηρείται προσκόλληση ρινισμάτων. Ένας ελαφρύς ραβδόμορφος μαγνήτης ονομάζεται και *μαγνητική βελόνη*. Έχει παρατηρηθεί πως μια μαγνητική βελόνη, που είναι εξαρτημένη από νήμα, παίρνει πάντοτε σταθερή διεύθυνση ώστε το ένα άκρο της να δείχνει κοντά στο γεωγραφικό Βόρειο πόλο της γης, ενώ το άλλο κοντά στο Νότιο γεωγραφικό πόλο της γης.

Μεταξύ δύο μαγνητών ασκούνται δυνάμεις και μάλιστα οι ομώνυμοι πόλοι απωθούνται, ενώ οι ετερώνυμοι έλκονται.

Όπως αποδείχτηκε πειραματικά, οι δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν δύο μαγνητικοί πόλοι έχουν:

α) Μέτρο: Αντιστρόφως ανάλογο προς το τετράγωνο της απόστασής τους.

β) Διεύθυνση: Την ευθεία που ορίζεται από τους δύο πόλους.

Παρότι οι μαγνητικές δυνάμεις έχουν πολλές ομοιότητες με τις ηλεκτρικές δυνάμεις, εντούτοις παρουσιάζουν μια σημαντική διαφορά. Το θετικό ηλεκτρικό φορτίο μπορεί να διαχωριστεί από το αρνητικό, ενώ οι μαγνητικοί πόλοι δεν μπορούν να διαχωριστούν. Όσες φορές και αν τμηθεί ένας ραβδόμορφος μαγνήτης πάντοτε στα άκρα του εμφανίζονται δύο ετερώνυμοι πόλοι δηλ. οι μαγνητικοί πόλοι **πάντοτε εμφανίζονται κατά ζεύγη.** Όλες οι προσπάθειες, που έγιναν μέχρι σήμερα για να απομονωθεί μαγνητικό "μονόπολο" απέτυχαν.

Άξιο προσοχής είναι, ότι ένας μαγνήτης αλληλεπιδρά και με κινούμενα ηλεκτρικά φορτία, όπως εύκολα διαπιστώνεται από την εκτροπή ηλεκτρικών φορτίων, τα οποία διέρχονται από σημεία που βρίσκονται κοντά σε μαγνήτες.

Μαγνητικές ιδιότητες παρουσιάζουν και οι ρευματοφόροι αγωγοί, οι οποίοι ασκούν δυνάμεις σε φυσικούς μαγνήτες.

6-2. Μαγνητικό πεδίο

Κάθε μαγνήτης δέχεται την επίδραση δύναμης αν ευρεθεί σε κάποιο σημείο του χώρου γύρω από έναν άλλο μαγνήτη ή ρευματοφόρο αγωγό. Δύναμη επίσης ασκείται και σε οποιοδήποτε φορτίο κινείται σε σημεία τα οποία βρίσκονται σε περιοχές του χώρου που υπάρχουν μαγνήτες ή ρευματοφόροι αγωγοί. Οι περιοχές του χώρου με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται μαγνητικά πεδία. Δηλαδή:

❑ Μαγνητικό πεδίο ονομάζεται κάθε περιοχή του χώρου εφόσον, ασκείται δύναμη σε κάθε μαγνήτη ή κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο θα βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο της.

6-3. Ένταση μαγνητικού πεδίου

Όπως το ηλεκτρικό πεδίο έτσι και το μαγνητικό πεδίο περιγράφεται με τη βοήθεια ενός διανυσματικού μεγέθους, δηλαδή την *ένταση μαγνητικού πεδίου.* Η ένταση μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο του περιγράφει το πόσο ισχυρό είναι το πεδίο στο συγκεκριμένο σημείο καθώς και τα χαρακτηριστικά της δύναμης, η οποία θα ασκηθεί σε κάποιο μαγνήτη ή κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο θα βρεθεί στο σημείο.

Για τον ορισμό της έντασης χρησιμοποιείται ως υπόθεμα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο εφόσον δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί μαγνήτης, αφού μαγνητικό "μονόπολο" δεν έχει απομονωθεί. Έχει αποδειχτεί πειραματικά, πως η δύναμη, η οποία ασκείται σε σωματίδιο με ηλεκτρικό φορτίο που κινείται σε μαγνητικό πεδίο, έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Το μέτρο της δύναμης είναι ανάλογο του φορτίου q και του μέτρου της ταχύτητας του σωματιδίου. Εξαρτάται επίσης από τη διεύθυνση της ταχύτητας.
2. Υπάρχει μία διεύθυνση της ταχύτητας του σωματιδίου κατά την οποία η μαγνητική δύναμη είναι μηδέν.
3. Για μία άλλη διεύθυνση της ταχύτητας του σωματιδίου, η οποία είναι κάθετη στην προηγούμενη, το μέτρο της δύναμης παίρνει τη μέγιστη τιμή του και δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{F_{max} = B\,υ\,q} \qquad (6.1)$$

Όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου, q το φορτίο του και B ο συντελεστής αναλογίας.

4. Η δύναμη είναι πάντοτε κάθετη στην ταχύτητα.
5. Η δύναμη, που ασκείται σε θετικό φορτίο, είναι ίσου μεγέθους και αντίθετη από τη δύναμη που ασκείται σε αρνητικό φορτίο το οποίο έχει ίδια ταχύτητα.

Με βάση τα παραπάνω η ένταση μαγνητικού πεδίου σε σημείο A του πεδίου ορίζεται ως εξής:

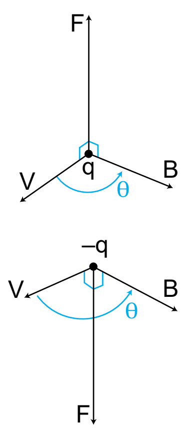
Στο σημείο A βάλλεται σωματίδιο, που φέρει θετικό φορτίο q, με ταχύτητα η οποία έχει κάθε φορά το ίδιο μέτρο αλλά διαφορετική διεύθυνση. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο A, έχει διεύθυνση τη διεύθυνση της ταχύτητας για την οποία η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μηδέν. Φορά τέτοια ώστε, η κατεύθυνση της μέγιστης δύναμης, η κατεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου και η κατεύθυνση της ταχύτητας για την οποία η δύναμη είναι μέγιστη να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα αξόνων. Μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$B = \frac{F_{max}}{υq} \tag{6.2}$$

❑ Η δύναμη που ασκείται σε κινούμενο φορτίο μέσα σε μαγνητικό πεδίο ονομάζεται και *δύναμη Lorentz.*

Η δύναμη Lorentz είναι πάντοτε κάθετη στην ταχύτητα και την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Στη γενική περίπτωση, που η ταχύτητα του σωματιδίου σχηματίζει γωνία θ με την ένταση του μαγνητικού πεδίου, το μέτρο της δύναμης Lorentz δίνεται από τη σχέση:

$$F = B\,υ\,q \cdot ημθ \tag{6.3}$$



Σχήμα 6.1. *Η δύναμη Lorentz σε κινούμενο φορτισμένο σωμάτιο*

Η φορά της δύναμης Lorentz είναι τέτοια, ώστε η κατεύθυνση της δύναμης, η κατεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου και η κατεύθυνση της ταχύτητας (αν το φορτίο είναι θετικό) ή η αντίθετη κατεύθυνση (αν το φορτίο είναι αρνητικό), να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα αξόνων.

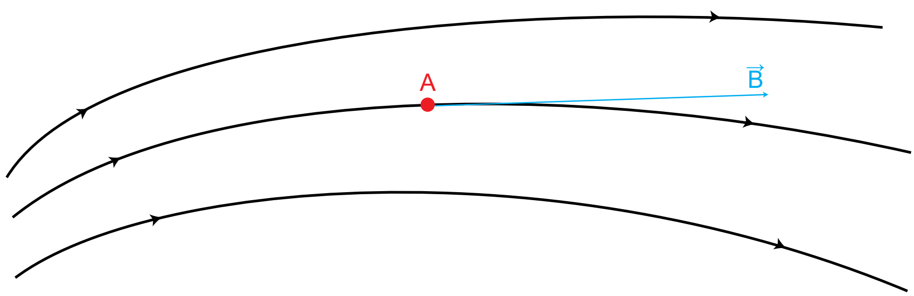
Η μονάδα της έντασης μαγνητικού πεδίου στο S.I είναι το 1 Tesla (1T). Ο ορισμός του Tesla, θα δοθεί σε επόμενη παράγραφο.

6-4. Δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου

Όπως στο ηλεκτρικό πεδίο, έτσι και στο μαγνητικό η εποπτεία υποβοηθείται με τη χρήση των δυναμικών γραμμών.

❑ Δυναμική γραμμή μαγνητικού πεδίου ονομάζεται η νοητή γραμμή που σε κάθε σημείο της η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι εφαπτομένη.

Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται, η φορά τους συμπίπτει με την φορά της έντασης του μαγνητικού πεδίου και η πυκνότητα τους είναι ανάλογη με το πόσο ισχυρό είναι το πεδίο στη συγκεκριμένη περιοχή



Σχήμα 6.2. *Δυναμικές γραμμές μαγνητικού πεδίου*

6-5. Ομογενές μαγνητικό πεδίο

Στα μαγνητικά πεδία, η ένταση είναι διαφορετική (κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο) από σημείο σε σημείο. Υπάρχουν όμως μαγνητικά πεδία, στα οποία η ένταση είναι η ίδια σε κάθε σημείο τους, τα πεδία αυτά ονομάζονται ***ομογενή μαγνητικά πεδία.***

Πειραματικά, ομογενές μαγνητικό πεδίο δημιουργείται στο εσωτερικό ρευματοφόρου σωληνοειδούς (σχ. 6.6)

6-6. Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους

Ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός θεωρείται απείρου μήκους, όταν η απόσταση r σημείου Α, στο οποίο πρόκειται να προσδιορισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου, είναι ασήμαντη σε σχέση με το μήκος του αγωγού.

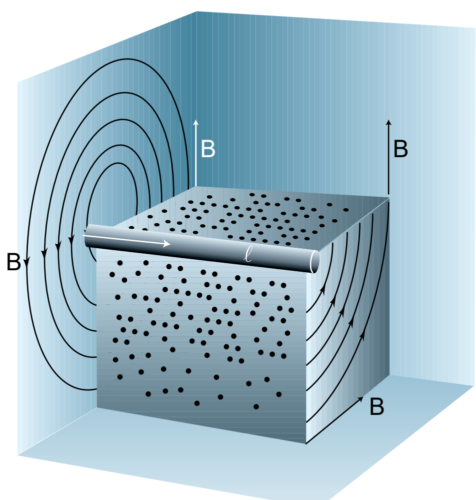
Οι *δυναμικές γραμμές* του πεδίου έχουν μορφή ομοκέντρων κύκλων, που το επίπεδο τους είναι κάθετο στον αγωγό και τα κέντρα τους βρίσκονται στον αγωγό.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου, σε σημείο Α που απέχει κατά r από τον αγωγό, έχει:

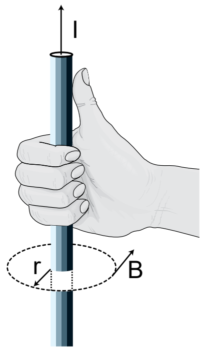
- Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο, που ορίζεται από τον αγωγό και το σημείο Α.
- Φορά τέτοια ώστε, η ένταση του Μ.Π, η απόσταση r και η φορά του ρεύματος να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα αξόνων.
- Μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{6.4}$$

όπου I η ένταση του ρεύματος και r η απόσταση του σημείου Α από τον αγωγό. Η σταθερά μ_0 ονομάζεται μαγνητική διαπερατότητα του κενού και έχει τιμή $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{V \cdot S}{A \cdot m}$.



Σχήμα 6.3. *Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους*



Σχήμα 6.4. Προσδιορισμός της φοράς της έντασης του μαγνητικού πεδίου ευθυγράμμου ρευματοφόρου αγωγού

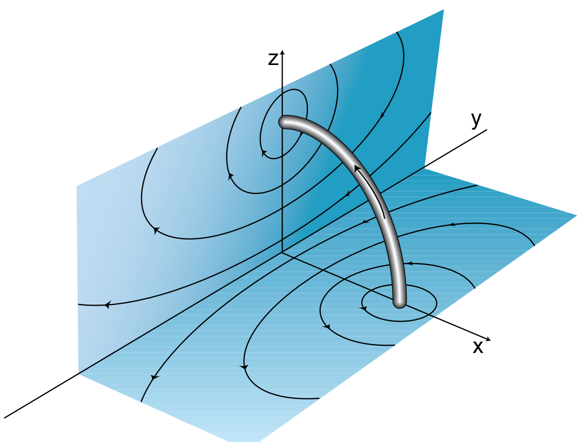
6-7. Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου κυκλικού αγωγού

Το μαγνητικό πεδίο, που δημιουργείται από έναν κυκλικό ρευματοφόρο αγωγό είναι ανομοιογενές. Η ένταση $\vec{B}$ του πεδίου στο κέντρο του αγωγού έχει:

- Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του κυκλικού αγωγού.
- Φορά, την φορά με την οποία προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας (βίδα), όταν στρέφεται κατά τη φορά του ρεύματος.
- Μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad (6.5)$$

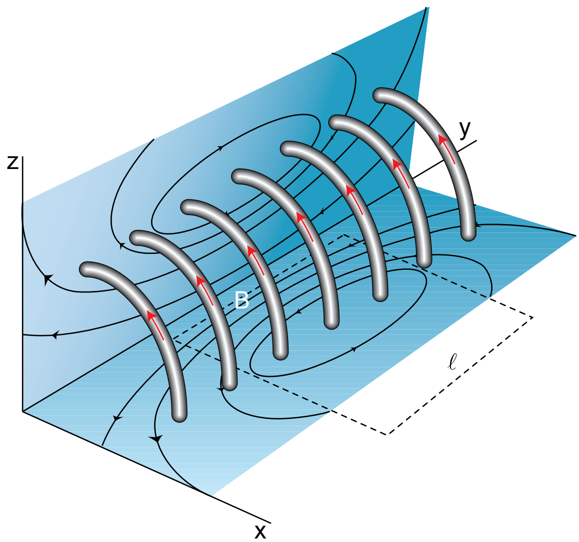
όπου I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό και R η ακτίνα του.



Σχήμα 6.5. Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού

6-8. Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς

Ένα πηνίο θεωρείται απείρου μήκους όταν το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από τη διάμετρο των σπειρών του.



Σχήμα 6.6. *Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς*

Στο εσωτερικό πηνίου απείρου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα, το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές. Στο πραγματικό πηνίο, το Μ.Π είναι ομογενές στα σημεία που βρίσκονται σε κάποια απόσταση από τα άκρα του πηνίου. Οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες προς τον άξονα του πηνίου.

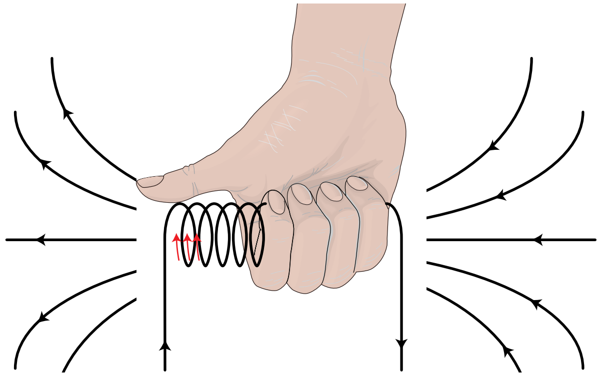
Η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει:

- Διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα του σωληνοειδούς.
- Φορά, την φορά που προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας, ο οποίος είναι τοποθετημένος κατά μήκος του άξονα του σωληνοειδούς και στρέφεται κατά τη φορά του ρεύματος.
- Μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{B = \mu_0 I \frac{n}{\ell}} \qquad (6.6)$$

όπου n: αριθμός σπειρών

ℓ: μήκος σωληνοειδούς



Σχήμα 6.7. Προσδιορισμός της φοράς της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ρευματοφόρου σωληνοειδούς

Η φορά της έντασης του μαγνητικού πεδίου μπορεί να προσδιορισθεί και ως εξής:

Το δεξί χέρι σφίγγει το σωληνοειδές με τέτοιο τρόπο ώστε τα νύχια να δείχνουν τη φορά του ρεύματος, ο τεντωμένος αντίχειρας δείχνει τη φορά του μαγνητικού πεδίου.

6-9. Μαγνητική ροπή

Κάθε βρόχος ρεύματος, όταν βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο, προσανατολίζεται όπως ένας ραβδόμορφος μαγνήτης. Ο τρόπος, που προσανατολίζεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο ένας ρευματοφόρος βρόχος, καθορίζεται από τη *μαγνητική ροπή.*

Ως μαγνητική ροπή επίπεδου βρόχου ορίζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει:

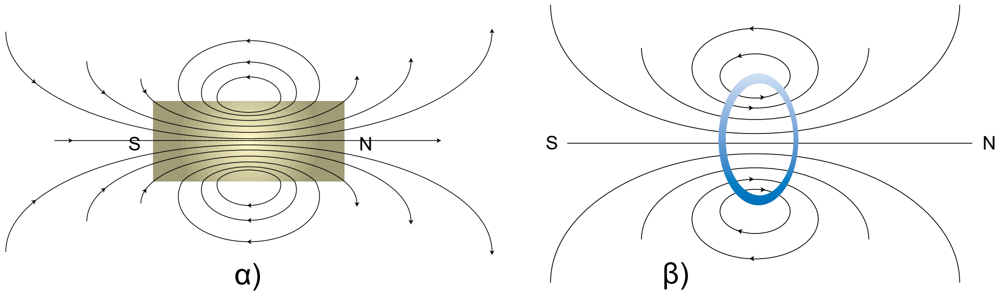
α) Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του βρόχου.

β) Φορά, τη φορά που προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας, που είναι κάθετος στο επίπεδο του βρόχου και στρέφεται κατά τη φορά του ρεύματος.

γ) Μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

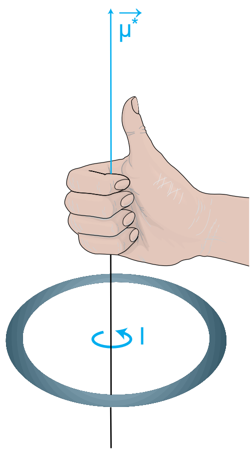
$$\mu^* = IS \tag{6.7}$$

όπου I η ένταση του ρεύματος και S το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τον βρόχο.



Σχήμα 6.8. (α) Μαγνητικό πεδίο ραβδόμορφου μαγνήτη. (β) Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου βρόχου. Η ομοιότητα είναι προφανής

Ένας ρευματοφόρος βρόχος, όταν βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, προσανατολίζεται, ώστε η μαγνητική ροπή να είναι παράλληλη προς την ένταση του μαγνητικού πεδίου.



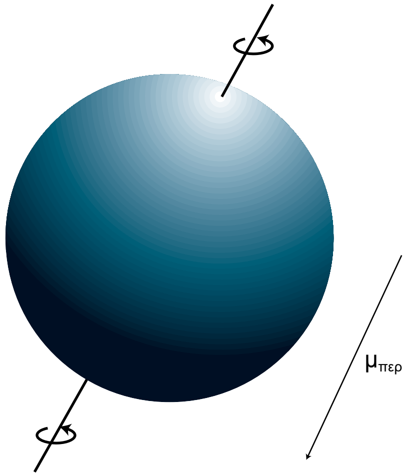
Σχήμα 6.9. Μαγνητική ροπή ρευματοφόρου βρόχου

Η μονάδα μαγνητικής ροπής στο S.I είναι το 1Am^2.

6-10. Μαγνητισμός και ύλη

Η απάντηση, στο ερώτημα γιατί ορισμένα υλικά εμφανίζουν μαγνητικές ιδιότητες ενώ άλλα δεν εμφανίζουν, βρίσκεται στη δομή των ατόμων των συγκεκριμένων υλικών.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί τα άτομα αποτελούνται από τον πυρήνα γύρω από τον οποίο περιστρέφονται ηλεκτρόνια. Κάθε ηλεκτρόνιο που περιστρέφεται ισοδυναμεί με βρόχο ηλεκτρικού ρεύματος, επομένως έχει μαγνητική ροπή. Οι μαγνητικές ροπές των ηλεκτρονίων που περιστρέφονται γύρω από ένα άτομο, επειδή έχουν διάφορους προσανατολισμούς, αλληλοαναιρούνται, με αποτέλεσμα συνολικά το άτομο να μην έχει μαγνητική ροπή ή να έχει ασήμαντη.



Σχήμα 6.10. *Μαγνητική ροπή ηλεκτρονίου λόγω ιδιοπεριστροφής*

Τα ηλεκτρόνια, όμως εκτός από την περιστροφική κίνηση που εκτελούν γύρω από τον πυρήνα, περιστρέφονται και γύρω από τον εαυτό τους (spin) Λόγω της ίδιας περιστροφής το ηλεκτρόνιο έχει μία επιπλέον μαγνητική ροπή. Αν ο αριθμός των ηλεκτρονίων του ατόμου είναι άρτιος, η συνολική μαγνητική ροπή των ηλεκτρονίων που οφείλεται στην ιδιοπεριστροφή τους, είναι μηδέν, επειδή σε ένα άτομο οι μαγνητικές **ροπές των ηλεκτρονίων είναι ανά δύο αντίθετες.** Όταν ο αριθμός των ηλεκτρονίων είναι περιττός, τότε η συνολική μαγνητική ροπή είναι διάφορη του μηδενός και ίση με τη μαγνητική ροπή του μονήρους ηλεκτρονίου.

Η συνολική μαγνητική ροπή ενός ατόμου, εφόσον υπάρχει, οφείλεται κύρια στην ιδιοπεριστροφή των ηλεκτρονίων.

Η παρουσία ορισμένων υλικών επηρεάζει την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Για παράδειγμα, αν η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ρευματοφόρου σωληνοειδούς, είναι B_0 όταν στο εσωτερικό υπάρχει κενό , όταν τοποθετηθεί ως πυρήνας κάποιο υλικό, τότε η ένταση του μαγνητικού πεδίου αλλάζει και παίρνει άλλη τιμή B.

❑ Μαγνητική διαπερατότητα ενός υλικού ονομάζεται το πηλίκο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ρευματοφόρου σωληνοειδούς, όταν στο εσωτερικό του υπάρχει το υλικό, προς την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του ίδιου σωληνοειδούς, όταν στο εσωτερικό του υπάρχει κενό.

$$\mu = \frac{B}{B_0} \qquad (6.8)$$

Η μαγνητική διαπερατότητα είναι αδιάστατο μέγεθος,δηλαδή καθαρός «αριθμός».

Τα υλικά στα οποία μ>>1 ονομάζονται *σιδηρομαγνητικά,* εκείνα στα οποία μ>1 *παραμαγνητικά* και εκείνα στα οποία μ<1 *διαμαγνητικά.*

6-11. Σιδηρομαγνητικά υλικά

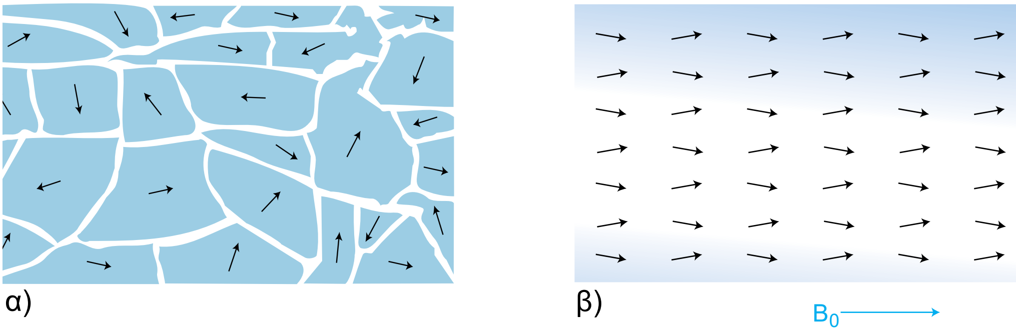
Τα σιδηρομαγνητικά υλικά παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί χρησιμοποιούνται ως πυρήνες πηνίων και μετασχηματιστών. Επίσης χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μονίμων μαγνητών. Τα σιδηρομαγνητικά υλικά αποτελούνται από άτομα που έχουν μαγνητική ροπή. Οι μαγνητικές ροπές των ατόμων των σιδηρομαγνητικών υλικών αποκτούν παρόμοιο προσανατολισμό ακόμη και με την επίδραση ασθενών εξωτερικών μαγνητικών πεδίων, τον οποίο διατηρούν και μετά την απομάκρυνση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. **Στον προσανατολισμό των μαγνητικών ροπών, που παραμένει, οφείλεται η μόνιμη μαγνήτιση των σιδηρομαγνητικών υλικών.**

Στα σιδηρομαγνητικά υλικά υπάρχουν περιοχές στις οποίες οι μαγνητικές ροπές των ατόμων έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Οι περιοχές αυτές ονομάζονται *περιοχές Weiss.* Οι περιοχές Weiss έχουν όγκους περίπου 10^{-12} έως 10^{-8} m^3 και περιέχουν 10^{17} έως 10^{21} άτομα.

Όταν δεν υπάρχει εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, οι μαγνητικές ροπές των περιοχών Weiss έχουν τυχαίο προσανατολισμό στο χώρο και γι' αυτό το υλικό δεν έχει μαγνητικές ιδιότητες. Με την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου έντασης B_0, οι μαγνητικές ροπές των περιοχών Weiss αρχίζουν να προσανατολίζονται κατά την διεύθυνση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και το υλικό αποκτά μαγνητικές ιδιότητες. Μέσα στο υλικό η ολική ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι ίση με το άθροισμα της έντασης του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και του μαγνητικού πεδίου που προκύπτει από τον προσανατολισμό των μαγνητικών ροπών των περιοχών Weiss, δηλ.

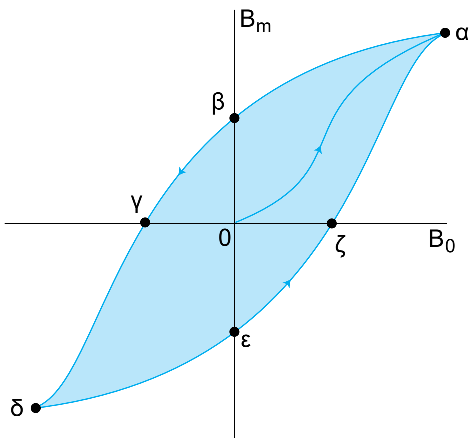
$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m \qquad (6.9)$$

όπου $\vec{B}$ η ένταση του συνολικού μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του υλικού, $\vec{B}_0$ η ένταση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και $\vec{B}_m$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου που οφείλεται στις περιοχές Weiss.



Σχήμα 6.11. α) Περιοχές Weiss β) Περιοχές Weiss, όταν υπάρχει εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

Ο τρόπος μαγνήτισης ενός σιδηρομαγνητικού υλικού φαίνεται παραστατικά στο διάγραμμα του βρόχου υστερήσεως (Σχ. 6.12).



Σχήμα 6.12. Βρόχος υστερήσεως σιδηρομαγνητικού υλικού

Το υλικό αρχικά δεν έχει μαγνήτιση (σημείο Ο του διαγράμματος). Με την εφαρμογή εξωτερικού μαγνητικού πεδίου οι μαγνητικές ροπές των περιοχών Weiss αρχίζουν να προσανατολίζονται με αποτέλεσμα να εμφανίζεται μαγνητικό πεδίο έντασης B_m που οφείλεται στο υλικό. Καθώς η B_0 αυξάνει, αυξάνει και η B_m μέχρι του σημείου α, όπου επέρχεται και κόρος περαιτέρω δηλαδή αύξηση του B_0 δεν επιφέρει αντίστοιχη αύξηση του B_m. Αυτό συμβαίνει γιατί στο α υπάρχει πλήρης προσανατολισμός των μαγνητικών περιοχών Weiss. Ακολούθως, μειώνουμε την τιμή του B_0. Αυτό προκαλεί αντίστοιχη μείωση της B_m, όταν όμως η B_0 μηδενίζεται (σημείο β), η B_m είναι διάφορη του μηδενός. Σε αυτό ακριβώς το φαινόμενο οφείλεται η παραμένουσα μαγνήτιση των σιδηρομαγνητικών υλικών. Ακολούθως αλλάζουμε τη φορά του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και αυξάνουμε σταδιακά την έντασή του· αυτό έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της τιμής του B_m αφού οι μαγνητικές ροπές των μαγνητικών περιοχών τείνουν να προσανατολισθούν κατά την αντίθετη φορά. Στο σημείο γ ο προσανατολισμός των μαγνητικών ροπών είναι τυχαίος και επομένως B_m=0. Η περαιτέρω αύξηση της τιμής B_0 κατά την αρνητική φορά προκαλεί αύξηση της B_m κατά την ίδια φορά έως το σημείο δ, όπου εμφανίζεται πάλι κόρος.

6-12. Δύναμη Laplace

Όταν ένας ρευματοφόρος αγωγός βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο δέχεται την επίδραση δύναμης, η οποία ονομάζεται δύναμη Laplace. Η δύναμη Laplace αποτελεί τη συνιστάμενη των δυνάμεων που ασκεί το μαγνητικό πεδίο στους κινούμενους ηλεκτρικούς φορείς που συνιστούν το ρεύμα. Παρότι η δύναμη Laplace ασκείται σε ρευματοφόρο αγωγό οποιουδήποτε σχήματος, ο οποίος βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, θα μελετηθεί η ειδική περίπτωση, που ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Αν ο αγωγός έχει μήκος ℓ, διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και σχηματίζει με τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου γωνία θ, τότε η δύναμη Laplace, που ασκείται στον αγωγό έχει:

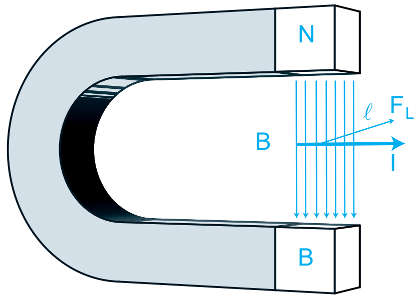
α) Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από την ένταση του μαγνητικού πεδίου και τον αγωγό.

β) Φορά τέτοια ώστε, η κατεύθυνση της δύναμης, η κατεύθυνση της έντασης του μαγνητικού πεδίου και η συμβατική φορά του ρεύματος να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα αξόνων.

γ) Μέτρο που δίνεται από τη σχέση:

$$F_L = BI\ell \cdot ημθ \tag{6.10}$$

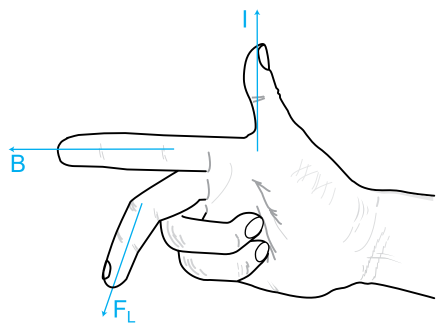
όπου B η ένταση του μαγνητικού πεδίου.



Σχήμα 6.13. *Δύναμη Laplace σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό*

Όπως προκύπτει από τη σχέση (6.10), όταν ο αγωγός είναι παράλληλος προς τις δυναμικές γραμμές (θ=0°) η δύναμη Laplace είναι $F_L = B\,I\,\ell \cdot ημ0 = B\,I\,\ell \cdot 0 = 0$. Όταν ο αγωγός είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές (θ=90°) η δύναμη Laplace έχει μέτρο $F_L = B\,I\,\ell$ ημ90° $\Rightarrow$

$$\boxed{F_L = B\,I\ell} \qquad (6.11)$$



Σχήμα 6.14. *Προσδιορισμός της φοράς της δύναμης Laplace. Το δεξί χέρι αναπαριστά δεξιόστροφο σύστημα αξόνων*

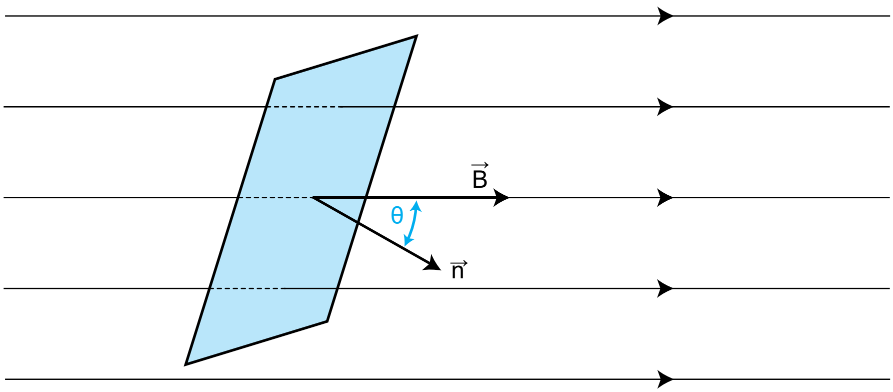
6-13. Μαγνητική ροή

Στο σχήμα 6.13 φαίνεται μία νοητή επίπεδη επιφάνεια S, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.

❑ Ορίζεται ως μαγνητική ροή, η οποία διέρχεται από επιφάνεια S το γινόμενο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, επί το εμβαδόν της επιφάνειας, επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζεται από την κάθετη στην επιφάνεια και την ένταση του μαγνητικού πεδίου.

$$\Phi = B\ S\ \sigma\upsilon\nu\theta \tag{6.12}$$

Η μαγνητική ροή μπορεί να ορισθεί γενικότερα σε ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο, αλλά για λόγους απλούστευσης προτιμήθηκε να δοθεί ο ορισμός της για ομογενές μαγνητικό πεδίο, χωρίς σημαντική καταστρατήγηση της γενικότητας.



Σχήμα 6.15. *Μαγνητική ροή που διέρχεται από επίπεδη επιφάνεια*

Η μονάδα της μαγνητικής ροής, στο S.I είναι το 1Wb (1 Webber). Ο ορισμός του 1 Wb θα δοθεί σε επόμενη παράγραφο. Από το 1 Wb ορίζεται το 1 Tesla ως: $1\ T = 1\ Wb \cdot m^2$.

6-14. Μαγνητική επαγωγή

Στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου μελετήθηκε, πως δημιουργείται μαγνητικό πεδίο από κινούμενα φορτία. Στις επόμενες παραγράφους θα μελετηθεί πως ένα μαγνητικό πεδίο μπορεί να δημιουργήσει ένα ηλεκτρικό πεδίο.

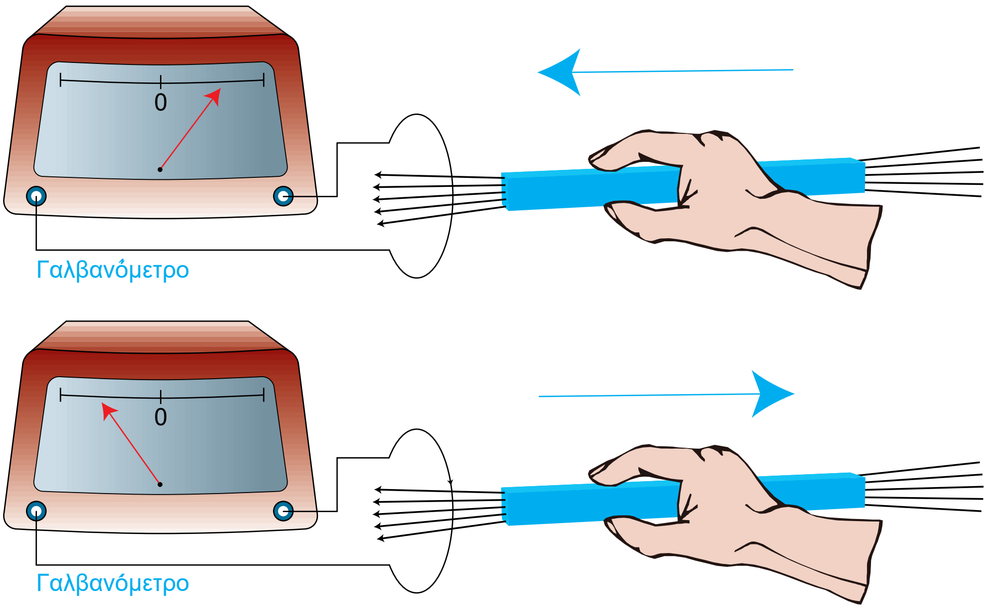
Ο Άγγλος Michael Faraday και ο Αμερικανός Joseph Henry, εργαζόμενοι ανεξάρτητα, έδειξαν πειραματικά πως ένα μαγνητικό πεδίο επάγει ρεύμα σε ένα κύκλωμα.

Ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να δημιουργηθεί από μαγνητικό πεδίο με δύο τρόπους,

α) Με την κίνηση ενός αγωγού μέσα σε χρονικά σταθερό μαγνητικό πεδίο,

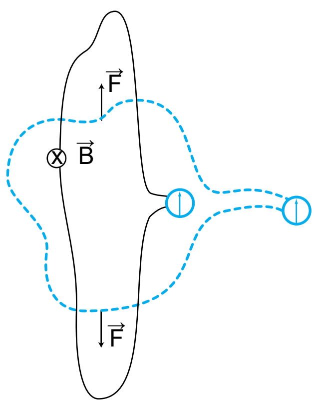
β) Με τη δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου από χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω θα περιγραφούν τρία πειράματα στα οποία φαίνεται η δημιουργία ρεύματος από μαγνητικό πεδίο.



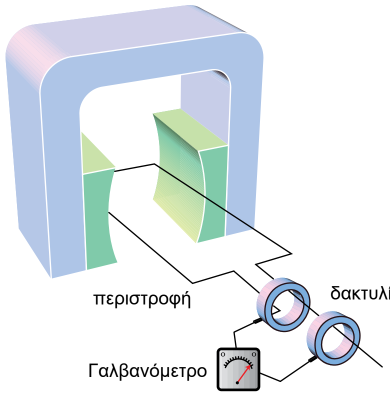
Σχήμα 6.16. *Όταν ο μαγνήτης κινείται προς τον βρόχο ή απομακρύνεται από αυτόν το γαλβανόμετρο αποκλίνει σε αντίθετες κατευθύνσεις*

Στο σχήμα 6.16 φαίνεται συρμάτινος βρόχος, ο οποίος είναι συνδεμένος σε γαλβανόμετρο. Το γαλβανόμετρο αρχικά έχει ένδειξη μηδέν. Όταν ένας μαγνήτης κινείται προς τον βρόχο, η βελόνη του γαλβανομέτρου αποκλίνει, που σημαίνει ότι ο βρόχος διαρρέεται από ρεύμα. Η απόκλιση της βελόνης υπάρχει μόνο όταν κινείται ο μαγνήτης. Όταν ο μαγνήτης απομακρύνεται από τον βρόχο η βελόνη αποκλίνει πάλι αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση.



Σχήμα 6.17. *Ο βρόχος διαρρέεται από ρεύμα καθώς παραμορφώνεται*

Στο σχήμα 6.17 ο επίπεδος συρμάτινος βρόχος είναι συνδεμένος με γαλβανόμετρο. Ο βρόχος βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, του οποίου η ένταση είναι κάθετη στο επίπεδο του βρόχου. Ο βρόχος σταδιακά παραμορφώνεται έως ότου το εμβαδόν του γίνει μηδέν. Όσο διαρκεί η παραμόρφωση του βρόχου η βελόνη του γαλβανομέτρου αποκλίνει, που σημαίνει ότι ο βρόχος διαρρέεται από ρεύμα.



Σχήμα 6.18. Το συρμάτινο πλαίσιο, καθώς περιστρέφεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο διαρρέεται από ρεύμα

Στο σχήμα 6.18 συρμάτινο πλαίσιο στρέφεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Όσο το πλαίσιο περιστρέφεται, η βελόνη του γαλβανομέτρου αποκλίνει, άρα το πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα.

Τί κοινό σημείο υπάρχει στα παραπάνω πειράματα; Ο Faraday διαπίστωσε πως το *επαγωγικό ρεύμα* υπάρχει εφόσον μεταβάλλεται η μαγνητική ροή. Συγκεκριμένα στο πρώτο πείραμα, καθώς ο μαγνήτης πλησιάζει στον συρμάτινο δακτύλιο, μεταβάλλεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου η οποία υπάρχει στα σημεία της επιφάνειας του δακτυλίου. Σύμφωνα με τη σχέση (6.12) μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή που περνά από τον δακτύλιο. Στο δεύτερο πείραμα καθώς παραμορφώνεται ο συρμάτινος βρόχος, μεταβάλλεται το εμβαδόν της επιφάνειας του, άρα μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή. Στο τρίτο πείραμα, επειδή το πλαίσιο περιστρέφεται μεταβάλλεται και η γωνία θ, που σχηματίζεται από την κάθετη στο πλαίσιο και την ένταση του μαγνητικού πεδίου, επομένως μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *ηλεκτρομαγνητική επαγωγή.* Συγκεκριμένα:

❑ Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη, όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή.

6-15. Νόμος Faraday

Ο Faraday κατάφερε πρώτος να διαπιστώσει πειραματικά, από ποιους παράγοντες εξαρτάται η τιμή της ηλεκτρεγερτικής δύναμης (επαγωγικής τάσης). Σύμφωνα με το νόμο Faraday:

❑ Η επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη, που αναπτύσσεται σ' ένα κύκλωμα είναι ανάλογη προς το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής, που περνάει από το κύκλωμα.

$$E_{επ} = -\frac{ΔΦ}{Δt} \tag{6.13}$$

Η επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη, που επάγεται σε πηνίο, το οποίο έχει **n** σπείρες είναι:

$$E_{επ} = -n\frac{ΔΦ}{Δt} \tag{6.14}$$

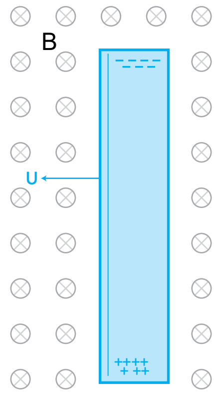
Το μείον στις σχέσεις (6.13) και (6.14) οφείλεται στον κανόνα του Lenz., σύμφωνα με τον οποίο *το επαγωγικό ρεύμα έχει τέτοια φορά, ώστε να αντιδρά στα αίτια, που το προκαλούν.*

Από τη σχέση (6.13) ορίζεται ως μονάδα της μαγνητικής ροής το 1 Webber.
$1Wb = 1V \cdot s$

6-16. Κίνηση ευθύγραμμου αγωγού σε μαγνητικό πεδίο

Επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη εμφανίζεται σε κάθε αγωγό, που κινείται σε μαγνητικό πεδίο. Όπως φαίνεται στο σχήμα (6.19), ευθύγραμμος αγωγός μήκους l, κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$, με ταχύτητα $\vec{υ}$ κάθετη στην ένταση του μαγνητικού πεδίου και τον αγωγό. Στον αγωγό εμφανίζεται επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη, που δίνεται από τη σχέση:

$$E = B\,υ\,\ell \tag{6.15}$$



Σχήμα 6.19. Αγωγός που κινείται σε μαγνητικό πεδίο εμφανίζει επαγωγική τάση

Στην περίπτωση που η ταχύτητα του αγωγού σχηματίζει γωνία θ με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου η επαγωγική τάση δίνεται από τη σχέση:

$$E = B\, υ\, \ell\ ημθ \qquad (6.16)$$

6-17. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

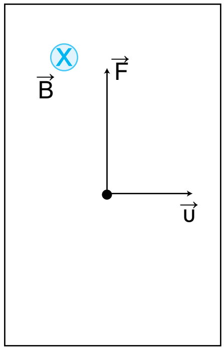
Σωμάτιο φέρει φορτίο q=2mC και κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B=2T με σταθερή ταχύτητα κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Στο σωμάτιο ασκείται από το πεδίο δύναμη $F = 4 \cdot 10^{-3}$ N.

α) Να σχεδιασθεί η δύναμη F.

β) Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου.

Λύση

α) Η δύναμη είναι κάθετη στην ταχύτητα και την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Η φορά της προσδιορίζεται από τον κανόνα της δεξιάς χειρός (Σχ.6-1), στο δάκτυλο που αντιστοιχεί στο I, αντιστοιχηθεί η κατεύθυνση της ταχύτητας. Συνήθως τα σχήματα κατασκευάζονται διδιάστατα. Σε αυτή την περίπτωση κάθε διάνυσμα, που είναι κάθετο στο επίπεδο σχεδίασης, παριστάνεται σαν μικρός κύκλος. Αν η φορά του είναι προς τον αναγνώστη τότε τοποθετείται στον κύκλο τελεία, αν είναι αντίθετη τοποθετείτε ένα x.



β) Η σχέση που δίνει τη δύναμη Lorentz είναι:

$$F = B\,υ\,q \Rightarrow υ = \frac{F}{Bq} \Rightarrow υ = \frac{4 \cdot 10^{-3}\,N}{2\,T\,2 \cdot 10^{-3}\,C} \Rightarrow υ = 1\frac{m}{s}$$

Εφαρμογή 2η

Ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα I=2A. Σε σημείο Α του μαγνητικού πεδίου του αγωγού η ένταση είναι $B = 4 \cdot 10^{-5}$ T. Πόσο απέχει το Α από τον αγωγό; Δίνεται $μ_0 = 4π \cdot 10^{-7}\ \frac{Vs}{Am}$.

Λύση

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο Α δίνεται από τη σχέση:

$$B = \frac{μ_0 I}{2πr} \Rightarrow r = \frac{μ_0 I}{2πB} \Rightarrow r = \frac{4π \cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}2A}{2π4 \cdot 10^{-5}\,T} \Rightarrow r = 10^{-2}\,m.$$

Εφαρμογή 3η

Στο κέντρο ρευματοφόρου κυκλικού αγωγού ακτίνας r=0,1m η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι $B = 4π10^{-6}$T. Ο αγωγός έχει αντίσταση R=10Ω. Να υπολογισθούν:

α) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό.

β) Η τάση που εφαρμόζεται στον αγωγό.

Δίνεται $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{Vs}{Am}$.

Λύση

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του αγωγού είναι:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \Rightarrow I = \frac{B2r}{\mu_0} \Rightarrow I = \frac{4\pi 10^{-6} T \cdot 2 \cdot 0,1m}{4\pi 10^{-7} \dfrac{Vs}{Am}} \Rightarrow I = 2A.$$

Η τάση θα είναι:

$$V = I\,R \Rightarrow V = 2A \cdot 10\Omega = 20V.$$

Εφαρμογή 4η

Στα άκρα πηνίου υπάρχει τάση V=10V. Το πηνίο έχει μήκος l=2,5cm, και n = 100 σπείρες. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου είναι B = $4\pi 10^{-5}$ T. Να υπολογισθεί η αντίσταση του πηνίου.

Δίνεται $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{Vs}{Am}$.

Λύση

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$B = \mu_0 I \frac{n}{\ell} \Rightarrow I = \frac{B\ell}{\mu_0 n} \Rightarrow I = \frac{4\pi 10^{-5} T 2,5 \cdot 10^{-2} m}{4\pi 10^{-7} \dfrac{Vs}{Am} 100} = 2,5 \cdot 10^{-2} A$$

Η αντίσταση του πηνίου είναι:

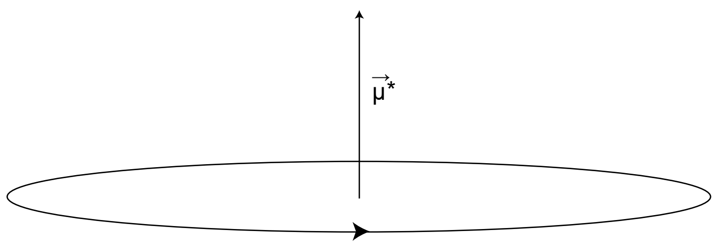
$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = \frac{10\,V}{2,5 \cdot 10^{-2} A} = 400\,\Omega$$

Εφαρμογή 5η

Κυκλική συρμάτινη σπείρα έχει ακτίνα α = 0,1m και διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι = 0,1π Α. α) Να σχεδιασθεί η μαγνητική ροπή της σπείρας. β) Να υπολογισθεί το μέτρο της μαγνητικής ροπής.

Λύση

α) Η μαγνητική ροπή έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της σπείρας και φορά τη φορά που προχωράει δεξιόστροφος κοχλίας κάθετος στο επίπεδο της σπείρας , ο οποίος στρέφεται όπως το ρεύμα.



β) Το μέτρο της μαγνητικής ροπής δίνεται από τη σχέση:

$$\mu^* = I \cdot S \qquad (1)$$

Το εμβαδόν κύκλου, όπως είναι γνωστό, σε συνάρτηση με την ακτίνα είναι:

$$S = \pi\alpha^2 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συνεπάγεται:

$$\mu^* = I \cdot \pi\alpha^2 = 0{,}1\ \pi A \cdot \pi \cdot 0{,}1^2 m^2 = 0{,}01\ Am^2$$

Εφαρμογή 6η

Ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι = 2Α και είναι τοποθετημένος μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β=2Τ κάθετα στις δυναμικές γραμμές. Στον αγωγό ασκείται δύναμη F=2N από το πεδίο. Ποιο είναι το μήκος του αγωγού;

Λύση

Ο αγωγός μέσα στο μαγνητικό πεδίο δέχεται την επίδραση δύναμης Laplace, της οποίας το μέτρο είναι:

$$F = BI\ell \Rightarrow \ell = \frac{F}{BI} \Rightarrow \ell = \frac{2N}{2T2A} = 0{,}5m.$$

Εφαρμογή 7η

Εύκαμπτο σύρμα έχει τη μορφή επιπέδου βρόχου, βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B=2T με το επίπεδο του κάθετο στις δυναμικές γραμμές. Το σύρμα παραμορφώνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η επιφάνεια του να μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό. Αρχικά το εμβαδόν του είναι $S_1 = 0{,}3m^2$ και σε χρόνο Δt=2s γίνεται S_2=0,1m^2. Πόση είναι η επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη που εμφανίζεται;

Λύση

Η επαγωγική τάση δίνεται από τη σχέση:

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (1)$$

Η μεταβολή της μαγνητικής ροής είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \\ \Phi_2 = BS_2 \\ \Phi_1 = BS_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\Phi = BS_2 - BS_1 \Rightarrow \Delta\Phi = B(S_2 - S_1) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) $\Rightarrow$ $E = -\dfrac{B(S_2 - S_1)}{\Delta t} \Rightarrow$

$$E = -\frac{2T\left(0{,}1m^2 - 0{,}3m^2\right)}{2s} = 20\mu V$$

Εφαρμογή 8η

Αγωγός μήκους ℓ=1m, βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B=2T. Ο αγωγός είναι κάθετος στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου και κινείται με σταθερή ταχύτητα, η οποία είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές. Στα άκρα του αγωγού εμφανίζεται τάση V=2V. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του;

Λύση

Η επαγωγική τάση που εμφανίζεται στα άκρα του αγωγού είναι:

$$V = B\upsilon\ell \Rightarrow \upsilon = \frac{V}{B\ell} \Rightarrow \upsilon = \frac{2V}{2T1m} = 1\frac{m}{s}$$

6-18. Προβλήματα προς λύση

1° Σωμάτιο, έχει q=-10mC και κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 10\frac{m}{s}$, η οποία σχηματίζει γωνία θ=30° με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Το σωματίδιο δέχεται δύναμη F=0,01N από το πεδίο.

α) Να σχεδιασθεί η δύναμη Laplace που δέχεται το σωμάτιο.

β) Να υπολογισθεί το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

(0,2T)

2° Σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 5\frac{m}{s}$ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B = 0,1T, κάθετα στις δυναμικές γραμμές. Η δύναμη που δέχεται το σωμάτιο είναι F=0,02N. Πόσο φορτίο φέρει το σωματίδιο;

(0,04C)

3° Δύο ευθύγραμμοι παράλληλοι αγωγοί Α και Β, διαρρέονται από ρεύματα εντάσεων I_1 = 1A και I_2=2A αντίστοιχα. Η απόσταση των αγωγών είναι r=2m. Να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε σημείο Ν, το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στους αγωγούς και απέχει d = 1,6m από τον Α.

Δίνεται $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$.

α) Όταν τα ρεύματα που διαρρέουν τους αγωγούς είναι ομόρροπα.

β) Όταν είναι αντίρροπα.

($8,75 \cdot 10^{-7}$ T, $1,125 \cdot 10^{-6}$ T)

4° Δυο ευθύγραμμοι αγωγοί Α και Β απέχουν κατά r=0,5m και διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα εντάσεων I_1=3A και I_2=12A. Να ευρεθεί η απόσταση σημείου Ν από τον αγωγό Α στον οποίο η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν.

(0,1m)

5° Κυκλικός αγωγός διαρρέεται από ρεύμα Ι=2Α, οπότε στο κέντρο του η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι Β = 0,04mT. Ποιο είναι το εμβαδόν του αγωγού;

($10^{-4}\pi^3$ m^2)

6° Δύο συρμάτινοι ομοεπίπεδοι ομόκεντροι κυκλικοί αγωγοί έχουν ακτίνες r_1 = 10cm και r_2 = 5cm αντίστοιχα. Οι αγωγοί διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα εντάσεων I_1 = 2A και I_2 = 5A. Να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο των δακτυλίων.

($2,4 \cdot 10^{-5}\pi$ T)

7° Πηνίο έχει n = 100 σπείρες και μήκος ℓ = 2,5cm. Το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I = 0,1 A, οπότε η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου είναι B =0 ,16πΤ. Έχει το πηνίο πυρήνα; Αν έχει, πόση είναι η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο πυρήνας;

(1000)

8° Με πόση τάση πρέπει να τροφοδοτηθεί πηνίο, το οποίο έχει 10 $\frac{\text{σπ.}}{\text{cm}}$, ώστε στο εσωτερικό του να δημιουργηθεί μαγνητικό πεδίο με ένταση Β=0,1Τ; Αν στο εσωτερικό του πηνίου τοποθετηθεί πυρήνας με μαγνητική διαπερατότητα μ = 1000, ποια πρέπει να είναι η τάση τροφοδοσίας,ώστε η ένταση του μαγνητικού πεδίου να παραμείνει η ίδια; Η αντίσταση του πηνίου είναι R=100Ω.

$$\left(\frac{25000}{\pi}V,\ \frac{25}{\pi}V\right)$$

9° Πηνίο από χάλκινο σύρμα έχει n = 1000 σπείρες, μήκος ℓ =1m και τροφοδοτείται από τάση V = 10V. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου είναι B = 0,1π T. Το χάλκινο σύρμα από το οποίο είναι κατασκευασμένο το πηνίο έχει αντίσταση $R^* = 0{,}01\ \frac{\Omega}{m}$. Ποιο είναι το μήκος του χάλκινου σύρματος;

(4m)

10° Τετράγωνο συρμάτινο πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα I=2A, οπότε αποκτά μαγνητική ροπή μ^* =2Am^2. Να υπολογισθεί το μήκος της πλευράς του πλαισίου.

(1m)

11° Ορθογώνιο συρμάτινο πλαίσιο με διαστάσεις α=0,1m και β=0,2m, πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ως μαγνητικό δίπολο με μαγνητική ροπή μ^* = 4Am^2. Το σύρμα από το οποίο είναι κατασκευασμένο το πλαίσιο έχει αντίσταση ανά μονάδα μήκους $R^* = 1\ \frac{\Omega}{m}$. Με πόση τάση πρέπει να τροφοδοτηθεί το πλαίσιο;

(2.4V)

12° Τετράγωνος συρμάτινος αγωγός με πλευρά α = 0,1m βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B_1 = 2T, με το επίπεδο του κάθετο στις δυναμικές γραμμές. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό και σε χρόνο Δt = 10^{-3} s μηδενίζεται. Να υπολογισθεί η επαγωγική τάση που εμφανίζεται στο πηνίο.

(20V)

13° Στο εσωτερικό σωληνοειδούς βρίσκεται συρμάτινη σπείρα, με το επίπεδο της κάθετο στον άξονα του σωληνοειδούς. Η σπείρα έχει αντίσταση R_σ = 0,4πΩ και διατομή S = 2cm^2. Το σωληνοειδές, έχει n = 1000 σπείρες, μήκος ℓ = 0,2m και διαρρέεται από ρεύμα I_1 = 2A. Το ρεύμα του σωληνοειδούς μειώνεται με σταθερό ρυθμό σε I_2 = 1 A σε χρόνο Δt = 1ms. Να υπολογισθεί το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει τη σπείρα.

(1mA)

14° Τετράγωνο συρμάτινο πλαίσιο έχει πλευρά α = 0,2m και διαρρέεται από ρεύμα Ι = 2Α. Το πλαίσιο βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β = 1Τ. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι κάθετες στο επίπεδο του πλαισίου. Να υπολογισθεί η συνολική δύναμη που ασκείται στο πλαίσιο από το πεδίο.

(0)

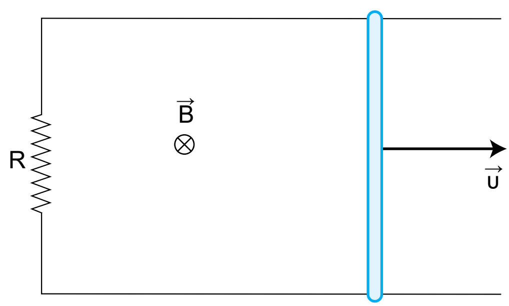
15° Οριζόντιος ευθύγραμμος έχει μήκος ℓ = 1m και διαρρέεται από ρεύμα έντασης Ι = 2 Α. Ο αγωγός ισορροπεί μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι οριζόντιες και κάθετες στον αγωγό. Αν το βάρος του αγωγού είναι 4Ν, να υπολογισθεί το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

(2T)

16° Ευθύγραμμος αγωγός μήκους ℓ = 0,5m κινείται μέσα σ' ομογενές μαγνητικό πεδίο με σταθερή ταχύτητα $υ = 2\frac{m}{s}$ κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου και τον αγωγό. Στον αγωγό εμφανίζεται επαγωγική τάση V = 0,4V. Να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου.

(0,4T)

17° Αγωγός μήκους ℓ =0,2m κινείται πάνω σε παράλληλους αγώγιμους οδηγούς Αx και Βψ με ταχύτητα παράλληλη προς τους οδηγούς. Ο αγωγός είναι συνεχώς κάθετος στους οδηγούς, όπως στο σχήμα. Ομογενές μαγνητικό πεδίο που είναι κάθετο στο επίπεδο των αγωγών έχει ένταση Β = 1Τ. Τα άκρα Α και Β των οδηγών συνδέονται με αντιστάτη R = 2Ω, οπότε ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα Ι = 0,2Α. Να υπολογισθεί η ταχύτητα του αγωγού.



$(2\frac{m}{s})$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΥΚΝΩΤΕΣ

Εισαγωγή

Οι πυκνωτές είναι οι διατάξεις που αποθηκεύουν ηλεκτρικό φορτίο. Η δυνατότητα αποθήκευσης φορτίου από ένα πυκνωτή εξαρτάται από τη χωρητικότητα του. Βασικά ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο αγωγούς που ανάμεσα τους υπάρχει μονωτικό υλικό. Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται από το σχήμα των οπλισμών, τα γεωμετρικά του στοιχεία και το μονωτικό υλικό που υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς του.

Οι πυκνωτές χρησιμοποιούνται σε ποικίλες εφαρμογές, όπως στα συντονιζόμενα κυκλώματα, στα ηλεκτρονικά φίλτρα, στα συστήματα ανάφλεξης των αυτοκινήτων και για την αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι η ***κατανόηση*** *των ιδιοτήτων των πυκνωτών και του τρόπου που συνδέονται σε ένα κύκλωμα.*

7-1. Χωρητικότητα αγωγού

Τα φορτία κατανέμονται στην επιφάνεια του αγωγού με τέτοιο τρόπο ώστε όλα τα σημεία της επιφάνειας του αγωγού να έχουν το ίδιο δυναμικό. Το δυναμικό αυτό ονομάζεται *δυναμικό αγωγού.*

❑ Χωρητικότητα αγωγού ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του φορτίου που φέρει ο αγωγός προς το δυναμικό του αγωγού.

$$C = \frac{Q}{V} \tag{7.1}$$

Μονάδα χωρητικότητας στο S.I είναι το 1 Farad. ($1F = 1\frac{Cb}{V}$)

Το 1F είναι πολύ μεγάλη μονάδα χωρητικότητας. Η Γη για παράδειγμα έχει χωρητικότητα μικρότερη από 1F. Για το λόγο αυτό στη πράξη χρησιμοποιούνται υποπολλαπλάσια του 1F, όπως το 1mF (10^{-3} F), το 1μF (10^{-6} F), το 1nF (10^{-9} F) και το 1pF (10^{-12}F).

Η χωρητικότητα ενός αγωγού εξαρτάται από:

- Από το σχήμα και τα γεωμετρικά στοιχεία του αγωγού.
- Από τη φύση του υλικού μέσα στο οποίο βρίσκεται ο αγωγός.
- Από την παρουσία άλλων αγωγών.

Πρέπει να τονισθεί, πως η χωρητικότητα αγωγού είναι ανεξάρτητη τόσο από το φορτίο του αγωγού, όσο και από το δυναμικό του. Ο λόγος αυτών των μεγεθών είναι σταθερός, δηλαδή αν μεταβληθεί το φορτίο θα μεταβληθεί και το δυναμικό έτσι ώστε ο λόγος τους να έχει σταθερή τιμή.

7-2. Χωρητικότητα πυκνωτή

Η χωρητικότητα των αγωγών είναι μικρή. Η απαίτηση για μεγαλύτερες χωρητικότητες οδήγησε στο να δημιουργηθούν συστήματα δύο αγωγών που έχουν πολύ μεγαλύτερη χωρητικότητα και ονομάζονται *πυκνωτές.* Οι δύο αγωγοί που αποτελούν τον πυκνωτή ονομάζονται *οπλισμοί* και όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος φέρουν ίσο κατά μέτρο φορτίο αλλά με αντίθετο πρόσημο.

❑ Χωρητικότητα πυκνωτή ονομάζεται το σταθερό πηλίκο του φορτίου που φέρει ο πυκνωτής προς τη διαφορά δυναμικού των οπλισμών του.

$$C = \frac{Q}{V} \tag{7.2}$$

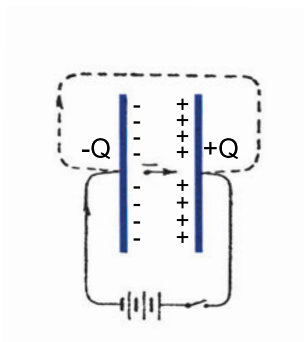
Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται:

- Από το σχήμα των οπλισμών και τα γεωμετρικά στοιχεία του πυκνωτή.
- Από τη φύση του υλικού που υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς του.

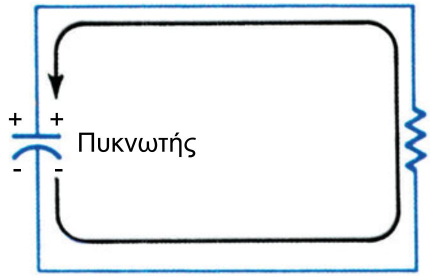
Ανάλογα με το σχήμα των οπλισμών τους, οι πυκνωτές διακρίνονται σε επίπεδους, σφαιρικούς, κυλινδρικούς κ.α.

Ανάλογα με το *διηλεκτρικό,* το οποίο υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς διακρίνονται σε ηλεκτρολυτικούς, χάρτου, κεραμικούς, μίκας κ.λ.π.

Σε ένα κύκλωμα οι πυκνωτές χρησιμεύουν για να αποθηκεύουν ηλεκτρική ενέργεια σε μορφή ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς. Για να αποθηκεύσουν ηλεκτρική ενέργεια οι πυκνωτές πρέπει να τροφοδοτηθούν με τάση, ώστε να φορτιστούν. Μόλις οι οπλισμοί συνδεθούν με τους πόλους μιας πηγής συνεχούς ρεύματος, ελεύθερα ηλεκτρόνια από τον οπλισμό που είναι συνδεμένος με τον θετικό πόλο (θετικός οπλισμός) δια μέσου της ηλεκτρικής πηγής πηγαίνουν στον οπλισμό που είναι συνδεμένος με τον αρνητικό πόλο. Η μετατόπιση αυτή συνεχίζεται έως ότου η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή γίνει ίση με την τάση στους πόλους της πηγής. Τελικά στο θετικό οπλισμό υπάρχει έλλειμμα ηλεκτρονίων επομένως αυτός έχει θετικό φορτίο, ενώ ο αρνητικός οπλισμός, στον οποίο υπάρχει περίσσια ηλεκτρονίων, έχει αρνητικό φορτίο. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *φόρτιση* του πυκνωτή.



Σχήμα 7.1. *Κύκλωμα φόρτισης πυκνωτή*



Σχήμα 7.2. Κύκλωμα εκφόρτισης πυκνωτή

Όταν ο πυκνωτής αποσυνδεθεί από την πηγή εξακολουθεί να είναι φορτισμένος, αν όμως οι οπλισμοί του συνδεθούν με αγωγό, τότε ηλεκτρόνια από τον αρνητικό οπλισμό δια μέσω του αγωγού μετατοπίζονται στον θετικό οπλισμό με αποτέλεσμα τη βαθμιαία μείωση του φορτίου των οπλισμών. Η μετατόπιση των ηλεκτρονίων συνεχίζεται μέχρις ότου το φορτίο των οπλισμών τελικά μηδενισθεί. Η όλη διαδικασία ονομάζεται *εκφόρτιση* του πυκνωτή.

7-2.1. Χωρητικότητα επιπέδου πυκνωτή

❑ Επίπεδος πυκνωτής είναι ο πυκνωτής, του οποίου οι οπλισμοί είναι επίπεδες μεταλλικές πλάκες.

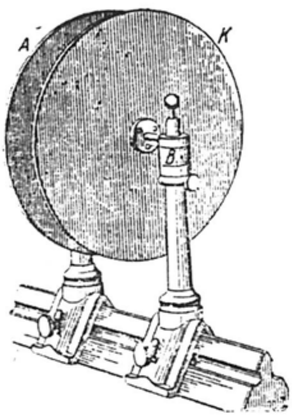
Η χωρητικότητα πυκνωτή που έχει επίπεδους οπλισμούς δίνεται από τη σχέση:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{\ell} \qquad (7.3)$$

όπου S το εμβαδόν των οπλισμών, ℓ η μεταξύ τους απόσταση και ε_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού.

Όπως εύκολα συνάγεται από τη σχέση (7.3), η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή αυξάνεται όταν αυξάνεται το εμβαδόν των οπλισμών του και όταν μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση.

Σημειώνεται πως οι οπλισμοί ενός πυκνωτή μπορούν να έχουν οποιοδήποτε επίπεδο σχήμα. Στο σχήμα 7-3 εικονίζεται πυκνωτής, του οποίου οι οπλισμοί είναι κύκλοι.



Σχήμα 7.3. Επίπεδος πυκνωτής με κυκλικούς οπλισμούς

7-2.2. Ενέργεια πυκνωτή

Για να φορτιστεί ένας πυκνωτής πρέπει να καταναλωθεί ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή υπό μορφή ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου. Η ενέργεια αυτή δίνεται από τις σχέσεις:

$$W = \frac{1}{2}QV \quad (7.4)$$

$$W = \frac{1}{2}CV^2 \quad (7.5)$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (7.6)$$

όπου Q το φορτίο των οπλισμών, V η τάση του πυκνωτή και C χωρητικότητα. Οι τρεις σχέσεις είναι ισοδύναμες αφού κάθε μια μπορεί να προκύψει από τις άλλες με τη βοήθεια της σχέσης Q=CV.

7-3. Διηλεκτρική σταθερά

Έχει διαπιστωθεί, πως αν μεταξύ των οπλισμών πυκνωτή παρεμβληθεί, μονωτικό υλικό (διηλεκτρικό) αυξάνεται η χωρητικότητα. Η αύξηση της χωρητικότητας ποικίλει ανάλογα με το διηλεκτρικό και εξαρτάται από τη τιμή της *διηλεκτρικής σταθεράς* του υλικού.

❑ Διηλεκτρική σταθερά υλικού ονομάζεται το σταθερό πηλίκο της χωρητικότητας C πυκνωτή, που ανάμεσα στους οπλισμούς του υπάρχει διηλεκτρικό, προς τη χωρητικότητα C_0 του ίδιου πυκνωτή, όταν ανάμεσα στους οπλισμούς του υπάρχει κενό ή αέρας.

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0} \tag{7.7}$$

7-3.1. Διηλεκτρική αντοχή

Το διηλεκτρικό, που υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς πυκνωτή, είναι μονωτής και συνεπώς δεν παρουσιάζει αγωγιμότητα. Όμως από τα άτομα όλων των υλικών είναι δυνατόν να αποσπασθούν ηλεκτρόνια, όταν αυτά βρεθούν μέσα σε ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο. Αν αυτό συμβεί, τότε το διηλεκτρικό τρυπάει από το ρεύμα ενός σπινθήρα. Η συμπεριφορά ενός διηλεκτρικού περιγράφεται από την *διηλεκτρική αντοχή.*

❑ Διηλεκτρική αντοχή ενός υλικού ονομάζεται η μέγιστη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που μπορεί να ανεχθεί το υλικό, χωρίς να καταστραφεί από ηλεκτρικό σπινθήρα.

Στους πυκνωτές για να επιτευχθούν μεγάλες χωρητικότητες χρησιμοποιούνται όσο το δυνατόν λεπτότερα φύλλα διηλεκτρικού υλικού. Επειδή η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στους οπλισμούς αυξάνεται, όταν αυξάνεται η τάση, ο πυκνωτής δεν μπορεί να φορτιστεί σε τάση μεγαλύτερη από αυτήν που δημιουργεί ένταση μεγαλύτερη από τη διηλεκτρική αντοχή του διηλεκτρικού. Η μέγιστη τάση λειτουργίας ενός πυκνωτή αναγράφεται απαραίτητα δίπλα στη χωρητικότητα του.

7-4. Συνδεσμολογία πυκνωτών

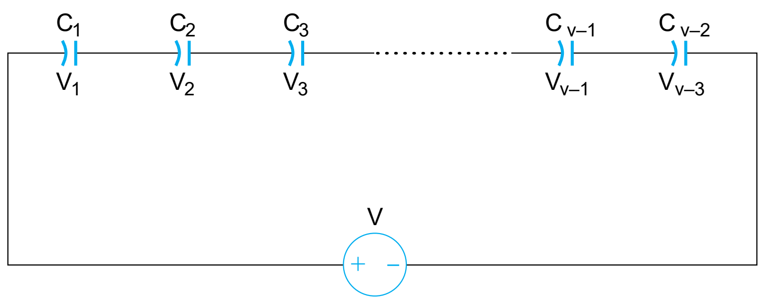
Οι πυκνωτές του εμπορίου έχουν χωρητικότητες που έχουν συγκεκριμένες τιμές. Για τις ανάγκες μιας εφαρμογής είναι δυνατόν να απαιτούνται χωρητικότητες που οι τιμές τους δεν υπάρχουν στο εμπόριο, γι' αυτό συνδέονται πυκνωτές με τέτοιο τρόπο, ώστε η χωρητικότητα που παρουσιάζει το σύστημα να έχει την απαιτούμενη τιμή. Η χωρητικότητα αυτή ονομάζεται *ολική* χωρητικότητα, δηλαδή:

❑ Ολική ή ισοδύναμη χωρητικότητα συνδεσμολογίας (συστήματος) πυκνωτών ονομάζεται η χωρητικότητα ενός πυκνωτή, που όταν στους οπλισμούς του υπάρχει η ίδια τάση που υπάρχει στα άκρα της συνδεσμολογίας, αποκτά το ίδιο φορτίο με το φορτίο της συνδεσμολογίας.

❑ Φορτίο συνδεσμολογίας ονομάζεται το φορτίο που περνάει από το εσωτερικό της ηλεκτρικής πηγής που τροφοδοτεί τη συνδεσμολογία, ώστε να φορτιστούν πλήρως οι πυκνωτές της.

7-4.1. Συνδεσμολογία πυκνωτών σε σειρά

Στη συνδεσμολογία αυτή οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, ώστε ο δεξιός οπλισμός του ενός πυκνωτή να είναι συνδεδεμένος με τον αριστερό οπλισμό του επόμενου και δεν υπάρχει ανάμεσά τους σημείο λήψης.



Σχήμα 7.4. *Συνδεσμολογία πυκνωτών σε σειρά*

Για να φορτιστούν οι πυκνωτές της συνδεσμολογίας που φαίνεται στο σχήμα 7-4 φορτίο -q μετακινείται από τον αριστερό οπλισμό του C_1 και μέσα από την πηγή πηγαίνει στο δεξιό οπλισμό του $C_ν$, οπότε όλοι οι ενδιάμεσοι οπλισμοί φορτίζονται εξ επαγωγής. Επομένως όλοι οι πυκνωτές έχουν το ίδιο φορτίο q, που είναι και το ολικό φορτίο της συνδεσμολογίας, αφού για να φορτιστούν οι πυκνωτές μέσα από την πηγή πέρασε φορτίο q. Άρα:

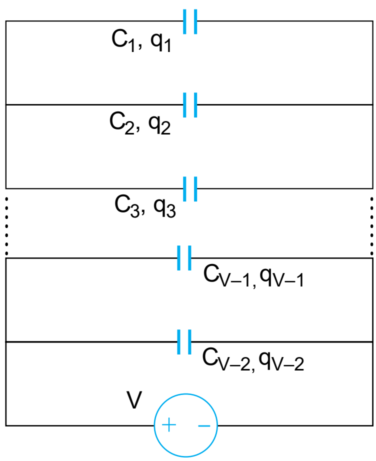
$$C_{ολ} = \frac{q}{V} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{q}{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_ν} \Rightarrow \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_ν}{q} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{V_1}{q} + \frac{V_2}{q} + \frac{V_3}{q} + \ldots + \frac{V_ν}{q} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots + \frac{1}{C_ν}} \tag{7.8}$$

7-4.2. Παράλληλη συνδεσμολογία πυκνωτών

Σε μια παράλληλη συνδεσμολογία, οι πυκνωτές είναι συνδεμένοι με τους ομώνυμους οπλισμούς τους και επομένως έχουν την ίδια τάση που είναι ίση με τη τάση της πηγής. Αν οι πυκνωτές είναι φορτισμένοι αντίστοιχα με φορτία q_1, q_2, q_3,..., $q_ν$, το ολικό φορτίο είναι $q_{Ολ} = q_1+q_2+q_3+\ldots+q_ν$. Επομένως:



Σχήμα 7.5. *Παράλληλη σύνδεση πυκνωτών*

$$C_{Ολ} = \frac{q_{Ολ}}{V} \Rightarrow C_{Ολ} = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_ν}{V} \Rightarrow$$

$$C_{Ολ} = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} + \frac{q_3}{V} + \ldots + \frac{q_ν}{V} \Rightarrow$$

$$\boxed{C_{ολ} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_ν} \tag{7.9}$$

7-5. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Πυκνωτής έχει χωρητικότητα C=2,2μF και είναι φορτισμένος σε τάση V=20V. Να υπολογισθεί το φορτίο του.

Λύση

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow q = CV \Rightarrow q = 2{,}2\mu F \cdot 20V = 44\ \mu C$$

Εφαρμογή 2η

Οι οπλισμοί επιπέδου πυκνωτή απέχουν κατά ℓ=0,1 mm. Αν η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι C=0,177nF, ποιο είναι το εμβαδόν των οπλισμών του;

Δίνεται $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$.

Λύση

Η χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή σε συνάρτηση με τα γεωμετρικά του στοιχεία είναι:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{\ell} \Rightarrow C\ell = \varepsilon_0 S \Rightarrow S = \frac{C\ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow S = \frac{0{,}177 \cdot 10^{-9} F 10^{-4} m}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{C^2}{Nm^2}} = 0{,}002 m^2.$$

Εφαρμογή 3η

Επίπεδος πυκνωτής έχει χωρητικότητα C=1,2nF. Ο πυκνωτής συνδέεται με τους πόλους πηγής τάσης V=20V. Ακολούθως οι οπλισμοί του πυκνωτή αποσυνδέονται από την πηγή και η απόσταση τους τετραπλασιάζεται. Να υπολογιστούν:

α) Η νέα χωρητικότητα.
β) Το νέο φορτίο του πυκνωτή.
γ) Η νέα τάση του πυκνωτή.
δ) Η νέα ενέργεια του πυκνωτή.

Λύση

α) Η χωρητικότητα του πυκνωτή μετά την απομάκρυνση των οπλισμών του είναι:

$$\left.\begin{array}{l} C' = \varepsilon_0 \dfrac{S}{\ell'} \\ \ell' = 4\ell \end{array}\right\} \Rightarrow C' = \varepsilon_0 \frac{S}{4\ell} \quad (1)$$

Η αρχική χωρητικότητα του πυκνωτή είναι:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{\ell} \quad (2)$$

Από τη διαίρεση των σχέσεων (1) και (2) έπεται:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\varepsilon_0 \dfrac{S}{4\ell}}{\varepsilon_0 \dfrac{S}{\ell}} = \frac{1}{4} \Rightarrow C' = \frac{1}{4} C \Rightarrow C' = \frac{1}{4} 1{,}2 \text{ nF} = 0{,}3 \text{ nF}.$$

β) Όταν απομακρύνονται οι οπλισμοί δεν είναι δυνατόν να μετακινηθεί φορτίο από τον έναν οπλισμό στον άλλο. Επομένως το νέο φορτίο του πυκνωτή είναι ίσο με το αρχικό δηλαδή:

$$q' = q = CV \Rightarrow q' = 1{,}2\text{nF}20\text{V} = 24\text{nC}.$$

γ) Η νέα τάση του πυκνωτή είναι:

$$V' = \frac{q'}{C'} \Rightarrow V' = \frac{24\,\text{nC}}{0{,}3\,\text{nF}} = 80\,\text{V}.$$

δ) Η νέα ενέργεια του πυκνωτή είναι:

$$W' = \frac{1}{2}\frac{q'^2}{C'} \Rightarrow W' = \frac{1}{2}\frac{\left(24 \cdot 10^{-9}\text{C}\right)^2}{0{,}3 \cdot 10^{-9}\text{F}} = 0{,}96 \cdot 10^{-6}\ \text{J}.$$

Εφαρμογή 4η

Οι οπλισμοί επίπεδου πυκνωτή έχουν ο κάθε ένας εμβαδόν $S=10cm^2$ και απέχουν $\ell=1mm$. Ο πυκνωτής συνδέεται με τους πόλους πηγής συνεχούς ρεύματος, οπότε αποκτά ενέργεια $W=0{,}177\mu J$. Ποια είναι η τάση των πόλων της πηγής; $\left(\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\dfrac{C^2}{Nm^2}\right)$

Λύση

Η ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή είναι:

$$W = \frac{1}{2}CV^2 \ (1)$$

Η χωρητικότητα του πυκνωτή σε συνάρτηση με τα γεωμετρικά του στοιχεία δίνεται από τη σχέση:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{\ell} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{\ell}V^2 \Rightarrow 2\ell W = \varepsilon_0 S V^2 \Rightarrow V^2 = \frac{2\ell W}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2\ell W}{\varepsilon_0 S}} \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-3}m\,0{,}177\cdot 10^{-6}J}{8{,}85\cdot 10^{-12}\dfrac{C^2}{Nm^2}10^{-3}m^2}} = 200V$$

Εφαρμογή 5η

Το εμβαδόν των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή είναι $S = 10cm^2$. Το κενό ανάμεσα στους οπλισμούς πληρούται με μονωτικό υλικό, το οποίο έχει διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon=5$. Πηγή τάσης $V=200V$ συνδέεται στους οπλισμούς του πυκνωτή, οπότε ο πυκνωτής αποκτά φορτίο $q = 4nC$. Ποιο είναι το πάχος του διηλεκτρικού; Δίνεται $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}$.

Λύση

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι:

$$C = \frac{q}{V} \quad (1)$$

Η χωρητικότητα δίνεται επίσης και από τον τύπο:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{\ell} \quad (2)$$

Οι σχέσεις έχουν τα πρώτα μέλη ίσα, επομένως και τα δεύτερα μέλη είναι ίσα:

$$\frac{q}{V} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{\ell} \Rightarrow \ell q = \varepsilon_0 \varepsilon S V \Rightarrow \ell = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S V}{q} \Rightarrow$$

$$\ell = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} 5 10^{-3} m^2 200V}{4 \cdot 10^{-9} C} = 2{,}2 \cdot 10^{-3} m$$

Εφαρμογή 6η

Επίπεδος πυκνωτής έχει χωρητικότητα C_0=1nF. Ο πυκνωτής είναι συνεχώς συνδεδεμένος στους πόλους πηγής τάσης V_0=10V. Ακολούθως ανάμεσα στους οπλισμούς τοποθετείται μονωτικό υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε=4. Να βρεθούν:

α) Η νέα χωρητικότητα.

β) Η νέα τάση του πυκνωτή.

γ) Το νέο φορτίο του πυκνωτή.

δ) Η νέα ενέργεια του πυκνωτή.

Λύση

α) Η διηλεκτρική σταθερά του υλικού που υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή ορίζεται:

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0} \Rightarrow C = \varepsilon\, C_0 \Rightarrow C = 4 \cdot 1 \text{ nF} = 4 \text{ nF}.$$

β) Η τάση του πυκνωτή δεν μεταβάλλεται μετά την είσοδο του διηλεκτρικού, επειδή είναι συνεχώς συνδεδεμένος με τους πόλους της πηγής. Άρα $V=V_0$.

γ) Το φορτίο του πυκνωτή μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού είναι:

$$q=CV \Rightarrow q = 4nF \cdot 10V = 40nC.$$

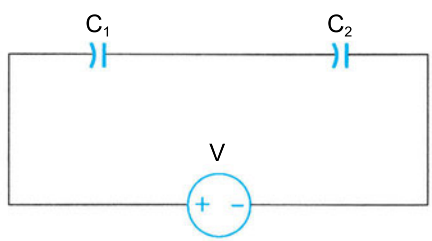
δ) Η νέα ενέργεια του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$W=\frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow W=\frac{1}{2}4nF\,(10V)^2 = 200nJ$$

Εφαρμογή 7η

Δύο πυκνωτές C_1=6μF και C_2=12μF συνδέονται στη σειρά και στα άκρα της συνδεσμολογίας εφαρμόζεται τάση V=24V. Να βρεθούν:
α) Η ολική χωρητικότητα.
β) Το φορτίο κάθε πυκνωτή.
γ) Η τάση κάθε πυκνωτή.
δ) Η ενέργεια κάθε πυκνωτή

Λύση



α) Η ολική χωρητικότητα πυκνωτών συνδεμένων στη σειρά δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{6μF12μF}{18μF} = 4μF.$$

β) Επειδή οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι στη σειρά έχουν ίσα φορτία και μάλιστα το καθένα ίσο με το ολικό φορτίο. Επομένως:

$$q_1=q_2=q_{ολ}=C_{ολ}V \Rightarrow q_1=q_2=4μF \cdot 24\ V=96μC.$$

γ) Η τάση σε κάθε πυκνωτή είναι:

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} \Rightarrow V_1 = \frac{96\mu F}{6\mu F} = 16\,V,\ V_2 = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow V_2 = \frac{96\mu F}{12\mu F} = 8\,V.$$

δ) Η ενέργεια σε κάθε πυκνωτή είναι:

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2}6\mu F(16V)^2 = 768\,\mu J$$

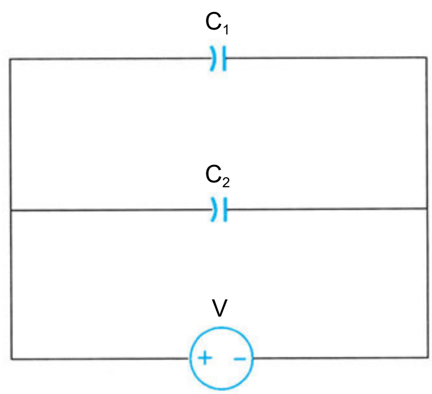
$$W_2 = \frac{1}{2}C_2V_2^2 \Rightarrow W_2 = \frac{1}{2}12\mu F(8V)^2 = 384\,\mu J$$

Εφαρμογή 8η

Δύο πυκνωτές, με χωρητικότητες C_1=2,2μF και C_2=3,3μF συνδέονται παράλληλα και στα άκρα του συστήματος εφαρμόζεται τάση V=10V. Να υπολογισθούν:

α) Η χωρητικότητα του συστήματος.
β) Η τάση κάθε πυκνωτή.
γ) Το φορτίο κάθε πυκνωτή.
δ) Η ολική ενέργεια του συστήματος των πυκνωτών.

Λύση



α) Επειδή οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα η ολική χωρητικότητα δίνεται από τη σχέση:

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{ολ} = 2{,}2\ \mu F + 3{,}3\ \mu F = 5{,}5\ \mu F.$$

β) Η τάση κάθε πυκνωτή είναι ίση με τη τάση της πηγής.

$$V_1 = V_2 = V = 10V$$

γ) Τα φορτία είναι αντίστοιχα ίσα με:

$$q_1 = C_1V \Rightarrow q_1 = 2{,}2\ \mu F \cdot 10V = 22\ \mu C,$$

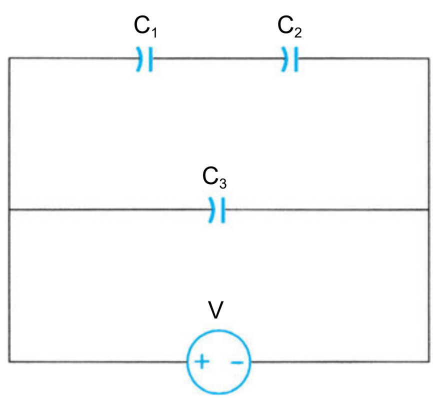
$$q_2 = C_2V \Rightarrow q_2 = 3{,}3\ \mu F \cdot 10V = 33\ \mu C.$$

δ) Η ολική ενέργεια του συστήματος των πυκνωτών δίνεται από τη σχέση:

$$W = \frac{1}{2} C_{ολ} V^2\ W = \frac{1}{2} 5{,}5\ \mu F(10V)^2 = 275\ \mu J$$

Εφαρμογή 9η

Να βρεθεί η ολική χωρητικότητα της συνδεσμολογίας που φαίνεται στο σχήμα. Ακολούθως να υπολογιστούν η τάση και το φορτίο κάθε πυκνωτή. Δίνονται: $C_1 = 2\mu F$, $C_2 = 8\mu F$, $C_3 = 2{,}4\mu F$, $V = 24V$.



Λύση

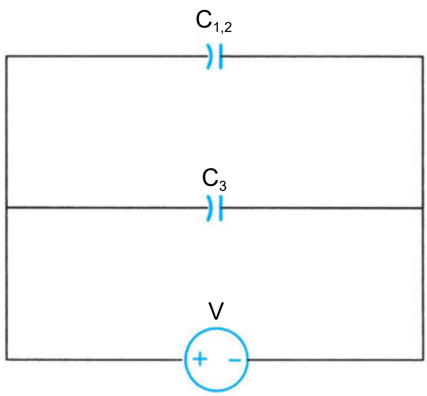
Αρχικά υπολογίζεται η ολική χωρητικότητα των C_1 και C_2, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι σε σειρά.

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{1,2}} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2} \Rightarrow$$

$$C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow C_{1,2} = \frac{2\mu F\, 8\mu F}{2\mu F + 8\mu F} \Rightarrow$$

$$C_{1,2} = \frac{16(\mu F)^{\cancel{2}}}{10\cancel{\mu}F} = 1{,}6\mu F$$

Το προηγούμενο κύκλωμα γίνεται:



Όπως φαίνεται οι $C_{1,2}$ και C_3 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Επομένως η ολική τους χωρητικότητα είναι:

$$C_{1,2,3} = C_{1,2} + C_3 \Rightarrow C_{123} = 1{,}6\mu F + 2{,}4\mu F \Rightarrow C_{1,2,3} = 4\mu F.$$

Οι πυκνωτές C_1 και C_2 φέρουν ίσα φορτία αφού είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Το φορτίο κάθε πυκνωτή είναι ίσο επίσης με το φορτίο της $C_{1,2}$. Στα άκρα του πυκνωτή $C_{1,2}$ υπάρχει η τάση της πηγής. Επομένως:

$$q_1 = q_2 = q_{1,2} = C_{1,2} \cdot V \Rightarrow q_1 = q_2 = 1{,}6\ \mu F \cdot 24V \Rightarrow q_1 = q_2 = 38{,}4\ \mu C.$$

Οι τάσεις των C_1 και C_2 αντίστοιχα θα είναι:

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} \Rightarrow V_1 = \frac{38{,}4\mu C}{2\mu F} = 19{,}2V,$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow V_2 = \frac{38{,}4\mu C}{8\mu F} = 4{,}8V.$$

Οι οπλισμοί του C_3 είναι συνδεδεμένοι με τους πόλους της πηγής άρα:

$$V_3=V=24V$$

Το φορτίο του C_3 θα είναι

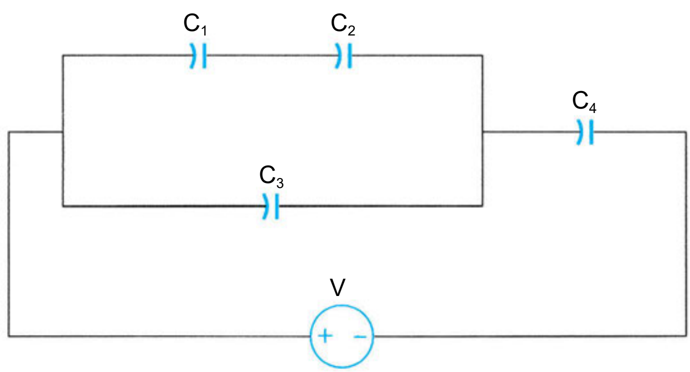
$$q_3=C_3\,V_3 \Rightarrow q_3=2{,}4\mu F\ 24V=57{,}6\mu C.$$

Εφαρμογή 10η

Οι πυκνωτές της συνδεσμολογίας του σχήματος έχουν τις χωρητικότητες: $C_1=3\mu F$, $=C_2=6\mu F$, $C_3=4\mu F$, $C_4=6\mu F$. Η τάση της πηγής είναι V=12V. Να υπολογισθούν:

α) Η ολική χωρητικότητα.

β) Το φορτίο και η τάση κάθε πυκνωτή.



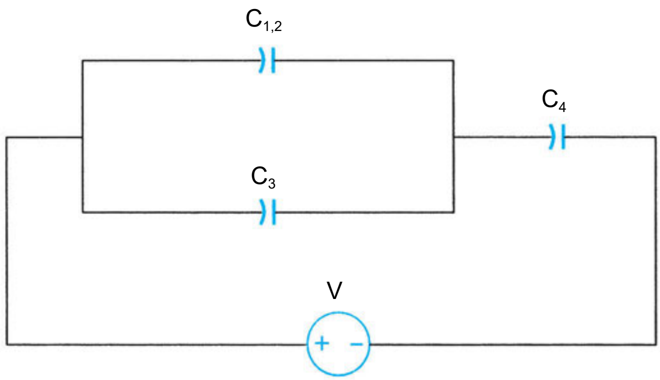
Λύση

α) Οι πυκνωτές C_1 και C_2 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, άρα η ολική τους χωρητικότητα είναι:

$$\frac{1}{C_{1,2}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{1,2}}=\frac{C_2+C_1}{C_1C_2} \Rightarrow$$

$$C_{1,2}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2} \Rightarrow C_{1,2}=\frac{3\mu F\, 6\mu F}{3\mu F+6\mu F}=2\mu F$$

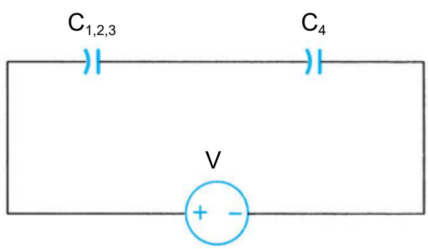
Επομένως το κύκλωμα ισοδύναμα μετασχηματίζεται στο:



Οι C_1 και C_2 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα επομένως:

$$C_{1,2,3} = C_{1,2} + C_3 \Rightarrow C_{1,2,3} = 2\mu F + 4\mu F = 6\mu F.$$

Το προηγούμενο κύκλωμα μετασχηματίζεται στο:



Οι $C_{1,2,3}$ και C_4 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά επομένως:

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_{1,2,3,4}} = \frac{1}{C_{1,2,3}} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow$$

$$C_{ολ} = \frac{C_{1,2,3} \cdot C_4}{C_{1,2,3} + C_4} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{6\mu F \cdot 6\mu F}{12\mu F} = 3\mu F$$

β) Οι C_4 και $C_{1,2,3}$ φέρουν φορτία ίσα με το ολικό φορτίο (συνδεδεμένοι σε σειρά).

$$q_4 = q_{1,2,3} = q_{ολ} \Rightarrow q_4 = C_{ολ} \cdot V \Rightarrow$$

$$q_4 = 3\mu F \cdot 12V = 36\mu C,$$

Η τάση στα άκρα του C_4 είναι:

$$V_4 = \frac{q}{C_4} \Rightarrow V_4 = \frac{36\mu C}{6\mu F} = 6V$$

Η τάση του C1,2,3 θα είναι:

$$V_{1,2,3} = V - V4 \Rightarrow V_{1,2,3} = 12V - 6V = 6V.$$

Όμως η τάση του C_3 είναι

$$V_3 = V_{1,2,3} = 6V$$

και το φορτίο του:

$$q_3 = C_3V_3 \Rightarrow Q_3 = 4\mu F \cdot 6V = 24\mu C.$$

Ομοίως η τάση του $C_{1,2}$ είναι

$$V_{1,2} = V_{1,2,3} = 6V$$

και το φορτίο $q_{1,2}$:

$$q_{1,2} = C_{1,2} \cdot V_{1,2} \Rightarrow q_{1,2} = 2\mu F \cdot 6\ V = 12\ \mu C.$$

Οι πυκνωτές C_1 και C_2 είναι συνδεδεμένοι στη σειρά επομένως:

$$q_1 = q_2 = q_{1,2} = 12\mu C.$$

Οι τάσεις τους C_1 και C_2 είναι αντίστοιχα:

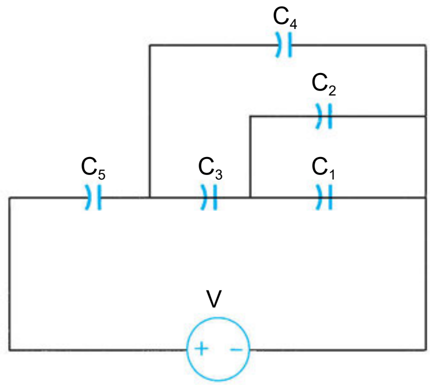
$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} \Rightarrow V_1 = \frac{12\mu C}{3\mu F} = 4V,$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_1} \Rightarrow V_2 = \frac{12\mu C}{6\mu F} = 2V.$$

Εφαρμογή 11η

Για τη συνδεσμολογία του σχήματος δίνονται: C_1=4μF, =C_2=2μF, C_3=12μF, C_4=20μF, C_5=12μF και V=12V. Να υπολογισθούν το φορτίο και η τάση κάθε πυκνωτή.

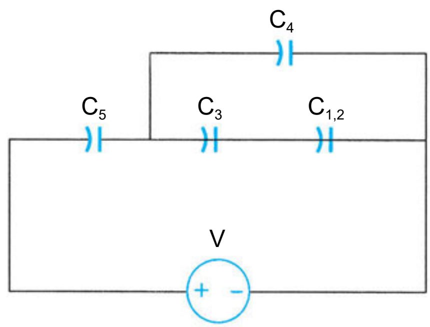
Λύση



Αρχικά θα υπολογιστεί η ολική χωρητικότητα της συνδεσμολογίας.
Οι C_1 και C_2 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, επομένως:

$$C_{1,2} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{1,2} = 4\ \mu F + 2\mu F = 6\ \mu F.$$

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται στο:



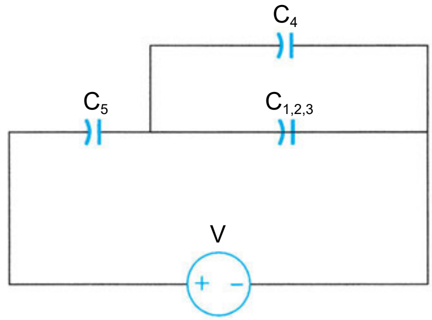
Οι C_3 και $C_{1,2}$ σε σειρά άρα:

$$\frac{1}{C_{1,2,3}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{1,2}} \Rightarrow \frac{1}{C_{1,2,3}} = \frac{C_{1,2} + C_3}{C_{1,2} \cdot C_3} \Rightarrow$$

$$C_{1,2,3} = \frac{C_{1,2} \cdot C_3}{C_{1,2} + C_3} \Rightarrow C_{1,2,3} = \frac{6\mu F \cdot 12\mu F}{6\mu F + 12\mu F} \Rightarrow$$

$$C_{1,2,3} = 4\mu F$$

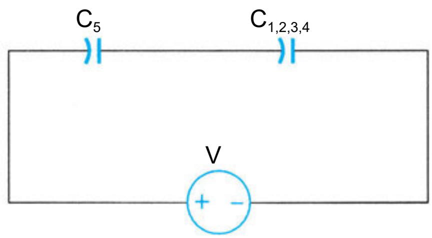
Το κύκλωμα μετασχηματίζεται στο:



Οι $C_{1,2,3}$ και C_4 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα επομένως:

$C_{1,2,3,4} = C_{1,2,3} + C_4 \Rightarrow C_{1,2,3,4} = 4\mu F + 20\mu F = 24\mu F$.

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται στο



Οι πυκνωτές C_5 και $C_{1,2,3,4}$ είναι συνδεδεμένοι σε σειρά άρα η ολική χωρητικότητα της συνδεσμολογίας είναι:

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_{1,2,3,4}} \Rightarrow \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{C_{1,2,3,4} + C_5}{C_{1,2,3,4}C_5} \Rightarrow$$

$$C_{ολ} = \frac{C_{1,2,3,4} \cdot C_5}{C_{1,2,3,4} + C_5} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{24\mu F \cdot 12\mu F}{24\mu F + 12\mu F} = 8\mu F$$

Οι C_5 και $C_{1,2,3,4}$ έχουν φορτίο ίσο με το ολικό φορτίο επομένως:

$$q_5 = q_{1,2,3,4} = q_{ολ} = C_{ολ} \cdot V \Rightarrow$$

$$q_5 = 8\mu F \cdot 12V = 96\mu C = q_{1,2,3,4}$$

Η τάση V_5 είναι:

$$V_5 = \frac{q_5}{C_5} \Rightarrow V_5 = \frac{96\mu C}{12\mu F} = 8V$$

Η τάση $V_{1,2,3,4}$ θα είναι:

$$V_{1,2,3,4} = V - V_5 = 12V - 8V = 4V$$

Η τάση V_4 και η τάση $V_{1,2,3,4}$ είναι ίσες (C_4, $C_{1,2,3}$ συνδεδεμένοι παράλληλα) επομένως

$$V_4=4V \text{ και } q_4=C_4V_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_4=20\mu F\cdot 4V=80\mu C$$

Όμοια $V_{1,2,3} = V_4 = V_{1,2,3,4} = 4V$
$q_{1,2,3} = C_{1,2,3} \cdot V_{1,2,3,4} \Rightarrow q_{1,2,3} = 4\mu F \cdot 4V = 16\mu C$
Επειδή οι C_3 και $C_{1,2}$ είναι συνδεδεμένοι σε σειρά $q_3 = q_{1,2} = q_{1,2,3} = 16\mu C$
Επομένως:

$$V_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{16\mu C}{12\mu F} = \frac{4}{3}V.$$

$$V_{1,2} = V_{1,2,3} - V_3 \Rightarrow V_{1,2} = 4V - \frac{4}{3}V = \frac{8}{3}V.$$

Επειδή ο C_1 και ο C_2 συνδέονται παράλληλα $V_1 = V_2 = V_{1,2} = \frac{8}{3}V$ και

$$q_1 = C_1 \cdot V_1 \Rightarrow q_1 = 4\mu F\ \frac{8}{3}V = \frac{32}{3}\mu C$$

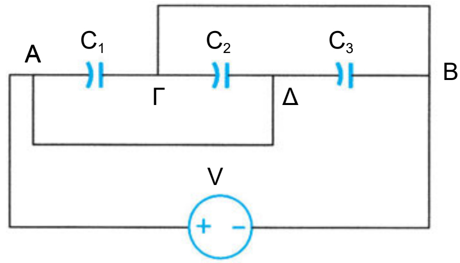
$$q_2 = C_2 \cdot V_2 \Rightarrow q_2 = 2\mu F\ \frac{8}{3}V = \frac{16}{3}\mu C$$

Εφαρμογή 12η

Οι πυκνωτές της συνδεσμολογίας του σχήματος έχουν τις χωρητικότητες C_1=3μF, C_2=4μF, C_3=12μF. Αν η τάση, που τροφοδοτεί την συνδεσμολογία, είναι V=10V να υπολογισθούν:
α) Η ολική χωρητικότητα
β) Το φορτίο κάθε πυκνωτή

Λύση

α) Ο υπολογισμός της ολικής χωρητικότητας με τη χρήση της παραπάνω

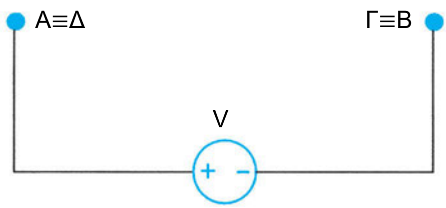


συνδεσμολογίας είναι δύσκολη. Τα σημεία Α,Δ και Γ,Β συνδέονται με αγωγούς ασήμαντης αντίστασης επομένως είναι βραχυκυκλωμένα. Όπως είναι γνωστό, τα βραχυκυκλωμένα σημεία έχουν το ίδιο δυναμικό και στην σχεδίαση ενός κυκλώματος μπορούν να ταυτιστούν δηλαδή το προηγούμενο κύκλωμα μετασχηματίζεται ως εξής:

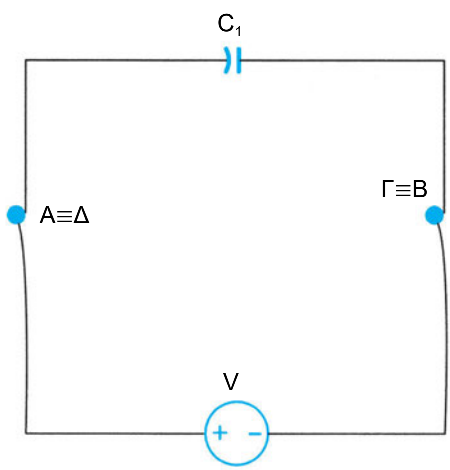
1) Σχεδιάζονται τα σημεία του κυκλώματος έτσι που τα βραχυκυκλωμένα σημεία να ταυτίζονται.

2) Παρεμβάλονται μεταξύ των σημείων που σχεδιάστηκαν τα στοιχεία του κυκλώματος.

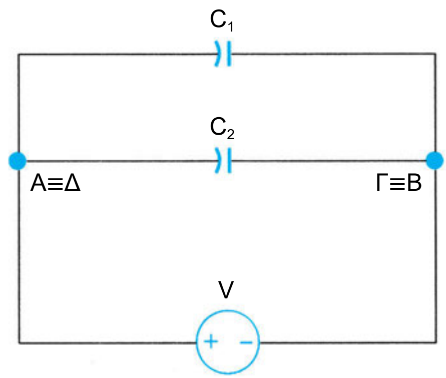
i) Η πηγή τροφοδοσίας υπάρχει μεταξύ των Α και Β.



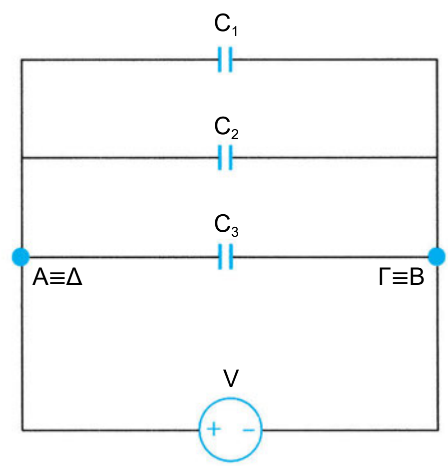
ii) O C_1 μεταξύ των Α και Γ.



iii) O C_2 μεταξύ των Γ και Δ.



iv) O C_3 μεταξύ των Δ και B.



Από την τελευταία συνδεσμολογία γίνεται φανερό πως οι τρεις πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Επομένως

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$C_{ολ} = 3μF + 4μF + 12μF$$

$$C_{ολ} = 19μF.$$

β) Τα φορτία των πυκνωτών είναι αντίστοιχα:

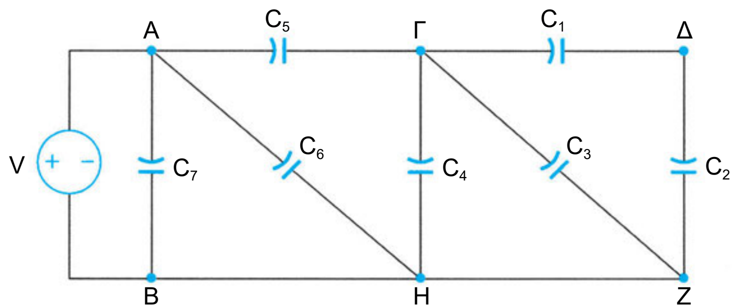
$$q_1 = C_1 \cdot V \Rightarrow q_1 = 3\mu F \cdot 10V = 30\mu C$$

$$q_2 = C_2 \cdot V \Rightarrow q_2 = 4\mu F \cdot 10V = 40\mu C$$

$$q_3 = C_3 \cdot V \Rightarrow q_3 = 12\mu F \cdot 10V = 120\mu C$$

Εφαρμογή 13η

Να βρεθεί η ολική χωρητικότητα της συνδεσμολογίας του σχήματος. Δίνονται: $C_1 = C_4 = 3\mu F$, $C_2 = C_5 = 6\mu F$, $C_3 = 7\mu F$, $C_6 = 7\mu F$, $C_7 = 5\mu F$.

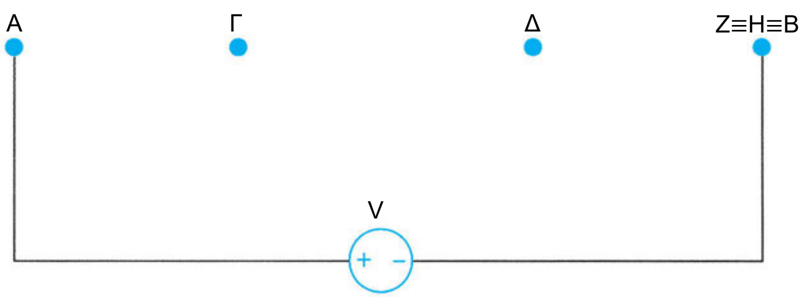


Λύση

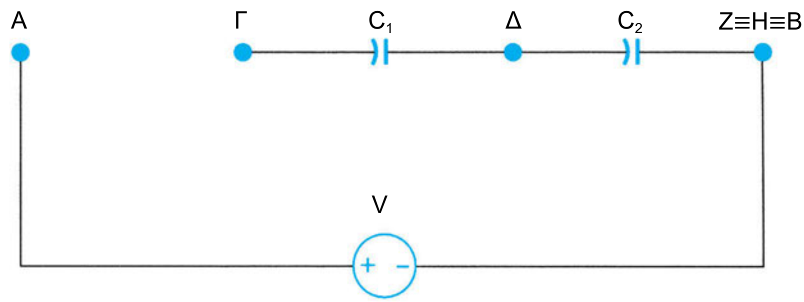
Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στην εφαρμογή 12, το ισοδύναμο κύκλωμα μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής:

i) Ταυτίζοντας τα βραχυκυκλωμένα σημεία B, H, Z

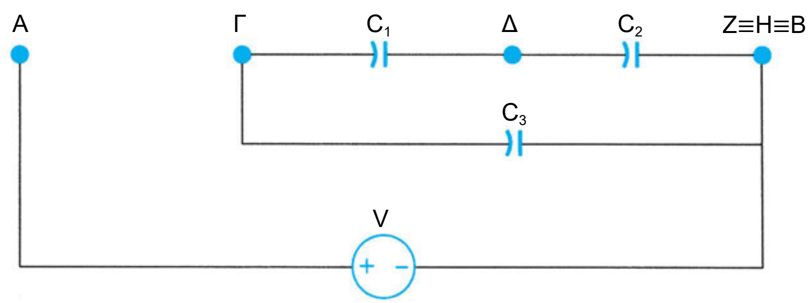
ii) Η πηγή υπάρχει μεταξύ των σημείων A και B.



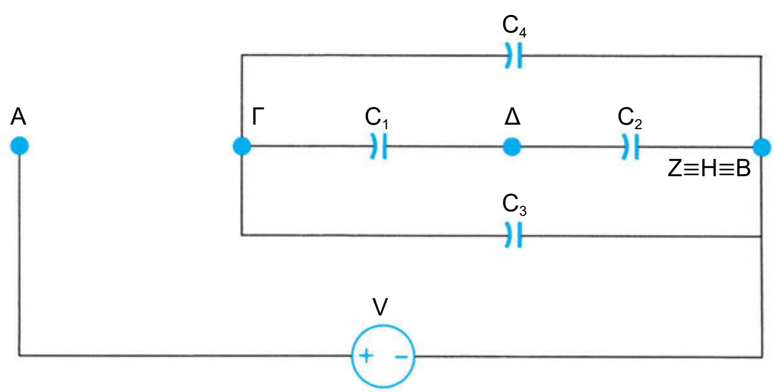
iii) O C_1 μεταξύ Γ και Δ, ενώ ο C_2 μεταξύ Δ και Ζ.



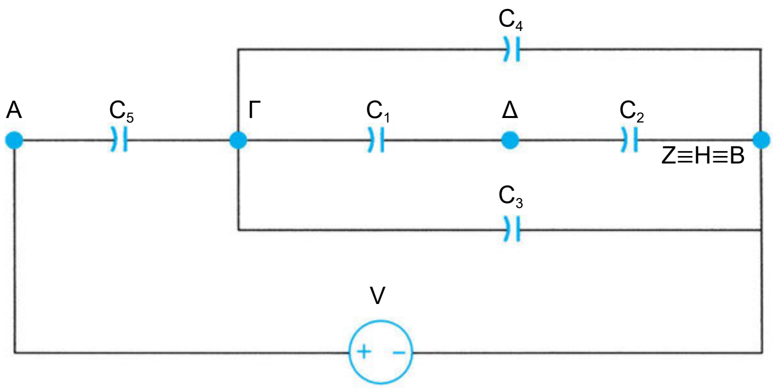
iv) O C_3 μεταξύ των Γ και Ζ.



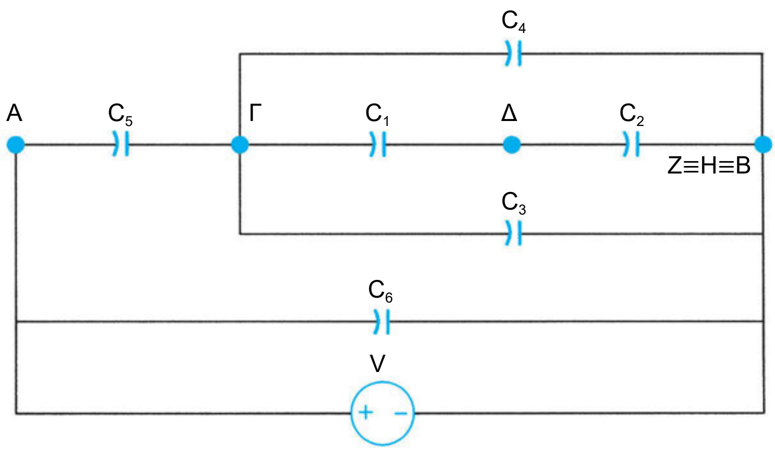
v) O C_4 μεταξύ Γ και Η.



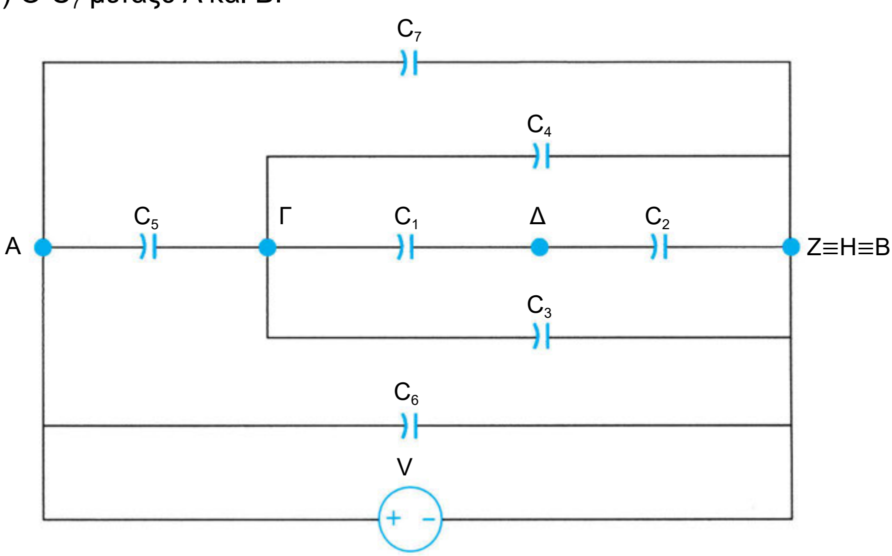
vi) O C_5 μεταξύ Α και Γ.



vii) Ο C_6 μεταξύ Α και Η.



viii) Ο C_7 μεταξύ Α και Β.



Στο τελευταίο κύκλωμα είναι φανερό πως οι C_1 και C_2 συνδέονται στη σειρά. Επομένως:

$$C_{1,2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow C_{1,2} = \frac{3\mu F \cdot 6\mu F}{3\mu F + 6\mu F} = 2\mu F.$$

Οι $C_{1,2}$, C_3 και C_4 συνδέονται παράλληλα . Επομένως:

$$C_{1,2,3,4} = C_{1,2} + C_3 + C_4 \Rightarrow C_{1,2,3,4} = 2\mu F + 7\mu F + 3\mu F = 12\mu F$$

Οι $C_{1,2,3,4}$ και C_5 συνδέονται σε σειρά . Επομένως:

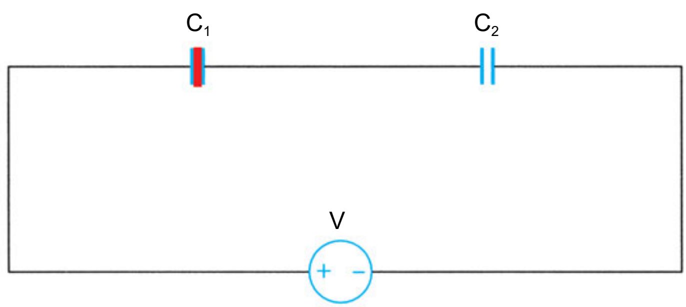
$$C_{1,2,3,4,5} = \frac{C_{1,2,3,4} \cdot C_5}{C_{1,2,3,4} + C_5} \Rightarrow C_{1,2,3,4,5} = \frac{12\mu F \cdot 6\mu F}{12\mu F + 6\mu F} = 4\mu F.$$

Οι $C_{1,2,3,4,5}$, C_6 και C_7 συνδέονται παράλληλα . Επομένως:

$$C_{ολ} = C_{1,2,3,4,5} + C_6 + C_7 \Rightarrow C_{ολ} = 4\mu F + 7\mu F + 5\mu F = 16\mu F$$

Εφαρμογή 14η

Δύο πυκνωτές αέρα C_1 = 4μF και C_2 = 6μF συνδέονται σε σειρά. Στα άκρα του συστήματος εφαρμόζεται τάση V=12V. Στον C_1 εισάγεται διηλεκτρικό, οπότε η τάση του γίνεται V_1 = 4V . Να υπολογισθεί η διηλεκτρική σταθερά ε του διηλεκτρικού.



Λύση

Οι C_1 και C_2 συνδέονται σε σειρά άρα

$$\left.\begin{aligned} C_{ολ} &= \frac{C_1{'}C_2}{C_1+C_2} \\ C_1{'} &= εC_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{εC_1C_2}{εC_1+C_2} \quad (1)$$

Επειδή οι πυκνωτές συνδέονται σε σειρά:

$$q_1{'} = q_2 = q_{ολ} = C_{ολ}V \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$q_1{'} = \frac{εC_1C_2}{εC_1+C_2} : V \quad (2) \text{ Όμως}$$

$$q_1{'}=C_1{'}V_1 = εC_1V_1 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) $\Rightarrow$

$$ε\cancel{C_1}V_1 = \frac{ε\cancel{C_1}C_2V}{εC_1+C_2} \Rightarrow εC_1 + C_2 = C_2\frac{V}{V_1} \Rightarrow εC_1 = C_2\frac{V}{V_1} - C_2 \Rightarrow$$

$$εC_1 = C_2\left(\frac{V}{V_1} - 1\right) \Rightarrow ε = \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{V}{V_1} - 1\right) \Rightarrow$$

$$ε = \frac{6μF}{4μF}\left(\frac{12V}{4V} - 1\right) \Rightarrow ε = \frac{3}{2}(3-1) \Rightarrow ε = \frac{3}{2}\cdot 2 \Rightarrow ε = 3$$

7-6. Προβλήματα προς λύση

1° Επίπεδος πυκνωτής έχει χωρητικότητα C=4,7μF και φέρει φορτίο q=23,5μC. Με ποια τάση τροφοδοτείται;

(5V)

2° Οι οπλισμοί επίπεδου πυκνωτή έχουν εμβαδόν $S=100cm^2$ και απέχουν κατά ℓ =1,77mm. Ο πυκνωτής έχει φορτίο q=0,5nC. Πόση είναι η τάση των οπλισμών του; Δίνεται $ε_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}$

(10V)

3° Επίπεδος πυκνωτής έχει ενέργεια W= 200pJ και φορτίο q=200pC. Οι οπλισμοί του πυκνωτή απέχουν ℓ =1,77mm. Να υπολογισθεί το εμβαδόν των οπλισμών του. Δίνεται $ε_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}$

(200cm²)

4° Επίπεδος πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C=18\mu F$ και τροφοδοτείται από πηγή συνεχούς ρεύματος με τάση $V=10V$. Ενώ ο πυκνωτής είναι συνδεδεμένος με την πηγή η απόσταση των οπλισμών του διπλασιάζεται. Να υπολογισθούν:

α) Η τελική τιμή της χωρητικότητας

β) Το τελικό φορτίο

γ) Η τελική ενέργεια

(9μF, 90μC, 450μJ)

5° Επίπεδος πυκνωτής αέρα έχει χωρητικότητα $C=3\mu F$. Οι οπλισμοί του πυκνωτή είναι συνδεδεμένοι με πηγή συνεχούς ρεύματος. Το φορτίο του πυκνωτή είναι $q=27\mu C$. Ο πυκνωτής αποσυνδέεται από την πηγή και ακολούθως το διάκενο των οπλισμών του πληρούται με μονωτικό υλικό διηλεκτρικής σταθεράς $\varepsilon=3$. Να υπολογισθούν:

α) Η νέα χωρητικότητα του πυκνωτή

β) Το νέο φορτίο

γ) Η νέα τάση

δ) Η νέα ενέργεια

(9μF, 27μC, 3V, 40,5 μJ)

6° Τρεις πυκνωτές έχουν χωρητικότητες $C_1=3\mu F$, $C_2=4\mu F$ και $C_3=12\mu F$. Οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Η τάση στους οπλισμούς του C_1 είναι $V_1=5V$. Πόση είναι η τάση τροφοδοσίας του συστήματος;

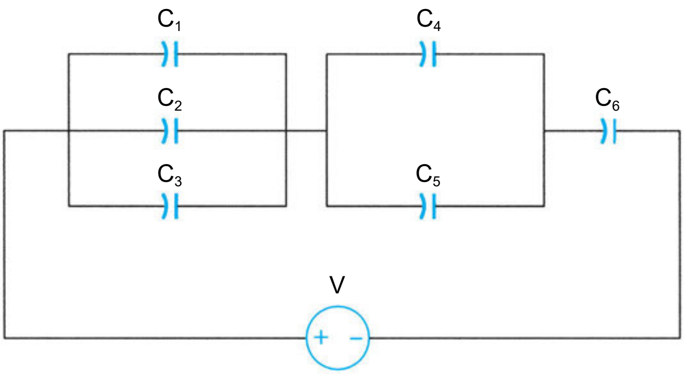
(10V)

7° Τρεις πυκνωτές $C_1=2\mu F$ και $C_2=5\mu F$ και C_3 συνδέονται παράλληλα. Η διάταξη τροφοδοτείται με τάση $V=10V$. Το ολικό φορτίο της συνδεσμολογίας είναι $q_{ολ}=100\mu C$. Να υπολογισθεί η χωρητικότητα C_3.

(3μF)

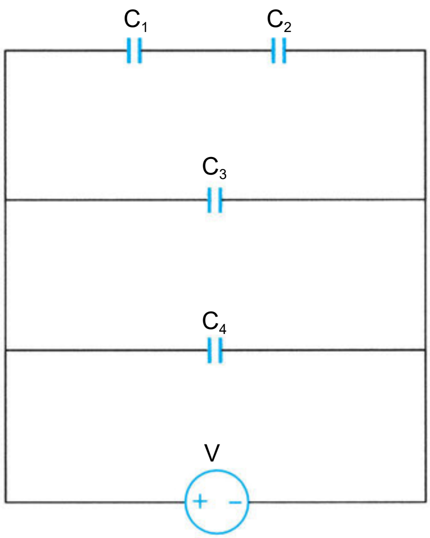
8° Για την συνδεσμολογία του σχήματος δίνονται $C_1=2\mu F$, $C_2=4\mu F$ και $C_3=6\mu F$. $C_4=1{,}5\mu F$, $C_5=2{,}5\mu F$ και $C_6=3\mu F$ και $V=8V$.

Να υπολογισθεί το φορτίο και η τάση κάθε πυκνωτή.



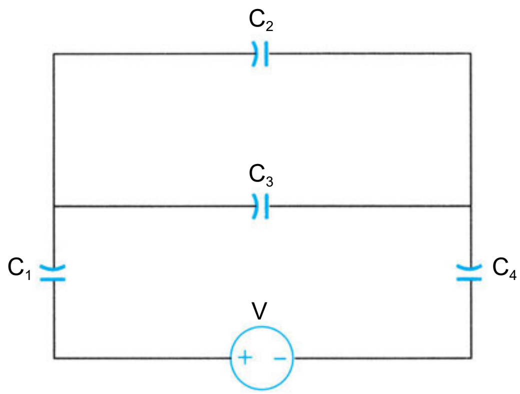
(q_1=2μC V_1=1V
q_2=4μC V_2=1V
q_3=6μC V_3=1V
q_4=4,5μC V_4=3V
q_5=7,5μC V_5=3V
q_6=12μC V_6=4V)

9° Ποιο είναι το φορτίο και ποια η τάση κάθε πυκνωτή της συνδεσμολογίας του σχήματος; Δίνονται C_1=5μF, C_2=20μF και C_3=5μF. C_4=1μF και V=20V.



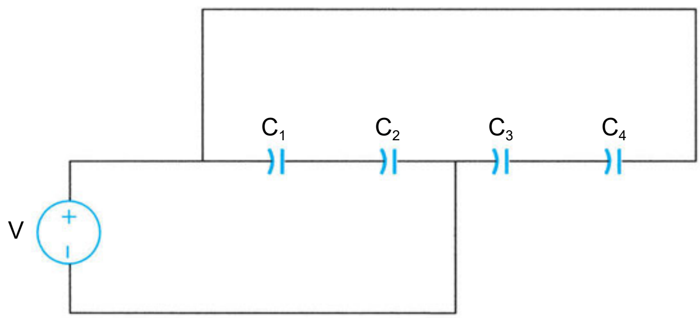
(q_1=80μC V_1=16V
q_2=80μC V_2=4V
q_3=100μC q_4=20μC)

10° Για τη συνδεσμολογία του σχήματος δίνονται: C_1=4μF, C_2=1μF, C_3=2μF, C_4=12μF και η τάση στους οπλισμούς του C_2, V_2=8V. Να υπολογισθούν:
α) Η ολική χωρητικότητα της συνδεσμολογίας
β) Η τάση τροφοδοσίας



(1,5μF, 16V)

11° Να βρεθεί η ολική χωρητικότητα της συνδεσμολογίας του σχήματος. Δίνονται: C_1=5μF, C_2=20μF, C_3=3μF, C_4=6μF.



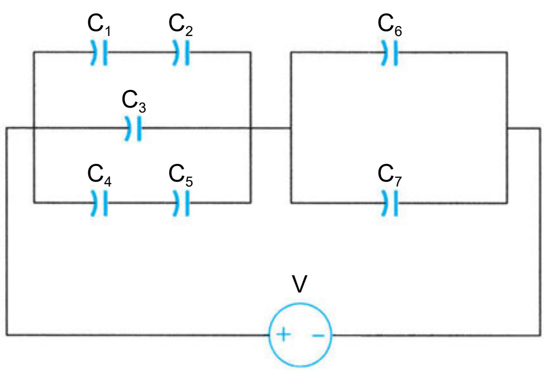
(6μF)

12° Στη συνδεσμολογία του σχήματος δίνονται: C_1=20μF, C_2=5μF, C_3=14μF, C_4=6μF, C_5=3μF, C_6=1μF, C_7=4μF και το φορτίο του πυκνωτή C_1, q_1=20μC. Να υπολογισθούν:

α) Η ολική χωρητικότητα της συνδεσμολογίας

β) Το φορτίο κάθε πυκνωτή

γ) Η τάση τροφοδοσίας



*($C_{ολ}$=4μF, q_2=20μC
q_3=70μC, q_4=q_5=10μC
q_6=20μC q_7=80μC
V=25V)*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΠΗΝΙΑ

Εισαγωγή

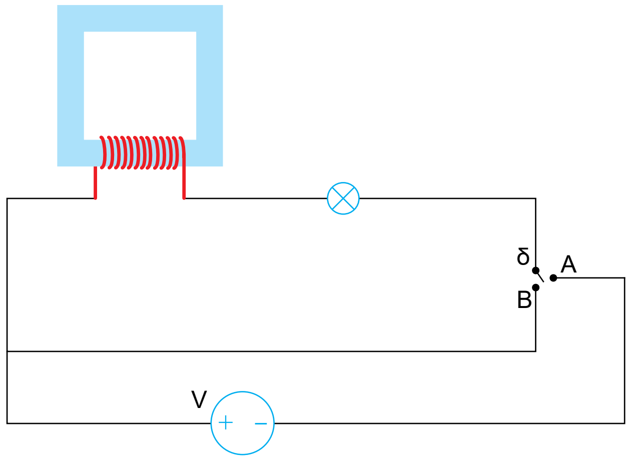
Στα πηνία αποθηκεύεται ηλεκτρική ενέργεια σε μορφή ενέργειας μαγνητικού πεδίου. Όταν μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα πηνίο, στο πηνίο εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από αυτεπαγωγή. Τα χαρακτηριστικά ενός πηνίου εκφράζονται από το συντελεστή αυτεπαγωγής. Η τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής ενός πηνίου εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πηνίου και από τη φύση του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένος ο πυρήνας.

Τα πηνία, όπως και οι πυκνωτές, χρησιμοποιούνται σε ποικίλες εφαρμογές, όπως στα συντονιζόμενα κυκλώματα, στα ηλεκτρονικά φίλτρα, στα συστήματα ανάφλεξης των αυτοκινήτων.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι η ***κατανόηση*** *των ιδιοτήτων των πηνίων και των χαρακτηριστικών των κυκλωμάτων που προκύπτουν από διάφορους συνδυασμούς πηνίων.*

8-1. Λειτουργία πηνίου – αυτεπαγωγή

Στο κύκλωμα του σχήματος 8-1 ένας λαμπτήρας πυρακτώσεως είναι συνδεδεμένος με πηνίο. Στα άκρα του συστήματος είναι συνδεδεμένη πηγή συνεχούς ρεύματος μέσω διακόπτη δ.



Σχήμα 8.1. *Όταν κλείσει ο διακόπτης δ, ο λαμπτήρας ανάβει, σταδιακά*

Αρχικά ο διακόπτης δ βρίσκεται στη θέση Β, οπότε ο λαμπτήρας δεν φωτοβολεί. Όταν ο δ τοποθετηθεί στη θέση Α, διαπιστώνεται πως η ένταση της ακτινοβολίας αυξάνει σταδιακά μέχρι να φθάσει τη τελική της τιμή. Αυτό σημαίνει, πως η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, αυξάνει σταδιακά μέχρι να πάρει τη τελική της τιμή. Ακολούθως ο διακόπτης τοποθετείται από τη θέση Α στη θέση Β. Διαπιστώνεται πως ο λαμπτήρας σβήνει σταδιακά, που σημαίνει πως η ένταση του ρεύματος δεν μηδενίζεται ακαριαία αλλά σταδιακά. Το ότι το ρεύμα και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, δεν φτάνει ακαριαία στη τελική τιμή οφείλεται στο φαινόμενο της επαγωγής. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο εσωτερικό ενός πηνίου δημιουργείται μαγνητικό πεδίο, όταν αυτό διαρρέεται από ρεύμα (βλ. παρ. 6-8). Η ένταση του μαγνητικού πεδίου εξαρτάται από την ένταση του ρεύματος ($B = \mu_0 I \frac{n}{\ell}$).

Λόγω του μαγνητικού πεδίου από τις σπείρες του πηνίου υπάρχει μαγνητική ροή. Όταν μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου και τελικά μεταβάλλεται η μαγνητική ροή από τις σπείρες του πηνίου, επομένως στο πηνίο εμφανίζεται τάση από επαγωγή. Η επαγωγική τάση σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz έχει τέτοια φορά ώστε να αντιδρά στα αίτια που την προκαλούν. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το αίτιο είναι η μεταβολή της έντασης του ρεύματος. Επομένως η επαγωγική τάση εμφανίζεται με τέτοια πολικότητα που εμποδίζει την ένταση του ρεύματος να μεταβάλλεται και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την μεσολάβηση κάποιου χρονικού διαστήματος μέχρι αυτή να φθάσει στη τελική της τιμή. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *αυτεπαγωγή* επειδή η μεταβολή της μαγνητικής ροής προκαλείται από το ίδιο το κύκλωμα.

Γενικότερα:

❑ Αυτεπαγωγή ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο εμφανίζεται επαγωγική τάση σε έναν αγωγό, όταν μεταβάλλεται το ρεύμα που τον διαρρέει.

Αποδεικνύεται ότι, η τάση από αυτεπαγωγή δίνεται από τη σχέση.

$$\boxed{V_L = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}} \qquad (8.1)$$

Ο συντελεστής αναλογίας της (8.1) ονομάζεται *συντελεστής αυτεπαγωγής.* Το μείον οφείλεται στον κανόνα του Lenz. Η μονάδα του συντελεστή αυτεπαγωγής στο S.I είναι το 1 Henry, το οποίο ορίζεται ως 1 $\frac{Vs}{A}$.

8-2. Συντελεστής αυτεπαγωγής

Πρέπει να σημειωθεί πως η αυτεπαγωγή είναι ένα φαινόμενο επαγωγής, επομένως η τιμή της τάσης από αυτεπαγωγή που εμφανίζεται σε ένα πηνίο όταν μεταβάλλεται το ρεύμα, δίνεται από τον νόμο του Faraday. Δηλαδή:

$$V_L = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (1)$$

Αλλά $\Delta\Phi=\Delta(BS) \Rightarrow \Delta\Phi=S\Delta B \Rightarrow \Delta\Phi=S\Delta\left(\mu_0 I\frac{n}{\ell}\right) \Rightarrow \Delta\Phi=S\mu_0 I\frac{n}{\ell}\Delta I \Rightarrow (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συνεπάγεται:

$$V_L = -n\frac{S\mu_0\frac{n}{\ell}\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow V_L = -\mu_0 n^2\frac{S}{\ell}\frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (3)$$

Όμως από την (8-1) $V_L = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ (4)

Οι (3) και η (4) έχουν τα πρώτα μέλη ίσα, άρα και τα δεύτερα. Επομένως:

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = \mu_0 n^2 \frac{S}{\ell}\frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 \frac{S}{\ell}} \qquad (8.2)$$

Στην περίπτωση που το πηνίο έχει πυρήνα στη σχέση (8.2) λαμβάνεται υπόψη και η μαγνητική διαπερατότητα μ του υλικού του πυρήνα, οπότε η (8.2) γίνεται:

$$\boxed{L = \mu_0 \mu n^2 \frac{S}{\ell}} \qquad (8.3)$$

Από τη σχέση (8.3) γίνεται φανερό, πως ο συντελεστής αυτεπαγωγής εξαρτάται:

- Από τη φύση του υλικού του πυρήνα.
- Από τα γεωμετρικά στοιχεία του πηνίου.

Ας σημειωθεί η ομοιότητα της (8.3) και της $C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{\ell}$, που δίνει την χωρητικότητα επιπέδου πυκνωτή.

Από τις σχέσεις (1) και (4) έπεται:

$$L\Delta I = n\Delta\Phi \quad (5).$$

Επειδή Φ=0, όταν I=0 $\Rightarrow LI = n\Phi \Rightarrow$

$$\boxed{L = \frac{n\Phi}{I}} \qquad (8.4)$$

Η σχέση (8.4) αποτελεί ισοδύναμο ορισμό του συντελεστή αυτεπαγωγής. Δηλαδή:

❑ Συντελεστής αυτεπαγωγής ονομάζεται το πηλίκο της ολικής μαγνητικής ροής που διέρχεται από τις σπείρες πηνίου, προς το ρεύμα που το διαρρέει.

Με τον όρο ολική μαγνητική ροή εννοείται ο παράγοντας nΦ.

8-3. Αμοιβαία επαγωγή

Στο κύκλωμα του σχήματος 8-2, δύο πηνία είναι τυλιγμένα στον ίδιο πυρήνα. Στα άκρα του ενός, το οποίο ονομάζεται *πρωτεύον,* είναι συνδεδεμένη πηγή συνεχούς ρεύματος μέσω ροοστάτη. Στα άκρα του άλλου, που ονομάζεται *δευτερεύον* είναι συνδεδεμένο γαλβανόμετρο. Με τη βοήθεια του ροοστάτη μεταβάλλεται το ρεύμα του πρωτεύοντος, οπότε διαπιστώνεται, πως η βελόνη του γαλβανομέτρου αποκλίνει, που σημαίνει πως το δευτερεύον διαρρέεται από ρεύμα. Τα ίδια φαινόμενα διαπιστώνονται όταν τροφοδοτηθεί με την πηγή το δευτερεύον και το γαλβανόμετρο συνδεθεί στα άκρα του πρωτεύοντος. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αμοιβαία επαγωγή. Δηλαδή:

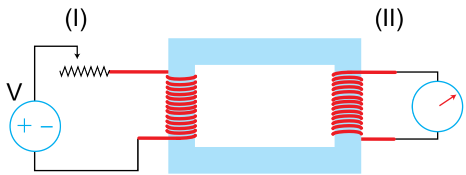
❑ Αμοιβαία επαγωγή δύο πηνίων, που βρίσκονται σε σύζευξη ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο εμφανίζεται επαγωγική τάση στο δευτερεύον πηνίο, όταν μεταβάλλεται το ρεύμα του πρωτεύοντος και αντιστρόφως.

Η αμοιβαία επαγωγή μεταξύ δύο πηνίων εξηγείται ως εξής:

Στο εσωτερικό του πρωτεύοντος υπάρχει μαγνητικό πεδίο, αφού διαρρέεται από ρεύμα. Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου του πρωτεύοντος, μέσω του πυρήνα, διέρχονται και από το δευτερεύον (μαγνητική σύζευξη). Όταν μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος στο πρωτεύον, μεταβάλλεται και η ένταση του μαγνητικού πεδίου. Επομένως μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή από τις σπείρες του δευτερεύοντος, με αποτέλεσμα την εμφάνιση επαγωγικής τάσης. Όπως αποδεικνύεται *η τάση από αμοιβαία επαγωγή στο δευτερεύον είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής του ρεύματος στο πρωτεύον.*

$$V_2 = -M\frac{\Delta I_1}{\Delta t} \qquad (8.5)$$

Ο συντελεστής αναλογίας της (8.5) ονομάζεται συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής και μετρείται στο S.I. σε Henry.



Σχήμα 8.2. Η μεταβολή του ρεύματος στο πρωτεύον προκαλεί τάση στο δευτερεύον

Όπως και ο συντελεστής αυτεπαγωγής, έτσι και ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μπορεί να ορισθεί ισοδύναμα ως:

❑ Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής δύο πηνίων, που βρίσκονται σε μαγνητική σύζευξη, ονομάζεται το πηλίκο της ολικής μαγνητικής ροής που περνά από το δευτερεύον, προς την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πρωτεύον.

$$M = \frac{n_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (8.6)$$

Αν το πρωτεύον και το δευτερεύον ανταλλάξουν ρόλους, δηλαδή αν τροφοδοτείται το δευτερεύον τότε ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής δίνεται από τη σχέση:

$$M = \frac{n_1 \Phi_{21}}{I_2} \quad (8.7)$$

8-3.1. Συντελεστές σύζευξης και σκέδασης

Δύο πηνία βρίσκονται σε *στενή μαγνητική σύζευξη,* όταν μεγάλο μέρος της μαγνητικής ροής, η οποία παράγεται στο ένα, περνά από τις σπείρες του άλλου. Στην αντίθετη περίπτωση η σύζευξη είναι *χαλαρή.*

❑ Βαθμός σύζευξης ενός πηνίου ως προς ένα άλλο ονομάζεται το πηλίκο της μαγνητικής ροής, που περνά από το δευτερεύον προς τη συνολική ροή του πρωτεύοντος.

$$k_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} \quad (8.8)$$

Αν το πρωτεύον και το δευτερεύον ανταλλάξουν ρόλους ο βαθμός σύζευξης του πηνίου (2) ως προς το (1) κατ' αναλογία είναι:

$$k_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} \quad (8.9)$$

Από τη σχέση (8.8) έπεται:

$$\Phi_{12} = k_{12}\Phi_1 \quad (1)$$

Ομοίως από την (8.6):

$$\Phi_{12} = \frac{M I_1}{n_2} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συνεπάγεται:

$$\frac{MI_1}{n_2} = k_{12}\Phi_1 \Rightarrow M = k_{12}\frac{n_2\Phi_1}{I_1} \quad (3)$$

Με όμοιο τρόπο από τις σχέσεις (8.7) και (8.9) αποδεικνύεται:

$$M = k_{21}\frac{n_1\Phi_2}{I_2} \quad (4)$$

Από τον πολλαπλασιασμό των σχέσεων (3) και (4) συνεπάγεται:

$$M^2 = k_{12}k_{21}\left(\frac{n_1\Phi_1}{I_1}\right)\left(\frac{n_2\Phi_2}{I_2}\right) \quad (5).$$

Αλλά $\frac{n_1\Phi_1}{I_1} = L_1$, και $\frac{n_2\Phi_2}{I_2} = L_2$, οπότε η (5) γίνεται:

$$M^2 = k_{12}k_{21}L_1L_2 \quad (6).$$

Ο συντελεστής $k = \sqrt{k_{12}k_{21}}$ ονομάζεται συντελεστής *σύζευξης* των δύο πηνίων. Η σχέση (6) τελικά γίνεται:

$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}} \quad (8.10)$$

Από τη σχέση (8.10) γίνεται φανερό πως ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής εξαρτάται:

- Από τη φύση του υλικού του πυρήνα.
- Από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και των δύο πηνίων.

Ένας άλλος συντελεστής που αφορά τη σύζευξη δύο πηνίων είναι ο συντελεστής *σκέδασης*.

❑ Συντελεστής σκέδασης δύο πηνίων ονομάζεται το πηλίκο του μέρους της ροής του πρωτεύοντος που δεν περνά από το δευτερεύον, προς την συνολική ροή του πρωτεύοντος.

$$\boxed{\sigma_{12} = \frac{\Phi_{10}}{\Phi_1}} \quad (8.11)$$

Κατ' αναλογία:

$$\boxed{\sigma_{21} = \frac{\Phi_{20}}{\Phi_2}} \quad (8.12)$$

Όπως πολύ εύκολα αποδεικνύεται:

$$k+\sigma=1 \qquad (8.13)$$

8-4. Ενέργεια μαγνητικού πεδίου πηνίου

Όπως ο πυκνωτής αποθηκεύει ενέργεια σε μορφή ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου, έτσι και ένα πηνίο αποθηκεύει ενέργεια σε μορφή ενέργειας μαγνητικού πεδίου. Ένα πηνίο, που έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L, και διαρέεται από ρεύμα έντασης I, έχει ενέργεια μαγνητικού πεδίου:

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (8.14)$$

8-5. Συνδεσμολογίες πηνίων

Τα πηνία, όπως οι αντιστάσεις και οι πυκνωτές, μπορούν να συνδεθούν με διάφορους τρόπους. Οι βασικότερες συνδεσμολογίες είναι η *συνδεσμολογία πηνίων σε σειρά* και η *παράλληλη συνδεσμολογία πηνίων.*

❑ Ολικός συντελεστής αυτεπαγωγής συνδεσμολογίας πηνίων ονομάζεται ο συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου, το οποίο όταν αντικαταστήσει τη συνδεσμολογία αναπτύσσει την ίδια τάση από αυτεπαγωγή με τη συνδεσμολογία, για τον ίδιο ρυθμό μεταβολής του συνολικού ρεύματος.

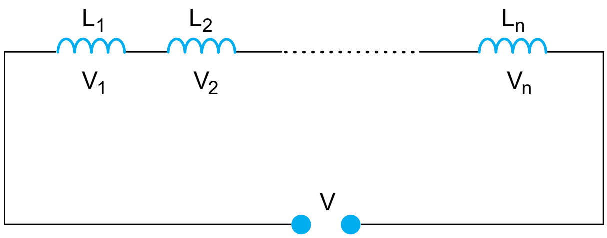
8-5.1. Συνδεσμολογία πηνίων σε σειρά (χωρίς σύζευξη)

Τα πηνία μίας συνδεσμολογίας πηνίων σε σειρά, διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα. Σύμφωνα με τον ορισμό η ολική αυτεπαγωγή της συνδεσμολογίας θα δίνεται από τη σχέση:

$$V = L_{ολ}\frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (1)$$

Οι τάσεις των πηνίων είναι:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= L_1 \frac{\Delta I}{\Delta t} \\ V_2 &= L_2 \frac{\Delta I}{\Delta t} \\ V_3 &= L_3 \frac{\Delta I}{\Delta t} \\ &\vdots \\ V_{v-1} &= L_{v-1} \frac{\Delta I}{\Delta t} \\ V_v &= L_v \frac{\Delta I}{\Delta t} \end{aligned}\right\} (2)$$



Σχήμα 8.3. *Συνδεσμολογία πηνίων σε σειρά*

Όπως είναι γνωστό:

$$V=V_1+V_2+V_3+...+V_{v-1}+V_v \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) συνεπάγεται:

$$L_{ολ}\frac{\Delta I}{\Delta t} = L_1\frac{\Delta I}{\Delta t} + L_2\frac{\Delta I}{\Delta t} + L_3\frac{\Delta I}{\Delta t} + ... + L_{v-1}\frac{\Delta I}{\Delta t} + L_v\frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$L_{ολ}\frac{\Delta I}{\Delta t} = \left(L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_{v-1} + L_v\right)\frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow$$

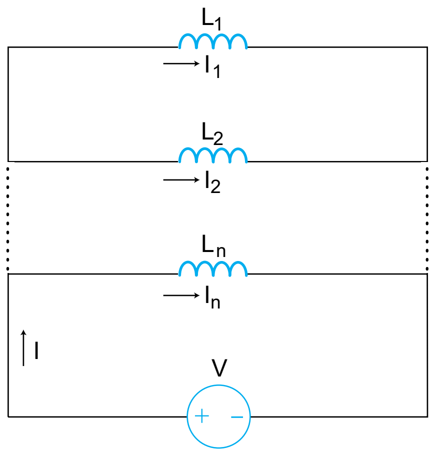
$$\boxed{L_{ολ} = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_{v-1} + L_v} \quad (8.15)$$

8-5.2. Παράλληλη συνδεσμολογία πηνίων

Στην παράλληλη συνδεσμολογία πηνίων, όλα τα πηνία έχουν την ίδια τάση, είναι όμως διαφορετικός ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος στο καθένα.

Ο ολικός συντελεστής αυτεπαγωγής δίνεται από τη σχέση:

$$V = L_{ολ}\frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{V}{L_{ολ}} \quad (1)$$



Σχήμα 8.4. *Παράλληλη συνδεσμολογία πηνίων*

Ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος για κάθε πηνίο είναι:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} &= \frac{V}{L_1} \\ \frac{\Delta I_2}{\Delta t} &= \frac{V}{L_2} \\ \frac{\Delta I_3}{\Delta t} &= \frac{V}{L_3} \\ &\vdots \\ \frac{\Delta I_{v-1}}{\Delta t} &= \frac{V}{L_{v-1}} \\ \frac{\Delta I_v}{\Delta t} &= \frac{V}{L_v} \end{aligned}\right\} (2)$$

Όπως εύκολα προκύπτει από τον 1° κανόνα του Kirchhoff:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + \frac{\Delta I_3}{\Delta t} + \ldots + \frac{\Delta I_{v-1}}{\Delta t} + \frac{\Delta I_v}{\Delta t} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έπεται:

$$\frac{V}{L} = \frac{V}{L_1} + \frac{V}{L_2} + \frac{V}{L_3} + \dots + \frac{V}{L_{v-1}} + \frac{V}{L_v} \Rightarrow \qquad (8.16)$$

$$\boxed{\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_{v-1}} + \frac{1}{L_v}}$$

8-5.3. Συνδεσμολογία πηνίων σε σειρά (με σύζευξη)

Ο ολικός συντελεστής αυτεπαγωγής δύο πηνίων, που βρίσκονται σε μαγνητική σύζευξη, επηρεάζεται από την αμοιβαία επαγωγή των δύο πηνίων. Σ' αυτή την περίπτωση ο ολικός συντελεστής αυτεπαγωγής δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{L_{ολ} = L_1 + L_2 \pm k\sqrt{L_1 + L_2}} \qquad (8.17)$$

Το θετικό πρόσημο λαμβάνεται, όταν οι μαγνητικές ροές και των δύο πηνίων είναι ομόσημες και το αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση.

8-6. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Πηνίο διαρρέεται από ρεύμα που μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό. Η τιμή της έντασης του ρεύματος από I_1 = 3A γίνεται I_2 = 1A σε χρόνο Δt = 2ms. Αν η τάση από αυτεπαγωγή στο πηνίο είναι V_L = 10V, να υπολογισθεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής.

Λύση

Η τάση από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου είναι:

$$V_L = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (1)$$

Αλλά

$$\Delta I = I_2 - I_1 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται

$$V_L = L\frac{I_1 - I_2}{\Delta t} \Rightarrow L = \frac{V_L \cdot \Delta t}{I_1 - I_2} \Rightarrow$$

$$L = \frac{10V \cdot 2 \cdot 10^{-3}s}{3A - 1A} = 10^{-2}H$$

Εφαρμογή 2η

Πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=150mH και διαρρέεται από ρεύμα I=2A. Ο αριθμός των σπειρών του πηνίου είναι n=100. Να υπολογισθεί η μαγνητική ροή, που διέρχεται από κάθε σπείρα του πηνίου.

Λύση

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$L = \frac{n\Phi}{I} \Rightarrow \Phi = \frac{LI}{n} \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{150 \cdot 10^{-3}H \cdot 2A}{10^2} = 3mWb$$

Εφαρμογή 3η

Πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L = 100mH. Οι σπείρες του έχουν διατομή $S=0{,}5cm^2$ και το μήκος του είναι ℓ = 2cm. Το πηνίο έχει n = 100 σπείρες. Να υπολογισθεί η μαγνητική διαπερατότητα του πυρήνα $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$

Λύση

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής σε συνάρτηση με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πηνίου είναι:

$$L = \mu\mu_0 n^2 \frac{S}{\ell} \Rightarrow L\ell = \mu\mu_0 n^2 S \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{L\ell}{\mu_0 \cdot n^2 \cdot S} \Rightarrow \mu = \frac{100 \cdot 10^{-3} H \cdot 2 \cdot 10^{-2} m}{4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{V \cdot s}{A \cdot m} \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4} m^2}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{10^4}{\pi}$$

Εφαρμογή 4η

Πηνίο έχει $n = 100$ σπείρες και διαρρέεται από ρεύμα $I = 1A$, οπότε η μαγνητική ροή που περνάει από κάθε σπείρα είναι $\Phi = 4 \cdot 10^{-4}$ Wb. Να υπολογισθεί η ενέργεια που είναι αποταμιευμένη στο πηνίο.

Λύση

Η ενέργεια πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad (1)$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου είναι:

$$L = \frac{n\Phi}{I} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται:

$$W = \frac{1}{2} \frac{n\Phi}{\cancel{I}} I^{\cancel{2}} \Rightarrow W = \frac{1}{2} n \Phi I \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} 100 \cdot 4 \cdot 10^{-4} Wb \cdot 1A = 0,02 J$$

Εφαρμογή 5η

Δύο πηνία βρίσκονται σε μαγνητική σύζευξη. Όταν το ρεύμα στο πρωτεύον μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό στο δευτερεύον εμφανίζεται επαγωγική τάση V_2=90V. Αν συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής του συστήματος είναι M = 100mH, να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της έντασης στο πρωτεύον.

Λύση

Η επαγωγική τάση που εμφανίζεται στο δευτερεύον είναι:

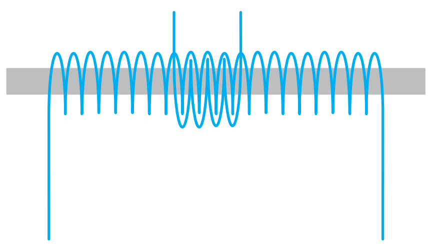
$$V_2 = M\frac{\Delta I_1}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{M} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{90}{100\ 10^{-3}} = 900\frac{A}{s}$$

Εφαρμογή 6η

Μικρό πηνίο με n = 10 σπείρες και σωληνοειδές είναι τυλιγμένα στον ίδιο πυρήνα όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι σπείρες του σωληνοειδούς έχουν εμβαδόν $S = \pi\ cm^2$. Το σωληνοειδές έχει $n^* = 2\cdot10^3\ \frac{\sigma\pi}{m}$. Να υπολογισθεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής του συστήματος. Δίνεται η μαγνητική διαπερατότητα του πυρήνα μ=1000. ($\pi^2 \cong 10$, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\ \frac{Vs}{Am}$)

Λύση



Αν υποτεθεί πως στο σωληνοειδές διαβιβάζεται ρεύμα σταθερής έντασης I_1, τότε ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής του συστήματος θα είναι:

$$M = \frac{n\Phi_2}{I_1} \quad (1)$$

όπου Φ_2 η ροή που περνάει από κάθε σπείρα του πηνίου.

Επειδή το μικρό πηνίο βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς, η $Φ_2$ θα είναι:

$$Φ_2 = B_1 S \quad (2)$$

όπου S το εμβαδόν κάθε σπείρας του σωληνοειδούς, που είναι ίσο με το εμβαδόν κάθε σπείρας του μικρού πηνίου.

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου που υπάρχει στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι:

$$B_1 = μμ_0 I_1 n^* \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται:

$$Φ_2 = μμ_0\ I_1 n^* S \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (4) έπεται:

$$M = \frac{μμ_0 \cancel{I_1} n n^* \cdot S}{\cancel{I_1}} \Rightarrow M = μμ_0 S n n^* \Rightarrow$$

$$M = 10^3 \cdot 4π \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m} π \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^3 \frac{σπ}{m} = 8\,mH$$

Εφαρμογή 7η

Δύο πηνία έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

Μήκος, ℓ_1 = 8cm και ℓ_2 = 2cm.

Σπείρες, n_1 = 80 και n_2 = 40

Εμβαδόν κάθε σπείρας S_1 = 1cm^2 και S_2=2cm^2 Ο πυρήνας και των δύο πηνίων είναι από το ίδιο υλικό που έχει μαγνητική διαπερατότητα μ=1000. Το σύστημα έχει συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής Μ=0,0071Η. Να υπολογισθούν:

Ο συντελεστής σύζευξης και ο συντελεστής σκέδασης του συστήματος.

Δίνεται $μ_0 = 4π \cdot 10^{-7} \frac{V s}{A m}$

Λύση

Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής του συστήματος είναι:

$$M = K\sqrt{L_1L_2} \Rightarrow K = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \quad (1)$$

όπου κ ο συντελεστής σύζευξης των πηνίων.
Οι συντελεστές αυτεπαγωγής των δύο πηνίων αντίστοιχα είναι:

$$L_1 = \mu_0\mu n_1^2 \frac{S_1}{\ell_1} \quad (2) \text{ και } L_2 = \mu_0\mu n_2^2 \frac{S_2}{\ell_2} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) (2) (3) έπεται:

$$K = \frac{M}{\sqrt{\mu_0\mu n_1^2 \frac{S_1}{\ell_1}\mu_0\mu n_2^2 \frac{S_2}{\ell_2}}} \Rightarrow$$

$$K = \frac{M}{\mu_0\mu n_1 n_2\sqrt{\frac{S_1S_2}{\ell_1\ell_2}}} \Rightarrow$$

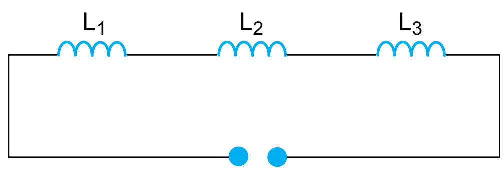
$$K = \frac{0{,}0071H}{4\pi 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\cdot 10^3\cdot 80\cdot 40\sqrt{\frac{10^{-4}m^2\cdot 2\cdot 10^{-4}m^2}{8\cdot 10^{-2}m\cdot 2\cdot 10^{-2}m}}} = 0{,}5$$

Ο συντελεστής σκέδασης του συστήματος είναι:
σ=1-κ $\Rightarrow$ σ=1-0,5 $\Rightarrow$ σ=0,5

Εφαρμογή 8η

Τρία πηνία L_1=2mH, L_2=6mH και L_3=4mH συνδέονται σε σειρά. Κάποια χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 2\frac{A}{s}$ ποια είναι η τιμή της τάσης στα άκρα της συνδεσμολογίας όταν τότε;

Λύση



Η τάση που τροφοδοτεί τη συνδεσμολογία είναι:

$$V = L_{ολ} \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (1)$$

Επειδή τα πηνία είναι συνδεδεμένα στη σειρά, ο συντελεστής αυτεπαγωγής του συστήματος θα είναι:

$$L_{ολ} = L_1 + L_2 + L_3 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) (2) έπεται:

$$V = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$V = (2mH + 6mH + 4mH)\, 2\frac{A}{s} = 24mV$$

Εφαρμογή 9η

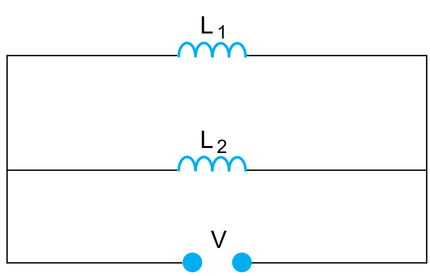
Δύο πηνία έχουν συντελεστές αυτεπαγωγής $L_1 = 3$ mH και $L_2 = 6$mH. Τα δύο πηνία συνδέονται παράλληλα και τροφοδοτούνται με τάση. Κάποια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο L_1 είναι: $\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 24\frac{A}{s}$ Να υπολογισθούν:

α) Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του συστήματος

β) Η τιμή της τάσης τροφοδοσίας όταν $\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 24\frac{A}{s}$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο L_2, όταν $\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 24\frac{A}{s}$.

Λύση



α) Αφού τα πηνία συνδέονται παράλληλα, ο συντελεστής αυτεπαγωγής του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{L_{ολ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{L_2 + L_1}{L_1 L_2} \Rightarrow$$

$$L_{ολ} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \Rightarrow L_{ολ} = \frac{3mH \cdot 6mH}{3mH + 6mH} = 2mH$$

β) Η τάση τροφοδοσίας είναι:

$$V = L_1 \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow V = 3mH \cdot 24\frac{A}{s} = 72mV$$

γ) Στα άκρα του L_2 υπάρχει η τάση τροφοδοσίας επομένως:

$$V = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = \frac{V}{L_2} \Rightarrow \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = \frac{72mH}{6mH} = 12\frac{A}{s}$$

Εφαρμογή 10η

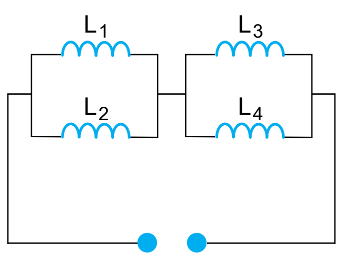
Για τη συνδεσμολογία του σχήματος δίνονται: L_1 = 3mH, L_2 = 6mH, L_3 = 20mH, L_4 = 5mH και κάποια χρονική στιγμή $\frac{\Delta I_2}{\Delta t} = 200\frac{A}{s}$. Να υπολογισθούν:

α) Ο συντελεστής αυτεπαγωγής της συνδεσμολογίας

β) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης και η τάση σε κάθε πηνίο, όταν $\frac{\Delta I_2}{\Delta t} = 200\frac{A}{s}$.

γ) Η τιμή της τάσης τροφοδοσίας όταν $\frac{\Delta I_2}{\Delta t} = 200\frac{A}{s}$.

Λύση

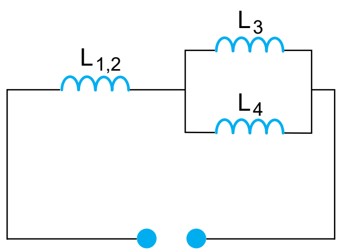


α) Τα πηνία L_1 και L_2 είναι συνδεδεμένα παράλληλα επομένως:

$$\frac{1}{L_{12}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \Rightarrow \frac{1}{L_{12}} = \frac{L_2 + L_1}{L_1 L_2} \Rightarrow$$

$$L_{12} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \Rightarrow L_{12} = \frac{3mH \cdot 6mH}{3mH + 6mH} = 2mH$$

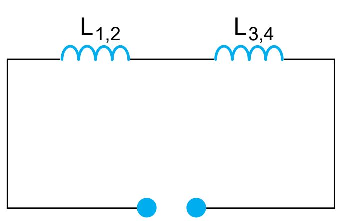
Επομένως το κύκλωμα μετασχηματίζεται στο ισοδύναμο:



Ομοίως τα L_3 και L_4 είναι συνδεδεμένα παράλληλα επομένως:

$$L_{34} = \frac{L_3 L_4}{L_3 + L_4} \Rightarrow L_{34} = \frac{20mH \cdot 5mH}{20mH + 5mH} = 4mH$$

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται στο:



Τα L_{12} και L_{34} είναι συνδεδεμένα στη σειρά επομένως:

$$L_{ολ} = L_{12} + L_{34} \Rightarrow L_{ολ} = 2mH+4mH \Rightarrow L_{ολ} = 6mH.$$

β) Η τάση στο L_2 θα είναι:

$$V_2 = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \Rightarrow V_2 = 6mH 200 \frac{A}{s} = 1,2V$$

Επειδή το L_1 και το L_2 είναι συνδεδεμένα παράλληλα $V_1=V_2 \Rightarrow V_1 = 1,2$ V

$$\Rightarrow V_1 = L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{V_1}{L_1} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{1,2V}{3mH} = 400\frac{A}{s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ολικής έντασης θα είναι:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = 200\frac{A}{s} + 400\frac{A}{s} = 600\frac{A}{s}$$

Επομένως η τάση στο L_{34} θα είναι:

$$V_{34} = L_{34} \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow V_{34} = 4\ mH \cdot 600\ \frac{A}{s} = 2,4\ V$$

Αλλά επειδή L_3 και L_4 είναι συνδεδεμένα παράλληλα

$$V_{34}=V_3=V_4=2,4V$$

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος στα L_3 και L_4 υπολογίζονται ως εξής

$$V_3 = L_3 \frac{\Delta I_3}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I_3}{\Delta t} = \frac{V_3}{L_3} \Rightarrow \frac{\Delta I_3}{\Delta t} = \frac{2,4V}{20mH} = 120\frac{A}{s}$$

$$\text{και } V_4 = L_4 \frac{\Delta I_4}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I_4}{\Delta t} = \frac{V_4}{L_4} \Rightarrow \frac{\Delta I_4}{\Delta t} = \frac{2,4V}{5mH} = 480\frac{A}{s}$$

γ) Η τάση τροφοδοσίας είναι:

$$V=V_{12}+V_{34} \Rightarrow V=1,2V+2,4V=3,6V$$

Εφαρμογή 11η

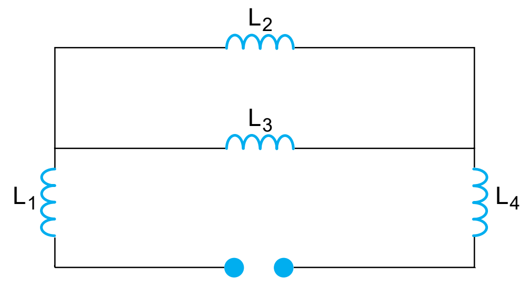
Οι τιμές των συντελεστών αυτεπαγωγής των πηνίων της συνδεσμολογίας του σχήματος είναι:

L_1=2mH, L_2=6mH, L_3=12mH και L_4=4mH. Αν η τάση στο L_2 είναι V_2=4,8V. Να υπολογισθούν:

α) Ο συντελεστής αυτεπαγωγής της συνδεσμολογίας

β) Η τάση και ο ρυθμός μεταβολής της έντασης σε κάθε πηνίο, όταν V_2=4,8V

γ) Η τιμή της τάσης τροφοδοσίας όταν V_2=4,8V

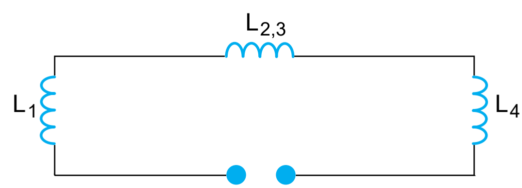


Λύση

α) Τα πηνία L_2 και L_3 είναι συνδεδεμένα παράλληλα, επομένως

$$L_{23} = \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3} \Rightarrow L_{23} = \frac{6\ mH \cdot 12mH}{6\ mH + 12mH} = 4\,mH$$

οπότε το κύκλωμα μετασχηματίζεται:



Τα L_1, $L_{2,3}$ και L_4 είναι συνδεδεμένα στη σειρά, επομένως:

$$L_{ολ}=L_1+L_{2,3}+L_4 \Rightarrow L_{ολ}=2mH+4mH+4mH=10mA$$

β) Ο ρυθμός $\frac{\Delta I_2}{\Delta t}$ θα είναι

$$\frac{\Delta I_2}{\Delta t} = \frac{V_2}{L_2} \Rightarrow \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = \frac{4,8\,V}{6\,mH} = 800\,\frac{A}{s}$$

Επειδή το L_3 είναι παράλληλο προς το L_2 $V_2=V_3=4{,}8V$, οπότε ο ρυθμός $\dfrac{\Delta I_3}{\Delta t}$ είναι

$$\frac{\Delta I_3}{\Delta t}=\frac{V_3}{L_3}\Rightarrow\frac{\Delta I_3}{\Delta t}=\frac{4{,}8\,V}{12\,mA}=400\,\frac{A}{s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ολικής έντασης θα είναι:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t}=\frac{\Delta I_2}{\Delta t}+\frac{\Delta I_3}{\Delta t}\Rightarrow\frac{\Delta I}{\Delta t}=800\,\frac{A}{s}+400\,\frac{A}{s}=1200\,\frac{A}{s}$$

Επειδή το $L_{1,}$ το $L_{2,3}$ και L_4 είναι συνδεδεμένα σε σειρά:

$$\frac{\Delta I_1}{\Delta t}=\frac{\Delta I_4}{\Delta t}=\frac{\Delta I}{\Delta t}=1200\,\frac{A}{s}$$

Επομένως $V_1=L_1\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t}=2\text{ mH}\cdot 1200\,\dfrac{A}{s}=2{,}4\,V$

και $V_4=L_4\dfrac{\Delta I_4}{\Delta t}=4mH\cdot 1200\,\dfrac{A}{s}=4{,}8V$

γ) Η τιμή της τάσης τροφοδοσίας είναι:

$$V=V_1+V_{2,3}+V_4\Rightarrow V=2{,}4V+4{,}8V+4{,}8V=12V$$

8-7. Προβλήματα προς λύση

1° Πηνίο έχει μήκος ℓ=2π cm, n=100 σπείρες και πυρήνα με μαγνητική διαπερατότητα μ=1000. Το εμβαδόν κάθε σπείρας του πηνίου είναι $S=0{,}5cm^2$. Το ρεύμα του πηνίου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, οπότε στα άκρα του πηνίου επάγεται τάση V=2V. Κάποια χρονική στιγμή η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι I_1=2A. Να υπολογισθεί η ένταση του ρεύματος μετά χρόνο Δt=10ms $\left(\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\,\dfrac{Vs}{A\cdot m}\right)$

(4A)

2° Η μαγνητική ροή, που περνάει από κάθε σπείρα ενός πηνίου, είναι Φ=0,01 Wb, όταν διαρρέεται από ρεύμα I=1 A. Το πηνίο έχει n=100 σπείρες.

Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, οπότε στο πηνίο επάγεται τάση V=100V. Να υπολογισθεί το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται κατά ΔΙ=0,1A.

(Δt=1ms)

3° Πηνίο είναι ομοιόμορφα τυλιγμένο σε πυρήνα με μαγνητική διαπερατότητα μ=1000. Το πηνίο έχει $n^*=10^3\ \dfrac{\text{σπείρες}}{m}$ και συντελεστή αυτεπαγωγής L=0,1πH. Να υπολογισθεί ο όγκος του πυρήνα $\left(\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \dfrac{Vs}{A\cdot m}\right)$

($2{,}5\cdot 10^{-4} m^3$)

4° Ένα πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα έχει αποταμιεύσει ενέργεια μαγνητικού πεδίου $W=2\cdot 10^{-2}J$. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα του πηνίου είναι Φ=0,02Wb. Το πηνίο έχει n=100 σπείρες. Να υπολογισθεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

(20mA)

5° Δύο πηνία έχουν συντελεστές αυτεπαγωγής L_1=20mH και L_2=80mH αντίστοιχα. Τα πηνία βρίσκονται σε σύζευξη και όταν στο πρωτεύον η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται με ρυθμό $\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = 125\dfrac{A}{s}$ στο δευτερεύον επάγεται τάση V_2=4V. Να υπολογισθεί ο συντελεστής σκέδασης του συστήματος.

(σ=0,2)

6° Δύο πηνία βρίσκονται σε σύζευξη. Στο πρωτεύον, που έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L_1=100mH, η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό $\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = 10^2\dfrac{A}{s}$. Το δευτερεύον έχει n_2=200 σπείρες και το εμβαδόν κάθε σπείρας είναι $S=1cm^2$. Ο πυρήνας του δευτερεύοντος έχει μαγνητική διαπερατότητα μ=500π. Ο συντελεστής σκέδασης του συστήματος είναι σ=0,1.

Αν η τάση που επάγεται στο δευτερεύον είναι V_2=9V, να υπολογισθεί το μήκος του δευτερεύοντος $\left(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{Vs}{A \cdot m} \quad \pi^2 \cong 10\right)$

(8cm)

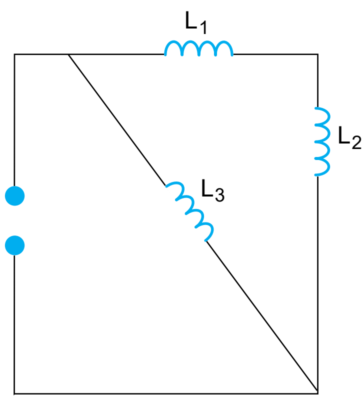
7° Δύο πηνία βρίσκονται σε σύζευξη. Όταν το πρωτεύον διαρρέεται από ρεύμα I_1=1 A, η μαγνητική ροή που περνάει από τις σπείρες του δευτερεύοντος είναι Φ=0,5mWb. Η ένταση του ρεύματος στο πρωτεύον αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, οπότε στο δευτερεύον απάγεται τάση V_2=100V. Αν το πρωτεύον κάποια στιγμή διαρρέεται από ρεύμα I_{11}=3A, να υπολογισθεί η ένταση του μετά χρόνο Δt=1mS. Δίνεται ο αριθμός των σπειρών του δευτερεύοντος n_2=100 σπείρες.

(5A)

8° Στο κύκλωμα του σχήματος, L_1=2mH, L_2=4mH και L_3=3mH. Η τάση του L_1 είναι V_1=2V. Να υπολογισθούν:

α) Ο συντελεστής αυτεπαγωγής της συνδεσμολογίας

β) Η τάση και ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος για κάθε πηνίο, όταν V_1 =2V.



($L_{ολ}$ = 2mH

(V_1 = 2 $\quad \dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = 10^3 \dfrac{A}{s}$

V_2 = 4V $\quad \dfrac{\Delta I_2}{\Delta t} = 10^3 \dfrac{A}{s}$

V_3 = 6V $\quad \dfrac{\Delta I_3}{\Delta t} = 2 \cdot 10^3 \dfrac{A}{s}$)

9° Τρία πηνία L_1=3mH, L_2=12mH και L_3 είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής της συνδεσμολογίας είναι L=1,5mH. Να υπολογισθεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής L_3.

(4mH)

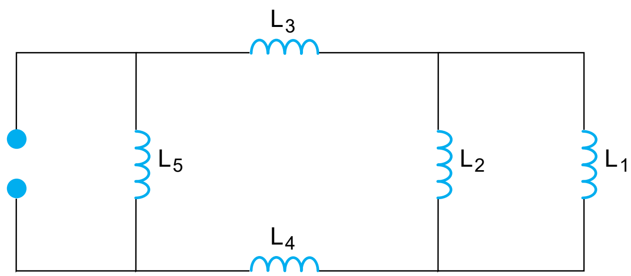
10° Οι συντελεστές αυτεπαγωγής των πηνίων του κυκλώματος, που φαίνεται στο σχήμα, είναι ίσοι μεταξύ τους:

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 14mH$$

Κάποια στιγμή η τάση τροφοδοσίας του κυκλώματος έχει την τιμή V=7V. Να υπολογισθούν

α) Ο συντελεστής αυτεπαγωγής της συνδεσμολογίας

β) Ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος σε κάθε πηνίο, όταν V=7V.

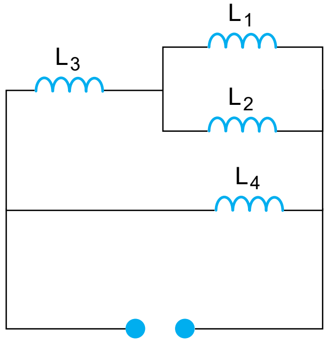


$$L_{ολ} = 10mH, \frac{ΔI_1}{Δt} = \frac{ΔI_2}{Δt} = 100\frac{A}{s}$$

$$\frac{ΔI_3}{Δt} = \frac{ΔI_4}{Δt} = 200\frac{A}{s}, \frac{ΔI_5}{Δt} = 500\frac{A}{s})$$

11° Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται:

L_1=20mH, L_2=5mH, L_3=2mH, L_4=3mH και $\frac{ΔI_1}{Δt} = 1000\frac{A}{s}$. Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος σε κάθε πηνίο.



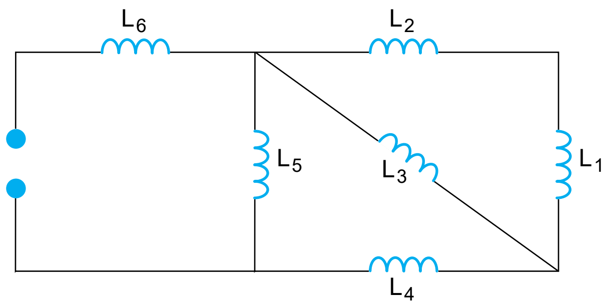
$$\left(\frac{ΔI_2}{Δt} = 4 \cdot 10^3\frac{A}{s}\right.$$

$$\frac{ΔI_3}{Δt} = 5 \cdot 10^3\frac{A}{s}$$

$$\left.\frac{ΔI_4}{Δt} = 10^4\frac{A}{s}\right)$$

12° Να υπολογισθεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής του κυκλώματος του σχήματος. Δίνονται:

L_1=20mH, L_2=15mH, L_3=14mH, L_4=10mH L_5=5mH και L_6=8mH.



(12 mH)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ (A.C.)

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται βασικές έννοιες και κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος.

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι, να ***κατανοήσουν*** *οι μαθητές βασικές έννοιες του εναλλασσόμενου ρεύματος και τη συμπεριφορά των στοιχείων R, L, C στο εναλλασσόμενο ρεύμα καθώς επίσης και συνδυασμούς αυτών.*

Επιπλέον, να ***αναπτύξουν*** *κριτική ικανότητα σχετικά με τον τρόπο αντιμετώπισης κυκλωμάτων AC ώστε να είναι σε θέση να τα* ***επιλύουν****.*

9-1. Εναλλασσόμενο ρεύμα και χαρακτηριστικά του μεγέθη

❑ Ονομάζεται εναλλασσόμενο το ρεύμα του οποίου η φορά και η τιμή (ένταση) μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο.

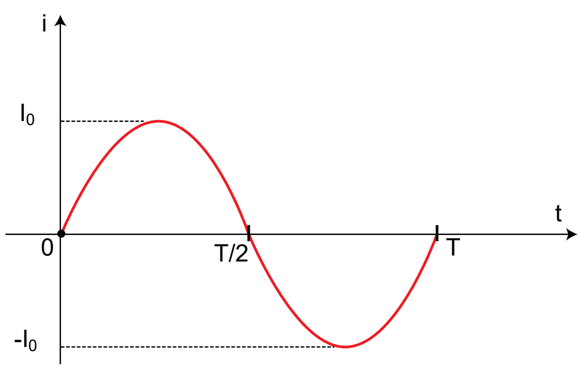
Αν η ένταση του ρεύματος είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου, τότε έχουμε το **ημιτονοειδές εναλλασσόμενο ρεύμα,** το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$i = I_0 \cdot ημφ = I_0 \cdot ημωt = I_0 \cdot ημ2πft = I_0 \cdot ημ\frac{2π}{T}t \qquad (9.1)$$

όπου

- i: στιγμιαία ένταση, δηλαδή η ένταση του ρεύματος σε ορισμένη χρονική στιγμή t.
- I_0: πλάτος, δηλαδή η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος.
- T: περίοδος, δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται για μια ολόκληρη μεταβολή της έντασης του ρεύματος.
- f: συχνότητα, δηλαδή ο αριθμός των πλήρων μεταβολών της έντασης του ρεύματος στη μονάδα του χρόνου (μονάδα συχνότητας το 1 Hz).
- ω=2πf: κυκλική συχνότητα (μονάδα κυκλικής συχνότητας το 1 rad/s).
- φ=ωt: στιγμιαία φάση, δηλαδή η γωνία σε ορισμένη χρονική στιγμή t.

Η γραφική παράσταση του εναλλασσόμενου ρεύματος φαίνεται στο σχήμα 9.1.



Σχήμα 9.1. *Ημιτονοειδές εναλλασσόμενο ρεύμα*

☞ *Παρατηρήσεις*

- Στη συνέχεια το ημιτονοειδές εναλλασσόμενο ρεύμα θα αναφέρεται απλά ως εναλλασσόμενο ρεύμα.
- Αν τη χρονική στιγμή t = 0 η φάση είναι $φ_0$, τότε η μορφή του ρεύματος είναι $i = I_0 ημ(ωt + φ_0)$.

9-2. Εναλλασσόμενη τάση και χαρακτηριστικά της μεγέθη

❑ Ονομάζεται εναλλασσόμενη τάση η τάση της οποίας η πολικότητα και η τιμή της μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο.

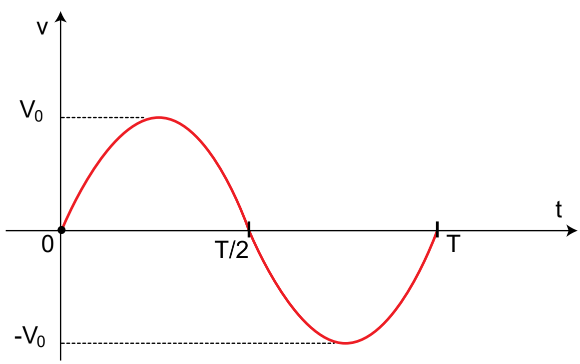
Αν η τάση είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου, τότε έχουμε την **ημιτονοειδή τάση,** η οποία δίνεται από τη σχέση

$$v = V_0 \cdot ημφ = V_0 \cdot ημωt = V_0 \cdot ημ2πft = V_0 \cdot ημ\frac{2π}{T}t \qquad (9.2)$$

όπου

v: στιγμιαία τάση, δηλαδή η τάση σε ορισμένη χρονική στιγμή t.
V_0: πλάτος, δηλαδή η μέγιστη τιμή της τάσης.
T: περίοδος, δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται για μια ολόκληρη μεταβολή της τάσης.
f: συχνότητα, δηλαδή ο αριθμός των πλήρων μεταβολών της τάσης στη μονάδα του χρόνου (μονάδα συχνότητας το 1 Hz).
ω=2πf: κυκλική συχνότητα (μονάδα κυκλικής συχνότητας το 1 rad/s).
φ=ωt: στιγμιαία φάση, δηλαδή η γωνία σε ορισμένη χρονική στιγμή t.

Η γραφική παράσταση της εναλλασσόμενης τάσης φαίνεται στο σχήμα 9.2.



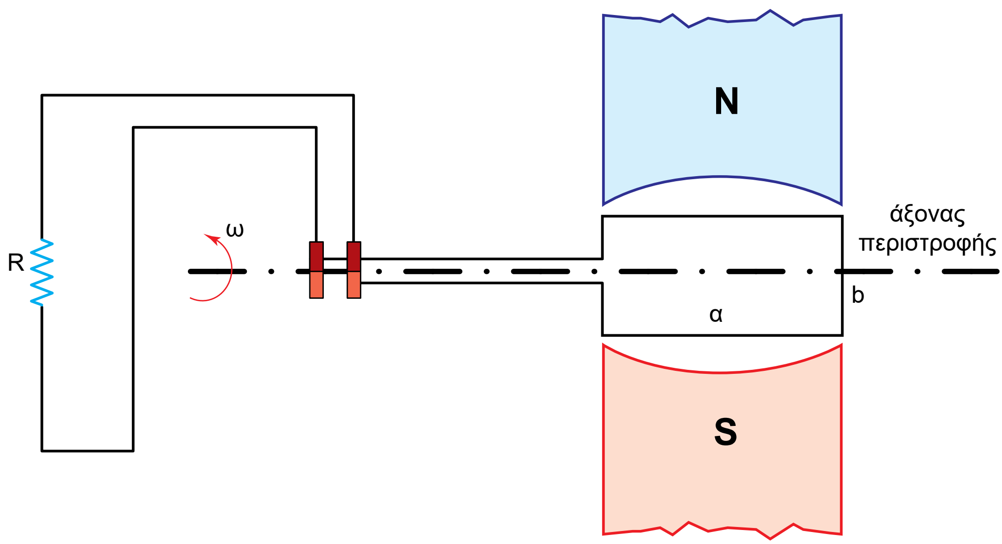
Σχήμα 9.2. Ημιτονοειδής εναλλασσόμενη τάση

☞ *Παρατηρήσεις*

- Στη συνέχεια η ημιτονοειδής εναλλασσόμενη τάση θα αναφέρεται απλά ως εναλλασσόμενη τάση.
- Αν τη χρονική στιγμή t = 0 η φάση είναι φ_0, τότε η μορφή της εναλλασσόμενης τάσης είναι $v = V_0 ημ(\omega t + \varphi_0)$.

9-3. Παραγωγή εναλλασσόμενου ρεύματος - εναλλασσόμενης τάσης

Έστω ότι μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο (μαγνητικής επαγωγής B) βρίσκεται ένα πλαίσιο με **n** σπείρες, το οποίο μπορεί να περιστραφεί με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



***Σχήμα 9.3.** Περιστροφή πλαισίου για παραγωγή εναλλασσόμενου ρεύματος*

Κατά την περιστροφή του πλαισίου μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που το διαρρέει με αποτέλεσμα να δημιουργείται στα άκρα του επαγωγική ΗΕΔ.

Η ροή που περνά από το πλαίσιο είναι:

$$\Phi = B \cdot S \cdot συν\varphi = B \cdot \alpha \cdot b \cdot συν\varphi \qquad (9.3)$$

όπου φ: η γωνία μεταξύ των δυναμικών γραμμών και της κάθετης ευθείας στο πλαίσιο.

Επειδή φ = ωt, η σχέση (9.3) παίρνει τη μορφή

$$\Phi = B \cdot \alpha \cdot b \cdot \text{συν}\omega t \tag{9.4}$$

Με εφαρμογή του ν. Faraday (βλέπε Κεφ. 6) αποδεικνύεται ότι, η αναπτυσσόμενη ΗΕΔ είναι:

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot n = B \cdot \alpha \cdot b \cdot n \cdot \omega \cdot \text{ημ}\omega t = E_0 \cdot \text{ημ}\omega t \tag{9.5}$$

όπου $E_0 = B \cdot \alpha \cdot b \cdot n \cdot \omega$

Αν το πλαίσιο συνδεθεί με μια αντίσταση, ώστε να σχηματίζεται κλειστό κύκλωμα, τότε η ένταση του ρεύματος είναι:

$$i = \frac{E}{R} = \frac{E_0 \cdot \text{ημ}\omega t}{R} = I_0 \cdot \text{ημ}\omega t \tag{9.6}$$

όπου $I_0 = \dfrac{E_0}{R}$

Ανάλογα η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι:

$$v = i \cdot R = I_0 \cdot R \cdot \text{ημ}\omega t = V_0 \cdot \text{ημ}\omega t \tag{9.7}$$

όπου $V_0 = I_0 \cdot R$

9-4. Ενεργός ένταση και ενεργός τάση

Στο εναλλασσόμενο ρεύμα, η τάση και η ένταση μεταβάλλονται με το χρόνο, γι' αυτό δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα ρεύμα ούτε από τη στιγμιαία τιμή του αλλά ούτε από τη μέγιστη τιμή. Έτσι, είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ενεργού τιμής.

Ταυτόχρονο το θερμικό αποτέλεσμα του ρεύματος εξαρτάται, από το τετράγωνο της έντασης του ρεύματος ($P = I^2 \cdot R$) και κατά συνέπεια είναι ανεξάρτητο από τη φορά του. Αυτό σημαίνει ότι και τα εναλλασσόμενα ρεύματα θερμαίνουν τους αγωγούς.

Με βάση τα παραπάνω, υπήρξε η ανάγκη επιλογής μιας ονομαστικής τιμής που θα επέτρεπε τη σύγκριση με άλλες τιμές, με μια τιμή συνεχούς ρεύματος.

❑ Ενεργός ένταση ενός εναλλασσόμενου ρεύματος ονομάζεται η σταθερή ένταση που πρέπει να έχει συνεχές ρεύμα, το οποίο, όταν περνά από την ίδια αντίσταση, αποδίδει στον ίδιο χρόνο το αυτό ποσό θερμότητας με το εναλλασσόμενο.

Αποδεικνύεται ότι η ενεργός ένταση δίνεται από τη σχέση:

$$I_{εν} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_0 \qquad (9.8)$$

❑ Ενεργός τάση ενός εναλλασσομένου ρεύματος ονομάζεται η συνεχής τάση, η οποία, όταν εφαρμόζεται στα άκρα του ίδιου αγωγού, δίνει ρεύμα με ένταση ίση με την ενεργό ένταση του Ε.Ρ.

Αποδεικνύεται ότι η ενεργός τάση δίνεται από τη σχέση:

$$V_{εν} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot V_0 \qquad (9.9)$$

9-5. Διανυσματική παράσταση εναλλασσόμενων μεγεθών

Ένα εναλλασσόμενο μέγεθος μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο xOy με ένα διάνυσμα, υπό τις παρακάτω προϋποθέσεις.

α) Ο άξονας των τετμημένων αποτελεί την αρχή των φάσεων και λαμβάνεται ως αφετηρία μέτρησης των φασικών γωνιών. Κατά την αριστερή φορά οι γωνίες θεωρούνται θετικές, ενώ κατά την αντίθετη αρνητικές.

β) Ο άξονας των τεταγμένων αποτελεί τον άξονα των προβολών ή των στιγμιαίων τιμών.

γ) Κάθε μέγεθος παριστάνεται στο επίπεδο xOy σαν διάνυσμα, άσχετα από το αν είναι ή δεν είναι διάνυσμα.

δ) Το μήκος του διανύσματος σε κάποια κλίμακα (μονάδα μέτρησης) έχει μέτρο ίσο με το πλάτος του εναλλασσόμενου μεγέθους.

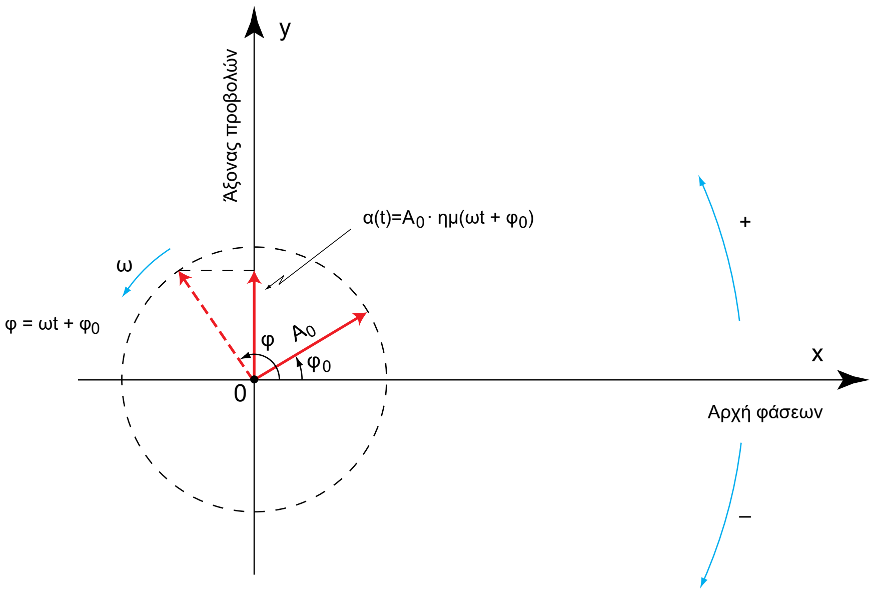
ε) Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με το θετικό πραγματικό άξονα είναι ίση με την αρχική φάση $φ_0$ του εναλλασόμενου μεγέθους.

Με άλλα λόγια, ένα εναλλασσόμενο μέγεθος, π.χ. $α(t) = A_0 \cdot ημ(ωt+φ_0)$, παριστάνεται με ένα διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με το πλάτος A_0 και σχηματίζει με το θετικό άξονα x γωνία $φ_0$. Το διάνυσμα αυτό περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, ίση με την κυκλική συχνότητα του μεγέθους.

Η γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα με το θετικό άξονα των x αυξάνεται συνεχώς και ύστερα από χρόνο t γίνεται $φ = ωt + φ_0$. Η στιγμιαία τιμή του είναι

$\alpha(t) = A_0 \cdot \eta\mu(\omega t+\varphi_0)$. Δηλαδή, οι προβολές του διανύσματος στο φανταστικό άξονα δίνουν τις στιγμιαίες τιμές του εναλλασσόμενου μεγέθους.

Όλα αυτά φαίνονται στο σχήμα 9.4.



Σχήμα 9.4. *Διανυσματική παράσταση εναλλασσόμενου μεγέθους*

9-6. Βασικά κυκλώματα στο εναλλασσόμενο ρεύμα

Η ένταση του ρεύματος σ' έναν καταναλωτή εξαρτάται από την εφαρμοζόμενη τάση και από την αντίσταση του καταναλωτή.

Όταν η εφαρμοζόμενη τάση είναι συνεχής, η αντίσταση του καταναλωτή είναι ίση με την ωμική του αντίσταση.

Όταν η εφαρμοζόμενη τάση είναι εναλλασσόμενη, η αντίσταση του καταναλωτή είναι η αντίσταση εναλλασσόμενου ρεύματος.

Η αντίσταση εναλλασσόμενου ρεύματος είναι δυνατό να περιλαμβάνει μια ή περισσότερες από τις ακόλουθες αντιστάσεις:

- **Ωμική αντίσταση:** Το εναλλασσόμενο ρεύμα παράγει στην αντίσταση θερμότητα (π.χ. ηλεκτρική θερμάστρα).
- **Επαγωγική αντίσταση:** Το εναλλασσόμενο ρεύμα δημιουργεί στην αντίσταση ένα μαγνητικό πεδίο (π.χ. πηνίο).

- **Χωρητική αντίσταση:** Το εναλλασσόμενο ρεύμα δημιουργεί στην αντίσταση ένα ηλεκτρικό πεδίο (π.χ. πυκνωτής).

Ο προσδιορισμός της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος προϋποθέτει τον υπολογισμό της αντίστασης εναλλασσόμενου ρεύματος του καταναλωτή.

9-6.1. Ωμική αντίσταση στο Ε.Ρ.

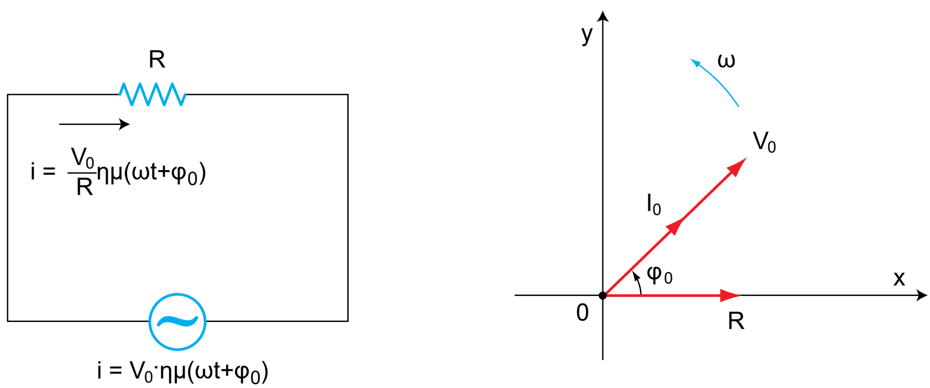
Αν στα άκρα μια ωμικής αντίστασης R εφαρμοστεί εναλλασσόμενη τάση της μορφής $v = V_0 \cdot ημ(ωt + φ_0)$, παρατηρούνται τα εξής:

α) το ρεύμα που περνάει από την R είναι εναλλασσόμενο με συχνότητα ίση με τη συχνότητα της τάσης.

β) το πλάτος του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι $I_0 = \dfrac{V_0}{R}$.

γ) η τάση και η ένταση είναι μεγέθη συμφασικά, επομένως η μορφή του ρεύματος είναι $i = I_0 \cdot ημ(ωt + φ_0)$.

Στο σχήμα 9.5 φαίνεται κύκλωμα Ε.Ρ. με ωμική αντίσταση R, καθώς επίσης και η διανυσματική παράσταση των εμφανιζόμενων μεγεθών.



Σχήμα 9.5. *Κύκλωμα Ε.Ρ. με ωμική αντίσταση*

9-6.2. Πηνίο στο Ε.Ρ.

Αν στα άκρα ενός ιδανικού πηνίου (δηλαδή χωρίς ωμικές απώλειες) εφαρμοστεί εναλλασσόμενη τάση της μορφής $v = V_0 \cdot ημ(ωt + φ_0)$, παρατηρούνται τα εξής:

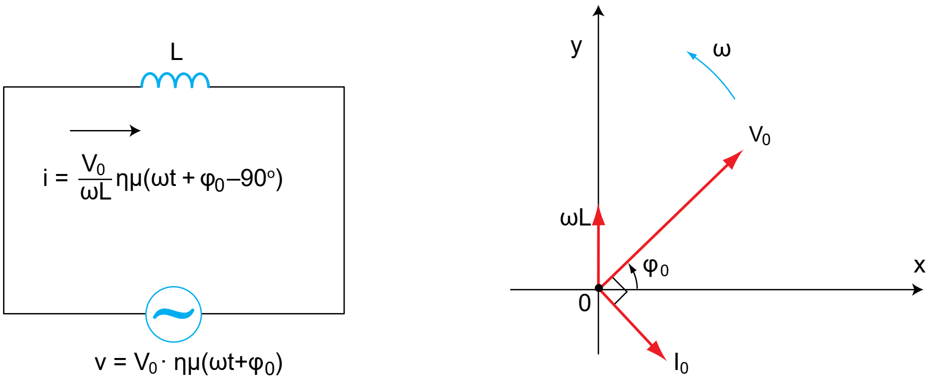
α) το ρεύμα που περνάει από το πηνίο L είναι και αυτό εναλλασσόμενο με συχνότητα ίση με τη συχνότητα της τάσης.

β) το πηνίο παρουσιάζει αντίσταση που ονομάζεται **επαγωγική αντίσταση** X_L και δίνεται από τη σχέση:,

$$X_L = \omega L \tag{9.10}$$

γ) η τάση προπορεύεται της έντασης του ρεύματος κατά 90°, επομένως η μορφή του ρεύματος είναι $i = I_0 \cdot ημ(\omega t+\varphi_0-90°)$ με $I_0 = V_0/\omega L$

Στο σχήμα 9.6 φαίνεται κύκλωμα Ε.Ρ. με πηνίο, καθώς επίσης και η διανυσματική παράσταση των εμφανιζόμενων μεγεθών.



Σχήμα 9.6. *Κύκλωμα Ε.Ρ. με πηνίο (ιδανικό)*

☞ *Παρατηρήσεις*

- Ισχύει ο νόμος του Ohm για τη μέγιστη και την ενεργό τιμή, δηλαδή:

$$V_0 = \omega L \cdot I_0,\ V_{εν} = \omega L \cdot I_{εν}$$

- Εάν ω = 0 (συνεχές ρεύμα), η επαγωγική αντίσταση είναι $X_L = 0$. Επομένως το πηνίο συμπεριφέρεται ως βραχυκύκλωμα στο συνεχές ρεύμα.
- Αν η συχνότητα γίνει πολύ μεγάλη, η επαγωγική αντίσταση γίνεται επίσης πολύ μεγάλη, με αποτέλεσμα να μην περνά το Ε.Ρ. Τα πηνία αυτά ονομάζονται **αποπνικτικά** ή **στραγγαλιστικά,** επειδή αποκόπτουν τις υψηλές συχνότητες.

9-6.3. Πυκνωτής στο Ε.Ρ.

Αν στα άκρα ενός ιδανικού πυκνωτή (δηλαδή χωρίς ωμικές απώλειες) εφαρμοστεί εναλλασσόμενη τάση της μορφής $v = V_0 ημ(\omega t+\varphi_0)$, παρατηρούνται τα εξής:

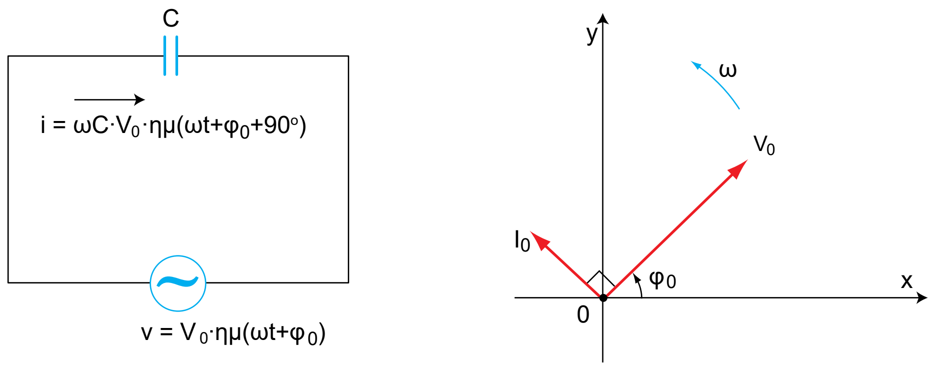
α) το ρεύμα που περνάει από τον πυκνωτή C είναι εναλλασσόμενο, με συχνότητα ίση με τη συχνότητα της τάσης.

β) ο πυκνωτής παρουσιάζει αντίσταση, η οποία ονομάζεται **χωρητική αντίσταση** X_C και δίνεται από τη σχέση:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (9.11)$$

γ) το ρεύμα προπορεύεται της τάσης κατά 90°, επομένως η μορφή του ρεύματος είναι $i = I_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0 + 90°)$ με $I_0 = \omega C \cdot V_0$.

Στο σχήμα 9.7 φαίνεται κύκλωμα Ε.Ρ. με πυκνωτή, καθώς επίσης και η διανυσματική παράσταση των εμφανιζόμενων μεγεθών.



Σχήμα 9.7. *Κύκλωμα Ε.Ρ. με πυκνωτή (ιδανικό)*

☞ *Παρατηρήσεις*

- Ισχύει ο ν.Ohm για τη μέγιστη και την ενεργό τιμή, δηλαδή:

$$V_0 = \frac{1}{\omega C} \cdot I_0 \qquad V_{\varepsilon\nu} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_{\varepsilon\nu}$$

- Αν ω = 0 (συνεχές ρεύμα), η χωρητική αντίσταση τείνει στο άπειρο. Επομένως, ο πυκνωτής στο συνεχές ρεύμα συμπεριφέρεται ως ανοικτοκύκλωμα.

9-7. Σύνθετα κυκλώματα–Σύνθετη αντίσταση

Στην πράξη τα κυκλώματα αποτελούνται από περισσότερα στοιχεία κατάλληλα συνδυασμένα, ώστε να σχηματίζουν σύνθετες συνδεσμολογίες, η αντίσταση των οποίων ονομάζεται **σύνθετη αντίσταση.** Το αποτέλεσμα της συνεργασίας όλων των στοιχείων δεν μπορούμε να το προβλέψουμε παρά μόνο με υπολογισμούς.

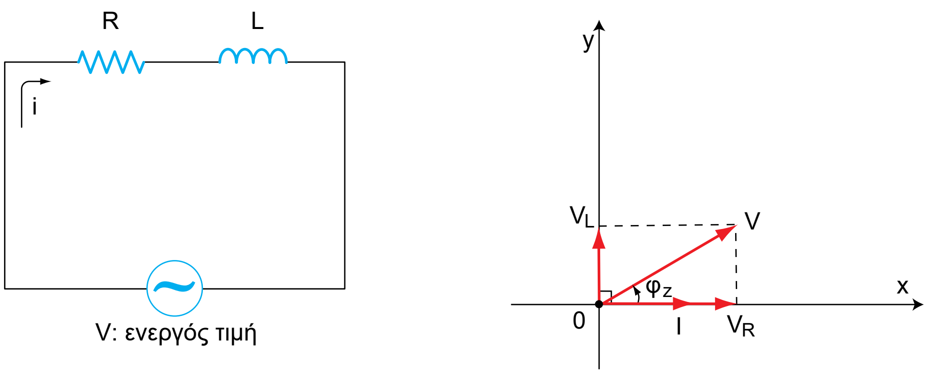
9-7.1. Κύκλωμα RL σε σειρά

Εστω κύκλωμα RL σε σειρά που τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση. Αν V είναι η ενεργός τιμή της τάσης αυτής και I η ενεργός τιμή της έντασης που περνά από το κύκλωμα, τότε η τάση V αντισταθμίζει δύο πράγματα:

α) την πτώση τάσης στην ωμική αντίσταση R, που είναι $V_R = I \cdot R$ και η οποία είναι συμφασική με την ένταση.

β) την πτώση τάσης στην επαγωγική αντίσταση ωL, που είναι $V_L = I \cdot \omega L$ και η οποία προπορεύεται από την ένταση του ρεύματος κατά 90°.

Απεικονίζοντας τα μεγέθη διανυσματικά (στον οριζόντιο άξονα τοποθετείται το κοινό μέγεθος, δηλαδή το ρεύμα), προκύπτει:



Σχήμα 9.8. *Κύκλωμα RL σε σειρά*

$$V^2 = V_R^2 + V_L^2 = I^2 \cdot \left[R^2 + (\omega L)^2\right] \Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

και σύμφωνα με το ν. Ohm προκύπτει ότι ο όρος $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ αποτελεί τη σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος. Δηλαδή, $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και έντασης είναι φ_Z και ισχύει:

$\varepsilon\varphi\varphi_z = \dfrac{V_L}{V_R} = \dfrac{I \cdot \omega L}{I \cdot R} = \dfrac{\omega L}{R}$ όπως φαίνεται και από τη διανυσματική παράσταση.

Τα στιγμιαία μεγέθη του κυκλώματος εύκολα προκύπτουν και είναι:

$$i = \frac{V_0}{Z} \cdot \eta\mu\omega t \qquad (9.12)$$

και

$$v_R = I_0 \cdot R \cdot ημ\ ωt$$
$$v_L = I_0 \cdot ω\,L \cdot ημ(ωt + 90°) \qquad (9.13)$$
$$v = V_0 \cdot ημ(ωt + φ_z)$$

☞ *Παρατηρήσεις*

- Από τις σχέσεις (9.12), (9.13) και από τη διανυσματική παράσταση των μεγεθών συμπεραίνουμε ότι:
- η τάση προηγείται του ρεύματος κατά γωνία $φ_z$, πράγμα το οποίο συμφωνεί με τον επαγωγικό χαρακτήρα του κυκλώματος.
- τα μεγέθη I, V_R είναι συμφασικά, πράγμα το οποίο συμφωνεί με τα αποτελέσματα της παραγράφου 9-6.1.
- τα μεγέθη I, V_L διαφέρουν κατά 90°, πράγμα το οποίο συμφωνεί με τα αποτελέσματα της παραγράφου 9-6.2.

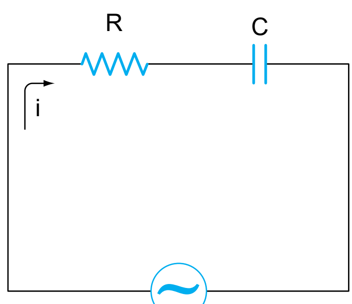
9-7.2. Κύκλωμα RC σε σειρά

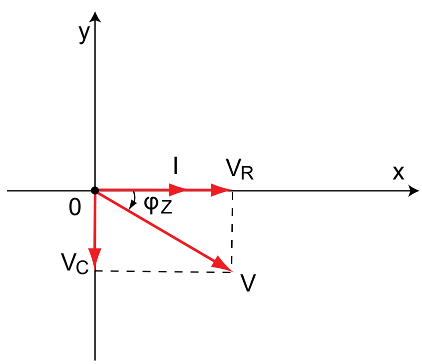
Έστω κύκλωμα RC σε σειρά που τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση. Αν V είναι η ενεργός τιμή της τάσης και I η ενεργός τιμή της έντασης που περνά από το κύκλωμα, τότε η τάση V αντισταθμίζει δύο πράγματα:

α) την πτώση τάσης στην ωμική αντίσταση R, που είναι $V_R = I \cdot R$ και η οποία είναι συμφασική με την ένταση.

β) την πτώση τάσης στην χωρητική αντίσταση $\frac{1}{ωC}$, που είναι $V_C = I \cdot \frac{1}{ωC}$ και η οποία έπεται του ρεύματος κατά 90°.

Απεικονίζοντας τα μεγέθη διανυσματικά (στον οριζόντιο άξονα τοποθετείται το κοινό μέγεθος, δηλαδή το ρεύμα), προκύπτει:





Σχήμα 9.9. *Κύκλωμα RC σε σειρά*

$$V^2 = V_R^2 + V_C^2 = I^2 \cdot \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right] \Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

και σύμφωνα με το ν. Ohm προκύπτει ότι ο όρος $\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ αποτελεί την σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος. Δηλαδή, Z= $\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και έντασης είναι φ_z και ισχύει:

$\varepsilon\varphi\varphi_Z = \dfrac{V_C}{V_R} = \dfrac{I \cdot \frac{1}{\omega C}}{I \cdot R} = \dfrac{1}{\omega CR}$ όπως φαίνεται και από τη διανυσματική παράσταση.

Τα στιγμιαία μεγέθη του κυκλώματος εύκολα προκύπτουν και είναι:

$$i = \frac{V_0}{Z} \cdot \eta\mu\omega t \qquad (9.14)$$

και

$$v_R = I_0 \cdot R \cdot \eta\mu\omega t$$
$$v_C = I_0 \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \eta\mu\left(\omega t - 90^\circ\right) \qquad (9.15)$$
$$v = V_0 \cdot \eta\mu(\omega t - \varphi_z)$$

☞ *Παρατηρήσεις*

Από τις σχέσεις (9.14), (9.15) και από τη διανυσματική παράσταση των μεγεθών συμπεραίνουμε ότι:

- η τάση έπεται του ρεύματος κατά γωνία φ_Z, πράγμα το οποίο συμφωνεί με το χωρητικό χαρακτήρα του κυκλώματος.
- τα μεγέθη I, V_R είναι συμφασικά, πράγμα το οποίο συμφωνεί με τα αποτελέσματα της παραγράφου 9-6.1.
- τα μεγέθη I, V_C διαφέρουν κατά 90°, πράγμα το οποίο συμφωνεί με τα αποτελέσματα της παραγράφου 9-6.3.

9-7.3. Κύκλωμα RLC σε σειρά

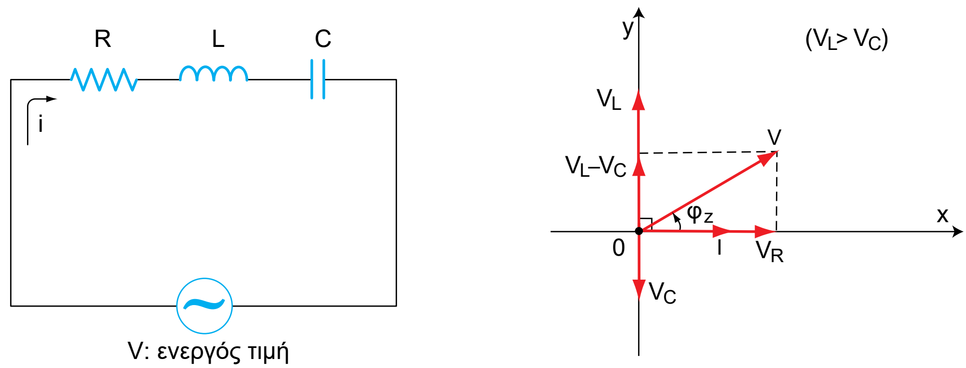
Έστω κύκλωμα RLC *σε σειρά* που τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση $v = V_0\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Αν V είναι η ενεργός τιμή της τάσης και I η ενεργός τιμή της έντασης που περνάει από το κύκλωμα, τότε η τάση V αντισταθμίζει τρία πράγματα:

α) την πτώση τάσης στην ωμική αντίσταση R, που είναι $V_R = I \cdot R$ και η οποία είναι συμφασική με την ένταση.

β) την πτώση τάσης στην επαγωγική αντίσταση ωL, που είναι $V_L = I \cdot \omega L$ και η οποία προπορεύεται από την ένταση του ρεύματος κατά 90°.

γ) την πτώση τάσης στη χωρητική αντίσταση 1/ωC, που είναι $V_C = I \cdot 1/\omega C$ και η οποία έπεται της έντασης του ρεύματος κατά 90°.

Απεικονίζοντας τα μεγέθη διανυσματικά (στον οριζόντιο άξονα τοποθετείται το κοινό μέγεθος, δηλαδή το ρεύμα), προκύπτει:



Σχήμα 9.10. *Κύκλωμα RLC σε σειρά*

$$V^2 = V_R^2 + \left(V_L - V_C\right)^2 = I^2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] \Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

και σύμφωνα με το ν.Ohm προκύπτει ότι ο όρος $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ αποτελεί τη σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και έντασης είναι φ_Z και ισχύει

$$\varepsilon\varphi\varphi_Z = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{I \cdot \omega L - I \cdot \frac{1}{\omega C}}{I \cdot R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

όπως φαίνεται και στη διανυσματική παράσταση.

Τα στιγμιαία μεγέθη του κυκλώματος εύκολα προκύπτουν και είναι:

$$\boxed{i = \frac{V_0}{Z}\eta\mu\omega t} \tag{9.16}$$

και

$$
\begin{aligned}
v_R &= I_0 \cdot R \cdot ημωt \\
v_L &= I_0 \cdot ωL \cdot ημ(ωt + 90°) \\
v_c &= \frac{I_0}{ωC}\, ημ(ωt - 90°) \\
v &= V_0\, ημ(ωt + φ_Z)
\end{aligned}
\qquad (9.17)
$$

9-7.4. Συντονισμός σειράς

Το κύκλωμα RLC σειράς του σχήματος 9.10 είναι γνωστό και ως **κύκλωμα συντονισμού** και έχει πολλές εφαρμογές στην πράξη.

Όπως προέκυψε, η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι

$$εφφ_Z = \frac{ωL - \frac{1}{ωC}}{R} \qquad (9.18)$$

- Αν $ωL - \frac{1}{ωC} > 0$, το κύκλωμα παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά, καθότι $φ_Z > 0$, και συνεπώς η τάση προηγείται του ρεύματος κατά γωνία $φ_Z$.
- Αν $ωL - \frac{1}{ωC} < 0$, το κύκλωμα παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά, καθότι $φ_Z < 0$, και συνεπώς η τάση έπεται του ρεύματος κατά γωνία $|φ_Z|$.
- Αν $ωL - \frac{1}{ωC} = 0$, η τάση και το ρεύμα είναι μεγέθη συμφασικά, καθότι $φ_Z = 0$, και το κύκλωμα έχει ωμική συμπεριφορά. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **συντονισμός.** Η συχνότητα στην οποία επιτυγχάνεται συντονισμός βρίσκεται από την παρακάτω εξίσωση :

$$Lω_0 = \frac{1}{ω_0 C} \Rightarrow ω_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2π\sqrt{LC}} \qquad (9.19)$$

☞ *Παρατηρήσεις*

Κατά το συντονισμό παρατηρούμε ότι:

- Η σύνθετη αντίσταση παίρνει ελάχιστη τιμή

$$Z_{min} = \sqrt{R^2 + (ω_0 L - 1/ω_0 C)^2} = R.$$

- Η ένταση του ρεύματος παίρνει μέγιστη τιμή

$$I_{max} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (ω_0 L - 1/ω_0 C)^2}} = V_0 / R.$$

- Η τάση και η ένταση είναι μεγέθη συμφασικά.
- Η τάση στα άκρα του πηνίου είναι:

$$V_L = I_{max} \cdot L\omega_0 = \frac{V_0}{R} L\omega_0 = \frac{V_0}{RC\omega_0} = Q_\pi \cdot V_0$$

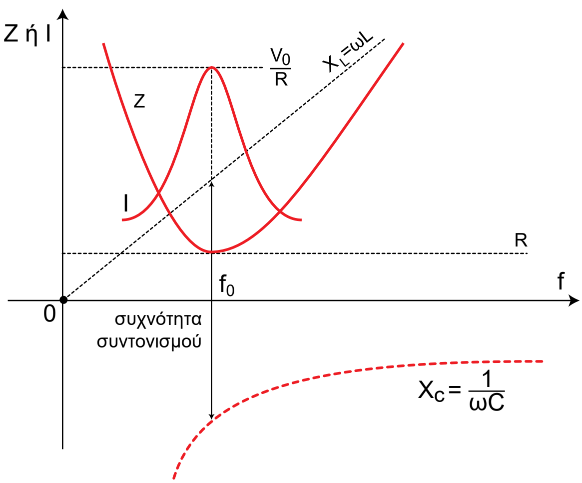
όπου

$$\boxed{Q_\pi = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}} \qquad (9.20)$$

Το Q_π ονομάζεται **συντελεστής ποιότητας του πηνίου.** Ο συντελεστής Qπ δηλώνει ότι η τάση στα άκρα του πηνίου είναι Q_π φορές την τάση τροφοδοσίας. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως **υπέρταση κατά το συντονισμό.**

Οι τάσεις στα άκρα των στοιχείων γίνονται μέγιστες και λέγονται **υπερτάσεις.** Στον πυκνωτή είναι δυνατόν η υπέρταση να διατρυπήσει το διηλεκτρικό και να το αχρηστέψει. Αυτό λαμβάνεται σοβαρά υπόψη στα κυκλώματα ταλαντώσεων.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι μεταβολές της σύνθετης αντίστασης Z και του ρεύματος I συναρτήσει της συχνότητας f.

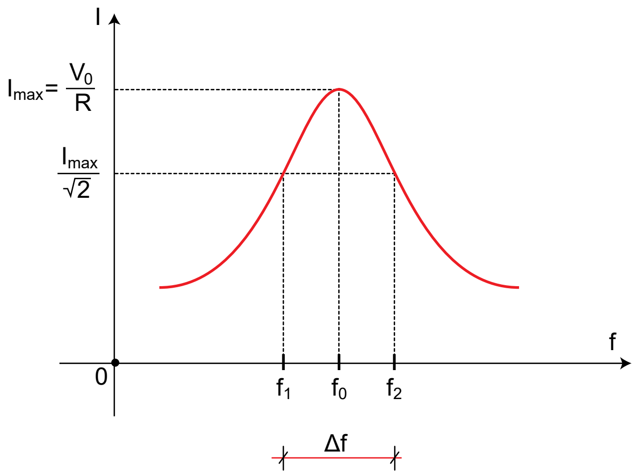


Σχήμα 9.11. *Μεταβολής των Z και I συναρτήσει της συχνότητας f*

Ιδιαίτερη σημασία στην πράξη έχει το πόσο στενή είναι η καμπύλη συντονισμού στην περιοχή κοντά στη συχνότητα συντονισμού. Αυτό εκτιμάται με τη **ζώνη διέλευσης** ή **ζώνη συντονισμού** Δf του κυκλώματος, που δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\Delta f = f_2 - f_1} \qquad (9.21)$$

όπου f_1 και f_2 είναι οι συχνότητες στις οποίες το ρεύμα I παίρνει τιμή ίση με $\frac{1}{\sqrt{2}} I_{max} = 0{,}707 \cdot I_{max}$



Σχήμα 9.12. *Ζώνη διέλευσης*

Αποδεικνύεται ότι μεταξύ της ζώνης διέλευσης Δf και του συντελεστή ποιότητας Q_Π ισχύει η σχέση:

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_\pi} \qquad (9.22)$$

δηλαδή, για ορισμένη συχνότητα συντονισμού f_0 η ζώνη διέλευσης είναι τόσο μικρότερη (πιο στενή καμπύλη) όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής ποιότητας Q.

9-7.5. Κύκλωμα RLC παράλληλα

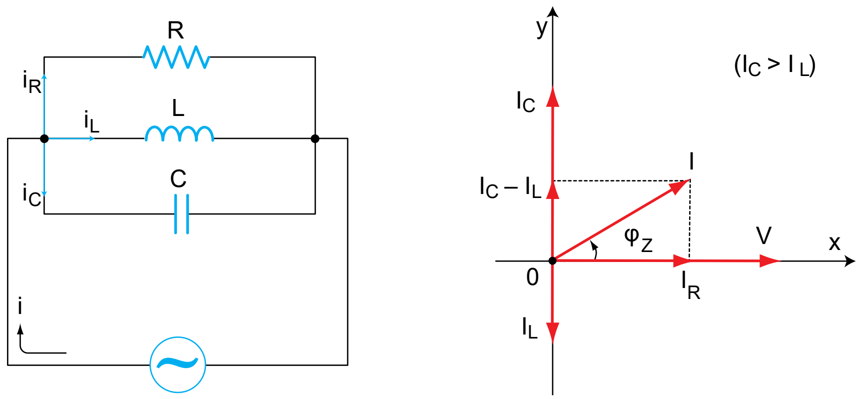
Έστω κύκλωμα RLC παράλληλα που τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση. Αν V είναι η ενεργός τιμή της τάσης και I η ενεργός τιμή της έντασης που περνάει από το κύκλωμα, τότε το ρεύμα I αντισταθμίζει τρία πράγματα:

α) το ρεύμα στην ωμική αντίσταση R, που είναι $I_R = \frac{V}{R}$ και το οποίο είναι συμφασικό με την τάση.

β) το ρεύμα στην επαγωγική αντίσταση ωL, που είναι $I_L = \frac{V}{\omega L}$ και το οποίο έπεται της τάσης κατά 90°.

γ) το ρεύμα στη χωρητική αντίσταση $\frac{1}{\omega C}$, που είναι $I_C = \omega\ C \cdot V$ και το οποίο προπορεύεται της τάσης κατά 90°.

Απεικονίζοντας τα μεγέθη διανυσματικά (στον οριζόντιο άξονα τοποθετείται το κοινό μέγεθος, δηλαδή η τάση), προκύπτει:



Σχήμα 9.13. *Κύκλωμα RLC παράλληλα*

$$I^2 = I_R^2 + \left(I_C - I_L\right)^2 = V^2 \cdot \left[\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right]$$

και σύμφωνα με το ν. Ohm προκύπτει ότι ο όρος $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}}$ αποτελεί τη σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

Η διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης είναι φ_Z και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\varphi_Z = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{\omega C \cdot V - \dfrac{V}{\omega L}}{\dfrac{V}{R}} = \frac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R}}$$

όπως φαίνεται και στη διανυσματική παράσταση.

Τα στιγμιαία μεγέθη του κυκλώματος εύκολα προκύπτουν και είναι:

$$v = V_0 \cdot \eta\mu\ \omega t \qquad (9.23)$$

και

$$
\begin{aligned}
i_R &= \frac{V_0}{R} \cdot ημωt \\
i_L &= \frac{V_0}{ωL} \cdot ημ\left(ωt - 90^\circ\right) \\
i_C &= ωC \cdot V_0 \cdot ημ(ωt + 90^\circ) \\
i &= I_0 \cdot ημ(ωt + φ_Z)
\end{aligned}
\tag{9.24}
$$

9-7.6. Παράλληλος συντονισμός (αντισυντονισμός)

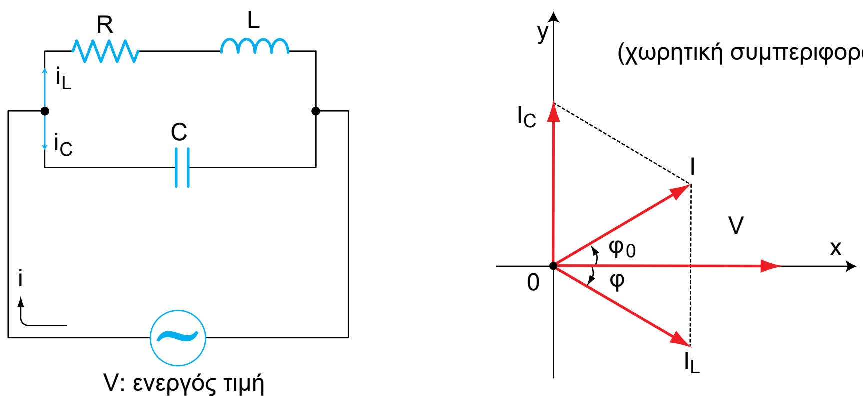
Το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος είναι γνωστό ως κύκλωμα **παράλληλου συντονισμού (ή αντισυντονισμού).** Αποτελείται από έναν ιδανικό πυκνωτή και ένα πηνίο που παρουσιάζει και ωμική αντίσταση πολύ μικρή.

Αν V είναι η ενεργός τιμή της τάσης και I η ενεργός τιμή του ρεύματος που περνάει από το κύκλωμα, τότε το ρεύμα I αντισταθμίζει δύο πράγματα:

α) το ρεύμα στο πηνίο, που είναι $I_L = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (ωL)^2}}$ και έπειτα της τάσης κατά γωνία φ, οπού $εφφ = \frac{ωL}{R}$.

β) το ρεύμα στον πυκνωτή, που είναι $I_C = ω\,C \cdot V$ και προηγείται της τάσης κατά 90°.

Απεικονίζοντας τα μεγέθη διανυσματικά (στον οριζόντιο άξονα τοποθετείται το κοινό μέγεθος, δηλαδή η τάση), προκύπτει:



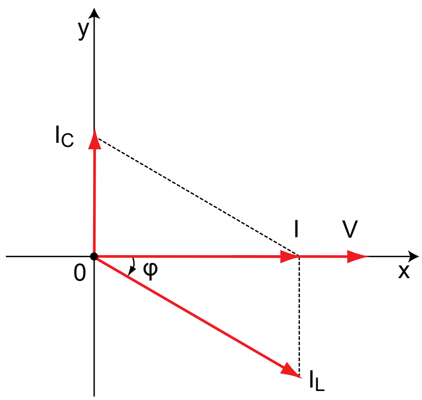
Σχήμα 9.14. Κύκλωμα παράλληλου συντονισμού

Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία R και L διατηρούνται σταθερά και επομένως το I_L είναι σταθερό. Μεταβάλλοντας τη χωρητικότητα C, μεταβάλλεται η χωρητική αντίσταση, άρα και η ένταση του ρεύματος I_C.

Έτσι, όταν η χωρητικότητα C ελαττώνεται, αυξάνεται η αντίσταση του πυκνωτή και κατά συνέπεια ελλαττώνεται η ένταση I_C. Ταυτόχρονα ελαττώνεται και το ρεύμα I καθώς επίσης και η γωνία φ_0.

Για ορισμένη τιμή του C το ολικό ρεύμα γίνεται συμφασικό με την τάση (φ_0 = 0) και παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή I_{min} (διότι η κάθετη είναι μικρότερη από κάθε πλάγια). Αν η χωρητικότητα C ελαττωθεί ακόμη περισσότερο, αρχίζει και πάλι η αύξηση του ρεύματος, αλλά με επαγωγικό χαρακτήρα.

❑ Λέμε ότι έχουμε παράλληλο συντονισμό όταν η ένταση του ρεύματος παίρνει την ελάχιστη τιμή (I_{min}) και είναι συμφασική με την τάση V.



Σχήμα 9.15. *Διανυσματικό διάγραμμα στον παράλληλο συντονισμό*

Η απαιτούμενη τιμή χωρητικότητας C για τον παράλληλο συντονισμό προκύπτει ίση με

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \qquad (9.25)$$

Η συχνότητα συντονισμού προκύπτει ίση με:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \qquad (9.26)$$

και η ελάχιστη τιμή του ρεύματος

$$I_{min} = \frac{V \cdot R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \qquad (9.27)$$

και επειδή $R^2 << (\omega_0 L)^2$, προσεγγιστικά τα f_0 και I_{min} δίνονται από τις σχέσεις

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{9.28}$$

$$I_{min} = \frac{VR}{(\omega_0 L)^2} \tag{9.29}$$

Η συνθέτη αντίσταση παίρνει τη μεγίστη τιμή και δίνεται από τη σχέση

$$Z_{max} = \frac{V}{I_{min}} = Q_\pi^2 \cdot R = Q \cdot \omega_0 L \tag{9.30}$$

όπου $Q_\pi = \frac{\omega_0 L}{R}$.

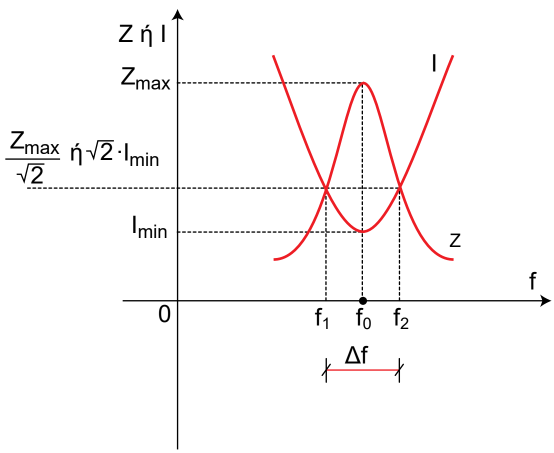
Το φαινόμενο της ανάπτυξης μεγάλης αντίστασης Z_{max} κατά τον παράλληλο συντονισμό ονομάζεται **υπεραντίσταση.**

Εφόσον υποθέσαμε ότι η R είναι πολύ μικρή, τα ρεύματα I_L και I_C είναι ίσα και δίνονται από τη σχέση:

$$I_L = I_C = Q\pi \cdot I_{min} \tag{9.31}$$

Επομένως, στον παράλληλο συντονισμό τα ρεύματα I_L και I_C είναι Q_π φορές μεγαλύτερα από το ελάχιστο ρεύμα I_{min}. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **υπερέ-νταση.**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι μεταβολές της Ζ και του Ι συναρτήσει της συχνότητας f.

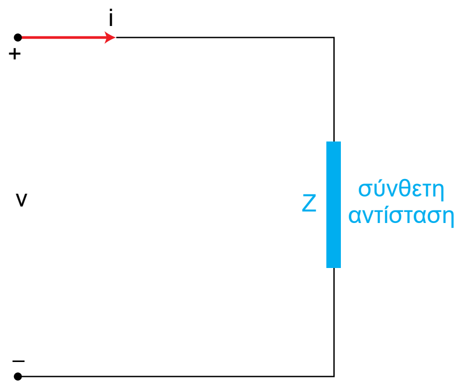


Σχήμα 9.16. *Μεταβολή των Z και I συναρτήσει της συχνότητας*

Για τη ζώνη διέλευσης ισχύει και πάλι η σχέση $\Delta f = f_2 - f_1 = \dfrac{f_0}{Q_\pi}$ αλλά οι συχνότητες f_1 και f_2 αντιστοιχούν στην περίπτωση αυτή στα σημεία 0,707 Z_{max} ή στο $\sqrt{2} \cdot I_{min} = 1{,}41 \cdot I_{min}$ όπως φαίνεται στο σχήμα (9.16).

9-8. Ισχύς στο Εναλλασσόμενο Ρεύμα–Τρίγωνο Ισχύος

Έστω σύνθετη αντίσταση Z, στα άκρα της οποίας εφαρμόζεται τάση $v = V_0 \cdot ημωt$ και διαρρέεται από ρεύμα $i = I_0 \cdot ημ(ωt - φ)$, όπου φ: η διαφορά φάσης μεταξύ V και I (ή γωνία της σύνθετης αντίστασης Z).



Σχήμα 9.17. *Κύκλωμα για τη μελέτη ισχύος στο Ε.Ρ.*

❑ Ονομάζεται πραγματική ισχύς P η ισχύς που καταναλίσκεται στο ωμικό μέρος της σύνθετης αντίστασης υπό μορφή θερμότητας και αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$P = V_{εν} \cdot I_{εν} \cdot συνφ = \frac{1}{2} V_0 \cdot I_0 \cdot συνφ \qquad (9.32)$$

Μονάδα πραγματικής ισχύος είναι το Watt (W)

❑ Ονομάζεται άεργος ισχύς Q η ισχύς που παρουσιάζεται στο επαγωγικό ή χωρητικό μέρος της σύνθετης αντίστασης και αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$Q = V_{εν} \cdot I_{εν} \cdot ημφ = \frac{1}{2} V_0 \cdot I_0 \cdot ημφ \qquad (9.33)$$

Μονάδα άεργης ισχύος είναι το Var (Vr)

❑ Ονομάζεται φαινόμενη ισχύς S το γινόμενο

$$S = V_{εν} \cdot I_{εν} = \frac{1}{2} V_0 \cdot I_0 \tag{9.34}$$

Μονάδα φαινόμενης ισχύος είναι το VoltAmpere (VA)

Μεταξύ των τριών αυτών ισχύων ισχύει η σχέση: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, καθότι

$$P^2 + Q^2 = V_{εν}^2 \cdot I_{εν}^2 \cdot συν^2φ + V_{εν}^2 \cdot I_{εν}^2 \cdot ημ^2φ = V_{εν}^2 \cdot I_{εν}^2 \cdot \left(συν^2φ + ημ^2φ\right) = V_{εν}^2 \cdot I_{εν}^2 = S^2$$

Επειδή -90° ≤ φ ≤ 90°, συμπεραίνουμε ότι 0 ≤ συνφ ≤ 1 και συνεπώς η πραγματική ισχύς είναι πάντα **θετική,** ενώ η άεργος ισχύς μπορεί να είναι ή θετική ή και αρνητική, καθότι εξαρτάται από τον παράγοντα ημφ. Ανάλογα με το πρόσημο της άεργης ισχύος Q διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

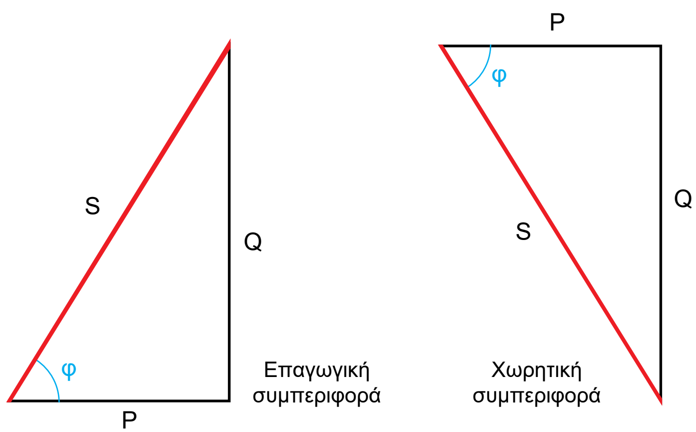
- Αν Q > 0, το κύκλωμα παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά ή ισοδύναμα η τάση προηγείται του ρεύματος κατά γωνία φ.

Το συνφ ονομάζεται **συντελεστής ισχύος** του κυκλώματος και στην περίπτωση αυτή λέγεται **επαγωγικός ή μεταπορείας.**

- Αν Q < 0, το κύκλωμα παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά ή ισοδύναμα η τάση έπεται του ρεύματος κατά γωνία φ.

Ο συντελεστής ισχύος στην περίπτωση αυτή λέγεται **χωρητικός** ή **προπορείας.**

Η πραγματική, η άεργος και η φαινόμενη ισχύς, καθώς και η συμπεριφορά του κυκλώματος, απεικονίζονται με το τρίγωνο ισχύος, δηλ. ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές P, Q και υποτείνουσα S.



Σχήμα 9.18. Τρίγωνα ισχύος

9-9. Πλεονεκτήματα του Ε.Ρ. έναντι του Σ.Ρ.

Το Ε.Ρ. παρουσιάζει αρκετά πλεονεκτήματα έναντι του Σ.Ρ. και γι' αυτό η χρήση του είναι ευρεία. Τα κυριώτερα πλεονεκτήματά του είναι:

α) Το Ε.Ρ. μετασχηματίζεται, δηλαδή αυξάνεται και ελαττώνεται η τάση ή το ρεύμα χωρίς να αλλάζει η ισχύς του.

β) Εξαιτίας του μετασχηματισμού μεταφέρεται σε μεγάλες αποστάσεις με μικρό σχετικά κόστος κατασκευής της γραμμής και λίγες απώλειες.

γ) Εξαιτίας της εύκολης μεταφοράς, το Ε.Ρ. παράγεται εκεί που υπάρχει φτηνή πρώτη ενέργεια.

δ) Μπορεί με κατάλληλη ανορθωτική διάταξη να χρησιμοποιηθεί και εκεί που απαιτείται οπωσδήποτε Σ.Ρ., π.χ. ηλεκτρόλυση, φόρτιση συσσωρευτών, ηλεκτρομαγνήτες κ.λπ.

ε) Οι κινητήρες Ε.Ρ. είναι λιγότερο περίπλοκοι από τους αντίστοιχους Σ.Ρ.

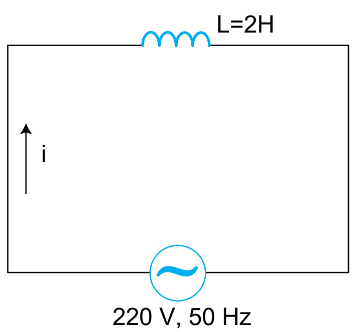
9-10. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Ένα πηνίο αυτεπαγωγής 2 (H) συνδέεται σε εναλλασσόμενη τάση ενεργούς τιμής 220 (V) και συχνότητας 50 (Hz). Ζητούνται:

α) η στιγμιαία τάση β) η επαγωγική αντίσταση γ) το στιγμιαίο ρεύμα και δ) η τιμή του ρεύματος που θα έδειχνε ένα αμπερόμετρο αμελητέας αντίστασης.

Λύση



α) Το πλάτος της τάσης είναι $V_0 = \sqrt{2} \cdot V_{εν} = \sqrt{2} \cdot 220 = 310\,(V)$

Η κυκλική συχνότητα είναι:

$$\omega = 2\,\pi\,f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314\ (\text{rad}\,/\,\text{s})$$

Επομένως, η στιγμιαία τάση είναι

$$v = V_0 \cdot \eta\mu\omega t = 310 \cdot \eta\mu\, 314\, t\ (\text{V})$$

β) Η επαγωγική αντίσταση του πηνίου είναι

$$x_L = \omega\,L = 314 \cdot 2 \Rightarrow x_L = 628\ (\Omega)$$

γ) Η ενεργός τιμή του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{x_L} = \frac{220}{628} \Rightarrow I_{\varepsilon\nu} = 0{,}35\,(\text{A})$$

και επομένως $I_0 = \sqrt{2} \cdot I_{\varepsilon\nu} = \sqrt{2} \cdot 0{,}35 = 0{,}494\,(\text{A})$

Επίσης, επειδή η συμπεριφορά είναι επαγωγική το ρεύμα έπεται της τάσης κατά 90°. Άρα, η στιγμιαία τιμή του ρεύματος είναι:

$$i = I_0 \cdot \eta\mu\,(\omega t - 90°) = 0{,}494 \cdot \eta\mu\,(314\,t - 90°)$$

δ) Επειδή τα αμπερόμετρα που μετρούν εναλλασσόμενο ρεύμα δείχνουν πάντα την ενεργό τιμή, συμπεραίνουμε ότι η ένδειξη του αμπερομέτρου είναι 0,35 (A).

Εφαρμογή 2η

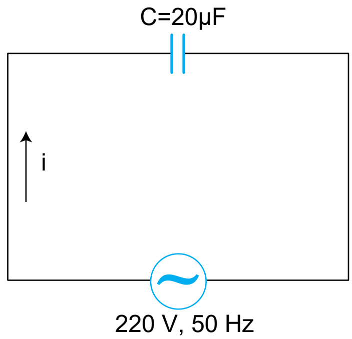
Ένας πυκνωτής χωρητικότητας 20 (μF) συνδέεται σε εναλλασσόμενη τάση ενεργού τιμής 220 (V) και συχνότητας 50 (Hz). Ζητούνται α) η χωρητική αντίσταση του πυκνωτή β) η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει και γ) το διανυσματικό διάγραμμα τάσης και έντασης.

Λύση

α) Η χωρητική αντίσταση του πυκνωτή είναι:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow X_C = 159{,}23\ (\Omega)$$

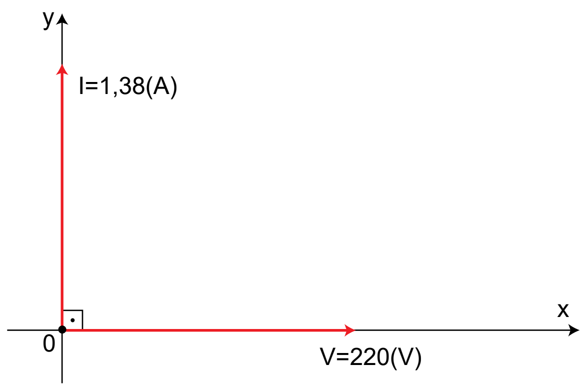


β) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον πυκνωτή έχει ενεργό τιμή

$$I = \frac{V}{X_C} = \frac{220}{159,23} \Rightarrow I = 1,38\ (A)$$

και προηγείται της τάσης κατά 90°.

γ) Το διανυσματικό διάγραμμα (με την τάση στον οριζόντιο άξονα) είναι το ακόλουθο).



☞ *Παρατήρηση*

Επειδή υπάρχει μία τάση δεν έχει νόημα να σχεδιαστεί με κλίμακα. Το ίδιο ισχύει και για το ρεύμα.

Εφαρμογή 3η

Ωμική αντίσταση 10 (Ω) συνδέεται σε σειρά με πηνίο αυτεπαγωγής 0,02 (H). Το σύστημα τροφοδοτείται από εναλλασσόμενο ρεύμα 220 V, 50 Hz.

Ζητούνται: α) η ένταση του ρεύματος

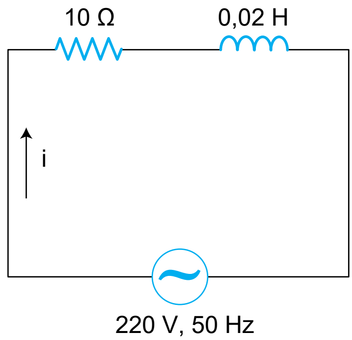
β) η τάση V_R της αντίστασης

γ) η τάση V_L του πηνίου

δ) το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων

ε) το διανυσματικό διάγραμμα αντιστάσεων.

Λύση



α) Η κυκλική συχνότητα του κυκλώματος είναι:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314 \text{ (rad / s)}$$

και κατά συνέπεια, η σύνθετη αντίσταση αυτού είναι:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{10^2 + (314 \cdot 0{,}02)^2} \Rightarrow Z = 11{,}8\,(\Omega)$$

με γωνία φ, έτσι ώστε: $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{\omega L}{R} = \dfrac{314 \cdot 0{,}02}{10} = 0{,}628$

Κάνοντας χρήση τριγωνομετρικών πινάκων, προκύπτει: $\varphi \cong 32°$.

Το ρεύμα του κυκλώματος είναι $I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{220}{11{,}8} = 18{,}64$ (A) και έπειτα της τάσης κατά 32°, αφού το κύκλωμα έχει επαγωγική συμπεριφορά.

β) Η τάση της αντίστασης προκύπτει:

$$V_R = I \cdot R = 18{,}64 \cdot 10 \Rightarrow V_R = 186{,}4 \text{ (V)}$$

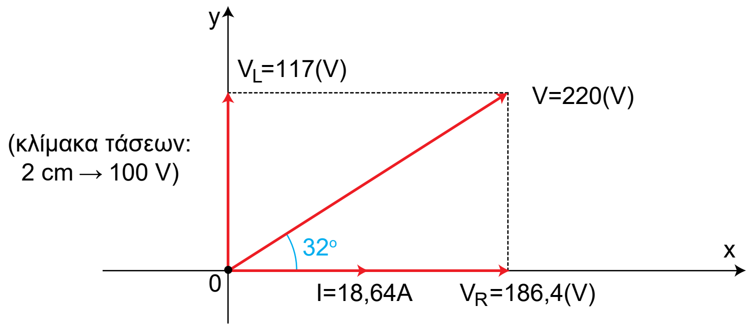
και είναι συμφασική με το ρεύμα.

γ) Η τάση του πηνίου προκύπτει:

$$V_L = I \cdot \omega L = 18{,}64 \cdot (314 \cdot 0{,}02) = 117 \text{ (V)}$$

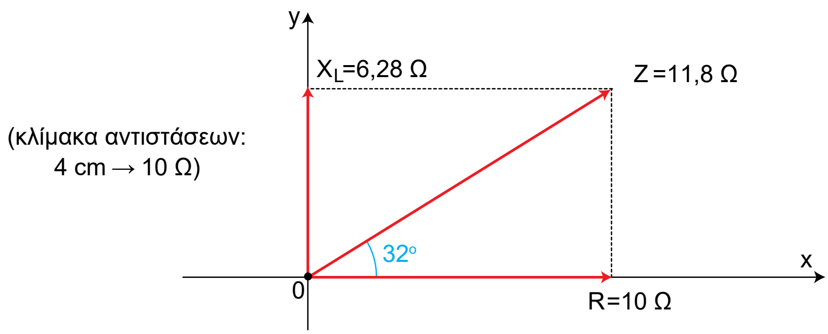
και προηγείται του ρεύματος κατά 90°.

δ) Απεικονίζοντας στον οριζόντιο άξονα το ρεύμα (χωρίς κλίμακα καθότι δεν υπάρχει άλλο ρεύμα) και ορίζοντας κλίμακα για τις τάσεις, προκύπτει το ακόλουθο διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρεύματος



από το οποίο φαίνεται ο επαγωγικός χαρακτήρας του κυκλώματος καθότι η τάση προηγείται του ρεύματος κατά γωνία φ ≅ 32 °.

ε) Απεικονίζοντας στον οριζόντιο άξονα την ωμική αντίσταση με κλίμακα προκύπτει το ακόλουθο διανυσματικό διάγραμμα αντιστάσεων.



Εφαρμογή 4η

Ωμική αντίσταση 60 (Ω) συνδέεται σε σειρά με πυκνωτή χωρητικότητας 8 (μF). Το σύστημα τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση 220 V, 50 Hz.

Ζητούνται η ένταση του ρεύματος

β) η τάση V_R της αντίστασης
γ) η τάση V_C του πυκνωτή
δ) το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων.

Λύση

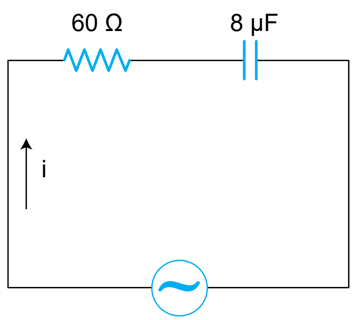
α) Η κυκλική συχνότητα του κυκλώματος είναι:

$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 = 314$ (rad / s) και κατά συνέπεια η σύνθετη αντίσταση αυτού είναι:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{60^2 + \left(\frac{1}{314 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}\right)^2} \Rightarrow Z = 402{,}5\,(\Omega)$$

με γωνία φ, έτσι ώστε: $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega CR} = 6{,}63$.

Κάνοντας χρήση τριγωνομετρικών πινάκων, προκύπτει: $\varphi \simeq 81°$.



Το ρεύμα του κυκλώματος είναι: $I = \frac{V}{Z} = \frac{220}{402{,}5} = 0{,}55$ (A) και προηγείται της τάσης κατά 81°, αφού το κύκλωμα έχει χωρητική συμπεριφορά.

β) Η τάση της αντίστασης είναι:

$$V_R = I \cdot R = 0{,}55 \cdot 60 \Rightarrow V_R = 33 \text{ (V)}$$

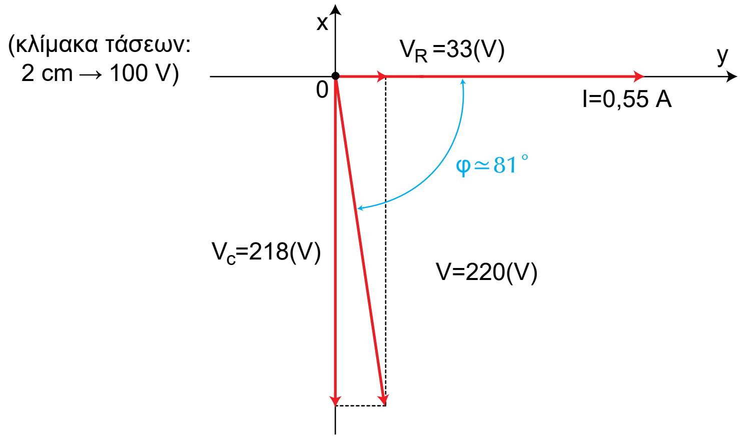
και είναι συμφασική με το ρεύμα.

γ) Η τάση του πυκνωτή είναι:

$$V_C = I \cdot \frac{1}{\omega C} = 0{,}55 \cdot \frac{1}{314 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 218\,(V)$$

και έπεται του ρεύματος κατά 90°.

δ) Απεικονίζοντας στον οριζόντιο άξονα το ρεύμα (χωρίς κλίμακα καθότι δεν υπάρχει άλλο ρεύμα) και ορίζοντας κλίμακα για τις τάσεις, προκύπτει το ακόλουθο διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρεύματος από το οποίο φαίνεται ο χωρητικός χαρακτήρας του κυκλώματος καθότι το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά γωνία $\varphi \simeq 81°$.



Εφαρμογή 5η

Κύκλωμα RLC σειράς έχει: RLC σειράς έχει: R = 30 (Ω), L = 0,5 (H), C = 14,1 (μF) και τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση 220 V, 50 Hz.

Ζητούνται: α) η ένταση του ρεύματος
β) η τάση V_R της αντίστασης
γ) η τάση V_L του πηνίου
δ) η τάση V_C του πυκνωτή
ε) το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων.

Λύση

α) Η κυκλική συχνότητα του κυκλώματος είναι:

$$v = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ (rad / s)}.$$

Οι αντιστάσεις X_L και X_C προκύπτουν:

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0,5 = 157 \text{ } (\Omega)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 14,1 \cdot 10^{-6}} = 225,8 (\Omega)$$

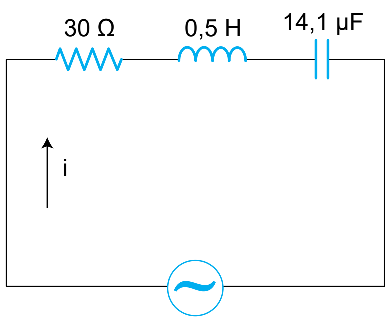
και επειδή $X_C > X_L$, το κύκλωμα παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (157 - 225,8)^2} = 75\,(\Omega)$$

με γωνία φ, έτσι ώστε: $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{|X_L - X_C|}{R} = \dfrac{|157 - 225,8|}{30} = 2,29$

Κάνοντας χρήση τριγωνομετρικών πινάκων, προκύπτει $\varphi \simeq 66°$.



Το ρεύμα του κυκλώματος είναι $I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{220}{75} = 2,93\ (A)$ και προηγείται της τάσης κατά 66°, αφού το κύκλωμα έχει χωρητική συμπεριφορά.

β) Η τάση της αντίστασης είναι:

$$V_R = I \cdot R = 2,93 \cdot 30 \Rightarrow V_R = 87,9\ (V)$$

και είναι συμφασική με το ρεύμα:

γ) Η τάση του πηνίου είναι:

$$V_L = I \cdot X_L = 2,93 \cdot 157 \Rightarrow V_L = 460\ (V)$$

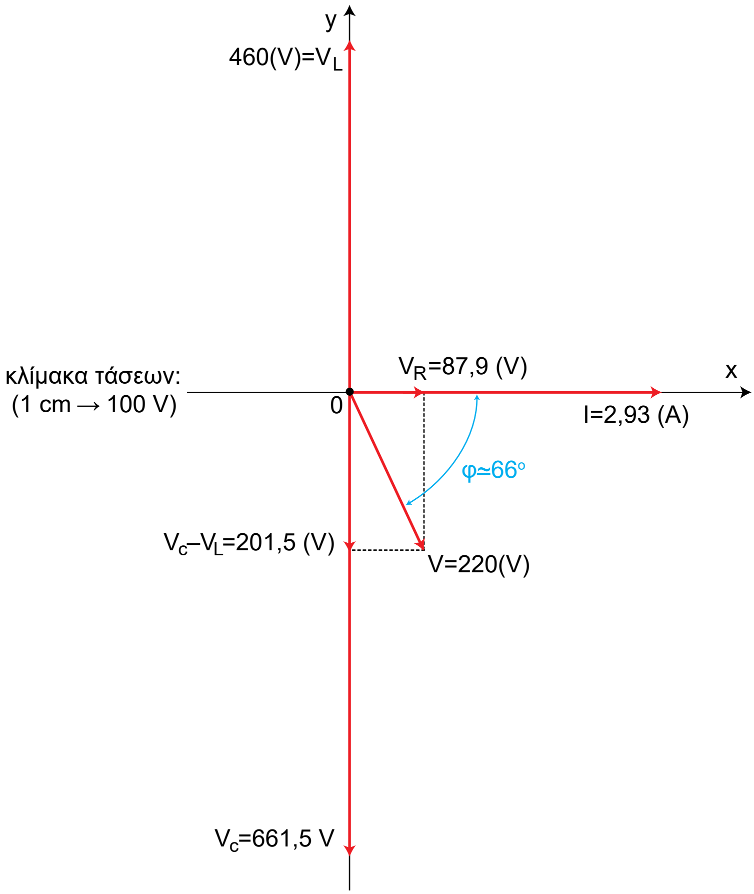
και προηγείται του ρεύματος κατά 90°.

δ) Η τάση του πυκνωτή είναι

$$V_C = I \cdot X_C = 2,93 \cdot 225,8 \Rightarrow V_C = 661,5\ (V)$$

και έπεται του ρεύματος κατά 90°.

ε) Απεικονίζοντας στον οριζόντιο άξονα το ρεύμα (χωρίς κλίμακα καθότι δεν υπάρχει άλλο ρεύμα) και ορίζοντας κλίμακα για τις τάσεις, προκύπτει το ακόλουθο διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρεύματος.



Εφαρμογή 6η

Από ένα πηνίο περνά συνεχές ρεύμα 6A, όταν στα άκρα του εφαρμόζεται τάση 15V. Εάν αντικαταστήσουμε το συνεχές ρεύμα με εναλλασσόμενο ενεργού τάσης 15V και συχνότητας 25 Hz, το ρεύμα που περνά τότε είναι 1,5A. Να βρεθούν α) η ωμική καθώς επίσης και η σύνθετη αντίσταση του πηνίου, β) ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου, και γ) η φασική γωνία φ.

Λύση

α) Η ωμική αντίσταση του πηνίου θα είναι η αντίστασή του στο συνεχές ρεύμα, άρα

$$R = \frac{V}{I} = \frac{15}{6} \Rightarrow R = 2,5(\Omega)$$

Όταν διαβιβάζουμε Ε.Ρ., η αντίστασή του θα είναι η σύνθετη

$$Z = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}} = \frac{15}{1,5} \Rightarrow Z = 10(\Omega)$$

β) Η σύνθετη αντίσταση είναι:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2} \Rightarrow 2\pi f L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 2,5^2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{9,682}{2 \cdot 3,14 \cdot 25} \Rightarrow L = 0,062(H)$$

γ) Η φασική γωνία είναι:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{9,682}{2,5} = 3,873$$

και με χρήση τριγωνομετρικών πινάκων προκύπτει $\varphi \simeq 75,5°$.

Εφαρμογή 7η

Πηνίο έχει ωμική αντίσταση 12Ω και επαγωγική 9Ω. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής αυτού είναι 0,03Η. Αν στα άκρα του πηνίου συνδεθεί βολτόμετρο, δείχνει 300V. Να βρεθούν α) η πραγματική και η φαινόμενη ισχύς, και β) οι εξισώσεις του εναλλασσόμενου ρεύματος.

Λύση

α) Η σύνθετη αντίσταση του πηνίου είναι:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} \Rightarrow Z = 15(\Omega) \text{ Άρα } I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z} = \frac{300}{15} = 20(A)$$

$$P = V_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = I^2_{\varepsilon\nu} \cdot R = 20^2 \cdot 12 \Rightarrow P = 4800\ (W)$$

Επομένως

$$S = V_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} = 300 \cdot 20 \Rightarrow S = 6000\ (VA)$$

β) Εάν υποθέσουμε ότι η γωνία του ρεύματος είναι 0°, επειδή το κύκλωμα έχει επαγωγική συμπεριφορά, οι εξισώσεις του εναλλασσόμενου ρεύματος θα είναι:

$$i = I_{εν}\sqrt{2} \cdot ημωt$$

$$v = V_{εν}\sqrt{2} \cdot ημ(ωt + φ), \qquad (1)$$

όπου $$ω = \frac{X_L}{L} = \frac{9}{0,03} \Rightarrow ω = 300\,(rad\,/\,s)$$

και $εφφ = \dfrac{X_L}{R} = \dfrac{9}{12} = 0,75 \Rightarrow φ \simeq 37°$ (τριγωνομετρικούς πίνακες).

Επομένως, οι σχέσεις (1) παίρνουν τη μορφή:

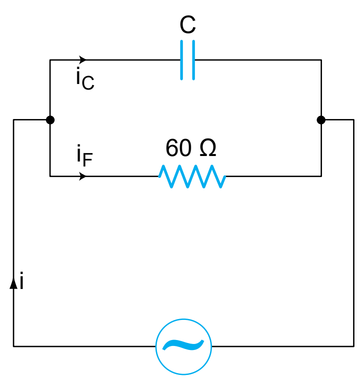
$$i = 20\sqrt{2} \cdot ημ(300t)\ (A)$$

$$v = 300\sqrt{2} \cdot ημ(300t + 37°)\ (V)$$

Εφαρμογή 8η

Πυκνωτής συνδέεται παράλληλα με ωμική αντίσταση 60 Ω και στα άκρα του συστήματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση ενεργού τιμής 120 V και συχνότητας 50 Hz. Η ολική ένταση του ρεύματος είναι 4 A. Να βρεθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Λύση



Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση είναι: $I_R = \dfrac{V}{R} = \dfrac{120}{60} = 2\,(A)$

Επομένως, το ρεύμα I_C είναι: $I_C = \sqrt{I^2 - I_R^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3,464\,(A)$

Έτσι, η χωρητική αντίσταση X_C είναι:

$$X_C = \frac{V}{I_C} = \frac{120}{3,464} \Rightarrow X_C = 34,64\,(\Omega)$$

Αλλά
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f \cdot X_C} \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 34,64} = 92 \cdot 10^{-6}\,(F) = 92\,(\mu F).$$

Εφαρμογή 9η

Σε ένα κύκλωμα έχουν συνδεθεί σε σειρά πηνίο με L=350mH, ωμική αντίσταση R = 30Ω και πυκνωτής με χωρητικότητα C = 25μF. Στα άκρα τους εφαρμόζεται τάση με ενεργό τιμή $V_{εν}$=200V και κυκλική συχνότητα ω = 400rad/s. Να βρεθεί η πραγματική ισχύς, καθώς και η χωρητικότητα πυκνωτή που πρέπει να συνδεθεί για να πετύχουμε συντονισμό. Ποια η ένταση του ρεύματος στην περίπτωση αυτή;

Λύση

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{30^2 + \left(350 \cdot 10^{-3} \cdot 400 - \frac{1}{25 \cdot 10^{-6} \cdot 400}\right)^2}$$

$$= \sqrt{30^2 + (140 - 100)^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} \Rightarrow Z = 50\,(\Omega)$$

Επομένως, η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι: $I_{εν} = \frac{V_{εν}}{Z} = \frac{200}{50} = 4\,(A)$

Άρα η πραγματική ισχύς είναι : $P = I^2_{εν} \cdot R = 4^2 \cdot 30 \Rightarrow P = 480(W)$

Για να έχουμε συντονισμό, πρέπει η χωρητική και η επαγωγική αντίσταση να είναι ίσες, δηλαδή

$$L\omega = \frac{1}{C_{ολ} \cdot \omega} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{350 \cdot 10^{-3} \cdot 400^2} = 17,8(\mu F)$$

και επειδή $C_{ολ}$<25μF, συμπεραίνουμε ότι πρέπει ο πυκνωτής C_2 που θα συνδεθεί να είναι σε σειρά με τον πυκνωτή των 25μF, έτσι ώστε:

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_2} = \frac{1}{17,8} - \frac{1}{25} \Rightarrow C_2 = 61,8(\mu F)$$

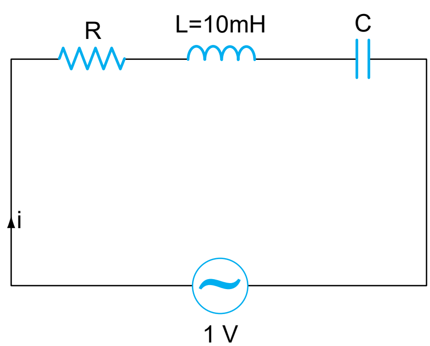
Εφαρμογή 10η

Το κύκλωμα συντονισμού που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, αποτελείται από αντίσταση R, πυκνωτή C και πηνίο L = 10 (mH). Στα άκρα του συστήματος εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση με ενεργό τιμή V = 1 (V). Εάν η συχνότητα συντονισμού είναι f_0 = 100 (KHz) και ο συντελεστής ποιότητας Q_π = 50, να βρεθούν:

α) Η χωρητικότητα C και η αντίσταση R

β) Η ζώνη διέλευσης Δf.

γ) Οι πλευρικές συχνότητες f_1, f_2 της ζώνης διεύλευσης.



Λύση

α) Από τη σχέση $Q_\pi = \dfrac{L\omega_0}{R}$ υπολογίζουμε την αντίσταση R

$$R = \frac{L\omega_0}{Q_\pi} = \frac{L \cdot 2\pi f_0}{Q_\pi} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 10^3}{50} \Rightarrow R = 125,6(\Omega)$$

Επίσης $Q_\pi = \dfrac{1}{\omega_0 CR} \Rightarrow C = \dfrac{1}{\omega_0 \cdot Q_\pi \cdot R} = \dfrac{1}{2\pi f_0 \cdot Q_\pi \cdot R} \Rightarrow$

$$C = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 125,6} \Rightarrow C = 253 \cdot 10^{-12} \text{ (F)} = 253 \text{ (pF)}$$

β) Η ζώνη διέλευσης του κυκλώματος είναι:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q_\pi} = \frac{100 \cdot 10^3}{50} \Rightarrow \Delta f = 2\ (KHz)$$

γ) Οι πλευρικές συχνότητες είναι:

$$f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 100 - \frac{2}{2} \Rightarrow f_1 = 99\ (KHz)$$

και

$$f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2} = 100 + \frac{2}{2} \Rightarrow f_2 = 101\ (KHz)$$

Εφαρμογή 11η

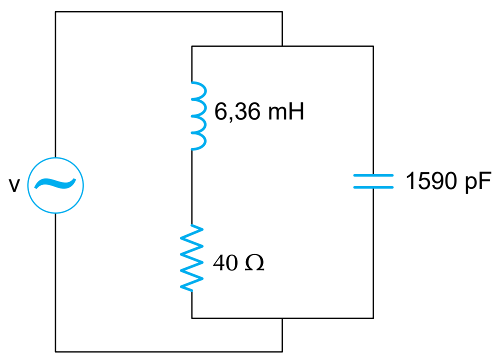
Το κύκλωμα συντονισμού που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, αποτελείται από τα στοιχεία R = 40 (Ω), L = 6,36 (mH), C = 1590 (pF) και τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση ενεργού τιμής V. Να βρεθούν:

α) η συχνότητα συντονισμού f_0

β) ο συντελεστής ποιότητας Q_π.

γ) η ζώνη διέλευσης Δf

δ) οι πλευρικές συχνότητες f_1, f_2 της ζώνης διέλευσης



Λύση

α) Είναι κύκλωμα παράλληλου συντονισμού και επομένως η συχνότητα συντονισμού f_0 δίνεται από τη σχέση (9.26)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{1}{6{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot 1590 \cdot 10^{-12}} - \frac{40^2}{\left(6{,}36 \cdot 10^{-3}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow f_0 = 50 \text{ (KHz)}$$

β) Ο συντελεστής ποιότητας Q_π είναι

$$Q_\pi = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 6{,}36 \cdot 10^{-6}}{40} \Rightarrow Q_\pi = 50$$

γ) Η ζώνη διέλευσης προκύπτει εύκολα

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_\pi} = \frac{50}{50} \Rightarrow \Delta f = 1 (\text{KHz}).$$

δ) Οι πλευρικές συχνότητες είναι:

$$f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 50 - \frac{1}{2} \rightarrow f_1 = 49{,}5 \text{ (KHz)}$$

και

$$f_2 = f_0 - \frac{\Delta f}{2} = 50 + \frac{1}{2} \rightarrow f_2 = 50{,}5 \text{ (KHz)}.$$

Εφαρμογή 12η

Ηλεκτροκινητήρας συνδέεται σε δίκτυο εναλλασσόμενης τάσης 220 (V) και απορροφά ισχύ 2,64 (KW) με συντελεστή ισχύος 0,7. Ζητούνται:

α) Το ρεύμα που περνάει από τον κινητήρα.

β) Η φαινόμενη και η άεργη ισχύς του κινητήρα.

Λύση

α) Το ρεύμα που περνάει από τον κινητήρα είναι:

$$P = V \cdot I \cdot \text{συνφ} \Rightarrow I = \frac{P}{V \cdot \text{συνφ}} = \frac{2{,}64 \cdot 1000}{220 \cdot 0{,}7} \Rightarrow I = 17{,}14 (\text{A})$$

β) Η φαινόμενη ισχύς του κινητήρα είναι:

$$S = V \cdot I = 220 \cdot 17{,}14 = 3770{,}8 \text{ (VA)} \Rightarrow S = 3{,}77 \text{ (KVA)}.$$

Τέλος, από το τρίγωνο ισχύος εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, προκύπτει η άεργος ισχύς.

$$S^2 = P^2 + Q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{3{,}77^2 - 2{,}64^2} \Rightarrow$$

$$P = 2{,}69 \text{ (KVAR)}.$$

Εφαρμογή 13η

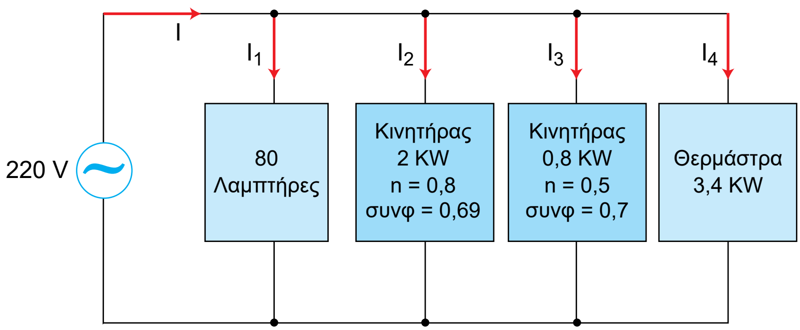
Σε εναλλασσόμενη τάση 220 V, 50 Ηζ είναι συνδεδεμένα τα εξής φορτία:

1) 80 λαμπτήρες των 100 (W).
2) κινητήρας ισχύος 2 (KW), συντελεστή απόδοσης, 0,8 και συντελεστή ισχύος 0,65.
3) κινητήρας ισχύος 0,8 (KW), συντελεστή απόδοσης 0,5 και συντελεστή ισχύος 0,7.
4) ηλεκτρική θερμάστρα ισχύος 3,4 (KW).

Ζητούνται:

α) Τα μεγέθη P, Q, S κάθε φορτίου καθώς και ολόκληρης της εγκατάστασης.
β) Ο συντελεστής ισχύος της εγκατάστασης
γ) Το ρεύμα κάθε φορτίου καθώς επίσης και το ολικό ρεύμα.

Λύση



α) Φορτίο 1:

$$P_1 = 80 \cdot 100 = 8000 \text{ (W)} = 8 \text{ (KW)}$$

$Q_1 = 0$ (KVAR) διότι πρόκειται για καθαρά - ωμικό φορτίο

$$S_1 = P_1 = 8 \text{ (KVA)}.$$

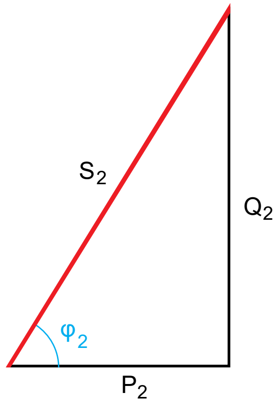
Φορτίο 2:

$$P_2 = \frac{P_2^{ωφέλ}}{n_2} = \frac{2000}{0,8} \Rightarrow P_2 = 2500 \text{ (W)} = 2,5 \text{ (KW)}$$

συν$\varphi_2 = 0,65 \Rightarrow$ από τριγων. πίνακες $\varphi \simeq 49,5° \Rightarrow$ εφ$\varphi_2 = 1,169$

Από το τρίγωνο ισχύος, προκύπτει:

$$Q_2 = P_2 \cdot εφφ_2 = 2,5 \cdot 1,169 = 2,92\ (KVAR)$$

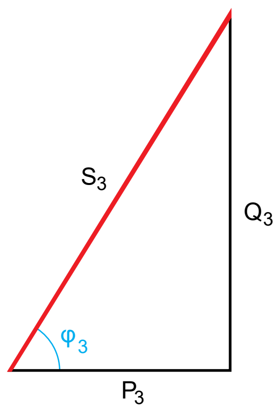


$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{2,5^2 + 2,92^2} = 3,85\,(KVA)$$

Φορτίο 3:

$$P_3 = \frac{P_3^{ωφέλ}}{n_3} = \frac{0,8}{0,5} \Rightarrow P_3 = 1,6\,(KW)$$

συν$φ_3$ = 0,7 $\Rightarrow$ από τριγ. πίνακες $φ \simeq 45,5^o$ $\Rightarrow$ εφ$φ_3$ = 1,02.



Από το τρίγωνο ισχύος προκύπτει:

$$Q_3 = P_3 \cdot εφφ_3 = 1,6 \cdot 1,02 = 1,632\ (KVAR)$$

$$S_3 = \sqrt{P_3^2 + Q_3^2} = \sqrt{1,6^2 + 1,632^2} = 2,285\,(KVA)$$

Φορτίο 4:

$$P_4 = 3,4\ (KW)$$

$Q_4 = 0$ (KVAR) διότι πρόκειται για καθαρά ωμικό φορτίο

$$S_4 = P_4 = 3,4 \text{ (KVA)}.$$

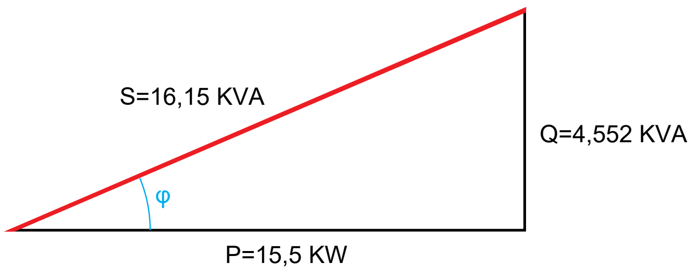
ΟΛΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 8 + 2,5 + 1,6 + 3,4 \Rightarrow P = 15,5 \text{ (KW)}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 + 2,92 + 1,632 + 0 \Rightarrow Q = 4,552 \text{ (KVA)}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{15,5^2 + 4,552^2} \Rightarrow S = 16,15 \text{(KVA)}$$

β) Ο συντελεστής ισχύος της εγκατάστασης προκύπτει από το ολικό τρίγωνο ισχύος ίσος με:



$$\text{συνφ} = \frac{P}{S} = \frac{15,5}{16,15} \Rightarrow \text{συνφ} = 0,96$$

γ) Για τα ρεύματα των φορτίων έχουμε:

$$P_1 = V \cdot I_1 \cdot \text{συνφ}_1 \Rightarrow I_1 = \frac{P_1}{V \cdot \text{συνφ}_1} = \frac{8000}{220 \cdot 1} \Rightarrow I_1 = 36,36 \text{ (A)}$$

$$P_2 = V \cdot I_2 \cdot \text{συνφ}_2 \Rightarrow I_2 = \frac{P_2}{V \cdot \text{συνφ}_2} = \frac{2500}{220 \cdot 0,65} \Rightarrow I_2 = 17,48 \text{ (A)}$$

$$P_3 = V \cdot I_3 \cdot \text{συνφ}_3 \Rightarrow I_3 = \frac{P_3}{V \cdot \text{συνφ}_3} = \frac{1600}{220 \cdot 0,7} \Rightarrow I_3 = 10,38 \text{ (A)}$$

$$P_4 = V \cdot I_4 \cdot \text{συνφ}_4 \Rightarrow I_4 = \frac{P_4}{V \cdot \text{συνφ}_4} = \frac{3400}{220 \cdot 1} \Rightarrow I_4 = 15,45 \text{ (A)}$$

Το ολικό ρεύμα της εγκατάστασης είναι:

$$S = V \cdot I \Rightarrow I = \frac{S}{V} = \frac{16,15 \cdot 1000}{220} = 73,4\,(A)$$

9-11. Προβλήματα προς λύση

1° Η στιγμιαία τιμή της έντασης ενός εναλλασσόμενου ρεύματος δίνεται από τη σχέση: $i = 10\sqrt{2} \cdot ημ\, 628\, t$. Ζητούνται:

α) το πλάτος I_0

β) η ενεργός τιμή $I_{εν}$

γ) η κυκλική συχνότητα ω

δ) η συχνότητα f

ε) η περίοδος T

($10\sqrt{2}\,A$ 10 A, 628 rad / s, 100 Hz, 0,01 s)

2° Ένα κύκλωμα τροφοδοτείται από τάση $v = 220 \cdot ημωt$ και διαρρέεται από ρεύμα $i = 2 \cdot ημ(ωt - 60°)$.

Ζητούνται: α) η στιγμιαία ένταση του ρεύματος, όταν η τάση παίρνει τη μέγιστη τιμή της

β) η στιγμιαία τάση όταν η ένταση του ρεύματος παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

(1 A, 110 V)

3° Ωμική ανίσταση R = 40 (Ω) και πηνίο αυτεπαγωγής $L = \frac{\sqrt{3}}{10}$ (H), συνδέονται σε σειρά. Εάν η τάση στα άκρα του πηνίου είναι $v_L = 80\sqrt{3} \cdot ημ\,(400t + 90°)$, να βρεθούν:

α) η στιγμιαία τάση τροφοδοσίας v

β) η στιγμιαία ένταση ρεύματος i

γ) η διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης

δ) να γίνει διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρεύματος

($v = 160 \cdot ημ\,(400\,t + 60°)$, $i = 2 \cdot ημ\,400\,t$, $φ = 60°$)

4° Ωμική ανίσταση $R = 500\sqrt{3}$ (Ω) και πυκνωτής χωρητικότητας C = 4 (μF) συνδέονται σε σειρά και τροφοδοτούνται με εναλλασσόμενη τάση $v = 2000 \cdot ημ\, 500\, t$. Ζητούνται:

α) τα στιγμιαία μεγέθη i, v_R, v_C

β) να γίνει διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρεύματος

($i = 2 \cdot ημ\,(500\,t + 30°)$, $v_R = 1000\sqrt{3} \cdot ημ(500t + 30^o)$, $v_C = 1000 \cdot ημ(500t - 60°)$)

5° Από ένα πηνίο αυτεπαγωγής L, για να περάσει ρεύμα 5 A, πρέπει να εφαρμοστεί στα άκρα του συνεχή τάση 40 (V) ή εναλλασσόμενη ενεργού τιμής 50 (V) με συχνότητα 50 (Hz).

Ζητούνται: α) η ωμική αντίσταση του πηνίου

β) ο συντελεστής αυτεπαγωγής

γ) ο συντελεστής ισχύος του πηνίου

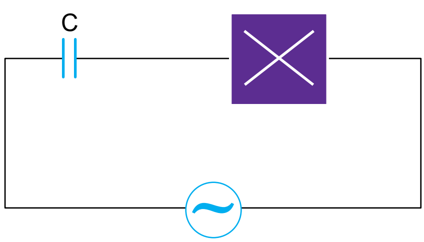
(8 Ω, 19 (mH), συνφ = 0,8)

6° Κύκλωμα RLC σε σειρά, τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση $v = 100\sqrt{2}\, ημ\,(250t + 30°)$ και διαρρέεται από ρεύμα $i = 4ημ\,(250t - 15°)$

Εάν L = 0,3 (H), βρείτε τα R, C και σχεδιάστε το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρεύματος.

(R = 25 Ω, C = 80 μF)

7° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος το στοιχείο X είναι ωμική αντίσταση ή πυκνωτής ή πηνίο. Εάν $v = 100 \cdot ημ\, 300\, t$ και $i = 10 \cdot ημ\,(300\, t + 90°)$, να βρεθεί το στοιχείο X.



(500 pF)

8° Κύκλωμα RLC σε σειρά έχει: R = 400 Ω, L = 1 H, C = 25 μF και V_{LC} = 30 (V), ω = 400 rad / s. Ζητούνται:

α) η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος

β) η ενεργός τιμή του ρεύματος

γ) η καταναλισκόμενη ισχύς

δ) η ενεργός τάση τροφοδοσίας

(500 Ω, 0,1 A, 4 W, 50 V)

9° Κύκλωμα RLC σε σειρά, τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση $v = 200 \cdot ημ\,(500\,t + 30°)$ και διαρρέεται από ρεύμα $i = 2 \cdot ημ\,(500\,t + 30°)$. Εάν $L = 0{,}5$ (H), βρείτε τα R, C.

(R = 100 Ω, C = 8 μF)

10° Κύκλωμα συντονισμού RLC σειράς, έχει R = 20 Ω, $X_L = 200$ Ω, $X_C = 200$ Ω όταν τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση, ενεργού τιμής 120 V και συχνότητας 60 (Hz). Ζητούνται:

α) η ενεργός τιμή του ρεύματος

β) οι τάσεις V_L και V_C

γ) ο συντελεστής ποιότητας $Q_π$

δ) η ζώνη διέλευσης Δf

ε) οι πλευρικές συχνότητες f_1, f_2

(6 A, $V_L = V_C = 1200$ V, $Q_π = 10$, Δf = 6 Hz, $f_1 = 57$ Hz, $f_2 = 63$ Hz)

11° Ένα κύκλωμα αποτελείται από αντίσταση 10 Ω, πυκνωτή 0,01 μF και πηνίο L σε σειρά. Εάν στα άκρα του συστήματος εφαρμοστεί εναλλασσόμενη τάση, το κύκλωμα συντονίζει σε συχνότητα 20 KHz. Ζητούνται:

α) Η τιμή της αυτεπαγωγής L

β) Ο συντελεστής ποιότητας $Q_π$

γ) Η ζώνη διέλευσης Δf

δ) Οι πλευρικές συχνότητες f_1, f_2

(L = 6,339 (mH), $Q_π = 79{,}6$, Δf = 0,25 KHz, $f_1 = 19{,}875$ KHz
$f_2 = 20{,}125$ KHz)

12° Ηλεκτροκινητήρας συνδέεται σε δίκτυο εναλλασσόμενου ρεύματος, με ενεργό τιμή τάσης 220 (V), 50 Hz. Εάν η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι 1,2 (A) και ο συντελεστής ισχύος 0,75, να βρεθούν:

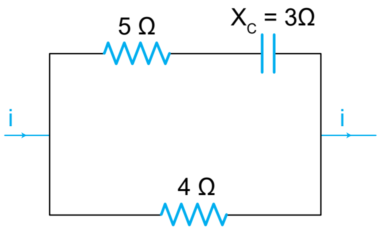
α) τα μεγέθη P, Q, S του κινητήρα

β) η διαφορά φάσης μεταξύ V και I

γ) να σχεδιαστεί το τρίγωνο ισχύος.

(P = 198 (W),Q= 174,6 (VAR), S = 264 (VA), φ = 41°)

13° Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος το ολικό ρεύμα έχει ενεργό τιμή 30 (A). Υπολογίστε τα P, Q, S και σχεδιάστε το τρίγωνο ισχύος.



(P = 2160 W,
Q = 479,7 VAR προπορείας,
S = 2210 (VA))

14° Ένα βιομηχανικό φορτίο 25 (KVA) έχει συντελεστή ισχύος 0,8 μεταπορείας. Προστίθενται μια ομάδα θερμαντικών σωμάτων με αντιστάσεις, οπότε ο συντελεστής ισχύος της εγκατάστασης γίνεται 0,85 μεταπορείας. Πόση είναι η ισχύς των θερμαντικών σωμάτων;

(4,3 KW)

15° Βρείτε και σχεδιάστε το ολικό τρίγωνο ισχύος των εξής τριών παράλληλων φορτίων: Φορτίο Α: 5 KW και συνφ = 0,8 μεταπορείας, Φορτίο Β: 4 KVA με Q = 2 KVAR προπορείας, Φορτίο Γ: 6 KVA με συνφ = 0,9 μεταπορείας.

(P = 13,86 KW, Q = 4,38 KVAR μεταπορείας
S = 14,55 KVA, συνφ = 0,965 μεταπορείας)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Μεταβατικά Φαινόμενα

Εισαγωγή

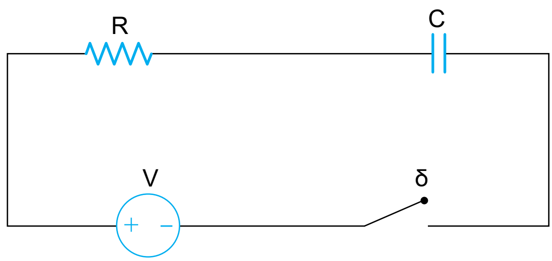
Τα εξαρτήματα των κυκλωμάτων, που τροφοδοτούνται από συνεχή ρεύματα, τελικά διαρρέονται από ρεύματα που έχουν σταθερή ένταση. Η κατάσταση αυτή του κυκλώματος ονομάζεται σταθερή κατάσταση. Μέχρι όμως το κύκλωμα να φτάσει στη σταθερή κατάσταση, τα ρεύματα και οι τάσεις δεν έχουν σταθερή μορφή. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται μεταβατική.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι η ***μελέτη*** *και* ***κατανόηση*** *της μεταβατικής κατάστασης κυκλωμάτων πυκνωτή και αντιστάτη, πηνίου και αντιστάτη.*

10-1. Κύκλωμα RC σε σειρά στο D.C

α) Φόρτιση πυκνωτή

Στο κύκλωμα του σχήματος 10-1 πυκνωτής χωρητικότητας C συνδέεται σε σειρά με αντιστάτη R. Στα άκρα του συστήματος συνδέεται πηγή τάσης V μέσω διακόπτη δ.



Σχήμα 10.1. *Κύκλωμα φόρτισης πυκνωτή*

Αρχικά ο διακόπτης δ είναι ανοικτός, οπότε ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Όταν ο διακόπτης δ κλείσει ο πυκνωτής αρχίζει και φορτίζεται σταδιακά ως εξής: Ηλεκτρόνια μετακινούνται από το θετικό οπλισμό του πυκνωτή και μέσα από την πηγή πηγαίνουν στον αρνητικό οπλισμό. Τα πρώτα φορτία που φθάνουν στον πυκνωτή εμποδίζουν την κίνηση των επομένων, με συνέπεια η τάση του πυκνωτή να αυξάνει σταδιακά. Η μετακίνηση των ηλεκτρονίων τερματίζεται, όταν η τάση του πυκνωτή γίνει ίση με την τάση της πηγής, τότε και το φορτίο του πυκνωτή παίρνει τη τελική του τιμή. Φυσικά κατά την διάρκεια της φόρτισης το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, του οποίου η ένταση σταδιακά μειώνεται και τελικά μηδενίζεται όταν ολοκληρωθεί η φόρτιση.

Η εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Kirchhoff στο βρόχο του κυκλώματος του 10-1 δίνει τη σχέση:

$$V\text{-}IR\text{-}V_C=0 \ (1)$$

όπου V η τάση της πηγής, I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα και V_C η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή.

Το ρεύμα Ι του κυκλώματος δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (2)$$

Το φορτίο Δq περνάει από μία διατομή των αγωγών του κυκλώματος σε χρόνο Δt και προστίθεται στο φορτίο του πυκνωτή που ήδη υπάρχει. Από τον ορισμό της χωρητικότητας πυκνωτή έπεται:

$$\Delta q = C\Delta V_C \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται:

$$I = C\frac{\Delta V_C}{\Delta t} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (4) έπεται:

$$V - RC\frac{\Delta V_C}{\Delta t} - V_C = 0 \quad (5)$$

Η εξίσωση (5) δεν είναι αλγεβρική εξίσωση, αλλά *διαφορική εξίσωση*. Οι διαφορικές εξισώσεις έχουν λύσεις συναρτήσεις και επιλύονται με τη χρήση ανωτέρων μαθηματικών. Για αυτό το λόγο η λύση της (5) δίνεται χωρίς απόδειξη και είναι:

$$V_C = V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (10.1)$$

Το σύμβολο e αντιστοιχεί στον αριθμό 2,718.

Τη χρονική στιγμή t=0:

$e^{-\frac{0}{RC}} = e^0 = 1$ και από τη (10.1) προκύπτει πως $V_C=0$.

Δηλαδή τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δ η τάση του πυκνωτή είναι μηδέν.

Όταν $t \to \infty$, $e^{-\frac{\infty}{RC}} = 0$, επομένως από τη (10.1) έπεται: Vc=V

δηλαδή η τάση του πυκνωτή γίνεται ίση με την τάση της πηγής θεωρητικά σε άπειρο χρόνο.

Όταν t=RC, $e^{-\frac{RC}{RC}} = e^{-1} = \frac{1}{2{,}718}$, οπότε η (10.1) γίνεται:

$$V_C = V\left(1 - \frac{1}{2,718}\right) \Rightarrow V_C = 0,632V.$$

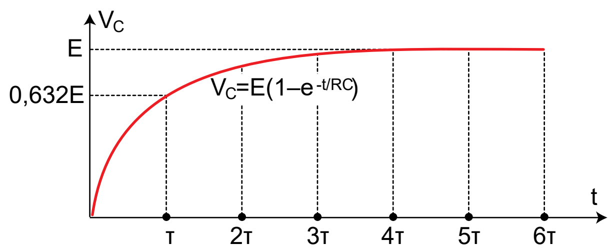
Δηλαδή για να γίνει η τάση του πυκνωτή ίση με το 63,2% της τάσης της πηγής πρέπει να μεσολαβήσει χρόνος t=RC από τη στιγμή που θα κλείσει ο διακόπτης δ. **Η σταθερά τ=RC ονομάζεται σταθερά χρόνου του κυκλώματος.**

Όταν t=5RC, $e^{-\frac{5RC}{RC}} = e^{-5} = 6,74 \cdot 10^{-3}$, οπότε η (10.1) γίνεται:

$$V_C = V(1-6,74 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow V_C = 0,993\ V.$$

Δηλαδή ύστερα από χρόνο t=5RC (5 σταθερές χρόνου) από τη στιγμή που θα κλείσει ο διακόπτης δ η τάση του πυκνωτή φτάνει το 99,3% της τάσης της πηγής. Μετά από αυτόν το χρόνο ο πυκνωτής θεωρείται πλήρως φορτισμένος.

Στο διάγραμμα του σχήματος 10-2 φαίνεται η μεταβολή της τάσης στους οπλισμούς του πυκνωτή ως συνάρτηση του χρόνου.



Σχήμα 10.2. *Το διάγραμμα της τάσης στους οπλισμούς του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο κατά τ φόρτιση πυκνωτή*

Η εξίσωση (1), όταν επιλυθεί ως προς την ένταση του ρεύματος I, γίνεται:

$$I = \frac{V - V_C}{R} \quad (6)$$

Η σχέση (6), όταν η V_C αντικατασταθεί από την (10.1), γίνεται:

$$I = \frac{V - V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{R} \Rightarrow I = \frac{V - V + Ve^{-\frac{t}{RC}}}{R} \quad \Rightarrow$$

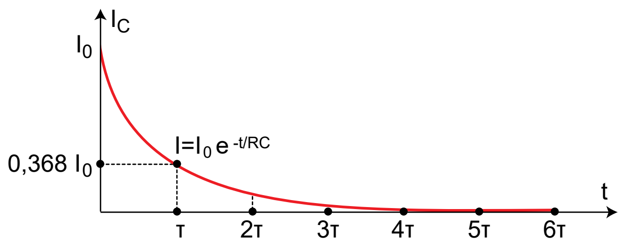
$$\boxed{I = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}} \qquad (10.2)$$

Όταν t=0, $e^{-\frac{0}{RC}} = 1$ και η σχέση (10.2) γίνεται:

$$I = \frac{V}{R}$$

Δηλαδή μόλις κλείσει ο διακόπτης δ η ένταση του ρεύματος έχει την μέγιστη τιμή της.

Όταν $t \to \infty \Rightarrow e^{-\frac{\infty}{RC}} = 0$ και η σχέση (10.2) γίνεται: I=0.



Σχήμα 10.3. *Διάγραμμα της έντασης του ρεύματος φόρτιση πυκνωτή ως συνάρτηση του χρόνου*

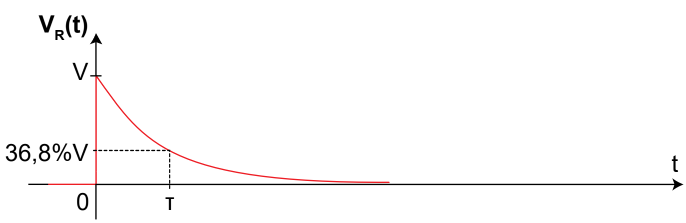
Δηλαδή το ρεύμα φόρτισης μηδενίζεται θεωρητικά σε άπειρο χρόνο. Πρακτικά όμως ο μηδενισμός του ρεύματος επέρχεται μετά 5 σταθερές χρόνου. Στο σχήμα 10-3 φαίνεται το διάγραμμα της έντασης φόρτισης του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο.

Η τάση στον αντιστάτη R είναι: $V_R = IR$, με τη χρήση της (10.2) έπεται:

$$V_R = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} R \Rightarrow$$

$$\boxed{V_R = V e^{-\frac{t}{RC}}} \qquad (10.3)$$

Στο σχήμα 10-4 φαίνεται πως μεταβάλλεται η V_R σε συνάρτηση με το χρόνο.

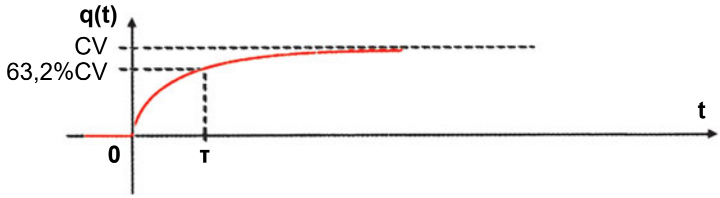


Σχήμα 10.4. *Το διάγραμμα της τάσης του αντιστάτη R σε συνάρτηση με το χρόνο για το κύκλωμα φόρτισης πυκνωτή*

Το φορτίο του πυκνωτή είναι:
$q=CV_C$. Αν η V_C αντικατασταθεί με την έκφραση (10.1):

$$q = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad (10.4)$$

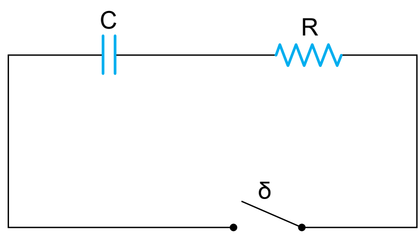
Στο σχήμα 10-5 φαίνεται πως μεταβάλλεται το φορτίο του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 10-5. Το διάγραμμα του φορτίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο, για το κύκλωμα φόρτισης πυκνωτή

β) Εκφόρτιση πυκνωτή

Στο κύκλωμα που φαίνεται στο σχήμα 10-4, ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα C και είναι φορτισμένος σε τάση V_0. Οι οπλισμοί του πυκνωτή συνδέονται με αγωγό μέσω του διακόπτη δ, που έχει αντίσταση R.



Σχήμα 10.6. Κύκλωμα εκφόρτισης πυκνωτή

Τη χρονική στιγμή t=0 ο διακόπτης δ κλείνει. Τότε ηλεκτρόνια από τον αρνητικό οπλισμό κινούνται μέσω της αντίστασης R προς τον θετικό οπλισμό. Η μετακίνηση των ηλεκτρονίων διαρκεί, έως ότου η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή μηδενιστεί.

Από την εφαρμογή του νόμου του Kirchhoff στο κύκλωμα, πριν ο πυκνωτής εκφορτιστεί πλήρως, προκύπτει η σχέση:

$$V_C - IR = 0 \quad (1)$$

Όμως:

$$I = C\frac{\Delta V_C}{\Delta t} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται:

$$V_C - RC\frac{\Delta V_C}{\Delta t} = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι μια διαφορική εξίσωση, η οποία έχει λύση την:

$$\boxed{V_C = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}} \quad (10.5)$$

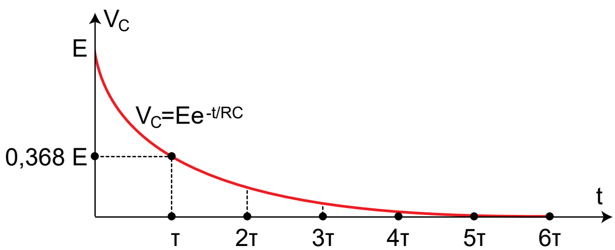
Όταν t=0, $e^{-\frac{0}{RC}} = 1 \Rightarrow V_C = V_0$.

Δηλαδή μόλις ο διακόπτης δ κλείσει, η τάση του πυκνωτή είναι η ίδια με αυτήν που υπήρχε, όταν ο διακόπτης δ ήταν ανοικτός.

Όταν $t \to \infty$, $e^{-\frac{\infty}{RC}} = 0 \Rightarrow V_C = 0$.

Δηλαδή, η τάση του πυκνωτή μηδενίζεται σε θεωρητικά άπειρο χρόνο. Για t=RC η (10.5) γίνεται $V_C = V_0 \cdot e^{-1} = 0{,}368V_0$. Δηλαδή η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή γίνεται ίση με το 36,8% της αρχικής όταν μεσολαβήσει χρόνος t=RC από τη στιγμή που θα κλείσει ο διακόπτης. Η σταθερά t=RC ονομάζεται **σταθερά χρόνου** του κυκλώματος.

Στο σχήμα 10-7 φαίνεται πως μεταβάλλεται η τάση των ολισμών πυκνωτή,



Σχήμα 10.7. *Διάγραμμα της τάσης πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο για κύκλωμα εκφόρτισης*

όταν εκφορτίζεται σε συνάρτηση με το χρόνο. Ο πυκνωτής πρακτικά εκφορτίζεται σε χρόνο 5RC από τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δ.

Αν η εξίσωση (1) επιλυθεί ως προς Ι, προκύπτει η σχέση:

$$I = \frac{V_C}{R} \quad (4)$$

Αν η V_C αντικατασταθεί με την έκφραση (10.3), υπολογίζεται η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, όταν ο πυκνωτής εκφορτίζεται.

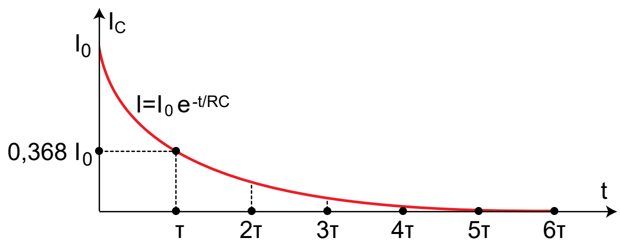
$$I = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \tag{10.6}$$

Όταν: t=0, $e^{-\frac{0}{RC}} = 1 \Rightarrow I = \frac{V_0}{R}$.

Δηλαδή μόλις κλείσει ο διακόπτης δ η ένταση του ρεύματος έχει τη μέγιστη τιμή.

Όταν $t \to \infty$, $e^{-\frac{\infty}{RC}} = 0 \Rightarrow I = 0$.

Δηλαδή, η ένταση του ρεύματος μηδενίζεται θεωρητικά σε άπειρο χρόνο.



Σχήμα 10.8. *Διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο, κατά την εκφόρτιση πυκνωτή*

Στο σχήμα 10-8 φαίνεται πως μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος, κατά την εκφόρτιση πυκνωτή, σε συνάρτηση με το χρόνο. Το ρεύμα εκφόρτισης του πυκνωτή μηδενίζεται πρακτικά σε χρόνο t=5RC από τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δ.

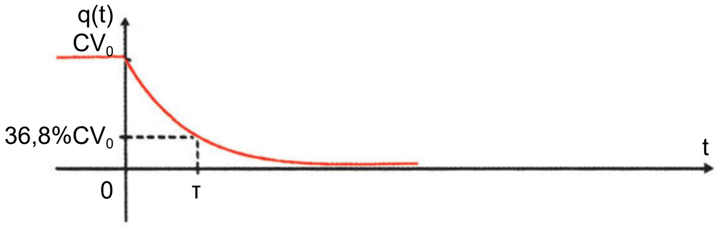
Η τάση του αντιστάτη V_R είναι ίση με την τάση V_C, αφού ο πυκνωτής και ο αντιστάτης έχουν τα ίδια άκρα.

Το φορτίο του πυκνωτή είναι:

$q=CV_C$, αν η V_C αντικατασταθεί από την έκφραση (10-6) τότε:

$$q = CV_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{10.7}$$

Στο σχήμα 10-9 φαίνεται πως μεταβάλλεται το φορτίο του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο.

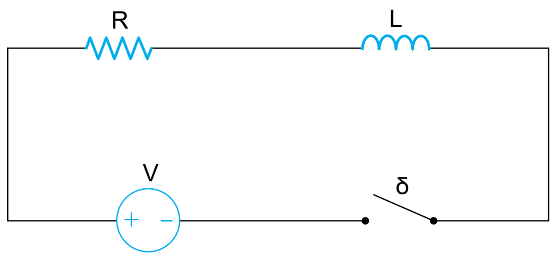


Σχήμα 10.9. *Το διάγραμμα του φορτίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με το χρόνο, για κύκλωμα εκφόρτισης πυκνωτή*

10-2. Κύκλωμα RL σε σειρά στο D.C

α) Αποκατάσταση ρεύματος

Στο σχήμα 10-7 φαίνεται κύκλωμα, στο οποίο ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L συνδέεται σε σειρά με αντιστάτη που έχει αντίσταση R. Το σύστημα τροφοδοτείται από πηγή συνεχούς ρεύματος τάσης V μέσω διακόπτη.



Σχήμα 10.10. *Κύκλωμα αποκατάστασης ρεύματος σε πηνίο*

Αρχικά ο διακόπτης δ είναι ανοικτός και φυσικά το κύκλωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα. Τη χρονική στιγμή t=0 ο διακόπτης κλείνει, επομένως στο κύκλωμα αρχίζει να κυκλοφορεί ρεύμα. Επειδή η ένταση του ρεύματος μεταβάλλεται από τη τιμή μηδέν, στο πηνίο, σύμφωνα με το νόμο της αυτεπαγωγής, θα εμφανισθεί επαγωγική τάση με τέτοια πολικότητα που να αντιδρά στην αύξηση του ρεύματος (κανόνας του Lenz). Η επαγωγική τάση του πηνίου εμποδίζει την ένταση του ρεύματος να φθάσει ακαριαία στην τελική της τιμή.

Αν το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και εφαρμοστεί ο $2^{ος}$ νόμος του Kirchhoff, προκύπτει η σχέση:

$$\left.\begin{aligned} V - IR - V_L &= 0 \\ V_L &= L\frac{\Delta I}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V - IR - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \quad (1)$$

Όπου, V η τάση της πηγής και V_L η τάση από αυτεπαγωγή στο πηνίο.

Η σχέση (1) είναι διαφορική εξίσωση και έχει λύση την:

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{10.8}$$

Όταν: t=0, $e^{-\frac{R}{L}0} = 1 \Rightarrow I = 0$.

Δηλαδή η ένταση του ρεύματος έχει τιμή μηδέν μόλις κλείσει ο διακόπτης.

Όταν $t \to \infty$, $e^{-\frac{R}{L}\infty} = 0 \Rightarrow I = \frac{V}{R}$.

Δηλαδή, η ένταση του ρεύματος παίρνει την τελική της τιμή θεωρητικά σε άπειρο χρόνο.

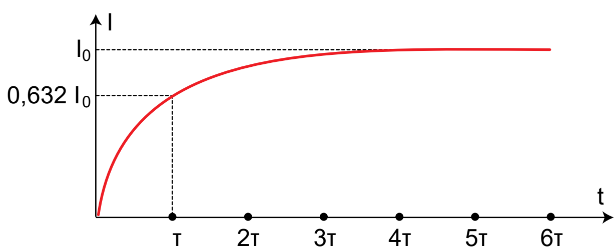
Όταν: $t = \frac{L}{R}$, $I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{V}{R}\left(1 - 0{,}368\right) = 0{,}632\frac{V}{R}$.

Δηλαδή όταν μεσολαβήσει χρόνος $t = \frac{L}{R}$ από τη στιγμή που θα κλείσει ο διακόπτης δ η τιμή της έντασης του ρεύματος είναι το 63,2% της τελικής τιμής της.

Η σταθερά $\tau = \frac{L}{R}$ ονομάζεται *σταθερά χρόνου* του κυκλώματος.

Η ένταση του ρεύματος πρακτικά φθάνει στη τελική της τιμή, αφού μεσολαβήσει χρόνος t=5τ από τη στιγμή που θα κλείσει ο διακόπτης δ.

Στο διάγραμμα του σχήματος 10-11 φαίνεται πως μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 10.11. *Το διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το κύκλωμα αποκατάστασης ρεύματος σε πηνίο*

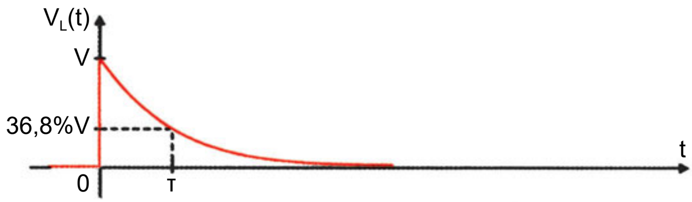
Αν η (1) επιλυθεί ως προς V_L:

V_L=V-IR, η αντικατάσταση της I με την έκφραση (10.8) δίνει:

$$V_L = V - \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)R \Rightarrow V_L = V - V\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \Rightarrow V_L = V - V + Ve^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow$$

$$\boxed{V_L = Ve^{-\frac{R}{L}t}} \qquad (10.9)$$

Στο σχήμα 10-12 φαίνεται πως μεταβάλλεται η τάση του πηνίου σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 10.12. *Το διάγραμμα της τάσης στο πηνίο σε συνάρτηση με το χρόνο, για το κύκλωμα αποκατάστασης ρεύματος σε πηνίο*

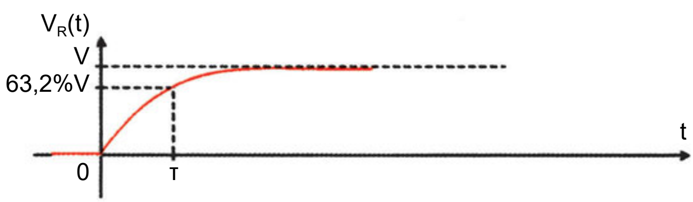
Η τάση V_R του αντιστάτη είναι:

V_R=IR, η αντικατάσταση της I με την έκφραση (10.8) δίνει:

$$V_L = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)R \Rightarrow$$

$$\boxed{V_R = V\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)} \qquad (10.10)$$

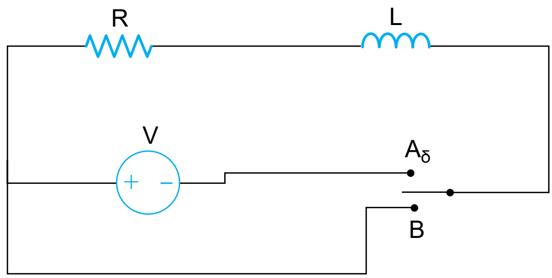
Στο σχήμα 10-13 φαίνεται πως μεταβάλλεται η τάση του αντιστάτη R σε συνάρτηση με το χρόνο.



Σχήμα 10.13. *Το διάγραμμα της τάσης του αντιστάτη σε συνάρτηση με το χρόνο, για το κύκλωμα αποκατάστασης ρεύματος σε πηνίο*

β) Διακοπή ρεύματος

Στο κύκλωμα του σχήματος 10-14, ο μεταγωγός δ αρχικά βρίσκεται στη θέση Α. Επομένως το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα θα είναι $I_0 = \frac{V}{R}$. Τη χρονική στιγμή t=0, ο μεταγωγός δ μεταφέρεται στη θέση Β. Επειδή η τιμή της έντασης του ρεύματος μεταβάλλεται, εμφανίζεται στο πηνίο τάση από αυτεπαγωγή με φορά που να αντιτίθεται στην μείωση του ρεύματος (κανόνας Lenz). Έτσι, η τιμή της έντασης του ρεύματος δε μηδενίζεται ακαριαία αλλά σταδιακά.



Σχήμα 10.14. *Κύκλωμα διακοπής ρεύματος σε πηνίο*

Η εφαρμογή του 2ου νόμου του Kirchhoff δίνει:

$$\left.\begin{aligned} V_L - IR &= 0 \\ V_L &= L\frac{\Delta I}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -L\frac{\Delta I}{\Delta t} - IR = 0 \quad (1)$$

Η (1) είναι διαφορική εξίσωση και έχει λύση την:

$$\boxed{I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}} \qquad (10.11)$$

Για t=0, $e^{-\frac{R}{L}0} = 1 \Rightarrow I = I_0$.

Δηλαδή τη χρονική στιγμή t=0 η ένταση του ρεύματος έχει την τιμή που είχε όταν ο μεταγωγός ήταν στη θέση Α.

Για t→∞, $e^{-\frac{R}{L}\infty} = 0 \Rightarrow I = 0$.

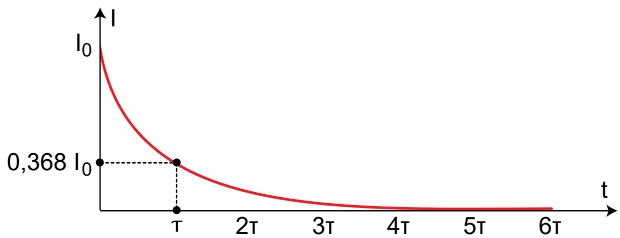
Δηλαδή, το ρεύμα μηδενίζεται θεωρητικά σε άπειρο χρόνο. Βεβαίως πρακτικά ο μηδενισμός του ρεύματος επέρχεται σε χρόνο t = 5τ. Όπου $\tau = \frac{L}{R}$ η σταθερά χρόνου.

Στο σχήμα 10-15 φαίνεται πως μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

Από την (1) προκύπτει για την τάση το πηνίου η σχέση:

V_L=IR, αν η I αντικατασταθεί από την έκφραση της (10.11):

$$V_L = I_0 R e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (10.12)$$



Σχήμα 10.15. *Το διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο, για κύκλωμα διακοπής ρεύματος πηνίου*

Στο σχήμα 10-16 φαίνεται η μεταβολή της τάσης του πηνίου σε συνάρτηση με το χρόνο.

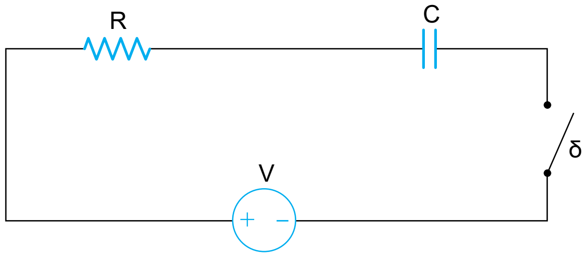
Σχήμα 10.16. *Το διάγραμμα της τάσης του πηνίου σε συνάρτηση με το χρόνο, για κύκλωμα διακοπής ρεύματος πηνίου*

10-3. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Πυκνωτής έχει χωρητικότητα c = 2μF και φορτίζεται μέσω αντίστασης

R = 5 KΩ, από πηγή τάσης V = 10 V. Να υπολογισθεί η τάση V_C του πυκνωτή μετά χρόνο t = 20 ms από την έναρξη της φόρτισης.



Λύση

Η τάση του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

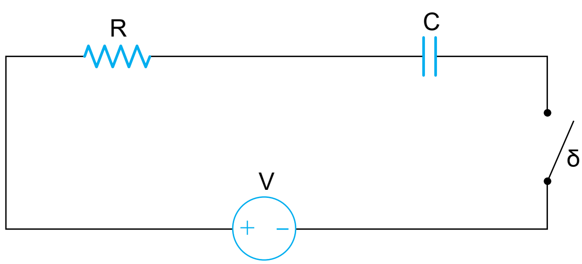
$$V_C = V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \Rightarrow V_C = 10V\left(1 - e^{-\frac{20ms}{2\mu F 5K\Omega}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_C = 10V\left(1 - e^{-\frac{20}{10}}\right) \Rightarrow V_C = 10V\left(1 - e^{-2}\right) \Rightarrow$$

$$V_C = 10V\left(1 - 0,135\right) \Rightarrow V_C = 8,65\ V$$

Εφαρμογή 2η

Πυκνωτής έχει χωρητικότητα C = 3μF και φορτίζεται μέσω αντίστασης R = 2 KΩ, από πηγή τάσης V = 12 V. Κάποια χρονική στιγμή το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι I = 4mA. Να υπολογισθεί το φορτίο q του πυκνωτή; Πόσο είναι το τελικό φορτίο του πυκνωτή;



Λύση

α) Αν εφαρμοσθεί ο 2ος κανόνας του Kirchhoff στο κύκλωμα λαμβάνεται η σχέση:

$$V - IR - V_C = 0 \quad (1)$$

Το φορτίο ενός πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$q = CV_C \Rightarrow V_C = \frac{q}{C} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται:

$$V - IR - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} = V - IR \Rightarrow$$

$$q = (V - IR)\,C \Rightarrow q = (12V - 4mA \cdot 2\,K\Omega) \cdot 3\mu F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = 4V \cdot 3\mu F \Rightarrow q = 12\mu C$$

β) Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$q = CV_C \quad (3)$$

Η τάση του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$V_C = V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (4)$$

Όταν $t \to \infty$, $e^{-\frac{\infty}{RC}} = 0$ άρα η (4) γίνεται:

$$V_C = V \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (3) και (5) προκύπτει

$$q_0 = CV \Rightarrow q_0 = 3\mu F \cdot 12V \Rightarrow q_0 = 36\ \mu C.$$

Εφαρμογή 3η

Κύκλωμα φόρτισης πυκνωτή αποτελείται, από πηγή τάσης V = 15V, αντιστάτη R = 5KΩ και πυκνωτή C = 6μF. Κάποια στιγμή η τάση του πυκνωτή είναι V_C = 12 V. Να υπολογισθούν:

α) Η ενέργεια του πυκνωτή.

β) Ο χρόνος που απαιτείται για να φορτισθεί ο πυκνωτής τελείως.

γ) Η θερμότητα που έχει αναπτυχθεί στον αντιστάτη από τη στιγμή που αρχίζει η φόρτιση, μέχρι η τάση του πυκνωτή να γίνει $V_C = 12V$

Λύση

α) Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σ' ένα φορτισμένο πυκνωτή είναι:

$$W = \frac{1}{2}CV_C^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2}6\mu F \cdot (12V)^2 \Rightarrow W = 432\mu J$$

β) Πρακτικά ο πυκνωτής φορτίζεται τελείως ύστερα από 5 σταθερές χρόνου από την έναρξη της φόρτησης. Η σταθερά χρόνου είναι:

$$\tau = RC \Rightarrow \tau = 5K\Omega \cdot 6\mu F \Rightarrow \tau = 30ms$$

Επομένως ο πυκνωτής θα φορτισθεί πλήρως μετά χρόνου:

$$t = 5\tau \Rightarrow t = 5 \cdot 30ms \Rightarrow t = 150ms$$

γ) Για να γίνει η τάση των οπλισμών ενός πυκνωτή V_C, πρέπει να φορτισθεί με φορτίο q_C. Το φορτίο κινείται σε διαφορά δυναμικού V. Από τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού προκύπτει πως η ενέργεια που αποδίδει η πηγή είναι:

$$W_\pi = V \cdot q_C (1).$$

Ένα μέρος της ενέργειας που αποδίδει η πηγή καταναλώνεται από την R ως θερμότητα Joule και το υπόλοιπο αποθηκεύεται στον πυκνωτή. Δηλαδή:

$$W_\pi = Q_R + W_C (2)$$

όπου Q_R η θερμότητα που αποδίδεται στην αντίσταση και W_C η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή.

Η ενέργεια του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση: $W_C = \frac{1}{2}CV_C^2$ (3)

Από τις σχέσεις (1) (2) και (3) προκύπτει: $Vq_C = Q_R + \frac{1}{2}CV_C^2$ (4)

Όμως το φορτίο του πυκνωτή είναι:

$$q_C = CV_C (5)$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει:

$$V \cdot CV_C = Q_R + \frac{1}{2}CV_C^2 \Rightarrow Q_R = CVV_C - \frac{1}{2}CV_C^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_R = 6\mu F \cdot 15V 12V - \frac{1}{2}6\mu F(12V)^2 \Rightarrow Q_R = 1080\mu J - 432\mu J = 648\mu J$$

Εφαρμογή 4η

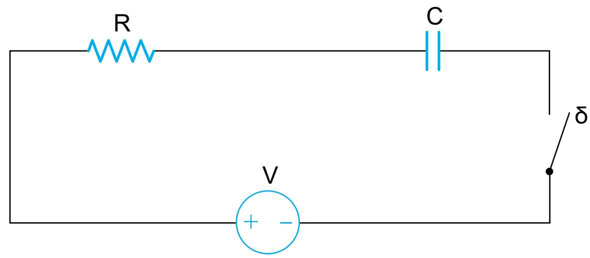
Κύκλωμα φόρτισης πυκνωτή, κάποια στιγμή διαρρέεται από ρεύμα I = 4mA. Να υπολογισθούν:

α) Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα

β) Η τάση στα άκρα της αντίστασης R, όταν I = 4mA.

γ) Η ισχύς με την οποία η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή

Δίνονται R = 2 KΩ, C = 0,1 μF, V = 20V.



Λύση

α) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα φόρτισης δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1)$$

όταν $t = 0 \Rightarrow e^{-\frac{0}{RC}} = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} I_{max} = \frac{V}{R} \Rightarrow I_{max} = \frac{20V}{2K\Omega} = 10mA.$

β) Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm, η τάση στα άκρα της R είναι:

$$V_R = IR \Rightarrow V_R = 4mA \cdot 2\ K\Omega = 8V$$

γ) Η ισχύς με την οποία η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή είναι:

$$P_C = V_C I \ (2)$$

Η εφαρμογή του 2[ου] κανόνα Kirchhoff στο κύκλωμα δίνει:

$$V - IR - V_C = 0 \Rightarrow V_C = V - IR \ (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει:

$$P_C = (V - IR)I \Rightarrow P_C = (20V - 4mA2K\Omega)\ 2mA \Rightarrow P_C = 12V \cdot 2mA \Rightarrow P_C = 24\ mW.$$

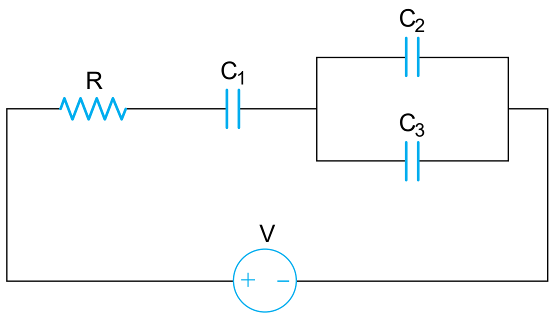
Εφαρμογή 5η

Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται:

$R = 2K\Omega$ $C_1 = 6\mu F$, $C_2 = 2\mu F$ $C_3 = 1\mu F$ και $V = 17V$ Να υπολογισθούν

α) Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος

β) Η τάση κάθε πυκνωτή όταν η τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει την πηγή είναι $I = 4mA$



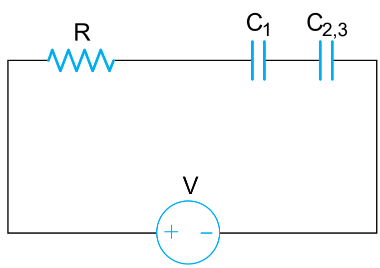
Λύση

α) Αρχικά υπολογίζεται η ολική χωρητικότητα των πυκνωτών.

Οι πυκνωτές C_2 και C_3 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Επομένως:

$$C_{2,3} = C_2 + C_3 \Rightarrow C_{2,3} = 2\mu F + 1\mu F \Rightarrow C_{2,3} = 3\mu F.$$

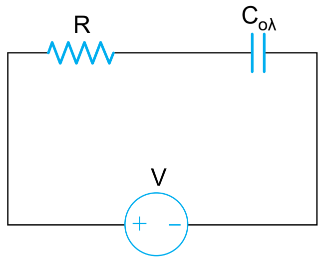
Οπότε το κύκλωμα μετασχηματίζεται στο:



Οι πυκνωτές C_1 και $C_{2,3}$ είναι συνδεδεμένοι σε σειρά άρα:

$$C_{ολ} = \frac{C_1 C_{2,3}}{C_1 + C_{2,3}} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{6\mu F 3\mu F}{6\mu F + 3\mu F} \Rightarrow C_{ολ} = 2\mu F.$$

Το κύκλωμα μετασχηματίζεται στο:



Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι

$$\tau = RC_{ολ} \Rightarrow \tau = 2K\Omega \cdot 2\mu F \Rightarrow \tau = 4ms.$$

β) Αν η τάση του $C_{ολ}$ είναι $V_{C1,2,3}$, τότε από την εφαρμογή του 2ου Κανόνα Kirchhoff στο τελευταίο κύκλωμα έπεται:

$$V - IR - V_{C1,2,3} = 0 \Rightarrow V_{C1,2,3} = V - IR \Rightarrow V_{C1,2,3} = 17V - 4mA \cdot 2K\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{C1,2,3} = 17V - 8V \Rightarrow V_{C1,2,3} = 9V.$$

Οι πυκνωτές C_1 και $C_{2,3}$ αφού είναι συνδεδεμένοι στη σειρά έχουν φορτία ίσα με το ολικό φορτίο $q_{1,2,3}$. Επομένως

$$q_1 = q_{2,3} = q_{1,2,3} = C_{ολ}V_{C1,2,3} \Rightarrow q_1 = 2\mu F \cdot 9V \Rightarrow q_1 = 18\mu C$$

Όμως

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} \Rightarrow V_1 = \frac{18\mu C}{6\mu F} \Rightarrow V_1 = 3V.$$

Όπως φαίνεται από το δεύτερο κύκλωμα

$$V_{C1,2,3} = V_1 + V_{2,3} \Rightarrow V_{2,3} = V_{C1,2,3} - V_1 \Rightarrow V_{2,3} = 9V - 3V \Rightarrow V_{2,3} = 6V.$$

Επειδή οι πυκνωτές C_2 και C_3 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα:

$$V_2 = V_3 = V_{2,3} \Rightarrow V_2 = 6V,\ \ V_3 = 6V$$

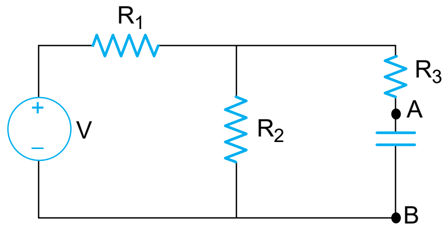
Εφαρμογή 6η

Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται:

$R_1 = 20K\Omega$ $R_2 = 5K\Omega$ $R_3 = 1K\Omega$ $C = 4\mu F$ και $V = 20V$. Να υπολογισθούν:

α) Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος

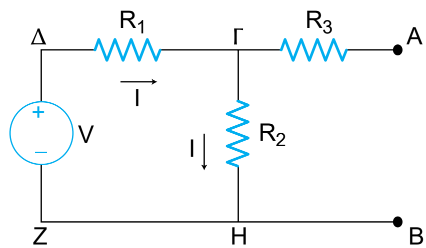
β) Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που φορτίζει τον πυκνωτή.



Λύση

α) Αρχικά βρίσκεται το ισοδύναμο κατά Thevenin κύκλωμα μεταξύ των σημείων Α και Β.

Όπως είναι γνωστό η V_{TH} είναι ίση με την V_{AB}. Για να υπολογισθεί η V_{AB} επιλύεται το παρακάτω κύκλωμα



Στον βρόχο ΔΓΗΖΔ εφαρμόζεται ο 2ος Κανόνας Kirchhoff, οπότε:

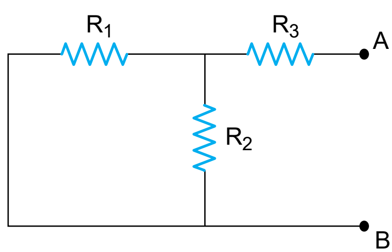
$$V - IR_1 - IR_2 = 0 \Rightarrow V - I(R_1 + R_2) = 0 \Rightarrow I(R_1 + R_2) = V \Rightarrow$$

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} \Rightarrow I = \frac{20V}{20K\Omega + 5K\Omega} \Rightarrow I = 0{,}8mA$$

Επειδή η R_3 δεν διαρρέεται από ρεύμα,

$$V_{AB} = V_2 = I \cdot R_2 \Rightarrow V_{AB} = 0{,}8mA\ 5K\Omega \Rightarrow V_{AB}. = 4V \text{ άρα } V_{TH} = 4V.$$

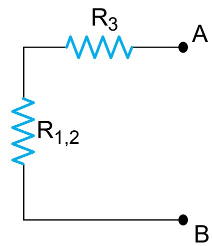
Για τον προσδιορισμό της R_{TH}, αποσυνδέεται η πηγή V και στη θέση της τοποθετείται βραχυκύκλωμα, οπότε το προηγούμενο κύκλωμα γίνεται:



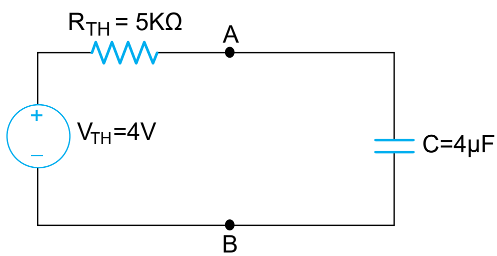
Η ολική αντίσταση μεταξύ των σημείων Α και Β είναι η R_{TH}.
Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι συνδεδεμένες παράλληλα, επομένως

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{20K\Omega \cdot 5K\Omega}{20K\Omega + 5K\Omega} \Rightarrow R_{1,2} = 4K\Omega$$

Το κύκλωμα γίνεται:



Οι αντιστάσεις $R_{1,2}$ και R_3 είναι συνδεδεμένες σε σειρά άρα
$R_{ολ} = R_{1,2} + R_3 \Rightarrow R_{ολ} = 4\ K\Omega + 1\ K\Omega$ $R_{ολ} = 5K\Omega$ επομένως $R_{TH} = 5K\Omega$.
Άρα το αρχικό κύκλωμα θα μετασχηματιστεί στο:



Επομένως η σταθερά χρόνου του κυκλώματος θα είναι:

$$\tau = R_{TH} \cdot C \Rightarrow \tau = 5K\Omega \cdot 4\mu F \Rightarrow \tau = 20ms.$$

β) Το ρεύμα που φορτίζει τον πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} \cdot e^{-t/R_{TH} \cdot C}$$

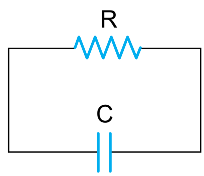
Όταν t=0, $\Rightarrow\ e^{-\frac{0}{R_{TH} \cdot C}} = 1 \Rightarrow I_{max} = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} \Rightarrow I_{max} = \frac{4V}{5K\Omega} = 0,8mA.$

Εφαρμογή 7η

Κύκλωμα εκφόρτισης πυκνωτή αποτελείται από πυκνωτή με χωρητικότητα C = 10μF και αντίσταση R = 2ΚΩ. Ο πυκνωτής αρχικά έχει φορτίο q_0 = 50 μC. Να υπολογισθούν:

α) Η σταθερά χρόνου

β) Η τάση του πυκνωτή μετά χρόνο t = 80mS από τη στιγμή που αρχίζει η εκφόρτιση.



Λύση

α) $\tau = R \cdot C \Rightarrow \tau = 2К\Omega 10\mu F \Rightarrow \tau = 20ms.$

β) Η τάση του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$V_C = V_0 e^{-\frac{t}{R_C}} \quad (1)$$

Όμως:

$$V_C = \frac{q_0}{C} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) (2) $\Rightarrow$

$$V_C = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow V_C = \frac{50\mu C}{10\mu F} e^{-\frac{80ms}{20ms}} \Rightarrow$$

$$V_C = 5Ve^{-4} \Rightarrow V_C = 5 \cdot 0{,}018V = 0{,}09V$$

Εφαρμογή 8η

Πυκνωτής C = 0,1μF είναι αρχικά φορτισμένος σε τάση V_0 = 100V. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται μέσω αντίστασης R.

Να υπολογισθεί η θερμότητα που έχει αναπτυχθεί στην αντίσταση R_1 όταν το φορτίο του πυκνωτή έχει γίνει q = 2μC

Λύση

Η ενέργεια του πυκνωτή μειώνεται, καθώς εκφορτίζεται. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η μεταβολή της ενέργειας του πυκνωτή θα είναι ίση με την θερμότητα που αναπτύσσεται στην αντίσταση. Δηλαδή:

$$W_{C1} = W_{C2} = Q_R \ (1)$$

$$W_{C1} = \frac{1}{2}CV_0^2 \quad (2)$$

$$W_{C2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad (3)$$

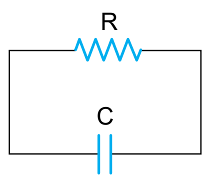
Από τις σχέσεις (1) (2) και (3) έπεται:

$$\frac{1}{2}CV_0^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = Q_R \Rightarrow Q_R = \frac{1}{2}0{,}1\mu F\left(100V\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(2\mu c\right)^2}{0{,}1\mu F} \Rightarrow$$

$$Q_R = 500\mu J - 20\mu J \Rightarrow Q_R = 48{=}480\mu J.$$

Εφαρμογή 9η

Πυκνωτής C = 8μF εκφορτίζεται μέσω αντίστασης R = 1 MΩ. Να υπολογισθεί ο ρυθμός με τον οποίο ελαττώνεται η τάση του πυκνωτή, όταν η τάση του είναι $V_C = 160V$



Λύση

Επειδή ο πυκνωτής και η αντίσταση έχουν τα ίδια άκρα, έχουν ίσες τάσεις. Επομένως:

$$V_C = V_R \ (1)$$

Σύμφωνα με τον νόμο του ΟΜ:

$$V_R = IR \ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται:

$$V_C = IR \Rightarrow I = \frac{V_C}{R} \Rightarrow I = \frac{160V}{1M\Omega} \Rightarrow I = 160\mu A.$$

Όμως το ρεύμα εκφόρτισης του πυκνωτή είναι:

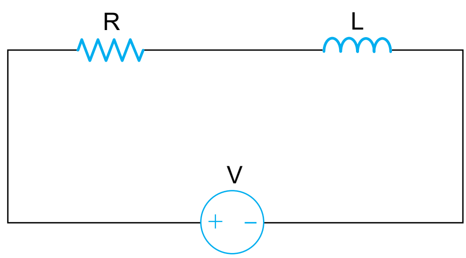
$$I = C\frac{\Delta V_C}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta V_C}{\Delta t} = \frac{I}{C} \Rightarrow \frac{\Delta V_C}{\Delta t} = \frac{160\mu A}{0{,}1\mu F} \Rightarrow \frac{\Delta V_C}{\Delta t} = 1600\frac{V}{s}$$

Εφαρμογή 10η

Κύκλωμα αποκατάστασης ρεύματος πηνίου αποτελείται, από ιδανικό πηνίο L = 10mH αντιστάτη R = 2 KΩ και πηγή V = 20V. Να υπολογισθούν:

α) Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος

β) Η ένταση του ρεύματος, όταν έχει μεσολαβήσει χρόνος t = 15μs από την τροφοδοσία του κυκλώματος



Λύση

α) Η σταθερά χρόνου είναι:

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \tau = \frac{10mH}{2K\Omega} = 5\mu s$$

β) Το ρεύμα του κυκλώματος δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \Rightarrow I = \frac{20V}{2K\Omega}\left(1 - e^{-\frac{2K\Omega}{10mH}15\mu s}\right) \Rightarrow$$

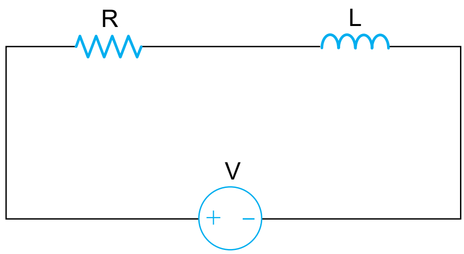
$$I = 10mA(1 - e^{-3}) \Rightarrow I = 10\ mA(1 - 0{,}05) = 9{,}5mA.$$

Εφαρμογή 11η

Στο κύκλωμα του σχήματος δίνονται:

$L = 2{,}5mH$ $R = 2{,}5\Omega$ $V = 25V$. α) Να υπολογισθεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα αν η τάση του πηνίου είναι $V_L = 20V$.

β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος όταν $V_L = 20V$;



α) Η εφαρμογή του 2ου κανόνα του Kirchhoff δίνει τη σχέση:

$$V\text{-}IR\text{-}V_L = 0 \Rightarrow 1R = V\text{-}V_L \Rightarrow$$

$$I = \frac{V - V_L}{R} \Rightarrow I = \frac{25V - 20V}{2{,}5\Omega} \Rightarrow I = 2A$$

β) Η τάση στο πηνίο, είναι τάση από αυτεπαγωγή και δίνεται από τη σχέση:

$$V_L = L\frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{V_L}{L} \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{20V}{2{,}5mH} = 8000\frac{A}{s}$$

Εφαρμογή 12η

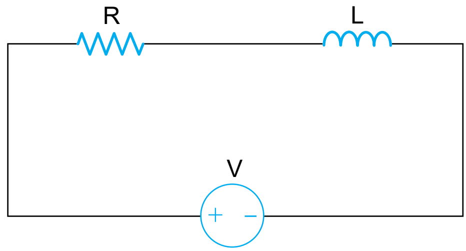
Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα του σχήματος έχει ένταση $I = 100mA$. Να υπολογισθούν:

α) Η ισχύς που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα

β) Ο ρυθμός με τον οποίο η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα στην αντίσταση

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο.

Δίνονται: $R = 10\Omega$ $L = 20mH$ $V = 40V$.



Λύση

α) Η ισχύς που παρέχει μια πηγή είναι:

$$P_\pi = V \cdot I \; P_\pi = 40V \cdot 100mA = 4W.$$

β) Ο ρυθμός με τον οποίο η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα είναι:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = P_R = I^2 R \Rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta t} = (100mA)^2 \cdot 10\,\Omega = 100mW.$$

γ) Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας η ενέργεια που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα, μετατρέπεται σε θερμότητα και ενέργεια μαγνητικού πεδίου. Αντίστοιχα η ισχύς της πηγής γίνεται ισχύς Joule και ισχύς ενέργειας μαγνητικού πεδίου. Επομένως:

$$P_\pi = P_R + P_M \Rightarrow P_M = P_\pi - P_R \Rightarrow P_M = 4W - 100\ mW = 3{,}9W.$$

Εφαρμογή 13η

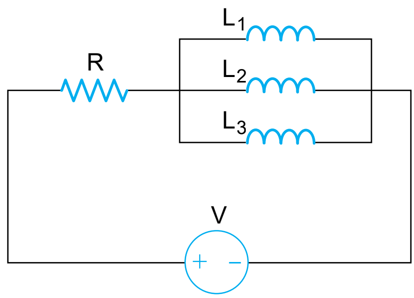
Για το κύκλωμα σχήματος δίνονται:

$R = 6\Omega$ $L_1 = 3mH$ $L_2 = 4mH$ $L_3 = 12\ mH$ $V = 15V$

Να υπολογισθούν:

α) Η σταθερά χρόνου.

β) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει την πηγή, όταν το ρεύμα έχει ένταση I = 1 A.



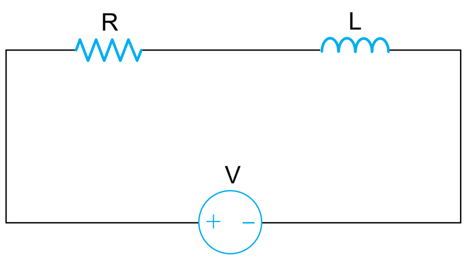
Λύση

α) Τα πηνία L_1, L_2, και L_3 είναι συνδεδεμένα παράλληλα, επομένως ο συντελεστής αυτεπαγωγής του κυκλώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L1} + \frac{1}{L2} + \frac{1}{L3} \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{1}{3mH} + \frac{1}{4mH} + \frac{1}{12mH} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{4+3+1}{12mH} \Rightarrow \frac{1}{L} = \frac{8}{12mH} \Rightarrow L = 1,5mH$$

άρα το κύκλωμα μετασχηματίζεται στο:



Η σταθερά χρόνου που προκύπτει είναι:

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \tau = \frac{1,5mH}{10\Omega} \Rightarrow \tau = 150\mu s.$$

β) Η εφαρμογή του 2ου Κανόνα Kirchhoff στο τελευταίο κύκλωμα δίνει:

$$V - IR - V_L = 0 \ (1)$$

Όμως:

$$V_L = L\frac{\Delta I}{\Delta t} \ (2)$$

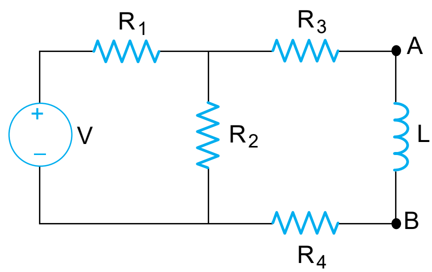
Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται:

$$V - IR - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \Rightarrow L\frac{\Delta I}{\Delta t} = V - IR \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{V - IR}{L} \Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{15V - 1A6\Omega}{1,5mH}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = 6000\frac{A}{s}$$

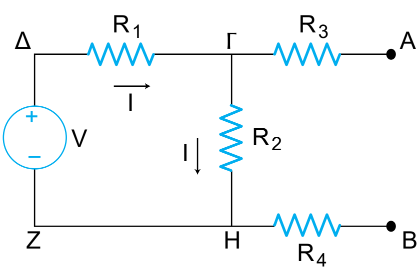
Εφαρμογή 14η

Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται:
$R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 6\Omega$, $L = 10mH$, $V = 27V$:
Να υπολογισθούν:
α) Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος
β) Η τάση του πηνίου όταν το διαρρέει ρεύμα έντασης I = 1,8A.



Λύση

α) Για να υπολογισθεί η σταθερά χρόνου, πρέπει το κύκλωμα να μετασχηματισθεί στο ισοδύναμο κατά Thevenin. Όταν αποσυνδεθεί το πηνίο το κύκλωμα γίνεται:



Όπως είναι γνωστό $V_{TH} = V_{AB}$. Για να υπολογισθεί η τάση VAB, πρέπει να επιλυθεί το παραπάνω κύκλωμα.

Η εφαρμογή του 2ου Κανόνα του Kirchhoff στον βρόχο ΓΔΖΗΓ δίνει:

$$V - IR_1 - IR_2 = 0 \Rightarrow V - I\,(R_1 + R_2) = 0 \Rightarrow$$

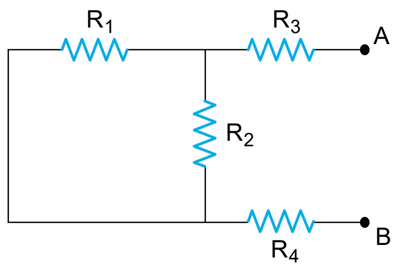
$$\Rightarrow I - \frac{V}{R_1 + R_2} \Rightarrow I = \frac{27V}{3\Omega + 6\Omega} \Rightarrow I = \frac{27V}{9\Omega} \Rightarrow I = 3A\,.$$

Αλλά $V_{AB} = V_2$, αφού οι αντιστάσεις R_3 και R_4 δεν διαρρέονται από ρεύμα.
$V_2 = IR_2 = V_{AB} \Rightarrow V_{AB} = 3A \cdot 6\Omega = 18V$

Επομένως

$$V_{TH} = 18V$$

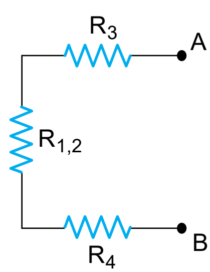
Για να βρεθεί η R_{TH}, αποσυνδέεται η πηγή από το κύκλωμα και αντικαθίσταται με βραχυκύκλωμα.



Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 συνδέονται παράλληλα επομένως:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{3\Omega 6\Omega}{3\Omega + 6\Omega} \Rightarrow R_{1,2} = 2\Omega\,.$$

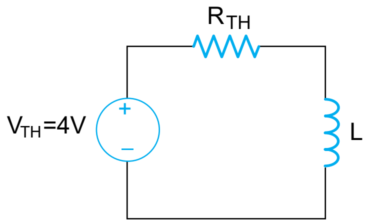
Το κύκλωμα μετασχηματίζεται



Επομένως:

$$R_{TH} = R_{12} + R_3 + R_4 \Rightarrow R_{TH} = 2\Omega + 2\Omega + 6\Omega \Rightarrow R_{TH} = 10\Omega.$$

Το αρχικό κύκλωμα γίνεται:



Επομένως η σταθερά χρόνου είναι:

$$\tau = \frac{L}{R_{TH}} = \frac{10mH}{10\Omega} = 1ms.$$

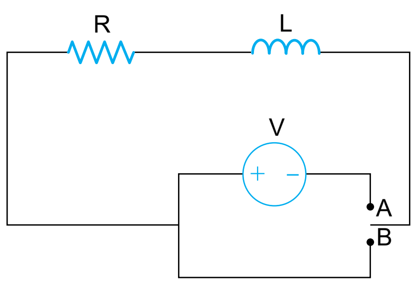
β) Αν εφαρμοσθεί ο 2ος Κανόνας Kirchhoff στο τελευταίο κύκλωμα, λαμβάνεται η σχέση:

$$V - IR_{TH} - V_L = 0 \Rightarrow V_L = V - IR_{TH} \Rightarrow V_L = 27V - 1,8A \cdot 10\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_L = 27V - 18V \Rightarrow V_L = 9V.$$

Εφαρμογή 15η

Στο κύκλωμα του σχήματος ο μεταγωγός δ πηγαίνει από τη θέση Α στη θέση Β την χρονική στιγμή t = 0. Να υπολογισθεί το ρεύμα του πηνίου μετά χρόνο t = 20ms. Δίνονται L = 16mH R = 4Ω V = 20V.



Λύση

Την χρονική t = 0 το πηνίο διααρρέεται από το ρεύμα, που το διέρρεε όταν ο διακόπτης ήταν στη θέση Α.

Άρα:

$$I_0 = \frac{V}{R} \Rightarrow I_0 = \frac{20V}{4\Omega} \Rightarrow I_0 = 5A.$$

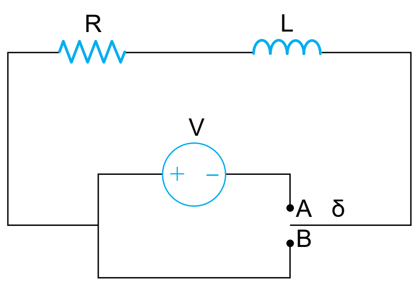
Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο, όταν ο μεταγωγός είναι στη θέση Β δίνεται από τη σχέση:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I = 5Ae^{-\frac{4\Omega}{16mH}\cdot 20ms} \Rightarrow I = 5Ae^{-5} = 33,7mA.$$

Εφαρμογή 16η

Στο κύκλωμα του σχήματος δίνονται L = 10mH, R = 2Ω, V = 20V. Τη χρονική στιγμή t = 0 ο μεταγωγός πηγαίνει από τη θέση Α στη θέση Β.

Να υπολογισθεί η θερμότητα στην αντίσταση R, όταν το ρεύμα στο πηνίο γίνει I = 2A.



Λύση

Την χρονική στιγμή t = 0, το πηνίο διαρρέεται από το ρεύμα, που το διέρρεε όταν ο μεταγωγός δ ήταν στη θέση Α. Επομένως

$$I_0 = \frac{V}{R} \Rightarrow I_0 = \frac{20V}{2\Omega} \Rightarrow I_0 = 10A$$

Καθώς η ένταση του ρεύματος μειώνεται, μειώνεται και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου, που μετασχηματίζεται σε θερμότητα. Επομένως η θερμότητα στην αντίσταση R θα είναι ίση με την μεταβολή της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου.

$$W_0 - W = Q \ (1)$$

$$W_0 = \frac{1}{2}LI_0^2 = (2)$$

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = (3)$$

Από τις (1) (2) και (3) έπεται:

$$\frac{1}{2}LI_0^2 - \frac{1}{2}LI^2 = Q \Rightarrow Q = \frac{1}{2}10mH(10A)^2 - \frac{1}{2}10mH(2A)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = 500mW - 20mW \Rightarrow Q = 480 \ mW$$

10-4. Προβλήματα προς λύση

1° Πυκνωτής έχει χωρητικότητα C = 3μF και φορτίζεται από πηγή τάσης V = 12V, μέσω αντίστασης R = 4ΚΩ. Να υπολογισθεί η τάση της αντίστασης μετά χρόνο t = 24ms από την έναρξη της φόρτισης

(1,62V)

2° Κύκλωμα φόρτισης πυκνωτή αποτελείται από αντίσταση R = 100Ω, πυκνωτή C = 0,01 μF και πηγή τάσης V = 100V. Κάποια στιγμή η τάση του πυκνωτή είναι V_C = 1V. Να υπολογισθούν:
α) Ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της τάσης του πυκνωτή.
β) Ο ρυθμός μεταβολής της τάσης όταν V_C = 1V.

$$\left(10^8 \frac{V}{s}, \ 9{,}9 \cdot 10^7 \frac{V}{s}\right)$$

3° Αντίσταση R = 1ΜΩ συνδέεται σε σειρά με πυκνωτή C = 10μF. Το σύστημα τροφοδοτείται από πηγη V = 10V. Να υπολογισθούν:
α) Η θερμοκρασία που εκλύεται στην αντίσταση R, μέχρι ο πυκνωτής να φορτιστεί πλήρως.
β) Ο ρυθμός μεταβολής της τάσης του πυκνωτή τη στιγμή που η ενέργεια του πυκνωτή είναι W_C = 20 μJ.

$$\left(500\mu J, \ 0{,}8\frac{V}{s}\right)$$

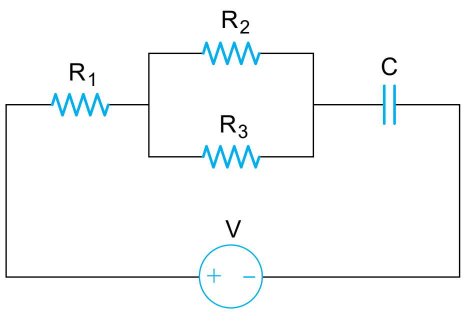
4° Πυκνωτής C = 100μF φορτίζεται μέσω αντίστασης R από πηγή τάσης V = 20V. Να υπολογισθεί πόσο φορτίο φέρει ο πυκνωτής τη στιγμή που έχει αναπτυχθεί θερμότητα Q = 15mJ στην αντίσταση.

(1mC)

5° Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται: R_1 = 4KΩ, R_2 = 3KΩ, R_3 = 6KΩ, C = 12μF, V = 12V. Να υπολογισθούν:

α) Η σταθερά χρόνου

β) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει κάθε αντιστάτη όταν η τάση του πυκνωτή είναι V_C = 6V.

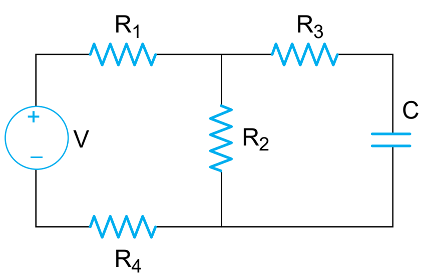


(72ms,
I_1 = 1mA
I_2 = 666,66μA
I_3 = 333,33μA)

6° Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται R_1 = 1KΩ, R_2 = 6 KΩ, R_3 = 4KΩ, R_4 = 2KΩ, C = 6 μF, V = 18V. Να υπολογισθούν:

α) Η σταθερά χρόνου

β) Η τάση του πυκνωτή όταν I_3 = 1 mA.

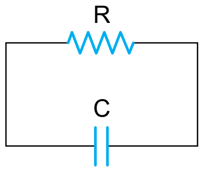


(36ms, 6V)

7° Πυκνωτής χωρητικότητας C = 2μF είναι φορτισμένος. Η ενέργεια του πυκνωτή είναι W_0 = 360mJ. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται μέσω αντίστασης R = 10KΩ. Κάποια στιγμή η τάση του πυκνωτή είναι V_C = 200V. Να υπολογισθούν:

α) Η ένταση του ρεύματος όταν $V_C = 200V$

β) Το ποσό της θερμότητας στην R μέχρι τη στιγμή που $V_C = 200V$

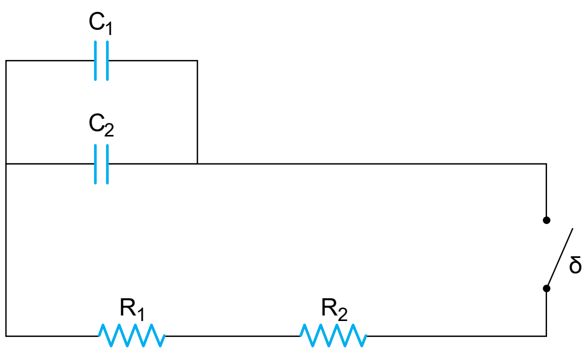


(20mA,320mJ)

8° Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται $C_1 = 2μF$, $C_2 = 3μF$, $R_1 = 2KΩ$, $R_2 = 4KΩ$. Οι πυκνωτές είναι φορτισμένοι και ο C_1 φέρει φορτίο $q_1 = 6μC$. Να υπολογισθούν:

α) Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος

β) Το ποσό της θερμότητας που έχει καταναλωθεί στις αντιστάσεις, όταν οι πυκνωτές έχουν εκφορτισθεί πλήρως.

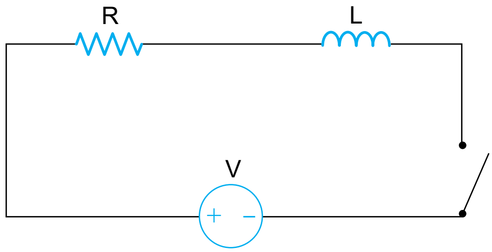


(30ms, 22,5 μJ)

9° Πυκνωτής C = 3μF είναι φορτισμένος σε τάση $V_0 = 20V$. Ο πυκνωτής εκφορτίζεται μέσω των αντιστάσεων $R_1 = 3KΩ$, και $R_2 = 2KΩ$, που είναι συνδεδεμένες σε σειρά. Να υπολογισθεί το ποσόν της θερμότητας που εκλύεται σε κάθε αντίσταση, όταν ο πυκνωτής εκφορτίζεται πλήρως.

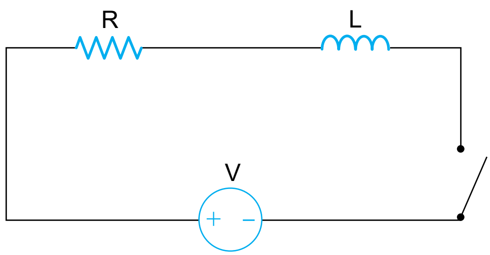
(360μJ, 240μJ)

10° Πηνίο L = 20mH είναι συνδεδεμένο σε σειρά με αντίσταση R = 2Ω. Το σύστημα τροφοδοτείται με πηγή τάσης V = 6V. Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος μετά χρόνο t = 1 ms από την στιγμή που άρχισε να τροφοδοτείται το κύκλωμα.



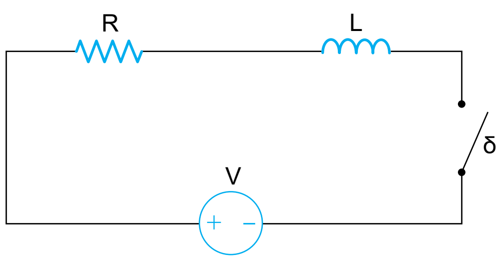
$$\left(271,45\frac{A}{s}\right)$$

11° Κύκλωμα αποκατάστασης ρεύματος σε πηνίο αποτελείται από πηνίο L = 10mH αντίσταση R = 5Ω και πηγή τάσης V = 10V. Κάποια στιγμή η ενέργεια που έχει αποταμιευθεί στο πηνίο είναι W = 5mJ.
Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της έντασης στο πηνίο.



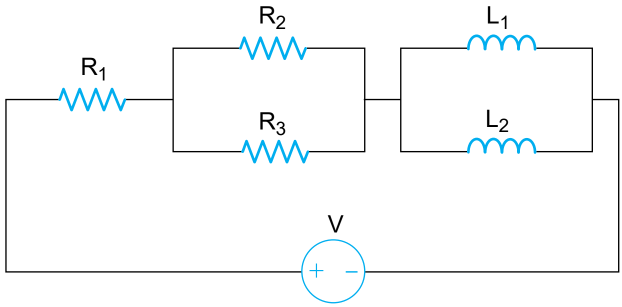
$$\left(500\frac{A}{s}\right)$$

12° Στο κύκλωμα του σχήματος L = 2mH, R = 25Ω και V= 100V. Κάποια στιγμή η ισχύς, της ηλεκτρικής ενέργειας που καταναλίσκεται στην R είναι P_R = 100W. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο πηνίο;



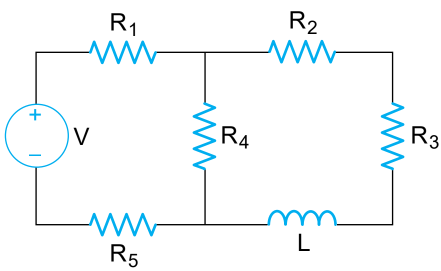
$$\left(25\cdot10^3\frac{A}{s}\right)$$

13° Να υπολογισθεί η σταθερά χρόνου του κυκλώματος του σχήματος: Δίνονται R_1 = 2Ω, R_2 =3Ω, R_3 = 6Ω, L_1 = 20mH, L_2 = 5mH, V = 20V. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος;



(1ms, 5A)

14° Να υπολογισθεί η σταθερά χρόνου του κυκλώματος του σχήματος καθώς και ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο πηνίο. Δίνονται: $R_1 = 15\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = R_5 = 5\Omega$, $L = 100mH$, $V = 100V$.

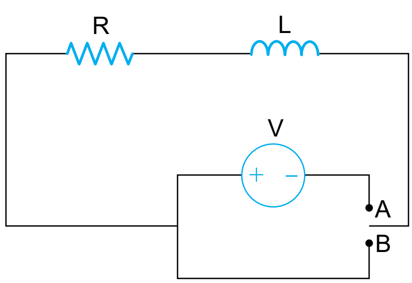


(10ms, 400 $\frac{A}{s}$)

15° Στο κύκλωμα του σχήματος είναι $R = 5\Omega$, $L = 25mH$, $V = 100V$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ ο μεταγωγός δ πηγαίνει από τη θέση A στη θέση B. Κάποια στιγμή η ενέργεια του πηνίου είναι το 81% της αρχικής. Να υπολογισθούν:

α) Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος

β) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος



(5ms, 3600 $\frac{A}{s}$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Ηλεκτρικες Μηχανες

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά των ηλεκτρικών μηχανών.

*Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι, να **κατανοήσουν** οι μαθητές σε γενικές γραμμές τον τρόπο λειτουργίας των ηλεκτρικών μηχανών, τόσο των γεννητριών όσο και των κινητήρων συνεχούς και εναλλασσόμενου ρεύματος και να επιλύουν απλά προβλήματα.*

Ορισμοί

❑ Ηλεκτρική μηχανή ονομάζεται κάθε διάταξη η οποία μετατρέπει τη μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική ή αντίστροφα ή μετατρέπει τα χαρακτηριστικά του ηλεκτρικού ρεύματος.

Με βάση τον ορισμό οι ηλεκτρικές μηχανές διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

- **Γεννήτριες:** είναι μηχανές οι οποίες παραλαμβάνουν μηχανική ενέργεια και αποδίδουν ηλεκτρική ενέργεια.
- **Κινητήρες:** είναι μηχανές οι οποίες παραλαμβάνουν ηλεκτρική ενέργεια και αποδίδουν μηχανική ενέργεια.
- **Μετασχηματιστές:** είναι μηχανές οι οποίες παραλαμβάνουν ηλεκτρική ενέργεια και την αποδίδουν σε μία ή περισσότερες καταναλώσεις μετασχηματίζοντας τους συντελεστές της ισχύος, δηλαδή την τάση (V) και το ρεύμα (I), όχι όμως την ισχύ ($P = V \cdot I$).
- **Ανορθωτές:** είναι μηχανές οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή του εναλλασσόμενου ρεύματος σε συνεχές.
- **Στρεφόμενοι μετατροπείς:** είναι μηχανές οι οποίες μετατρέπουν το εναλλασσόμενο ρεύμα σε συνεχές και αντίστροφα.

Στη συνέχεια, εξετάζονται τα τρία πρώτα είδη ηλεκτρικών μηχανών τα οποία συναντώνται πολύ συχνά στην πράξη.

11-1. Μετασχηματιστής (Μ/Σ)

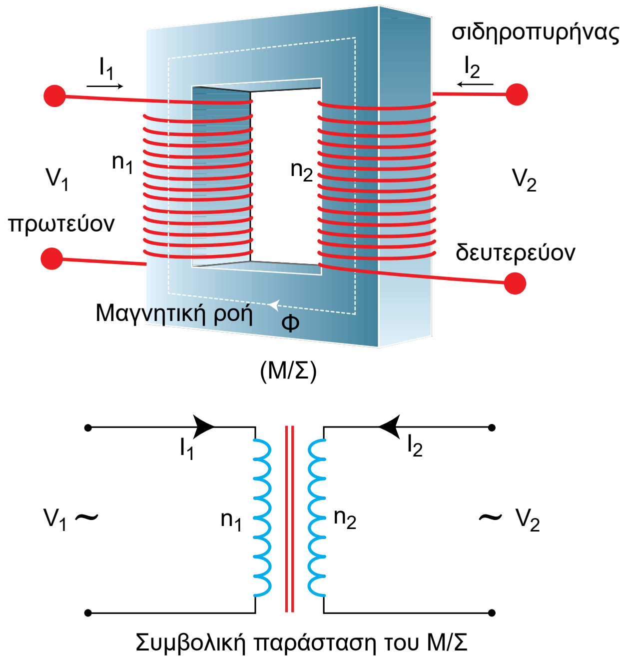
Κάθε Μ/Σ αποτελείται από δύο πηνία και έναν κοινό πυρήνα από σίδηρο (σιδηρομαγνητικό υλικό). Τα δύο πηνία δεν έχουν συνήθως τον ίδιο αριθμό σπειρών αλλά, το ένα έχει περισσότερες από το άλλο (εκτός των περιπτώσεων που ο Μ/Σ χρησιμοποιείται για απομόνωση).

Το πηνίο στο οποίο συνδέεται η τάση που πρόκειται να μετασχηματιστεί ονομάζεται **πρωτεύον,** ενώ το πηνίο από το οποίο προκύπτει η μετασχηματισμένη τάση ονομάζεται **δευτερεύον.**

Και τα δύο πηνία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως πρωτεύον ή δευτερεύον ανάλογα με τις απαιτήσεις που υπάρχουν αρκεί να μην υπερβαίνουμε τις τάσεις για τις οποίες προορίζονται.

Επίσης, τα δύο πηνία (τυλίγματα) ενός Μ/Σ δεν έρχονται σε ηλεκτρική επαφή ποτέ.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται τα μέρη ενός Μ/Σ καθώς επίσης και η συμβολική του παράσταση.



Σχήμα 11.1. *Μ/Σ και συμβολική παράσταση αυτού*

Συνδέοντας το πρωτεύον πηνίο με πηγή εναλλασσόμενης τάσης, διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Αυτό όμως, προκαλεί αδιάκοπη μεταβολή της μαγνητικής ροής στο εσωτερικό του πηνίου και κατά συνέπεια και στον πυρήνα που είναι κοινός και για τα δύο πηνία. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχει και στη ροή, η οποία είναι αιτία εμφάνισης εναλλασόμενης τάσης στα άκρα δευτερεύοντος πηνίου $\left(V_{\text{επαγ.}} = n \cdot \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$

Αποδεικνύεται ότι, μεταξύ τάσεων, ρευμάτων και αριθμού σπειρών ισχύει η σχέση:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{I_1}{I_2} \qquad (11.1)$$

με την προϋπόθεση ότι η ισχύς του πρωτεύοντος ($V_1 \cdot I_1$) είναι ίση περίπου με την ισχύ του δευτερεύοντος ($V_2 \cdot I_2$).

Όπως σε κάθε μηχανή έτσι και στους Μ/Σ υπάρχουν απώλειες ενέργειας με αποτέλεσμα η ισχύς στο δευτερεύον να είναι λίγο μικρότερη από την ισχύ του πρωτεύοντος.

Επειδή όμως σ' έναν Μ/Σ δεν υπάρχουν κινητά μέρη, αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχουν απώλειες και έτσι ο Μ/Σ εμφανίζει μεγάλο βαθμό απόδοσης (~ 95%) σε σχέση με άλλες μηχανές.

Από τη σχέση (11.1) προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Εάν $n_1 > n_2 \Rightarrow V_1 > V_2$

Στην περίπτωση αυτή ο Μ/Σ ονομάζεται **υποβιβαστής τάσης** διότι υποβιβάζει την τάση του πρωτεύοντος.

- Εάν $n_1 < n_2 \Rightarrow V_1 < V_2$

Στην περίπτωση αυτή ο Μ/Σ ονομάζεται **ανυψωτής τάσης** διότι ανυψώνει την τάση του πρωτεύοντος.

Οι Μ/Σ είναι μηχανές με ευρεία χρήση σε καθημερινό επίπεδο και σε πολύ σημαντικές λειτουργίες που αφορούν τη διαχείρηση της ηλεκτρικής ενέργειας.

Έτσι, για τη μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας από τον τόπο παραγωγής της χρησιμοποιούνται Μ/Σ ανύψωσης τάσης γιατί οι απώλειες σε ενέργεια είναι αμελητέες όταν η τάση με την οποία μεταφέρεται η ηλεκτρική ενέργεια είναι πολύ μεγάλη.

Οι μεγάλες όμως τάσεις είναι επικίνδυνες για τον άνθρωπο και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται Μ/Σ υποβιβασμού τάσης έτσι ώστε να ελαττωθεί η τάση του δικτύου πριν τροφοδοτηθούν καταναλωτές (βιομηχανίες, κατοικίες, κ.λ.π.).

Τέλος, ευρεία χρήση Μ/Σ γίνεται σε ηλεκτρονικά κυκλώματα, ανορθωτικές διατάξεις, τροφοδοτικά, παιχνίδια κ.λ.π.

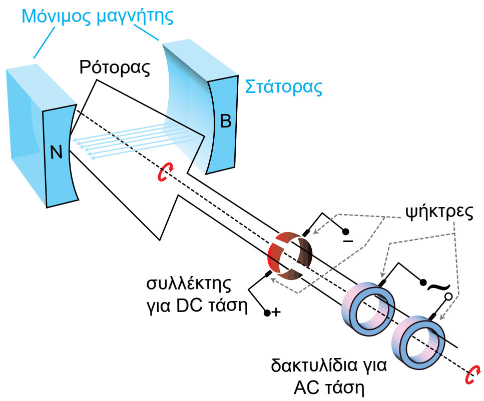
11-2. Γεννήτριες

Οι γεννήτριες ανάλογα με το είδος του ρεύματος που παράγουν διακρίνονται ως εξής:

- **γεννήτριες συνεχούς ρεύματος:** είναι οι γεννήτριες που παράγουν συνεχές ρεύμα.
- **γεννήτριες εναλλασσόμενου ρεύματος:** είναι οι γεννήτριες που παράγουν εναλλασσόμενο ρεύμα.

11-2.1. Κατασκευή - Λειτουργία γεννήτριας

Ανεξάρτητα από το είδος τους οι γεννήτριες αποτελούνται από το **στάτη** (σταθερό μέρος της μηχανής) ο οποίος δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο και τον **ρότορα** (κινητό μέρος της μηχανής) που στις άκρες των σπειρών του τυλίγματος του εμφανίζεται (αναπτύσσεται) τάση V.



Σχήμα 11.2. *Δομικό διάγραμμα γεννήτριας*

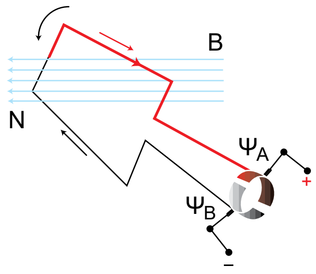
Η περιστροφή του πλαισίου της γεννήτριας (ρότορας) μέσα στο μαγνητικό πεδίο προκαλεί μεταβολή της μαγνητικής ροής ΔΦ στο πλαίσιο με αποτέλεσμα να εμφανίζεται επαγωγική τάση στα άκρα του η οποία είναι εναλλασόμενη ανάλογη με την ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου.

- **παραγωγή συνεχούς ρεύματος (γεννήτρια DC)**

Γίνεται με τη βοήθεια του συλλέκτη, ο οποίος είναι ένας μηχανικός ανορθωτής, δηλαδή μετατροπέας της AC τάσης και AC ρεύματος σε DC τάση και DC ρεύμα.

Αποτελείται από αγώγιμες επιφάνειες (χάλκινα ελάσματα) που ονομάζονται **τομείς** και είναι μονωμένες μεταξύ τους. Εξωτερικά εφάπτονται οι **ψήκτρες** οι οποίες είναι από αγώγιμο υλικό. Οι ψήκτρες είναι πάντα ακίνητες και δεν επηρεάζουν την περιστροφή του ρότορα.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πως παράγεται συνεχή τάση με το συλλέκτη.



0° θέση εκκινήσεως περιστροφή 180° περιστροφή 360°

Σχήμα 11.3. *Παραγωγή συνεχούς τάσης με τη βοήθεια συλλέκτη*

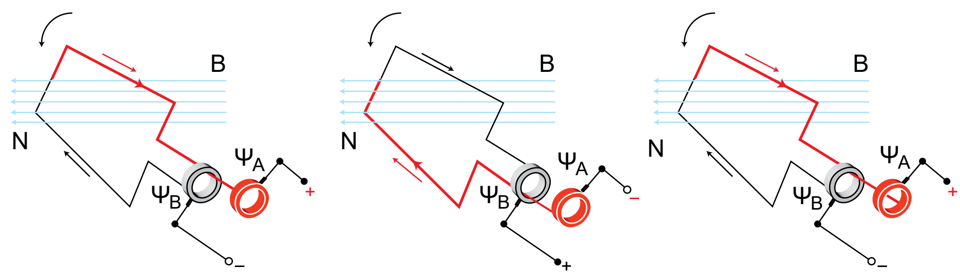
Παρατηρούμε ότι, η ψήκτρα A συνδέεται εναλλάξ με τους τομείς με τρόπο ώστε να διαρρέεται πάντοτε από ρεύμα ίδιας φοράς. Το ίδιο ισχύει και για τη ψήκτρα B.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η πολικότητα των ψηκτρών να είναι σταθερή επομένως έχουμε παραγωγή συνεχούς τάσης και ρεύματος.

- **παραγωγή εναλλασσόμενου ρεύματος (γεννήτρια AC)**

Γίνεται με τη βοήθεια αγώγιμων δακτυλιδίων από χαλκό πάνω στα οποία εφάπτονται εξωτερικά οι ψήκτρες, επιτρέποντας έτσι στο σύστημα να περιστρέφεται ελεύθερα.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πως παράγεται εναλλασσόμενη τάση με τη βοήθεια των δακτυλιδίων.



0° θέση εκκινήσεως περιστροφή 180° περιστροφή 360°

Σχήμα 11.4. *Παραγωγή εναλλασσόμενης τάσης με τη βοήθεια δακτυλιδίων*

Παρατηρούμε ότι, η ψήκτρα A είναι μόνιμα συνδεδεμένη με το ίδιο δακτυλίδι (κόκκινο) με αποτέλεσμα να διαρρέεται περιοδικά από ρεύμα αντίθετης φοράς. Το ίδιο ισχύει και για τη ψήκτρα B.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η πολικότητα των ψηκτρών να εναλλάσσεται περιοδικά, επομένως έχουμε παραγωγή εναλλασσόμενης τάσης και ρεύματος.

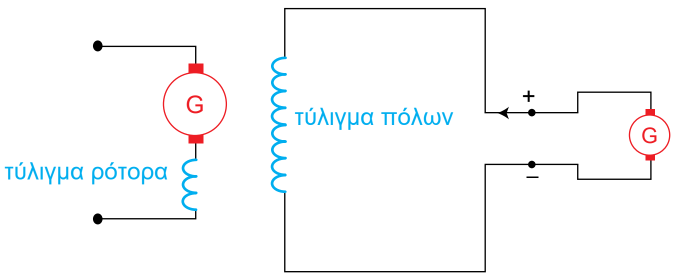
11-2.2. Γεννήτριες DC

Στις μεγάλες μηχανές το μαγνητικό πεδίο δεν δημιουργείται από μόνιμους μαγνήτες αλλά από ηλεκτρομαγνήτες οι οποίοι έχουν το δικό τους τύλιγμα και για να δημιουργηθεί μαγνητικό πεδίο πρέπει να τροφοδοτηθούν με ρεύμα το οποίο παράγεται από μικρότερη γεννήτρια μόνιμων μαγνητών (διεγέρτρια).

Ανάλογα με τον τρόπο που συνδέεται το τύλιγμα των πόλων (ηλεκτρομαγνητών) σε σχέση με το τύλιγμα του ρότορα μιας γεννήτριας DC, διακρίνονται τα παρακάτω είδη:

- **Γεννήτριες DC ξένης διέγερσης**

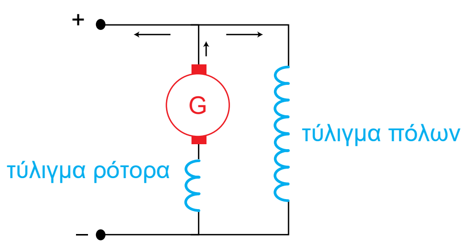
Το τύλιγμα των πόλων το οποίο αποτελείται από πλλές σπείρες λεπτού σύρματος τροφοδοτείται από εξωτερική πηγή π.χ. μια μικρή γεννήτρια μόνιμων μαγνητών.



Σχήμα 11.5. *Γεννήτρια DC ξένης διέγερσης*

- **Γεννήτριες DC παράλληλης διέγερσης**

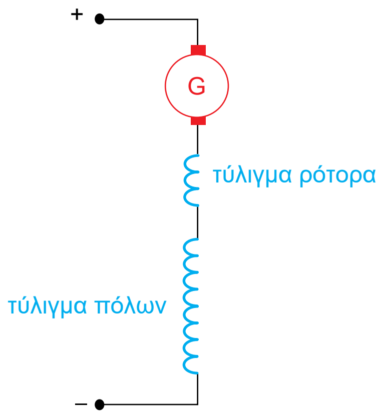
Το τύλιγμα των πόλων που αποτελείται από πολλές σπείρες λεπτού σύρματος, συνδέεται παράλληλα στα άκρα της μηχανής και τροφοδοτείται από την ίδια τάση που παράγει η μηχανή.



Σχήμα 11.6. *Γεννήτρια DC παράλληλης διέγερσης*

- **Γεννήτριες DC με διέγερση σειράς**

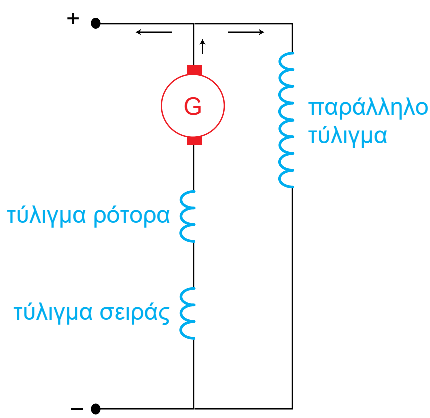
Το τύλιγμα των πόλων το οποίο αποτελείται από λίγες σπείρες χοντρού σύρματος, συνδέεεται σε σειρά με το τύλιγμα του τυμπάνου και διαρρέεται από το ολικό ρεύμα που παράγει η μηχανή και παρέχει στο φορτίο.



Σχήμα 11.7. *Γεννήτρια DC με διέγερση σειράς*

- **Γεννήτριες DC σύνθετης διέγερσης**

Το τύλιγμα των πόλων αποτελείται από ένα τύλιγμα σειράς λίγων και χοντρών σπειρών και από ένα παράλληλο τύλιγμα πολλών και λεπτών σπειρών.



Σχήμα 11.8. *Γεννήτρια DC σύνθετης διέγερσης*

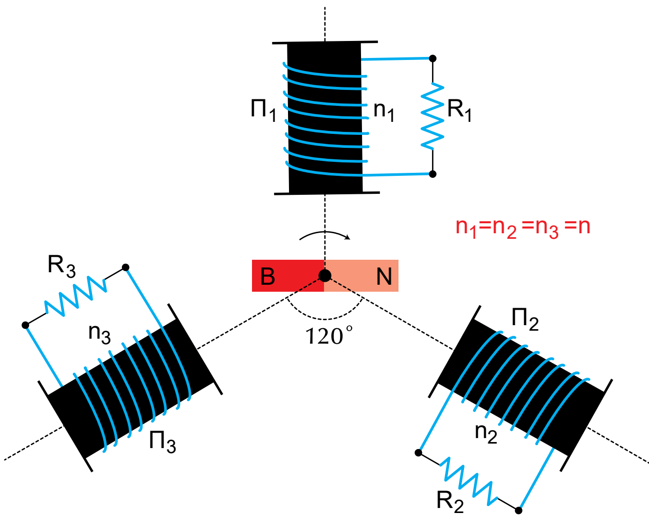
11-2.3. Γεννήτριες AC

Οι γεννήτριες εναλλασσόμενου ρεύματος ανάλογα με το είδος του ρεύματος που παράγουν διακρίνονται στις εξής κατηγορίες

- **μονοφασικές:** είναι οι γεννήτριες που παράγουν μονοφασικό ρεύμα και είναι ανάλογες με τις γεννήτριες DC
- **τριφασικές:** είναι οι γεννήτριες που παράγουν τριφασικό ρεύμα.

Τα ρεύματα αυτά αναπτύσσονται σε τρία ανεξάρτητα πηνία (φάσεις) που βρίσκονται στο στάτορα και οι άξονές τους σχηματίζουν γωνία 120° ο ένας από τον άλλον.

Το μαγνητικό πεδίο το δημιουργεί ο δρομέας ο οποίος είναι ηλεκτρομαγνήτης και τροφοδοτείται από συνεχές ρεύμα το οποίο παράγεται από μια μικρή γεννήτρια DC παραλλήλου διέγερσης γνωστή ως διεγέρτρια.



Σχήμα 11.9. *Γεννήτρια AC τριφασική*

Οι τριφασικές γεννήτριες χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας καθότι, η μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας με τριφασικό ρεύμα απαιτεί τους μισούς σχεδόν αγωγούς από όσους θα απαιτούσε η μεταφορά της ίδιας ενέργειας με μονοφασικό ρεύμα.

Οι γεννήτριες AC ανάλογα με το εάν η συχνότητα του ρεύματος εξαρτάται από την περιστροφή του δρομέα, διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

- **σύγχρονες:** η συχνότητα του παραγόμενου ρεύματος εξαρτάται από την ταχύτητα περιστροφής του δρομέα

- **ασύγχρονες:** η συχνότητα του παραγόμενου ρεύματος δεν εξαρτάται από την ταχύτητα περιστροφής το δρομέα.

11-3. Κινητήρες

Οι κινητήρες ανάλογα με το είδος του ρεύματος που χρησιμοποιούν διακρίνονται σε:

- **κινητήρες συνεχούς ρεύματος:** είναι οι κινητήρες που χρησιμοποιούν συνεχές ρεύμα
- **κινητήρες εναλλασσόμενου ρεύματος:** είναι οι κινητήρες που χρησιμοποιούν εναλλασσόμενο ρεύμα.

Η αρχή λειτουργίας των κινητήρων στηρίζεται στις δυνάμεις Laplace οι οποίες ασκούνται πάνω στους αγωγούς των δρομέων τους ($F = B \cdot I \cdot \ell$).

11-3.1. Κινητήρες DC

Κατασκευαστικά οι κινητήρες είναι ίδιοι με τις γεννήτριες και αποτελούνται από το ρότορα (δρομέα, οι άκρες του οποίου συνδέονται με το συλλέκτη ο οποίος παίρνει ρεύμα από τις ψήκτρες και το διοχετεύει στο πλαίσιο του ρότορα και από το στάτορα ο οποίος, δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο μέσα στο οποίο περιστρέφεται ο ρότορας. Ο στάτορας μπορεί να είναι ένας μόνιμος μαγνήτης ή ένας ηλεκτρομαγνήτης.

Όταν περνάει ρεύμα από το πλαίσιο του ρότορα, αναπτύσσεται ροπή στο πλαίσιο η οποία οφείλεται στις δυνάμεις Laplace, και η οποία αναγκάζει το πλαίσιο να περιστραφεί.

Όταν ο μαγνητικός άξονας του πλαισίου γίνεται παράλληλος προς το μαγνητικό πεδίο, η ροπή μηδενίζεται αλλά το πλαίσιο δεν σταματά διότι έχει ήδη κάποια κινητική ενέργεια, με αποτέλεσμα να συνεχίζει την περιστροφή του δεχόμενο εκ νέου ώθηση. Οι περιοδικές αυτές ωθήσεις πραγματοποιούνται χάρη στο συλλέκτη που ανοιγοκλείνει αυτόματα το κύκλωμα του πλαισίου.

Εάν ο κινητήρας συναντήσει κάποια αντίσταση τη στιγμή κατά την οποία η ροπή είναι μηδενική, μπορεί να σταματήσει.

Το ενδεχόμενο αυτό αποφεύγεται τοποθετώντας δύο πηνία κάθετα μεταξύ τους με αποτέλεσμα η ροπή να μη μηδενίζεται ποτέ.

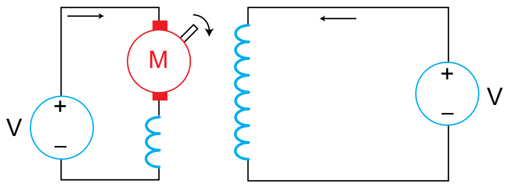
Σε ισχυρούς κινητήρες χρησιμοποιούνται πολλά πλαίσια ώστε να υπάρχει μεγάλη ροπή στο ρότορα.

Στους μεγάλους κινητήρες, ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο τροφοδοτείται το τύλιγμα των πόλων διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

- **Κινητήρες DC ξένης διέγερσης**

Το τύλιγμα των πόλων τροφοδοτείται από ξένη πηγή διαφορετική από αυτή του δρομέα.

Οι κινητήρες αυτοί επιτρέπουν ρύθμιση της ταχύτητας περιστροφής σε μεγάλα όρια.

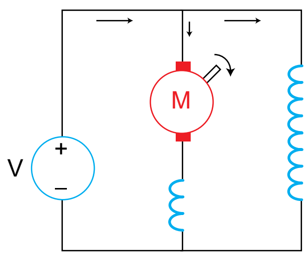


Σχήμα 11.10. *Κινητήρας DC ξένης διέγερσης*

- **Κινητήρες DC παράλληλης διέγερσης**

Το τύλιγμα των πόλων τροφοδοτείται από την ίδια πηγή με την οποίαν τροφοδοτείται και ο δρομέας.

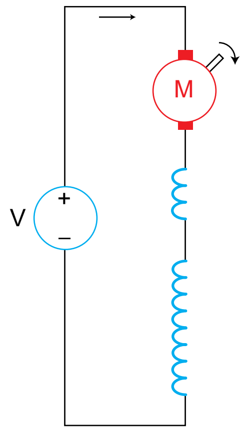
Οι κινητήρες αυτοί παρουσιάζουν μικρή πτώση της ταχύτητας περιστροφής καθώς αυξάνεται το φορτίο και χρησιμοποιούνται σε ανάλογες εφαρμογές.



Σχήμα 11.11. *Κινητήρας DC παράλληλης διέγερσης*

- **Κινητήρες DC με διέγερση σειράς**

Το τύλιγμα των πόλων συνδέεται σε σειρά με το τύλιγμα του δρομέα και αποτελείται από λίγες σπείρες χοντρού σύρματος. Η ροπή στους κινητήρες αυτούς είναι ανάλογη με το τετράγωνο του ρεύματος και για το λόγο αυτό είναι μεγάλη, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται σε μεγάλα φορτία καθώς επίσης και σε ηλεκτρικά οχήματα.

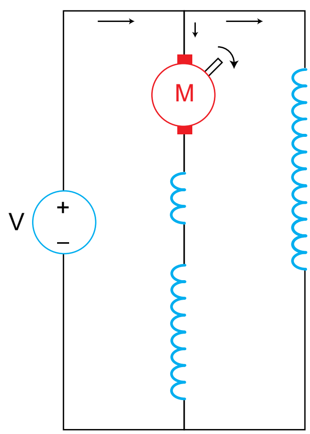


Σχήμα 11.12. Κινητήρας DC με διέγερση σειράς

• **Κινητήρες DC σύνθετης διέγερσης**

Το τύλιγμα των πόλων αποτελείται από ένα τύλιγμα σειράς και είναι παράλληλο τύλιγμα.

Τα χαρακτηριστικά των κινητήρων αυτών είναι συνδυασμός των χαρακτηριστικών των κινητήρων σειράς και των κινητήρων παράλληλης διέγερσης.



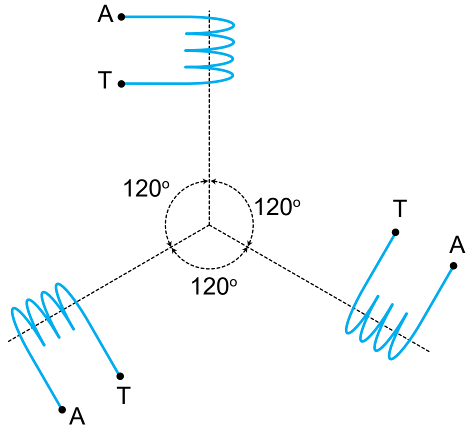
Σχήμα 11.13. Κινητήρας DC σύνθετης διέγερσης

11-3.2. Κινητήρες AC

Οι κινητήρες εναλλασσόμενου ρεύματος ανάλογα με το είδος του ρεύματος που χρησιμοποιούν διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

- **μονοφασικοί:** είναι οι κινητήρες που χρησιμοποιούν μονοφασικό ρεύμα.
- **τριφασικοί:** είναι οι κινητήρες που χρησιμοποιούν τριφασικό ρεύμα.

Ο στάτης των τριφασικών κινητήρων έχει συγκεκριμένη κατασκευή και αποτελείται από τρία (3) πηνία φάσης τα οποία βρίσκονται σε γωνία 120° μεταξύ τους.



Σχήμα 11.14. *Στάτης τριφασικού κινητήρα*

Τα τρία πηνία φάσης μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους είτε σε αστέρα (Υ) είτε σε τρίγωνο (Δ) ανάλογα με την ονομαστική τάση κάθε φάσης και ανάλογα με τη τάση τροφοδοσίας.

Όταν τα πηνία τροφοδοτηθούν με τριφασικό ρεύμα δημιουργείται στο στάτη στρεφόμενο μαγνητικό πεδίο το οποίο με τη σειρά του προκαλεί ροπή στο ρότορα.

Η ταχύτητα του στρεφόμενου μαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση

$$n = \frac{60 \cdot f}{p}\left(\text{στρ/min}\right) \quad \text{ή} \quad n = \frac{f}{p}\left(\text{στρ/sec}\right) \qquad (11.2)$$

όπου f: συχνότητα τροφοδοσίας

p: πλήθος ζευγών πόλων

Οι κινητήρες AC ανάλογα με το εάν η περιστροφή του δρομέα εξαρτάται από τη συχνότητα τροφοδοσίας, διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

- **σύγχρονοι:** η ταχύτητα περιστροφής του δρομέα εξαρτάται από τη συχνότητα του ρεύματος τροφοδοσίας και η ταχύτητα αυτή είναι ίση με τη ταχύτητα του στρεφόμενου μαγνητικού πεδίου (σχέση 11.2).

Οι σύγχρονοι κινητήρες ανεξάρτητα του εάν είναι μονοφασικοί ή τριφασικοί έχουν την ίδια αρχή λειτουργίας. Μοναδική διαφορά είναι το τύλιγμα του στάτη και κατ' επέκταση η τροφοδοσία αυτού.

- **ασύγχρονοι:** η ταχύτητα περιστροφής του δρομέα δεν εξαρτάται από τη συχνότητα του ρεύματος αλλά από το φορτίο.

Οι ασύγχρονοι κινητήρες ανεξάρτητα του εάν είναι μονοφασικοί ή τριφασικοί έχουν την ίδια αρχή λειτουργίας.

Η διαφορά τους έγκειται στο ότι οι μονοφασικοί έχουν στο στάτη το κύριο και βοηθητικό τύλιγμα ενώ η τριφασικοί έχουν μόνα τα κύρια τυλίγματα των τριών φάσεων.

11-4. Εφαρμογές

Εφαρμογή 1η

Μετασχηματιστής με τάση πρωεύοντος V_1 = 220(V), έχει αριθμό σπειρών πρωτεύοντος n_1 = 500 σπείρες και αριθμό σπειρών δευτερεύοντος n_2 = 250 σπείρες. Ζητείται η τάση V_2 του δευτερεύοντος.

Λύση

Η τάση του δευτερεύοντος προκύπτει από τη γνωστή σχέση των μετασχηματιστών:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow V_2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot V_1 = \frac{250}{500} \cdot 220 = 110\,(V)$$

Εφαρμογή 2η

Η ένταση του ρεύματος στο πρωτεύον πηνίο ενός Μ/Σ είναι 4(A) και η τάση V_1 = 42 (V). Εάν V_2 = 120 (V) να βρεθούν, η ένταση του ρεύματος στο δευτερεύον και η ισχύς του Μ/Σ (απώλειες δεν υπάρχουν, $P_1 \simeq P_2$).

Λύση

Η ένταση του ρεύματος στο δευτερεύον πηνίο του Μ/Σ προκύπτει από τη σχέση:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow I_2 = I_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 4 \cdot \frac{42}{120} \Rightarrow I_2 = 1,4(A)$$

Η ισχύς του Μ/Σ είναι:

$$P = P_1 = P_2 = V_1 \cdot I_1 = 42 \cdot 4 \Rightarrow P = 168\ (W)$$

Εφαρμογή 3η

Για το φωτισμό ενός κήπου απαιτούνται 10 λαμπτήρες συνδεδεμένοι σε σειρά διαρρεόμενοι από ρεύμα εντάσεως I = 5A. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται μετασχηματιστής ισχύος 200 VA με αριθμό σπειρών πρωτεύοντος n_1 = 1000 σπείρες. Η τάση του πρωτεύοντος είναι 220 V. Ζητείται:

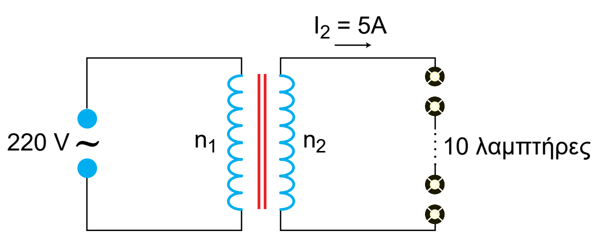
α) ο αριθμός σπειρών του δευτερεύοντος n_2.

β) Η τάση στο δευτερεύον του μετασχηματιστή V_2

γ) Η τάση κάθε λαμπτήρα

(οι απώλειες του μετασχηματιστή θεωρούνται αμελητέες, $P_1 \simeq P_2$)

Λύση



α) Το ρεύμα του πρωτεύοντος υπολογίζεται από την σχέση:

$$P = V_1 \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{200}{220} = 0,9\ (A)$$

Το ρεύμα στο δευτερεύον είναι I_2 = I = 5(A)

Ο αριθμός σπειρών του δευτερεύοντος υπολογίζεται από την γνωστή σχέση των μετασχηματιστών:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow n_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot n_1 = \frac{0,9}{5} \cdot 1000 \Rightarrow n_2 = 180 \text{ σπείρες}$$

β) Από την σχέση:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ έχουμε: } V_2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot V_1 = \frac{180}{1000} \cdot 220 \Rightarrow V_2 = 39,6(V)$$

γ) Η τάση λειτουργίας κάθε λαμπτήρα δίνεται από την σχέση

$$V_{λαμπ} = \frac{V_2}{\text{πλήθος λαμπτήρων}} = \frac{39,6}{10} = 3,96(V)$$

Εφαρμογή 4η

Αγωγός μήκους ℓ = 0,5 m κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B = 0,8 (T) με ταχύτητα u = 50 m/sec κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

Να βρεθεί η επαγώμενη τάση στον αγωγό.

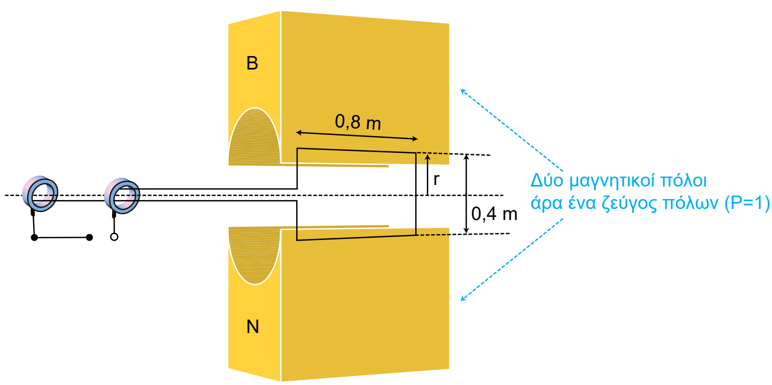
Λύση

Από τη σχέση του Faraday προκύπτει

$v_{επαγ.} = B \cdot u \cdot \ell = 0,8 \cdot 50 \cdot 0,5 \Rightarrow V_{επαγ.} = 20\ (V)$

Εφαρμογή 5η

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια Γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος.



Ο ρότορας της γεννήτριας στρέφεται με ταχύτητα n = 20 (στρ/sec) μέσα σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής B = 0,5 (T). Δεδομένου ότι u = 2πr · n (m/sec), f = n · p όπου f : συχνότητα ρεύματος, n : αριθμός στροφών δρομέα ανά δευτερόλεπτο, p : πλήθος ζευγών πόλων μηχανής και ο ρότορας αποτελείται από μια σπείρα, ζητούνται:

α) Η παραγόμενη τάση της γεννήτριας

β) Η συχνότητα της παραγόμενης τάσεως

Λύση

α) Η απόσταση r του κάθε πλευρικού αγωγού του πλαισίου από τον άξονα της μηχανής δίνεται από τη σχέση:

$$r = \frac{\text{πλάτος πλαισίου}}{2} = \frac{0,4}{2} = 0,2\,\text{m}$$

Η ταχύτητα του ρότορα είναι: u = 2πr · n = 2π · 0,2 · 20 = 25,13 (m/s)

Επομένως

$$V_{\text{επαγ}} = 2 \cdot B \cdot \ell \cdot u = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,8 \cdot 25,13 = 20,104 \text{ (V)}$$

(ο συντελεστής 2 δηλώνει ότι δυο αγωγοί μήκους ℓ περιστρέφονται κάθετα στο πεδίο).

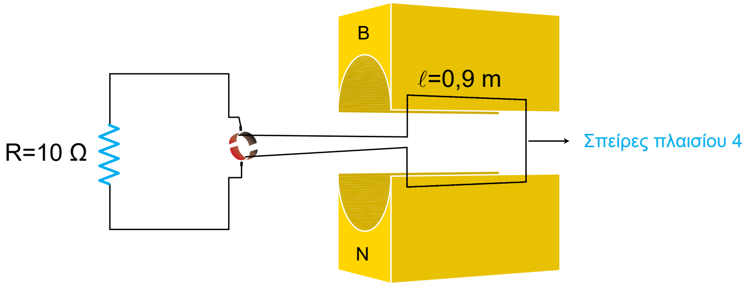
β) Από τη σχέση f = n · p, προκύπτει:

$$f = 20 \cdot 1 = 20 \text{ (Hz)}$$

Εφαρμογή 6η

Γεννήτρια συνεχούς ρεύματος με τέσσερις σπείρες στο ρότορα, ο οποίος περιστρέφεται με ταχύτητα 100 (m/sec) σε πεδίο 0,2 (T), τροφοδοτεί αντίσταση 10 (Ω). Εάν το μήκος του πλαισίου είναι ℓ = 0,9 (m), βρείτε την ισχύ που παρέχει η γεννήτρια στο φορτίο.

Λύση



Οι σπείρες του πλαισίου είναι 4 άρα προκύπτει ότι υπάρχουν 4 αγωγοί στο πάνω μέρος του πλαισίου και άλλοι 4 στο κάτω. Επομένως 8 αγωγοί κινούνται με ταχύτητα 100 (m/sec).

Σύμφωνα με το νόμο του Faraday προκύπτει:

$$V_{επ.} = 8 \cdot B \cdot u \cdot \ell = 8 \cdot 0{,}2 \cdot 100 \cdot 0{,}9 = 144 \text{ (V)}$$

Επομένως $P = \dfrac{V_{επ}^2}{R} \Rightarrow P = \dfrac{(144)^2}{10} = 2073{,}6(W)$ είναι η παρεχόμενη ισχύς από τη γεννήτρια στο φορτίο.

Εφαρμογή 7η

Αγωγός διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως 50 A, είναι κάθετος σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής B = 0,8 T. Το μήκος του αγωγού είναι ℓ = 0,5 m. Ζητείται η δύναμη Laplace που ασκείται στον αγωγό.

Λύση

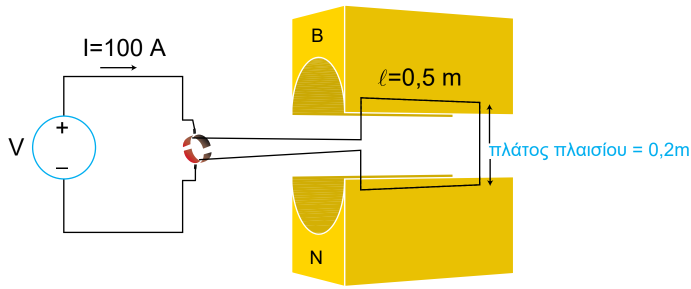
Η δύναμη Laplace που αναπτύσσεται είναι:

$$f = B \cdot I \cdot \ell = 0{,}8 \cdot 50 \cdot 0{,}5 = 20 \text{ (N)}$$

Εφαρμογή 8η

Σε κινητήρα συνεχούς ρεύματος, ο ρότορας αποτελείται από μια σπείρα που έχει μήκος ℓ =0,5 (m) και πλάτος 0,2 (m). Βρίσκεται δε σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής B = 0,8 (T) και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I = 100 (A). Ζητείται η ροπή του κινητήρα.

Λύση



Η ακτίνα r του κύκλου που διαγράφει το πλαίσιο δίνεται από τη σχέση:

$$r = \frac{\text{πλάτος πλαισίου}}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,1\,\text{m}$$

Άρα η ροπή του κινητήρα είναι:

$T = 2 \cdot F \cdot r = 2(B \cdot I \cdot \ell)r = 2 \cdot 0,8 \cdot 100 \cdot 0,5 \cdot 0,1 = 8$ Nm (το 2 δηλώνει ότι οι αγωγοί που κινούνται κάθετα στο πεδίο είναι δύο)

Εφαρμογή 9η

Ζητείται η ταχύτητα περιστροφής σε (στρ/sec) και (στρ/min) σύγχρονου κινητήρα εναλλασσόμενου ρεύματος ο οποίος έχει 4 πόλους και τροφοδοτείται από τριφασικό δίκτυο συχνότητας 50 Hz.

Λύση

Σύμφωνα με τη σχέση: $n = \frac{f}{p}$ προκύπτει:

$$n = \frac{50}{2} = 25\,\text{στρ/sec}$$

$$n = 25 \cdot 60 = 1500\ \text{στρ/min}$$

Σχόλιο: Επειδή ο κινητήρας έχει 4 πόλους το πλήθος των ζευγών των πόλων είναι 2 άρα P = 2.

Στους σύγχρονους κινητήρες μονοφασικούς - τριφασικούς, η ταχύτητα περιστροφής του δρομέα είναι ίση με την ταχύτητα περιστροφής του μαγνητικού πεδίου του μαγνητικού πεδίου του στάτη ενώ στους ασύγχρονους κινητήρες μονοφασικούς-τριφασικούς, η ταχύτητα του δρομέα είναι πάντοτε μικρότερη από την ταχύτητα περιστροφής του μαγνητικού πεδίου του στάτη $\left(n = \frac{f}{p}\right)$.

11-5. Προβλήματα προς λύση

1° Μετασχηματιστής μετατρέπει τάση 1000 (V) σε 1500 (V). Εάν το δευτερεύον έχει 300 σπείρες, πόσες σπείρες έχει το πρωτεύον του Μ/Σ;

(n_1 = 200 σπείρες)

2° Μ/Σ με: n_1 = 300 σπείρες, I_1 = 2(A), I_2 = 10 (A) και V_1 = 220 (V) πρόκειται να μετατραπεί ώστε να δίνει 110 (V) στο δευτερεύον.

Ζητούνται:

α) ο αριθμός σπειρών $η_2$ του Μ/Σ πριν τη μετατροπή

β) η τάση V_2 του Μ/Σ πριν την μετατροπή

γ) πρέπει να προστεθούν ή να αφαιρεθούν σπείρες από το δευτερεύον του Μ/Σ για να έχει έξοδο 110 (V);

δ) ο αριθμός των σπειρών που πρέπει να προστεθούν ή να αφαιρεθούν

ε) η ισχύς του Μ/Σ πριν και μετά την μετατροπή

(α) n_2 = 60, β = V_2 = 44 (V), γ) θα προστεθούν,
δ) 90 σπείρες, ε) $P_{πριν}$ = 440 (W), $P_{μετά}$ = 440 (W))

3° Βρείτε την ταχύτητα περιστροφής του πλαισίου μιας γεννήτριας εναλλασσόμενου ρεύματος, το οποίο περιστρέφεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο 0,2 (T). Το πλαίσιο έχει 10 σπείρες, μήκος 0,1 m και παράγει τάση 50 (V). Επίσης, βρείτε τη συχνότητα του ρεύματος εάν είναι γνωστό ότι οι πόλοι είναι 4 και το πλάτος του πλαισίου είναι 0,05 m.

(50 m/s, 636,6 Hz)

4° Γεννήτρια συνεχούς ρεύματος το πλαίσιο της οποίας κινείται με ταχύτητα 10 m/s σε μαγνητικό πεδίο 0,5 (T) και έχει μήκος 0,5 m, παράγει τάση 100 (V). Πόσες σπείρες έχει το πλαίσιο;

(20 σπείρες)

5° Ο δρομέας μιας γεννήτριας έχει 100 σπείρες και στρέφεται με ταχύτητα 50 m/s. Το μήκος του δρομέα είναι 0,5 m. Η γενήτρια παράγει τάση 500 (V). Βρείτε α) το πεδίο Β β) πόσο πρέπει να γίνει η ταχύτητα για να παράγει 1000 (V);

(α) B = 0,1 T, β) u = 100 m/s)

6° Σύχρονος κινητήρας AC έχει 6 ζεύγη πόλων και ο δρομέας του περιστρέφεται με ταχύτητα 100 στρ/sec. Βρείτε τη συχνότητα του AC ρεύματος με το οποίο τροφοδοτείται ο κινητήρας.

(600 Hz)

7° Ασύγχρονος τριφασικός κινητήρας έχει 4 ζεύγη πόλων και τροφοδοτείται από τριφασικό ρεύμα 50 Hz. Αν η ισχύς που αποδίδει είναι 500 (W) και η ροπή 7 (Nm) βρείτε την ταχύτητα περιστροφής του μαγνητικού πεδίου και την ταχύτητα περιστροφής του δρομέα.
(Δίνεται η σχέση $P = T \cdot 2\pi\ n$, όπου P : ισχύς, T = ροπή, n : ταχύτητα δρομέα).

(12,5 στρ/s, 11,36 στρ/s)

8° Κινητήρας DC χρησιμοποιείται για τη κίνηση ηλεκτρικού οχήματος. Εάν η τάση τροφοδοσίας του κινητήρα είναι 500 (V) και αποδίδει ισχύ 20 (KW), ο δε δρομέας του έχει μήκος 0,6 m, πλάτος 0,4 m και 40 σπείρες και κινείται σε πεδίο 0,8 T, βρείτε την ροπή και τη ταχύτητα περιστροφής του δρομέα εάν ο βαθμός απόδοσης του κινητήρα είναι 0,8.
(Δίνεται: $P = T \cdot 2\pi n$)

(T = 96 Nm, η = 33 στρ/sec)

— ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α —

Μέθοδος Cramer

Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους είναι:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \qquad (A1)$$

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (A2)$$

Εάν $\Delta \neq 0$, το σύστημα (Α1) έχει λύση που δίνεται από τις σχέσεις:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}\ ,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (A3)$$

όπου

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

και

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 \qquad (A4)$$

***Σχόλιο:** Η συνθήκη Δ≠ 0 ισχύει πάντα σε προβλήματα ηλεκτρικών κυκλωμάτων καθότι, ρεύματα και τάσεις στους κλάδους ενός ηλεκτρικού κυκλώματος είναι μεγέθη υπαρκτά. Ως εκτούτου, το σύστημα έχει πάντοτε μονοσήμαντη λύση η οποία δίνεται από τη σχέση (Α3).*

— ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ —

1. **Ηλεκτρικά Κυκλώματα,** Τόμος Α, Γ.Ε. Χατζαράκη, *Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ Ε.*
2. **Ηλεκτροτεχνία** Ι, ΙΙ Γ.Κ. Κοκκινάκη, Γ.Ι. Καρύδη, *Εκδόσεις ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ*
3. **Ηλεκτροτεχνία,** Fowler, *Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ Ε.*
4. **Ηλεκτροτεχνία,** Γ. Βουδούρη
5. **Ηλεκτρονικές Τηλεπικοινωνίες** Freznell, *Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ Ε.*
6. **Ηλεκτρικές Μετρήσεις,** Β.Δ. Μπιτζιώνη, *Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ Ε.*
7. **Electric Circuits,** J. Nilson, ADDISON WESLEY
8. **Electric Circuits** (Problems Solvers), REA'S
9. **Physics,** R.A. Serway, *Saunders College Publishing*
10. **Φυσική Β΄ Τάξη Ενιαίου Λυκείου,** *ΟΕΔΒ*
11. **Φυσική Γ΄ Λυκείου,** *ΟΕΔΒ*
12. **Ηλεκτρικές Μηχανές,** Βασιλακόπουλου Σπυρ. Ν., *Εκδόσεις ΙΔΡΥΜΑ ΕΥΓΕΝΙΔΟΥ*
13. **Ηλεκτρικές Μηχανές DC-AC,** Chapman, Stephen J., *Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ Ε.*

Κωδικός βιβλίου: 0-24-0307
ISBN Set 978-960-06-2857-9
Τ.Α΄ 978-960-06-2858-6

ΙΤΥΕ
ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
ινστιτούτο τεχνολογίας
υπολογιστών & εκδόσεων

(01) 000000 0 24 0307 6