

# ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

## Μαθηματικά

Β' ΕΠΑ.Λ.

ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

# **ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

### **Ομάδα συγγραφής:**

Δρ. Θεόδωρος Αποστολόπουλος, Καθηγητής Τ.Ε.Ι.  
Γεώργιος Καϊτσαρς, Εκπαιδευτικός ΠΕ3, Μαθηματικός

### **Ομάδα κρίσης:**

Βασίλειος Φίλιος, Δρ. Οικονομολόγος  
Ελένη Νικολοπούλου, Εκπαιδευτικός ΠΕ9, Οικονομολόγος  
Σωτήριος Κανελλόπουλος, Εκπαιδευτικός ΠΕ9, Οικονομολόγος

### **Γλωσσική επιμέλεια:**

Μαρία Πολυζώη, Φιλολόγος

### **Συντονιστής:**

Γεώργιος Καϊτσαρς, Εκπαιδευτικός ΠΕ3, Μαθηματικός

### **Ηλεκτρονική Σελιδοποίηση - Διαχωρισμοί:**

Γιώργιος Παπανικολάου Α.Β.Ε.Ε., Ασκληπιδίου 80.

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

**Δρ. Θεόδωρος Αποστολόπουλος, Καθηγητής Τ.Ε.Ι.**  
**Γεώργιος Καΐτσας, Εκπαιδευτικός ΠΕ3, Μαθηματικός**

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε  
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

# **ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Β' ΕΠΑ.Λ.**

**ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ**



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα μαθήματα που διδάσκονται στην Α΄τάξη του Α΄Κύκλου των Τεχνικών Επαγγελματικών Εκπαιδευτηρίων (Τ.Ε.Ε.) περιλαμβάνεται και το μάθημα: «**Οικονομικά Μαθηματικά**».

Τα Οικονομικά Μαθηματικά είναι κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών, ο οποίος ασχολείται με την επίλυση προβλημάτων που δημιουργούνται κυρίως στις τραπεζικές και γενικά στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές. Στα προβλήματα αυτά οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι το **χρήμα** και ο **τόκος**.

Η έκδοση αυτού του βιβλίου έχει διδακτικό χαρακτήρα. Σκοπός του είναι να εφοδιάσει τους απόφοιτους των Τ.Ε.Ε. (Τομέας Οικονομίας και Διοίκησης) με τις βασικές γνώσεις των Μαθηματικών που απαιτούνται στις τραπεζικές και γενικά στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές, ώστε να δημιουργηθούν οι προϋποθέσεις για την ένταξή τους στην αγορά εργασίας ή τη συνέχιση των οικονομικών σπουδών τους στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Το βιβλίο διαιρέθηκε σε τρία μέρη:

Το **Πρώτο Μέρος** περιλαμβάνει τις βασικές μεθόδους της Πρακτικής Αριθμητικής (μέθοδοι των τριών, ποσοστά, μερισμός σε μέρη ανάλογα κ.τ.λ.), τις οποίες συναντάμε συχνά στην καθημερινή πρακτική.

Το **Δεύτερο Μέρος** περιλαμβάνει τις Βραχυπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις και αναφέρεται στη **Θεωρία** και στην **Τραπεζική Πρακτική** σε ζητήματα **Απλού Τόκου**, στις σύγχρονες μορφές καταθέσεων, στη διαδικασία των **Προεξοφλήσεων Συναλλαγματικών** και στην **Αντικατάσταση Γραμματίων**.

Το **Τρίτο Μέρος** περιλαμβάνει τις **Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις**, και αναφέρεται στη θεωρία και στα προβλήματα του **Ανατοκισμού**, των **Ραντών** και των **Δανείων**.

Στο τέλος του βιβλίου ενσωματώσαμε **Πίνακες Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεολυσίων**, οι οποίοι είναι απαραίτητοι για τη λύση των προβλημάτων του **Ανατοκισμού**, των **Ραντών** και των **Δανείων**.

Για την πλήρη κατανόηση, αφομοίωση και εμπέδωση κάθε ζητήματος, παραθέσαμε πολλά παραδείγματα και σχήματα. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει σημαντικός αριθμός προβλημάτων, στα οποία δίνεται η απάντηση, ώστε ο μαθητής να επαληθεύει τη λύση κάθε προβλήματος.

Οι συγγραφείς θεωρούν υποχρέωσή τους να ευχαριστήσουν τους κριτές Κυρία **Νικολοπούλου Ελένη** και τους Κυρίους **Φίλιο Βασίλειο** και **Καντελλόπουλο Σωτήριο**, καθώς και τη φιλόλογο Κυρία **Παπαζώη Μαρία**, για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους και τη συμβολή τους στην έκδοση αυτού του βιβλίου.

*Οι συγγραφείς*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

|                |   |
|----------------|---|
| Πρόλογος ..... | 7 |
|----------------|---|

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Διάκριση των Μαθηματικών .....                                                           | 17 |
| 1.2. Οικονομικά Μαθηματικά. Έννοια και διαίρεση αυτών .....                                   | 17 |
| 1.3. Θεμελιώδεις οικονομικές έννοιες .....                                                    | 19 |
| 1.4. Βασικοί ορισμοί .....                                                                    | 25 |
| 1.5. Απλός και Σύνθετος Τόκος. Βραχυπρόθεσμες και<br>Μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις ..... | 27 |
| Ερωτήσεις .....                                                                               | 30 |

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ - ΠΟΣΟΣΤΑ

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Είδη ποσών. Ποσά ανάλογα. Ποσά αντίστροφα ..... | 33 |
| 2.2. Απλή μέθοδος των τριών .....                    | 37 |
| 2.3. Σύνθετη μέθοδος των τριών .....                 | 42 |
| 2.4. Ποσοστά .....                                   | 47 |
| 2.4.1. Βασικές έννοιες και ορισμοί .....             | 47 |

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 2.4.2. Εύρεση του ποσοστού .....             | 50 |
| 2.4.3. Εύρεση του αρχικού ποσού .....        | 52 |
| 2.4.4. Εύρεση του τόσο τοις % ή τοις ‰ ..... | 54 |
| Προβλήματα .....                             | 56 |

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

#### ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Αριθμοί: Ανάλογοι προς άλλους, αντίστροφοι και<br>αντιστρόφως ανάλογοι .....               | 59 |
| 3.2. Προβλήματα μερισμού .....                                                                  | 60 |
| 3.2.1. Μερисμός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα .....                                                 | 60 |
| 3.2.2. Μερисμός σε μέρη ανάλογα ακέραιων αριθμών .....                                          | 62 |
| 3.2.3. Μερисμός σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών .....                                       | 63 |
| 3.3. Προβλήματα εταιρείας .....                                                                 | 66 |
| 3.3.1. Βασικές έννοιες .....                                                                    | 66 |
| 3.3.2. Μερисμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς<br>τα κεφάλαια συμμετοχής.....                  | 67 |
| 3.3.3. Μερисμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τους<br>χρόνους συμμετοχής.....                 | 70 |
| 3.3.4. Μερисμός Κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τα<br>κεφάλαια και τους χρόνους συμμετοχής..... | 71 |
| Προβλήματα .....                                                                                | 73 |

## ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

### ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

#### ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

|                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1. Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα, μήνες, ημέρες .....                         | 79  |
| 4.1.1. Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα, τρίμηνα .....                                   | 80  |
| 4.1.2. Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες .....                                                   | 81  |
| 4.1.3. Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες.....                                                   | 81  |
| 4.2. Υπολογισμός του απλού τόκου με τους Τοκαρίθμους, τους Σταθερούς Διαιρέτες και τους Σταθερούς Πολλαπλασιαστές .... | 85  |
| 4.3. Υπολογισμός συνολικού τόκου πολλών κεφαλαίων .....                                                                | 88  |
| 4.4. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστό το τελικό κεφάλαιο (αυξημένο κατά τους τόκους του κεφάλαιο).....   | 90  |
| 4.5. Προβλήματα στα οποία δίνεται το κεφάλαιο ελαττωμένο κατά τον τόκο του .....                                       | 95  |
| 4.6. Είδη Καταθέσεων .....                                                                                             | 97  |
| 4.7. Καταθέσεις Ταμιευτηρίου .....                                                                                     | 97  |
| 4.8. Καταθέσεις Όψεως .....                                                                                            | 101 |
| 4.9. Καταθέσεις Ταμιευτηρίου με προειδοποίηση.....                                                                     | 103 |
| 4.10. Καταθέσεις Προθεσμίας.....                                                                                       | 104 |
| 4.11. Καταθέσεις σε κοινό λογαριασμό (Joint Account).....                                                              | 106 |
| 4.12. Τρεχούμενοι Λογαριασμοί Καταθέσεων .....                                                                         | 106 |
| Ερωτήσεις .....                                                                                                        | 107 |
| Προβλήματα απλού τόκου .....                                                                                           | 108 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΜΕ ΑΠΛΟ ΤΟΚΟ

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1. Βασικές οικονομικοεμπορικές έννοιες και ορισμοί.....                         | 111 |
| 5.2. Προεξόφληση χωρίς έξοδα .....                                                | 118 |
| 5.2.1. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή<br>η ονομαστική αξία..... | 118 |
| 5.2.2. Διαφορά των δύο προεξοφλημάτων .....                                       | 120 |
| 5.2.3. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή<br>η παρούσα αξία .....   | 121 |
| 5.2.4. Εύρεση της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η<br>ονομαστική αξία.....      | 121 |

#### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.3. Προεξόφληση με έξοδα .....                                             | 122 |
| 5.4. Εύρεση της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική<br>αξία ..... | 124 |
| 5.5. Εύρεση του πραγματικού επιτοκίου στην προεξόφληση .....                | 125 |
| 5.6. Πινάκιο Προεξοφλήσεων .....                                            | 127 |
| Ερωτήσεις .....                                                             | 132 |
| Προβλήματα προεξόφλησης.....                                                | 132 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1. Βασικές έννοιες και ορισμοί.....                                          | 137 |
| 6.2. Εύρεση της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου .....                 | 138 |
| 6.3. Εύρεση της ονομαστικής αξίας ή της λήξης οποιουδήποτε<br>γραμματίου ..... | 143 |
| 6.4. Εύρεση της κοινής λήξης .....                                             | 145 |
| 6.5. Εύρεση της μέσης λήξης .....                                              | 147 |
| Προβλήματα αντικατάστασης γραμματίων.....                                      | 148 |

## ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

### ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

##### ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ ή ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1. Γενικά .....                                                                                         | 153 |
| 7.2. Εύρεση της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου τοκισμένου με<br>ανατοκισμό. Γενικός τύπος ανατοκισμού ..... | 155 |
| 7.2.1. Εύρεση του $K_n$ όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ακέραιες<br>χρονικές περιόδους .....                  | 156 |
| 7.2.2. Εύρεση του $K_n$ όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μεικτό<br>αριθμό χρονικών περιόδων .....              | 160 |
| 7.3. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου (παρούσας αξίας) .....                                                  | 164 |
| 7.4. Προεξόφληση με ανατοκισμό .....                                                                      | 166 |
| Προβλήματα Ανατοκισμού .....                                                                              | 169 |

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

##### ΡΑΝΤΕΣ

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.1. Ορισμοί, κατάταξη και σύμβολα ραντών .....                         | 171 |
| ΠΡΟΣΚΑΙΡΕΣ ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΡΑΝΤΕΣ                                              |     |
| 8.2. Εύρεση της αρχικής (παρούσας) αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας ...       | 176 |
| 8.2.1. Άμεση Ράντα .....                                                | 176 |
| 8.2.2. Μέλλουσα Ράντα .....                                             | 179 |
| 8.2.3. Αρξάμενη Ράντα .....                                             | 182 |
| 8.3. Εύρεση της αρχικής (παρούσας) αξίας προκαταβλητέας<br>ράντας ..... | 183 |
| 8.4. Εύρεση της τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας .....                | 188 |
| 8.5. Εύρεση της τελικής αξίας προκαταβλητέας ράντας .....               | 191 |
| Ερωτήσεις .....                                                         | 194 |
| Προβλήματα Ραντών .....                                                 | 194 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

### ΔΑΝΕΙΑ

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| 9.1. Βασικές έννοιες και διάκριση δανείων..... | 197 |
|------------------------------------------------|-----|

#### ΔΑΝΕΙΑ ΕΝΙΑΙΑ

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.2. Δάνεια ενιαία εξοφλητέα εφάπαξ.....                                          | 200 |
| 9.3. Δάνεια ενιαία εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς .....                                | 204 |
| 9.3.1. Απόσβεση ενιαίων δανείων με τη μέθοδο του σταθερού<br>χρεολυσίου .....     | 205 |
| 9.3.2. Απόσβεση ενιαίων δανείων με τη μέθοδο του<br>προοδευτικού χρεολυσίου ..... | 207 |
| Ερωτήσεις.....                                                                    | 214 |
| Προβλήματα Δανείων .....                                                          | 215 |

|                   |     |
|-------------------|-----|
| BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ..... | 219 |
|-------------------|-----|

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ - ΠΑΝΤΩΝ - ΧΡΕΟΛΥΣΙΩΝ ..... | 221 |
|-------------------------------------------------|-----|

*Για την υποβοήθηση της αναγνωσιμότητας, εκτός από σχήματα, πίνακες και διάφορα πλαίσια, έχουν χρησιμοποιηθεί και αρκετά εικονίδια τα οποία χαρακτηρίζουν το μέρος του κειμένου που συνοδεύουν.*

***Τα εικονίδια αυτά και η σημασία τους είναι:***



**Ορισμός – Τύπος**

---



**Παρατηρήσεις – Σημειώσεις**

---



**Προβλήματα**

---



**Χρήσιμη Πληροφορία**

---



**Λέξεις Κλειδιά**

---



**Βιβλιογραφία**

---



**Ερωτήσεις**

---



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1. Διάκριση των Μαθηματικών

Τα Μαθηματικά διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: στα Θεωρητικά και στα Εφαρμοσμένα.

**Θεωρητικά Μαθηματικά** είναι το σύνολο των κλάδων της Μαθηματικής Επιστήμης, οι οποίοι ασχολούνται με τη θεωρητική θεμελίωση, διερεύνηση και απόδειξη των νόμων (αξιωμάτων), στους οποίους στηρίζεται η Μαθηματική Επιστήμη.

**Εφαρμοσμένα Μαθηματικά** είναι το σύνολο των κλάδων των διάφορων επιστημών (Αστρονομία, Μετεωρολογία, Οικονομική, Οικονομετρία, Στατιστική, Φυσική, κ.τ.λ.), οι οποίες θεμελιώνονται όχι μόνο στους δικούς τους νόμους αλλά και στους νόμους (αξιιώματα) της Μαθηματικής Επιστήμης. Ένας από τους κλάδους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών είναι τα **Οικονομικά Μαθηματικά**.

### 1.2. Οικονομικά Μαθηματικά. Έννοια και διαίρεση αυτών

Συνέπεια της ευρύτατης χρήσης των Μαθηματικών στην Οικονομική Επιστήμη ήταν, πριν από λίγα χρόνια, η πλήρης διάσταση απόψεων σχετικά με τα όρια των **Οικονομικών Μαθηματικών**, της **Μαθηματικής**

**Οικονομικής, των Γενικών Μαθηματικών για Οικονομολόγους και της Οικονομετρίας.** Σήμερα τέθηκαν κάποια σύνορα, τα οποία, όσο ασαφή και αμφιλεγόμενα και αν είναι, διευκολύνουν την ταξινόμηση της ύλης των Μαθηματικών των Οικονομικών Σχολών. Έτσι διακρίνουμε: **Μαθηματικά για Οικονομολόγους (Mathematics for Economists)** και **Οικονομικά Μαθηματικά (Mathematics of Finance).**

Τα **Μαθηματικά για Οικονομολόγους** είναι Μαθηματικά γι' αυτούς που σπουδάζουν Οικονομικές Επιστήμες. Ο αντικειμενικός σκοπός των Μαθηματικών για Οικονομολόγους δεν είναι η σπουδή καθαρών (*pure*) Μαθηματικών αλλά η σπουδή της ποσοτικής μεταβολής των οικονομικών μεγεθών και η τεχνική της εξεύρεσης παραδεκτών λύσεων διάφορων προβλημάτων της Οικονομικής Επιστήμης.

Τα **Οικονομικά Μαθηματικά** είναι κλάδος των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών** και αποτελούν τη μαθηματική ανάλυση, η οποία εφαρμόζεται στα ζητήματα, στα οποία υπεισέρχεται ως βασικός παράγοντας το **χρήμα**.

Τα Οικονομικά Μαθηματικά είναι τα **Μαθηματικά των Οικονομικών Πράξεων** και υποδιαιρούνται σε δύο κλάδους:

- α) Ο πρώτος κλάδος ασχολείται με προβλήματα, τα οποία δημιουργούνται στις τραπεζικές και χρηματοοικονομικές συναλλαγές. Στα προβλήματα αυτά οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι το **χρήμα** και ο **τόκος**. Τα Μαθηματικά που ασχολούνται με τέτοια προβλήματα, ονομάζονται **Τραπεζικά Μαθηματικά ή Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά (Mathematics of Finance).**
- β) Ο δεύτερος κλάδος ασχολείται με τα προβλήματα των διάφορων ασφαλιστικών οργανισμών και ονομάζονται **Ασφαλιστικά ή Αναλογιστικά Μαθηματικά (Actuarial Mathematics).** Στα προβλήματα αυτά οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι ο **τόκος** και η πιθανότητα πραγματοποίησεως ορισμένων γεγονότων.

### 1.3. Θεμελιώδεις οικονομικές έννοιες

Είπαμε πιο πάνω ότι τα Οικονομικά Μαθηματικά είναι κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, ο οποίος ασχολείται με τη λύση των προβλημάτων στα οποία ο βασικότερος παράγοντας είναι το **χρήμα**. Συνεπώς, είναι απαραίτητο να καθοριστεί η έννοια και ο ορισμός του χρήματος.

Είναι γεγονός ότι οι συναλλαγές των πρωτόγονων ανθρώπων είχαν τη μορφή του λεγόμενου **αντιπραγματισμού** (= ανταλλαγή σε είδος). Π.χ. ο Α έδινε στο Β τυρί, πρόβατο και έπαιρνε ελαιόλαδο, σιτάρι κ.τ.λ. Στην πρωτόγονη, λοιπόν, οικονομία οι άνθρωποι χρησιμοποίησαν ως ανταλλακτικά μέσα διάφορα αγαθά όπως το σιτάρι, τα δέρματα, το αλάτι, τα ζώα, τα κοχύλια, το ρύζι κ.ά. Όλα όμως αυτά τα αγαθά, εκτός του ότι αλλοιώνονταν με την πάροδο του χρόνου, ήταν ογκώδη και δε μεταφέρονταν εύκολα γι' αυτό εγκαταλείφθηκαν σιγά-σιγά όλα και οι άνθρωποι στράφηκαν προς τα διάφορα μέταλλα και κυρίως στα πολύτιμα μέταλλα: τον άργυρο και το χρυσό.

Με την πάροδο όμως του χρόνου και την εξέλιξη του πολιτισμού, οι άνθρωποι επινόησαν ένα κοινό ανταλλακτικό μέσο όλων των αγαθών και του έδωσαν το όνομα **χρήμα**. Στη σύγχρονη ανταλλακτική οικονομία, το χρήμα εμφανίζεται με διάφορες μορφές. Οι οικονομολόγοι δεν έχουν συμφωνήσει σε μια κοινή ορολογία για τον ορισμό του χρήματος. Θα αναφέρουμε μερικούς σχετικούς ορισμούς.

**Ορισμοί του χρήματος.** Με τη στενή έννοια του όρου, **Χρήμα (Money)** είναι το γενικό ανταλλακτικό μέσο και το κοινό μέτρο των αξιών όλων των αγαθών και υπηρεσιών. Ειδικότερα:

- (i) Το σύνολο των χαρτονομισμάτων και κερμάτων που βρίσκονται σε κυκλοφορία ονομάζεται νομισματική κυκλοφορία ή «ξεστό χρήμα» και συμβολίζεται με το  $M_0 = \text{Χαρτονομίσματα} + \text{Κέρματα}$ .
- (ii) Αν στο  $M_0$  προστεθούν οι καταθέσεις όψεως των ιδιωτών στις τράπεζες, τότε το άθροισμα που προκύπτει αποτελεί την προσφορά χρήματος με το στενό ορισμό της  $M_1$ . Δηλαδή:

$$M_1 = \text{Χαρτονομίσματα} + \text{Κέρματα} + \text{Καταθέσεις Όψεως}$$



- (iii) Αν στην ποσότητα του χρήματος  $M_1$  προστεθούν οι Καταθέσεις Ταμιευτηρίου και Προθεσμίας των ιδιωτών, τα Repos καθώς και τα Τραπεζικά Ομόλογα, το προκύπτον άθροισμα αποτελεί την προσφορά χρήματος που συμβολίζεται με το  $M_3$ . Δηλαδή:

$$M_3 = M_1 + \text{Καταθέσεις Ταμιευτ. και Προθεσμίας} + \text{Repos} + \text{Τραπεζικά Ομόλογα}$$

- (iv) Αν, τέλος, στο  $M_3$  προσθέσουμε τα Έντοκα Γραμμάτια του Δημοσίου και τα Ομόλογα του Δημοσίου, που έχουν διάρκεια μέχρι και ενός έτους, τότε προκύπτει ένα ακόμη χρηματικό μέγεθος, που συμβολίζεται με το  $M_4$ . Δηλαδή:

$$M_4 = M_3 + \text{Έντοκα Γραμμάτια} + \text{Ομόλογα Δημοσίου}$$

Το κοινό μέτρο, με το οποίο μετριέται η αξία όλων των αγαθών, ονομάζεται νομισματική μονάδα. Κάθε χώρα έχει τη δική της νομισματική μονάδα. Η Ελλάδα το Ευρώ, οι Η.Π.Α. το Δολλάριο (\$), η Γερμανία το Ευρώ, η Αγγλία τη Λίρα (£), η Γαλλία το Ευρώ, η Ιταλία το Ευρώ, η Ιαπωνία το Γιέν (Yen) κτλ. Ο Πίνακας 1.1 περιέχει τις νομισματικές μονάδες (με τις υποδιαίρέσεις τους) διαφόρων χωρών του κόσμου.

Από την 1η Ιανουαρίου 2002 τα κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης χρησιμοποιούν τη νέα νομισματική μονάδα, που ονομάζεται **EURO**, **ΕΥΡΩ** (Γιούρο, Εύρω ή Ευρώ).



**Πίνακας 1.1**  
**Νομισματικές μονάδες διαφόρων χωρών**

| Χώρες            | Ονομασία Νομίσματος         | Υποδιαίρεσεις           |
|------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Αίγυπτος         | Λίρα Αιγύπτου (E. Pound)    | 100 Πιάστρες (Piastres) |
| Αργεντινή        | Πέζο (Peso)                 | 100 Σεντάβος (Centavos) |
| Αυστραλία        | Δολλάριο (Austr. Dollar)    | 100 Σέντς (Cents)       |
| Αυστρία          | Σελλίνι (Shelling)          | 100 Γκρόσεν (Groschen)  |
| Βέλγιο           | Ευρώ                        | 100 Λεπτά               |
| Βραζιλία         | Κρουζέϊρο (Cruseiro)        | 100 Σεντάβος (Centavos) |
| Γαλλία           | Ευρώ                        | 100 Λεπτά               |
| Γερμανία         | Ευρώ                        | 100 Λεπτά               |
| Γιουγκοσλαβία    | Δηνάριο (Yug. Dinar)        | 100 Πάρας (Paras)       |
| Δανία            | Κορώνα Δ. (D. krone)        | 100 Όρε (Ore)           |
| Ελβετία          | Ελβ. Φράγκο (S. Franc)      | 100 Σαντίμ (Centimes)   |
| Ηνωμένο Βασίλειο | Λίρα Αγγλίας (U.K. Pound)   | 100 Πέννες (New Pence)  |
| Η.Π.Α            | Δολλάριο (US. Dollar)       | 100 Σέντς (Cents)       |
| Ιαπωνία          | Γιέν (Yen)                  | 100 Σέν (Sen)           |
| Ινδία            | Ρουπία (Rupee)              | 100 Πάιζ (Paise)        |
| Ιράν             | Ριάλ (Rial)                 | 100 Δηνάρια (Dinars)    |
| Ισπανία          | Ευρώ                        | 100 Λεπτά               |
| Ισραήλ           | Λίρα Ισραήλ (Isr. Pound)    | 100 Αγκορό (Agorot)     |
| Ιταλία           | Ευρώ                        | 100 Λεπτά               |
| Καναδάς          | Δολλάριο Καν. (Can. Dollar) | 100 Σέντς (Cents)       |
| Κουβέιτ          | Δηνάριο (K. Dinar)          | 10 Ντιρχάμ (Dirhams)    |
| Κύπρος           | Λίρα Κύπρου (C. Pound)      | 100 Σέντς (Cents)       |
| Λίβανος          | Λίρα Λιβ. (Leb. Pound)      | 100 Πιάστρες (Piastres) |
| Μεξικό           | Πέζο (Peso)                 | 100 Σεντάβος (Centavos) |
| Νορβηγία         | Κορώνα Νορβ. (Nor. Krone)   | 100 Όρε (Ore)           |
| Ολλανδία         | Ευρώ                        | 100 Λεπτά               |
| Πορτογαλλία      | Ευρώ                        | 100 Λεπτά               |
| Σαουδική Αραβία  | Ριάλ (Rial)                 | 100 Χαλάλας (Halalas)   |
| Σοβιετική Ένωση  | Ρούβλι (Rouble)             | 100 Κόπεκς (Kopecks)    |
| Σουηδία          | Κορώνα Σουηδ. (S. Krona)    | 100 Όρε (Ore)           |
| Τουρκία          | Λίρα Τουρκίας (Turk. Lira)  | 100 Κουρούς (Kurus)     |
| Χόνγκ Κόνγκ      | Δολλάριο Χ.Κ. (H.K. Dollar) | 100 Σέντς (Cents)       |
| Φινλανδία        | Ευρώ                        | 100 Λεπτά               |

Από τις αρχές του 1999 και ως το 2002 το **ΕΥΡΩ (EURO)** ήταν νόμισμα λογιστικό. Εχρησιμοποιείτο δηλαδή για καταθέσεις, για μεταφορά κεφαλαίων και για αγορά με επιταγές ή με πιστωτικές κάρτες. Στη μεταβατική αυτή περίοδο το Ευρώ θα χρησιμοποιείται παράλληλα με τα εθνικά νομίσματα.

Το **Ευρώ** κυκλοφορεί σε χαρτονομίσματα των 5, 10, 20, 50, 100, 200 και 500 ευρώ και σε κέρματα του ενός και των δύο ευρώ και σε υποδιαίρεσεις ευροσέντ.

Στα χαρτονομίσματα του ευρώ, απεικονίζονται δύο κυρίως θέματα: Το ένα αναφέρεται στις «**Εποχές και τους Ρυθμούς της Ευρώπης**» και αντανakλά την πολιτιστική κληρονομιά της, ενώ το άλλο είναι ένα σύγχρονο ή αφηρημένο σχέδιο. Όσον αφορά το πρώτο θέμα, σε κάθε χαρτονόμισμα διαφορετικής αξίας παρουσιάζονται οι δεσπόζοντες αρχιτεκτονικοί ρυθμοί κατά τη διάρκεια επτά (7) περιόδων της πολιτιστικής ιστορίας της Ευρώπης: Κλασική, Ρωμανική, Γοτθική, Αναγέννηση, Μπαρόκ και Ροκοκό. Οι ρυθμοί αυτοί αντιστοιχούν στα χαρτονομίσματα των 5, 10, 20, 50, 200 και 500 Ευρώ. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται σε τρία βασικά αρχιτεκτονικά στοιχεία: Παράθυρα, πύλες και γέφυρες. Οι παραστάσεις αυτές επελέγησαν, διότι παρουσιάζουν διαχρονικά την ανάπτυξης τέχνης, της τεχνικής και της επικοινωνίας στην Ευρώπη.

Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στο μέγεθος των χαρτονομισμάτων, τα οποία είναι διαφορετικών διαστάσεων -όσο αυξάνεται η αξία τους τόσο μεγαλώνουν και οι διαστάσεις τους- ώστε να αναγνωρίζονται εύκολα από άτομα που έχουν προβλήματα όρασης. Στις δύο πλευρές των χαρτονομισμάτων, στην ίδια θέση, αναγράφεται με μεγάλους και ευανάγνωστους αριθμούς η ονομαστική αξία τους. Κάτω από τους αριθμούς αναγράφεται η ονομασία του χαρτονομίσματος, τόσο με λατινικά στοιχεία όσο και με ελληνικά στοιχεία (EURO-ΕΥΡΩ). Τα ευροχαρτονομίσματα και τα ευροκέρματα (βλ Εικόνα 1.1) έχουν τεθεί σε κυκλοφορία από την 1η Ιανουαρίου του 2002 στις παρακάτω υποδιαίρεσεις (Βλέπε Πίνακα 1.2). Το ισότιμο ποσό σε δραχμές προσδιορίστηκε με μια ισοτιμία: 1 ευρώ = 341 δρχ.

(Αμετάκλητη ισοτιμία: 1 Ευρώ = 340,750 δρχ).

Εικόνα 1.1  
Ευροχαρτονομίσματα και Ευροκέρματα



Πίνακας 1.2

| Ευροκέρματα |                     | Ευροχαρτονομίσματα |                     |
|-------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| Ευρώ        | Δραχμικό<br>ισότιμό | Ευρώ               | Δραχμικό<br>ισότιμό |
| 1,00        | 341                 | 5                  | 1.704               |
| 2,00        | 682                 | 10                 | 3.408               |
| 0,50        | 170                 | 20                 | 6.815               |
| 0,20        | 68                  | 50                 | 17.038              |
| 0,10        | 34                  | 100                | 34.075              |
| 0,05        | 17                  | 200                | 68.150              |
| 0,02        | 7                   | 500                | 170.375             |
| 0,01        | 3                   |                    |                     |

(Οι μετατροπές και στρογγυλοποιήσεις γίνονται σύμφωνα με τον κανονισμό ΕΚ 1103/97, όπως ισχύει, και το νόμο 2842/2000)

Για τη μετατροπή από **ευρώ** σε δραχμές το χρηματικό ποσό του ευρώ θα πολλαπλασιάζεται με συντελεστή μετατροπής του εθνικού νομίσματος (δραχμές), π.χ., για να μετατρέψουμε 100 **ευρώ** σε δραχμές, πολλαπλασιάζουμε με το 340,750  $\delta\rho\chi = 1$  ευρώ. Δηλαδή:  $340,750 \times 100 = 34.075$   $\delta\rho\chi$ . ή, αντίστροφα, για να μετατρέψουμε δραχμές σε ευρώ, διαιρούμε με το 340,750. Π.χ.  $34.075$   $\delta\rho\chi$ :  $340,750 = 100$  ευρώ.

**Χρονοδιάγραμμα μετάβασης στο ευρώ.** Τα κυριότερα χρονικά σημεία της εισαγωγής του ευρώ είναι τα εξής:

**1η Ιανουαρίου 1999:** Το Ευρωπαϊκό Συμβούλιο καθόρισε αμετάκλητα τις συναλλαγματικές ισοτιμίες των νομισμάτων των χωρών σε σχέση με το **ευρώ**. Το **ευρώ** καθίσταται αυτετέλες νόμισμα, ενώ το ECU καταργείται. Τίθεται σε λειτουργία ο νέος Μηχανισμός Συναλλαγματικών Ισοτιμιών (Μ.Σ.Ι.). Οι τίτλοι του Δημοσίου (Εντοκα Γραμμάτια και Ομόλογα) εκδίδονται μόνο σε **ευρώ**. Εφαρμογή ενιαίας νομισματικής πολιτικής στη ζώνη του **ευρώ** και διεξαγωγή συναλλαγματικών πράξεων σε **ευρώ**.

**1η Ιανουαρίου 2002:** Το Ευρωπαϊκό Σύστημα Κεντρικών Τραπεζών (ΕΣΚΤ) θέτει σε κυκλοφορία τα τραπεζογραμμάτια και τα κέρματα σε ευρώ και αρχίζει η απόσυρση των εθνικών νομισμάτων. Η Τράπεζα της Ελλάδος, από την 1η Ιανουαρίου 2002 έως την 30ή Ιουνίου 2002 θα αποσύρει 650 τόνους χαρτονομίσματα και 6.000 τόνους κέρματα. Τα κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε.Ε.) εκδίδουν τους νέους τίτλους δημόσιου χρέους σε ευρώ.

**1η Ιουλίου 2002:** Κατάργηση του νομισματικού καθεστώτος των εθνικών χαρτονομισμάτων και κερμάτων. Οριστική απόσυρση των εθνικών χαρτονομισμάτων και κερμάτων.

#### 1.4. Βασικοί ορισμοί

Αν θεωρήσουμε ένα σύνολο νομισμάτων μονάδων, τότε έχουμε την έννοια του χρηματικού ποσού. Ας υποθέσουμε ότι ο Α (οφειλέτης) δανείζεται από τον Β (δανειστή) ένα χρηματικό ποσό 300€ και μετά από ένα έτος ο Α επιστρέφει στον Β 360€. Δηλαδή ο Α επέστρεψε στον Β τις 300€ και επί πλέον 60€ ως αμοιβή για την εξυπηρέτηση που του έκανε ο Β. Δηλαδή το χρηματικό ποσό των 300€ απέκτησε παραγωγική ικανότητα. Το χρηματικό ποσό, το οποίο όταν δανείζεται ή αποταμιεύεται αποκτά παραγωγική ικανότητα, στα Οικονομικά Μαθηματικά ονομάζεται **Κεφάλαιο**. Ωστε: **Κεφάλαιο (Capital) καλείται κάθε χρηματικό ποσό, το οποίο με το δανεισμό ή την αποταμίευσή του αποκτά παραγωγική ικανότητα.** Κατά συνέπεια, τα χρηματικά ποσά που διατηρούμε στο σπίτι μας για τις τρέχουσες ανάγκες μας ή τα δανείζουμε σε φιλικά ή συγγενικά μας πρόσωπα ή ποσά χρημάτων που είναι κρυμμένα μέσα στη γη δεν είναι κεφάλαια από οικονομική άποψη.

Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο οφειλέτης χρησιμοποιεί το κεφάλαιο του δανειστή ονομάζεται χρόνος. Άρα: **Χρόνος (Time) είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ένα χρηματικό ποσό έχει παραγωγική ικανότητα.** Μονάδα μετρήσεως του χρόνου είναι συνήθως το έτος αλλά και οι υποδιαίρεσεις του έτους: το εξάμηνο, ο μήνας και η ημέρα.

Είναι γεγονός ότι, αν ο Α δανειστεί εντόκως από το Β (για ορισμένο



χρόνο) ένα χρηματικό ποσό, ο A (μαζί με την επιστροφή του χρηματικού ποσού) δίνει στο B και μια πρόσθετη αμοιβή για τη χρησιμοποίηση του κεφαλαίου που δανείστηκε. Η πρόσθετη αυτή αμοιβή ονομάζεται Τόκος\*. Ωστε: **Τόκος (Interest)** καλείται η πρόσθετη αμοιβή, την οποία δίνει ο οφειλέτης στο δανειστή, για το δικαίωμα της χρησιμοποίησης ή εκμετάλλευσης του κεφαλαίου του.

Πιο πάνω είπαμε ότι κάθε χρηματικό ποσό το οποίο δανείζουμε εντόκως αποκτά παραγωγική ικανότητα, δηλαδή μετατρέπεται σε κεφάλαιο. Για να μετρήσουμε την παραγωγική ικανότητα του κεφαλαίου, θεωρούμε τον τόκο που παράγει το κεφάλαιο μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο (π.χ. σε ένα έτος). Ο συντελεστής αυτός, ο οποίος μετράει την παραγωγική ικανότητα του κεφαλαίου, ονομάζεται Επιτόκιο. Ωστε: **Επιτόκιο (Interest rate)** είναι ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας για μία χρονική περίοδο.

Στην τραπεζική πρακτική το επιτόκιο εκφράζεται ως ο τόκος των 100€ σε ένα έτος και παριστάνεται με το σύμβολο % (πχ 15%, 20%, κτλ). Όταν λέμε, λόγου χάρη, ότι ο A δανείζει χρήματα με τόκο 20%, εννοούμε ότι τα 100€ σε ένα έτος του δίνουν τόκο 20€. Το επιτόκιο, ανάλογα με τη χρονική περίοδο (έτος, εξάμηνο, μήνα, κτλ.) στην οποία αναφέρεται, ονομάζεται: ετήσιο, εξαμηνιαίο, μηνιαίο, κτλ. Στα επόμενα θα αναφερόμαστε στο ετήσιο επιτόκιο (εκτός αν το πρόβλημα αναφέρει επιτόκιο άλλης περιόδου), το οποίο θα χρησιμοποιείται με δεκαδική μορφή, δηλαδή αντί του 8% θα γράφουμε 0,08, αντί του 12% θα γράφουμε 0,12 κ.τ.λ.

Συνήθως συναντάμε τρία είδη επιτοκίων:



α) **Προεξοφλητικό επιτόκιο (Discount rate)**. Το ύψος του προεξοφλητικού επιτοκίου καθορίζεται κάθε φορά από το Διοικητικό Συμβούλιο της Τράπεζας της Ελλάδος και αποτελεί το βασικό επιτόκιο για τις προεξοφλήσεις των συναλλαγματικών και γραμματίων από τις εμπορικές τράπεζες.

β) **Νόμιμο επιτόκιο**. Η Τράπεζα της Ελλάδος καθορίζει κάθε φορά ένα ανώτατο επιτόκιο, το οποίο δεν μπορεί κανείς να υπερβεί στις συναλλαγές, διαφορετικά χαρακτηρίζεται ως τοκογλύφος και τιμωρείται.

---

\* Η λέξη Τόκος παράγεται από το ρήμα τίκτω, το οποίο σημαίνει γεννώ, παράγω.

γ) **Συμβατικό επιτόκιο.** Πολλές φορές το ύψος του επιτοκίου καθορίζεται συμβατικά μεταξύ του δανειστή και του οφειλέτη· το επιτόκιο αυτό ονομάζεται **συμβατικό**.

### Αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας

Η διαμόρφωση των εξισώσεων, με βάση τις οποίες θα λυθούν τα διάφορα προβλήματα των Οικονομικών Μαθηματικών, βασίζεται σε ορισμένες αρχές (κανόνες), που ρυθμίζουν τις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές, μία από τις οποίες είναι η αρχή της Οικονομικής ισοδυναμίας, που αναφέρει ότι δύο άνισα χρηματικά ποσά σε ορισμένη χρονική στιγμή θεωρούνται οικονομικώς ισοδύναμα. Π.χ. ο Β δανείζεται από τον Α 300€. Ο Β πρέπει να επιστρέψει στον Α μετά ένα έτος 360€. Κατά τη χρονική στιγμή της καταβολής των 300€ υπάρχει οικονομική ισοδυναμία μεταξύ των 300€ και των 360€, τα οποία θα καταβληθούν μετά ένα έτος. Επίσης, κατά τη χρονική στιγμή της καταβολής των 360€ υπάρχει οικονομική ισοδυναμία μεταξύ των 360€ και των 300€, τα οποία πληρώθηκαν πριν από ένα έτος.

### 1.5. Απλός και Σύνθετος τόκος. Βραχυπρόθεσμες και Μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις

Στην προηγούμενη παράγραφο είπαμε ότι, κάθε χρηματικό ποσό που δανείζουμε ή αποταμιεύουμε αποκτά παραγωγική ικανότητα, δηλαδή παράγει τόκο. Ενδιαφέρον για τις συναλλαγές έχει η στιγμή της παραγωγής του τόκου και η μετατροπή του σε κεφάλαιο. Η μετατροπή του τόκου σε κεφάλαιο συνεπάγεται ενσωμάτωση του τόκου στο κεφάλαιο. Η πράξη της ενσωμάτωσης του τόκου στο κεφάλαιο ονομάζεται **κεφαλαιοποίηση** του τόκου.



Από μαθηματικής άποψης, υπάρχουν τρεις τρόποι παραγωγής του τόκου:

- α) Το κεφάλαιο παράγει τόκο στο τέλος του χρονικού διαστήματος  $[0, n]$  εντός του οποίου το κεφάλαιο ήταν **παραγωγικό**.

- β) Το χρονικό διάστημα  $[0, n]$  εντός του οποίου το κεφάλαιο είναι παραγωγικό διαιρείται σε ίσες χρονικές περιόδους. Ο τόκος παράγεται και συγχρόνως κεφαλαιοποιείται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου.
- γ) Το διάστημα  $[0, n]$  δεχόμαστε ότι είναι διαιρεμένο σε χρονικές περιόδους απειροστού μεγέθους. Στην περίπτωση αυτή δεχόμαστε ότι ο τόκος παράγεται και συγχρόνως κεφαλαιοποιείται ανά πάσα χρονική στιγμή.

Στην τραπεζική πρακτική, ο δανειζόμενος ένα κεφάλαιο για μια ορισμένη χρονική περίοδο πρέπει να επιστρέψει στο δανειστή το κεφάλαιο που δανείστηκε και τον τόκο που έχει ήδη παραχθεί. Είναι όμως ενδεχόμενο, στο τέλος της 1ης, 2ης, 3ης, κ.ο.κ. χρονικής περιόδου, να συμβούν τα εξής:

- 1) Ο δανειστής να εισπράττει κάθε φορά τους τόκους και να αφήνει το αρχικό κεφάλαιο να τοκίζεται και για δεύτερη, τρίτη, κτλ. περίοδο, δηλαδή ο δανειστής να εισπράττει κάθε χρονική περίοδο μόνο τον τόκο και κατά τη λήξη του δανείου να εισπράξει και το κεφάλαιο που δάνεισε. Στην περίπτωση αυτή ο τόκος και το κεφάλαιο, σε όλες τις χρονικές περιόδους, παραμένουν τα ίδια και λέμε ότι το δάνειο έγινε με **Απλό Τόκο (Simple Interest)**.
- 2) Ο δανειστής να αφήσει τον τόκο που έχει ήδη παραχθεί στα χέρια του οφειλέτη, με σκοπό να προστεθεί ο τόκος αυτός στο αρχικό κεφάλαιο (δηλαδή να κεφαλαιοποιηθεί), οπότε από την επόμενη χρονική περίοδο θα φέρει τόκο το αρχικό κεφάλαιο συν τον τόκο του αρχικού κεφαλαίου. Το ίδιο θα γίνεται και στις επόμενες χρονικές περιόδους έως τη λήξη του δανείου. Στην περίπτωση αυτή, τόσο ο τόκος όσο και το τοκιζόμενο κεφάλαιο αυξάνονται κάθε χρονική περίοδο και λέμε ότι το δάνειο έγινε με **Σύνθετο Τόκο (Compound Interest)** ή με **Ανατοκισμό**.

Κατά τη λύση των διάφορων προβλημάτων των Οικονομικών Μαθηματικών γίνονται ορισμένες αλγεβρικές πράξεις, οι οποίες ονομάζονται **Οικονομικές Πράξεις**, γιατί τα συμπλεκόμενα ποσά (κεφάλαιο, τόκος κτλ.)



είναι οικονομικά μεγέθη. Οι οικονομικές πράξεις διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- 1) **Βραχυπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις**, δηλαδή οικονομικές πράξεις χρονικής διάρκειας τριών μηνών ή το πολύ ενός έτους. Τέτοιες οικονομικές πράξεις είναι: Ο **Απλός Τόκος**, η **Προεξόφληση Συναλλαγματικών και Γραμματίων**, η **Αντικατάσταση Γραμματίων**, κτλ.
- 2) **Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις**, δηλαδή οικονομικές πράξεις χρονικής διάρκειας μεγαλύτερης του έτους. Μερικοί κάνουν τη διάκριση των Μακροπρόθεσμων Οικονομικών Πράξεων σε Μεσοπρόθεσμες (ένα έως τρία ή πέντε χρόνια) και Μακροπρόθεσμες (όταν αφορούν σε χρονικό διάστημα μεγαλύτερο από τρία ή πέντε χρόνια). Τέτοιες οικονομικές πράξεις είναι ο Ανατοκισμός, οι Ράντες και τα Δάνεια.

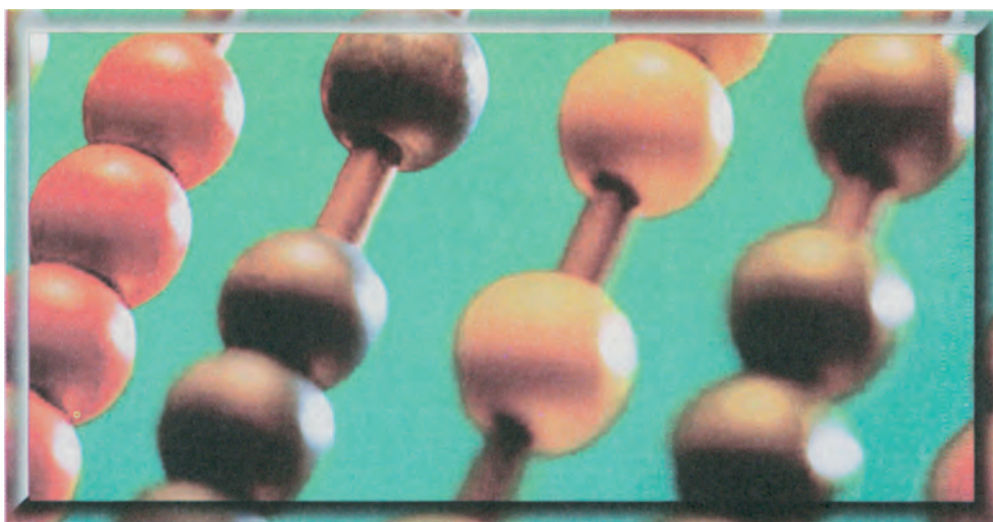
## Ερωτήσεις

1. Τι είναι Χρήμα;
2. Τι είναι  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_3$  και  $M_4$ ;
3. Τι είναι το EURO (ΕΥΡΩ); Ποιες είναι οι υποδιαιρέσεις του και ποιο το χρονοδιάγραμμα μετάβασης στο ευρώ;
4. Τι είναι Κεφάλαιο, Τόκος, Επιτόκιο;
5. Τι είναι απλός και τι σύνθετος τόκος ή ανατοκισμός;
6. Τι είναι Βραχυπρόθεσμες, Μεσοπρόθεσμες και Μακροπρόθεσμες Οικονομικές πράξεις;



# **ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ**

## **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ**





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΠΟΣΟΣΤΑ

### 2.1. Είδη ποσών. Ποσά ανάλογα. Ποσά αντίστροφα

**Είδη ποσών.** Κάθε πράγμα που μπορεί να αυξηθεί ή να ελαττωθεί, ονομάζεται **ποσό** ή **μέγεθος**. Π.χ., το βάρος ενός εμπορεύματος, το μήκος ενός υφάσματος, το ύψος και το πλάτος ενός γεωμετρικού σχήματος, οι καταθέσεις σε ένα ταμιευτήριο, ο τόκος των καταθέσεων, κτλ. είναι ποσά.

Κάθε ποσό που μπορεί να πάρει διάφορες τιμές λέγεται **μεταβλητό ποσό**. Π.χ. η τιμή ενός αγαθού, το βάρος ενός εμπορεύματος, το μήκος ενός υφάσματος, η θερμοκρασία, κτλ. είναι μεταβλητά ποσά.

Κάθε ποσό που έχει πάντοτε την ίδια αριθμητική τιμή λέγεται **σταθερό ποσό**. Π.χ. ο λόγος μιας περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρό του είναι ένα σταθερό ποσό ( $\pi = 3,14159\dots$ ), η απόσταση από την Αθήνα στην Πάτρα είναι ένα σταθερό ποσό ( $= 240 \text{ km}$ ).

Ας εξετάσουμε τώρα το εξής απλό πρόβλημα: Το 1 μέτρο ενός υφάματος κοστίζει 40€. Πόσο κοστίζουν τα 2, 3, 4 ... μέτρα και πόσο κοστίζει το  $1/2$ ,  $1/4$  ... του μέτρου;

Ο πίνακας 2.1.1 δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ του μήκους του υφάσματος και του κόστους του.

**Πίνακας 2.1.1**

|                     |    |    |     |     |     |               |               |     |
|---------------------|----|----|-----|-----|-----|---------------|---------------|-----|
| Μήκος<br>(σε μέτρα) | 1  | 2  | 3   | 4   | ... | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | ... |
| Κόστος<br>(σε €)    | 40 | 80 | 120 | 160 | ... | 20            | 10            | ... |

Από τον Πίνακα 2.1.1 παρατηρούμε ότι: Αν το μήκος του υφάσματος μεταβληθεί (δηλαδή αυξηθεί ή ελαττωθεί) κατά ορισμένη έννοια, τότε μεταβάλλεται κατά την ίδια έννοια και το κόστος του υφάσματος. Δύο τέτοια ποσά ονομάζονται **συμμεταβλητά** ή **εξαρτημένα ποσά**. Ειδικότερα: Το κόστος του υφάσματος ονομάζεται **εξαρτημένο** μεταβλητό, ενώ το μήκος του λέγεται **ανεξάρτητο** μεταβλητό. Επειδή το κόστος του υφάσματος εξαρτάται από το μήκος του, λέμε ότι το κόστος του υφάσματος είναι **συνάρτηση** του μήκους του.

Συμμεταβλητά ποσά είναι: η περιφέρεια ενός κύκλου και η ακτίνα του· ο χρόνος εργασίας ενός εργάτη και η αμοιβή του με σταθερό ωρομίσθιο· η τιμή ενός εμπορεύματος και το βάρος του· ο φόρος και το εισόδημα· η τιμή και η ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού.

**Ποσά ανάλογα.** Έστω ότι ένας δάσκαλος σχολής οδηγών παίρνει 20€ για κάθε ώρα διδασκαλίας. Πόσα ευρώ θα πάρει σε 2, 3, 4,... ώρες και πόσα ευρώ θα πάρει σε μισή ώρα, σε ένα τέταρτο της ώρας κτλ;

Ο Πίνακας 2.1.2 δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ του χρόνου διδασκαλίας σε ώρες και της αμοιβής του δασκάλου σε ευρώ.

**Πίνακας 2.1.2**

|                     |    |    |    |    |     |               |               |     |
|---------------------|----|----|----|----|-----|---------------|---------------|-----|
| Χρόνος<br>(σε ώρες) | 1  | 2  | 3  | 4  | ... | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | ... |
| Αμοιβή<br>(σε €)    | 20 | 40 | 60 | 80 | ... | 10            | 5             | ... |

Από τους Πίνακες 2.11 και 2.1.2 παρατηρούμε ότι τα ποσά «μήκος» σε μέτρα και «κόστος» σε ευρώ, «χρόνος» σε ώρες και «αμοιβή» σε ευρώ έχουν τέτοια σχέση μεταξύ τους, ώστε, όταν η τιμή του ενός ποσού διπλασιαστεί, τριπλασιαστεί, τετραπλασιαστεί, και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, τετραπλασιάζεται κτλ.

Επίσης, όταν η τιμή του ενός ποσού (π.χ. του μήκους του υφάσματος ή του χρόνου διδασκαλίας) γίνει το μισό ( $1/2$ ), το τέταρτο ( $1/4$ ), κτλ., τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού (π.χ. κόστους ή αμοιβής) γίνεται το μισό, το τέταρτο, κτλ. Δύο τέτοια ποσά ονομάζονται **ανάλογα ποσά**. Συνεπώς, το **μήκος** ενός υφάσματος και το **κόστος** του, ο **χρόνος** εργασίας και η **αμοιβή** της (με σταθερό ωρομίσθιο) είναι ανάλογα ποσά.

Από την παραπάνω ανάλυση συνάγουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Δύο (συμμεταβλητά) ποσά θα τα λέμε ανάλογα, όταν δούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.**



Ως παραδείγματα ανάλογων ποσών μπορούμε να αναφέρουμε: το κόστος ενός υφάσματος είναι ανάλογο προς το μήκος του, η αξία ενός εμπορεύματος είναι ανάλογη προς το βάρος του· η περιφέρεια ενός κύκλου είναι ανάλογη προς την ακτίνα του· η αμοιβή ενός προσώπου (με σταθερό ωρομίσθιο) είναι ανάλογη με το χρόνο εργασίας· ο (απλός) τόκος είναι ανάλογος προς το τοκιζόμενο κεφάλαιο (για τον ίδιο χρόνο τοκισμού και το ίδιο επιτόκιο).

**Παρατήρηση.** Από τον Πίνακα 2.1.1 παίρνουμε δύο τιμές του ποσού «μήκος», π.χ. τις τιμές 2 και 3 και σχηματίζουμε το λόγο τους  $2/3$ . Έπειτα, παίρνουμε τις αντίστοιχες προς αυτές τιμές 80 και 120 του άλλου ποσού «κόστος» και σχηματίζουμε το λόγο τους  $80/120 = 8/12 = 2/3$ .



Από τον πίνακα 2.1.2 παίρνουμε πάλι δύο τιμές, έστω 2 και 4, του ποσού «χρόνος». Αυτές έχουν λόγο:  $2/4 = 1/2$ . Οι αντίστοιχες προς αυτές τιμές 40 και 80 του άλλου ποσού «αμοιβή» έχουν λόγο:  $40/80 = 1/2$ .

Παρατηρούμε ότι δυο (οποιοσδήποτε) τιμές του ενός ποσού έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού.

Ωστε: **Δυο ποσά είναι ανάλογα, αν ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με το λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού.**

**Ποσά αντίστροφα.** Ας εξετάσουμε τώρα το εξής πρόβλημα: Ένας εργάτης για να εκτελέσει ένα έργο χρειάζεται 240 ώρες. Σε πόσες ώρες θα εκτελέσουν το ίδιο έργο 2, 3, 4, ... εργάτες;

Ο πίνακας 2.1.3 δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ του αριθμού των εργατών και του απαιτούμενου χρόνου για την εκτέλεση του έργου.

**Πίνακας 2.1.3**

| Αριθμός εργατών             | 1   | 2   | 3  | 4  | ... |
|-----------------------------|-----|-----|----|----|-----|
| Απαιτούμενος χρόνος σε ώρες | 240 | 120 | 80 | 60 | ... |

Από τον Πίνακα 2.1.3 παρατηρούμε ότι, όταν οι τιμές του ποσού «αριθμός εργατών» πολλαπλασιασθούν επί 2, 3, 4, ... τότε οι αντίστοιχες τιμές του ποσού «χρόνος» διαιρούνται δια 2, 3, 4 ... Με άλλα λόγια, όταν ο αριθμός των εργατών διπλασιαστεί, τριπλασιαστεί, κτλ, τότε για την εκτέλεση του έργου χρειάζεται ο μισός χρόνος, το ένα τρίτο του χρόνου, κτλ.

Δύο ποσά που έχουν μεταξύ τους τέτοια σχέση, ονομάζονται **αντίστροφα ποσά**. Ώστε: **Δυο (συμμεταβλητά) ποσά θα λέμε ότι είναι αντίστροφα, όταν δούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζεται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, διαιρείται η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό ή όταν διαιρείται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζεται η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.**

Αντίστροφα ποσά είναι: Ο αριθμός των τεχνιτών και ο απαιτούμενος χρόνος κατασκευής ενός έργου· η (σταθερή) ταχύτητα ενός κινητού και ο χρόνος που χρειάζεται αυτό, για να διανύσει ορισμένη απόσταση· η ημερήσια κατανάλωση μιας ορισμένης ποσότητας τροφίμων και ο χρόνος κατά τον οποίον θα επαρκέσουν τα τρόφιμα· η ωριαία παροχή μιας βρύσης και ο χρόνος που χρειάζεται, για να γεμίσει μια δεξαμενή· το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδό· ο αριθμός των στροφών που κάνει ένας τροχός, για να διανύσει μια ορισμένη απόσταση και το μήκος της ακτίνας του.



**Παρατήρηση.** Από τον Πίνακα 2.1.3 παίρνουμε δύο τιμές του ενός ποσού (αριθμός εργατών), π.χ. τις 2 και 3, και σχηματίζουμε το λόγο τους  $2/3$ . Έπειτα παίρνουμε τις αντίστοιχες τιμές (120 και 80) του άλλου ποσού (χρόνος σε ώρες) και σχηματίζουμε το λόγο τους  $120/80 = 12/8$ . Συγκρίνοντας τώρα τους δύο λόγους παρατηρούμε ότι:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{12}{8}$$

Εάν όμως αντιστρέψουμε το λόγο  $\frac{12}{8}$  παρατηρούμε ότι:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

**Δύο ποσά είναι αντίστροφα, αν ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού.**

## 2.2. Απλή μέθοδος των τριών

**Προβλήματα με ποσά ανάλογα και ποσά αντίστροφα**

**Πρόβλημα 1ο.** Τα 12 μέτρα ενός υφάσματος κοστίζουν 480 €. Πόσο κοστίζουν τα 8 μέτρα του ίδιου υφάσματος;

**Κατάταξη:**

**Λύση.**

Τα 12 μέτρα κοστίζουν 480 €

Τα 8 μέτρα κοστίζουν x; €

Στο πρόβλημα αυτό, τα ποσά «μήκος» και «κόστος» είναι **ποσά ανάλογα**, διπλάσια, τριπλάσια, κτλ., μέτρα κοστίζουν διπλάσιες, τριπλάσιες, κτλ, δραχμές. Συνεπώς, ο λόγος  $12/8$  των τιμών 12 και 8 του ποσού «μήκος σε μέτρα» είναι ίσος με το λόγο  $480/x$  των αντίστοιχων τιμών 480 και x του ποσού «κόστους σε €».

Δηλαδή ισχύει η αναλογία:



$$\frac{12}{8} = \frac{480}{x}$$

Λύνοντας ως προς  $x$  έχουμε:

$$12 \cdot x = 480 \cdot 8 \Rightarrow x = 480 \cdot \frac{8}{12} = 320$$

Ωστε: Τα 8 μέτρα κοστίζουν 320 €.

**Πρόβλημα 2ο.** Δέκα εργάτες χρειάζονται 2400 ώρες, για να τελειώσουν ένα έργο. Σε πόσες ώρες θα τελειώσουν το ίδιο έργο 12 εργάτες; (Οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση).

**Κατάταξη:**

**Λύση.**

Οι 10 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 2400 ώρες

Οι 12 εργάτες τελειώνουν το έργο σε  $x$ ; ώρες

Στο πρόβλημα αυτό, τα ποσά «αριθμός εργατών» και απαιτούμενος «χρόνος» εκτέλεσης του έργου είναι **ποσά αντίστροφα**, διότι, αφού οι δέκα εργάτες χρειάζονται 2400 ώρες για να τελειώσουν το έργο, οι διπλάσιοι εργάτες θα τελειώσουν το έργο στο μισό του χρόνου και οι τριπλάσιοι εργάτες στο τρίτο του χρόνου. Συνεπώς, ο λόγος 10/12 των τιμών 10 και 12 του ποσού «αριθμός εργατών» είναι ίσος με τον **αντίστροφο λόγο**  $x/2400$  των αντίστοιχων τιμών 2400 και  $x$  του ποσού «χρόνος» σε ώρες. Δηλαδή, ισχύει η εξής αναλογία:

$$\frac{10}{12} = \frac{x}{2400}$$

Λύνοντας ως προς  $x$  έχουμε:

$$12 \cdot x = 10 \cdot 2400 \Rightarrow x = 2400 \cdot \frac{10}{12} = 2000$$

Άρα: Οι 12 εργάτες θα τελειώσουν το έργο σε 2000 ώρες.

Από τη λύση των προβλημάτων 1 και 2 παρατηρούμε τα εξής:

**Παρατήρηση 1η.** Στα προβλήματα αυτά (και τα όμοια με αυτά), δίνονται **τρεις αριθμοί** και ζητείται να βρεθεί **τέταρτος** ( $= x$ ). Γι' αυτό το λόγο ο γενικός τρόπος με τον οποίο λύνονται όλα τα προβλήματα αυτού του είδους, ονομάστηκε **απλή μέθοδος των τριών**.

**Παρατήρηση 2η.** Για τη λύση προβλημάτων με την απλή μέθοδο των τριών πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν τα συμπλεκόμενα ποσά είναι **ανάλογα** ή **αντίστροφα** και έπειτα να εφαρμόσουμε τον ακόλουθο πρακτικό κανόνα:



Για να βρούμε την τιμή του άγνωστου  $x$ , σε ένα πρόβλημα της απλής μεθόδου των τριών, πολλαπλασιάζουμε τον υπεράνω του άγνωστου  $x$  αριθμό επί το σχηματιζόμενο κλάσμα των γνωστών τιμών αντεστραμμένο, αν τα ποσά είναι ανάλογα, και όπως είναι στην κατάταξη, αν τα ποσά είναι αντίστροφα.

**Πρόβλημα 3ο.** Τα 10 κιλά ενός εμπορεύματος αξίζουν 8000 €. Πόσα ευρώ αξίζουν τα 16 κιλά;

**Κατάταξη:**

**Λύση.**

Τα 10 κιλά αξίζουν 8000 €

Τα 16 κιλά αξίζουν  $x$ ; €

Αφού τα 10 κιλά αξίζουν 8000 €, τα διπλάσια κιλά αξίζουν διπλάσια ευρώ. Επομένως, τα ποσά «βάρος» σε κιλά και «αξία» σε € είναι **ανάλογα**. Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκουμε:

$$x = 8000 \cdot \frac{16}{10} = 12800$$

Άρα: τα 16 κιλά αξίζουν 12800 €.

**Πρόβλημα 4ο.** Ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 75km/h διανύει την απόσταση: Αθήνα - Θεσ/νίκη σε 8 ώρες. Με πόση ταχύτητα θα διανύσει την ίδια διαδρομή σε 10 ώρες; (Υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο τρέχει με μια σταθερή ταχύτητα ή όπως λέμε με μια μέση ταχύτητα).

**Κατάταξη:**

**Λύση.**

Με ταχύτητα 75km/h κάνει 8 ώρες

Με ταχύτητα  $x$ ;km/h κάνει 10 ώρες

Αφού με ταχύτητα 75km/h το αυτοκίνητο κάνει τη διαδρομή σε 8 ώρες, για να διανύσει την ίδια απόσταση σε διπλάσιες ώρες πρέπει να τρέχει με τη μισή ταχύτητα από την προηγούμενη. Άρα, τα ποσά «ταχύτητα» και «χρόνος» είναι **αντίστροφα**. Συνεπώς θα έχουμε:

$$x = 75 \cdot \frac{8}{10} = \frac{600}{10} = 60 \text{ km/h}$$

Ωστε: Το αυτοκίνητο πρέπει να τρέχει με (μέση) ταχύτητα 60 km/h, για να διανύσει την απόσταση Αθήνα - Θεσ/νίκη σε 10 ώρες.

### Προβλήματα απλής μεθόδου των τριών



- Τα 23 μέτρα ενός υφάσματος αξίζουν 25,3 €. Πόσα ευρώ αξίζουν τα 15 μέτρα;  
(Απ. 16,5)
- Δέκα εργάτες σκάβουν σε 28 ημέρες ένα κτήμα. Πόσοι εργάτες θα σκάψουν το ίδιο κτήμα σε 8 ημέρες;  
(Απ. 35)
- Με 45 € αγοράζουμε 3 κιλά καφέ. Πόσα κιλά καφέ θα αγοράσουμε με 1230 €;  
(Απ. 82)
- Ένας οικοδόμος σε μια εβδομάδα (= 6 ημέρες) παίρνει 240 €. Πόσες δραχμές θα πάρει για 15 ημέρες εργασίας;  
(Απ. 600)
- Ένα αυτοκίνητο με 45 λίτρα βενζίνης διανύει 450 χιλιόμετρα. Αν τώρα τρέχει με την ίδια ταχύτητα, πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει με 35 λίτρα;  
(Απ. 350)
- Ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 80km/h κάνει τη διαδρομή «Αθήνα - Πάτρα» σε 3 ώρες. Με πόση ταχύτητα θα κάνει την ίδια διαδρομή σε 6 ώρες;  
(Απ. 40 km/h)
- Ένας έμπορος αγόρασε ύφασμα προς 15 € το μέτρο. Τα 2/3 του υφάσματος - τα πούλησε προς 25 € το μέτρο και το υπόλοιπο προς 12 € το μέτρο και κέρδισε συνολικά 1700 €. Πόσα μέτρα ύφασμα είχε αγοράσει;  
(Απ. 300)

8. Ένας έμπορος αγόρασε μοκέτα προς 7 € το μέτρο. Πούλησε τα  $\frac{5}{8}$  της μοκέτας προς 8 € το μέτρο και το υπόλοιπο προς 7,5 € το μέτρο, και κέρδισε συνολικά 650 €. Πόσα μέτρα είχε αγοράσει;  
(Απ. 800)
9. 240 κατασκηνωτές έχουν τρόφιμα για 30 ημέρες. Έπειτα από 10 ημέρες ήλθαν στην κατασκήνωση 60 τουρίστες χωρίς τρόφιμα. Πόσες ημέρες θα επαρκέσουν τα τρόφιμα;  
(Απ. 16)
10. Σε ένα κάστρο ήταν πολιορκημένοι 1000 άνθρωποι και είχαν τρόφιμα για 54 ημέρες. Έπειτα από 18 ημέρες έφτασαν στο κάστρο άλλοι 500 άνθρωποι. Σε πόσες ημέρες θα εξαντληθούν τα τρόφιμα;  
(Απ. 42)
11. Οκτώ άνδρες ή δώδεκα παιδιά εκτελούν ένα έργο σε 30 ημέρες. Έξι άνδρες ή έντεκα παιδιά σε πόσες ημέρες θα εκτελέσουν το ίδιο έργο;  
(Απ. 18)
12. Ένας χονδρέμπορος αγόρασε πατάτες προς 4 € το κιλό πουλάει τα  $\frac{6}{9}$  τους προς 6 € το κιλό και τις υπόλοιπες προς 5 € το κιλό και κερδίζει 25.000 €. Πόσους τόνους είχε αγοράσει;  
(Απ. 15)
13. Ένας έμπορος πούλησε λάδι και κέρδισε ποσό ίσο προς τα  $\frac{10}{94}$  της τιμής πώλησής του. Αν όμως κέρδιζε 340 € περισσότερα, το κέρδος θα ήταν ίσο προς το  $\frac{1}{5}$  της τιμής αγοράς του λαδιού. Να βρεθεί: α) η τιμή πώλησης του λαδιού, β) το κέρδος που είχε από την πώληση και γ) το βάρος του λαδιού, αν με το κέρδος που πραγματοποίησε αγόραζε 20 κιλά λαδιού.  
(Απ. α) 4700 €, β) 500 €, γ) 168 κιλά)
14. Ένας έμπορος αγόρασε ύφασμα προς 420 € το μέτρο. Πούλησε τα  $\frac{2}{5}$  της ποσότητας προς 500 € το μέτρο και τα υπόλοιπα προς 350 € το μέτρο. Αν ζημιώθηκε 5000 €, πόσα μέτρα είχε αγοράσει;  
(Απ. 500)

### 2.3. Σύνθετη Μέθοδος των τριών

*Προβλήματα με ποσά ανάλογα και ποσά αντίστροφα*

**Πρόβλημα 1ο.** Δέκα εργάτες, όταν εργαστούν 8 ημέρες, παίρνουν 3.600 €. Πόσα ευρώ θα πάρουν 14 εργάτες, αν εργαστούν 16 ημέρες;

**Λύση.** Κατατάσσουμε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο, ως εξής:

$$\begin{array}{r} 10 \text{ εργάτες σε } 8 \text{ ημέρες παίρνουν } 3.600 \text{ €} \\ 14 \text{ εργάτες σε } 16 \text{ ημέρες παίρνουν } x; \text{ €} \end{array}$$

**Σύγκριση ποσών.** α) Τα ποσά «εργάτες» και «ευρώ» είναι **ανάλογα**, διότι διπλάσιοι εργάτες για τον ίδιο χρόνο εργασίας θα πάρουν διπλάσια ευρώ. β) Τα ποσά «ημέρες» και «ευρώ» είναι **αντίλογα**, διότι σε διπλάσιες ημέρες οι ίδιοι εργάτες θα πάρουν διπλάσια ευρώ. Παρατηρούμε ότι κάθε ποσό συγκρίνεται με το ποσό του αγνώστου.

Το πιο πάνω πρόβλημα αναλύεται σε δύο προβλήματα της απλής μεθόδου των τριών.

**1α) Οι 10 εργάτες, αν εργαστούν 8 ημέρες, θα πάρουν 3.600 €. Οι 14 εργάτες πόσα ευρώ θα πάρουν;**

**Κατάταξη:**

$$\begin{array}{r} \text{Οι } 10 \text{ εργάτες σε } 8 \text{ ημέρες παίρνουν } 3.600 \text{ €} \\ \text{Οι } 14 \text{ εργάτες σε } 8 \text{ ημέρες παίρνουν } x; \text{ €} \end{array}$$

Επειδή, όπως είπαμε, τα ποσά «εργάτες» και «ευρώ» είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$x = 3.600 \cdot \frac{14}{10} \text{ €}$$

Ωστε: Οι 14 εργάτες, αν εργαστούν 8 ημέρες, θα πάρουν

$$3.600 \cdot \frac{14}{10} \text{ €}$$

**1β) Οι 14 εργάτες, αν εργαστούν 8 ημέρες, θα πάρουν  $3.600 \cdot 14/10$  ευρώ. Πόσα ευρώ θα πάρουν, αν εργαστούν 16 ημέρες;**

**Κατάταξη:**

Οι 14 εργάτες σε 8 ημέρες παίρνουν  $3.600 \cdot \frac{14}{10}$  €

Οι 14 εργάτες σε 16 ημέρες παίρνουν  $x$ ; €

---

Επειδή τα ποσά «ημέρες» και «ευρώ» είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$x = 3.600 \cdot \frac{14}{10} \cdot \frac{16}{8} = 10.080 \text{ €} \quad (E_1)$$

Ωστε: Οι 14 εργάτες, αν εργαστούν 16 ημέρες, θα πάρουν 10.080 ευρώ.

**Πρόβλημα 2ο. Δεκαπέντε εργάτες σκάβουν ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σε 40 ημέρες. Σε πόσες ημέρες 20 εργάτες θα σκάψουν κτήμα 60 στρεμμάτων;**

**Λύση.** Κατατάσσουμε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο, ως εξής:

Οι 15 εργάτες σε 40 ημέρες σκάβουν 40 στρέμματα

Οι 20 εργάτες σε  $x$ ; ημέρες σκάβουν 60 στρέμματα

---

**Σύγκριση ποσών, α)** Τα ποσά «εργάτες» και «ημέρες» είναι **αντίστροφα**, διότι διπλάσιοι εργάτες θα σκάψουν το κτήμα σε μισές ημέρες (αν όλοι οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση και εργάζονται, π.χ., 8 ώρες την ημέρα), β) Τα ποσά «στρέμματα» και «ημέρες» είναι **ανάλογα**, διότι ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σκάβεται από κάποιο αριθμό εργατών σε 40 ημέρες· άλλο κτήμα, με διπλάσιο αριθμό στρεμμάτων, σκάβεται, από τους ίδιους εργάτες, σε διπλάσιο αριθμό ημερών.

Το πιο πάνω πρόβλημα μπορεί να αναλυθεί στα ακόλουθα δύο προβλήματα απλής μεθόδου των τριών:

**2α) Οι 15 εργάτες σκάβουν ένα κτήμα (40 στρεμμάτων) σε 40 ημέρες. Οι 20 εργάτες σε πόσες ημέρες θα σκάψουν το ίδιο κτήμα;**

**Κατάταξη:**

Οι 15 εργάτες σκάβουν το κτήμα σε 40 ημέρες

Οι 20 εργάτες σκάβουν το κτήμα σε  $x$ ; ημέρες

---

Επειδή, όπως είπαμε, τα ποσά «εργάτες» και «ημέρες» είναι αντίστροφα, θα έχουμε:

$$x = 40 \cdot \frac{15}{20} \text{ ημέρες}$$

Ωστε: Οι 20 εργάτες θα σκάψουν το κτήμα των 40 στρεμμάτων σε  $40 \cdot \frac{15}{20}$  ημέρες

**2β) Οι 20 εργάτες, για να σκάψουν το κτήμα των 40 στρεμμάτων, χρειάζονται  $40 \cdot 15/20$  ημέρες. Πόσες ημέρες θα χρειαστούν (οι ίδιοι εργάτες), για να σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων;**

**Κατάταξη:**

Οι 20 εργάτες για 40 στρέμματα χρειάζονται  $40 \cdot \frac{15}{20}$  ημέρες

Οι 20 εργάτες για 60 στρέμματα χρειάζονται  $x$ ; ημέρες

---

Επειδή τα ποσά «στρέμματα» και «ημέρες» είναι, όπως είπαμε, ανάλογα θα είναι:

$$x = 40 \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{60}{40} = 45 \text{ ημέρες} \quad (E_2)$$

Ωστε: Οι 20 εργάτες, θα χρειαστούν 45 ημέρες, για να σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων.

Όπως βλέπουμε, για να λύσουμε τα δύο προηγούμενα προβλήματα, αναλύσαμε το καθένα σε δύο προβλήματα απλής μεθόδου των τριών. Γι' αυτό το λόγο, τα προβλήματα τέτοιου είδους ονομάζονται **προβλήματα σύνθετης μεθόδου των τριών**.

Από τα τελικά εξαγόμενα ( $E_1$ ) και ( $E_2$ ) των πιο πάνω προβλημάτων προκύπτει ο ακόλουθος γενικός κανόνας:

**Για να βρούμε την τιμή του άγνωστου  $x$ , πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που είναι πάνω από τον άγνωστο  $x$  με καθένα από τα κλάσματα που σχηματίζονται από τις δύο άλλες τιμές κάθε ποσού, αντεστραμμένο, αν τα ποσά είναι ανάλογα προς το ποσό του  $x$ , όπως είναι το κλάσμα, αν τα ποσά είναι αντίστροφα προς το ποσό του αγνώστου.**



**Πρόβλημα 3ο.** Δέκα εργάτες, εργαζόμενοι 8 ώρες την ημέρα παίρνουν σε 20 ημέρες 8.000 €. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να εργαστούν 8 εργάτες για να πάρουν σε 15 ημέρες 6.000 €;

**Λύση.** Κατατάσσουμε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο:

Οι 10 εργάτες με 8 ώρες την ημέρα παίρνουν σε 20 ημ. 8.000 €  
 Οι 8 εργάτες με  $x$  ώρες την ημέρα παίρνουν σε 15 ημ. 6.000 €

**Σύγκριση ποσών,** α) Τα ποσά «εργάτες» και «ώρες» είναι αντίστροφα, διότι ο μισός αριθμός εργατών τελειώνει το ίδιο έργο σε διπλάσιες ώρες. β) Τα ποσά «ημέρες» και «ώρες» είναι **αντίστροφα**, διότι σε μισό αριθμό ημερών θα χρειαστούν διπλάσιες ώρες, για να τελειώσουν το έργο οι ίδιοι εργάτες. γ) Τα ποσά «αμοιβή» σε € και «ώρες εργασίας» είναι ανάλογα, διότι για διπλάσιες ώρες, οι ίδιοι εργάτες, παίρνουν διπλάσια αμοιβή. Συνεπώς, σύμφωνα με τον πιο πάνω κανόνα θα έχουμε:

$$x = 8 \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{20}{15} \cdot \frac{6.000}{8.000} = 10 \text{ ώρες}$$

Ωστε: Οι 8 εργάτες, για να πάρουν 6.000 € σε 15 ημέρες, πρέπει να εργάζονται 10 ώρες την ημέρα.



### Προβλήματα σύνθετης μεθόδου των τριών

1. Δεκαέξι εργάτες σε δώδεκα ημέρες σκάβουν ένα αγρόκτημα είκοσι τεσσάρων στρεμμάτων. Σε πόσες ημέρες είκοσι εργάτες θα σκάψουν αγρόκτημα δέκα στρεμμάτων;

(Απ. 4)

2. Διακόσιοι στρατιώτες χρειάζονται 400 κιλά ψωμί, για να περάσουν 4 ημέρες. Πόσα κιλά ψωμί θα χρειαστούν 350 στρατιώτες, για να περάσουν 14 ημέρες; **(Απ. 2450)**
3. Για εργασία 8 ημερών 10 εργάτες πήραν 3.200 €. Πόσα ευρώ θα πάρουν 12 εργάτες, αν εργαστούν 14 ημέρες; **(Απ. 6.720)**
4. Δεκαπέντε εργάτες εργαζόμενοι 8 ώρες την ημέρα, σκάβουν ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σε 40 ημέρες. Είκοσι εργάτες, εργαζόμενοι 10 ώρες την ημέρα, σε πόσες ημέρες θα σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων; **(Απ. 36)**
5. Ένα εξοχικό σπίτι συμφωνήθηκε να κατασκευαστεί από 9 εργάτες σε 16 ημέρες. Οι εργάτες όμως σε 6 ημέρες, εργαζόμενοι 10 ώρες την ημέρα, κατασκεύασαν το ένα τρίτο του σπιτιού. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να εργαστούν οι ίδιοι εργάτες τις υπόλοιπες ημέρες, για να τελειώσουν το σπίτι σε 16 ημέρες, όπως είχαν συμφωνήσει; **(Απ. 12 ωρ/ημ.)**
6. Με 36 κιλά νήματος υφαίνουμε 54 μέτρα υφάσματος πλάτους 0,80m. Με 50 κιλά νήματος πόσα μέτρα θα υφάνουμε, αν τώρα το πλάτος του υφάσματος είναι 1,20m; **(Απ. 50m)**
7. Είκοσι τέσσερις εργάτες μπορούν να εκτελέσουν ένα έργο σε 28 ημέρες, αν εργάζονται 7 ώρες την ημέρα. Μετά 10 ημέρες εργασίας 6 εργάτες αρρώστησαν· οι υπόλοιποι αύξησαν την εργασία τους κατά μία ώρα την ημέρα. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το έργο και τι ποσό θα πάρει ο καθένας, αν πληρωθούν 70.560 € για ολόκληρο το έργο. **(Απ. 21 ημ. -1050 - 3570)**
8. Ένα πλοίο έχει πλήρωμα 140 ανδρών και τρόφιμα για 70 ημέρες. Μετά από ταξίδι 10 ημερών παρέλαβε ναυαγούς και ο χρόνος του ταξιδιού αυξήθηκε κατά 10 ημέρες. Ελαττώθηκε τότε η μερίδα κατά  $\frac{2}{5}$  της αρχικής. Πόσους ναυαγούς παρέλαβε; **(Απ. 60)**
9. Εργολάβος ανέλαβε να εκτελέσει μια εργασία σε τριάντα ημέρες υπολογίζοντας να μισθώσει δύο εκσκαφείς, οι οποίοι θα εργάζονται

εννέα ώρες την ημέρα. Μετά παρέλευση δέκα ημερών, από την ημέρα που συμφώνησε την εργασία, κατόρθωσε να μισθώσει δύο εκσκαφείς με τριπλάσια απόδοση από τους πρώτους, οι οποίοι εργάζονται έξι ώρες την ημέρα. Να βρεθεί πόσες ημέρες νωρίτερα του προβλεπόμενου χρόνου θα τελειώσει η εργασία. **(Απ. 5 ημ.)**

10. Ένα οικόπεδο μήκους 32 μέτρων και πλάτους 30 μέτρων έχει αξία 48.000 €. Πόσο πλάτος θα είχε το οικόπεδο, αν είχε μήκος 20 μέτρα και τιμή 45.000 €; **(Απ. 45m)**

## 2.4. Ποσοστά

### 2.4.1. Βασικές έννοιες και ορισμοί

Οι άνθρωποι στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές τους, για να υπολογίσουν τα κέρδη, τις ζημιές, τις μεσιτείες, τις εκπτώσεις, τις προμήθειες, τα ασφάλιστρα, τις αυξήσεις των μισθών και ημερομισθίων, κτλ., χρησιμοποιούν ως βάση τον αριθμό 100 και σε ορισμένες περιπτώσεις τον αριθμό 1000.

Στην καθημερινή πρακτική συναντάμε, π.χ., τα ακόλουθα προβλήματα:

- 1) Ο έμπορος Ε πούλησε εμπορεύματα που του κόστισαν 365.000 € με κέρδος 18%. Πόσα ευρώ κέρδισε;
- 2) Ο πελάτης Π αγόρασε «τοίς μετρητοίς» από ένα εμπορικό κατάστημα, μια συσκευή τηλεοράσεως αξίας 160 € με έκπτωση 25%. Πόση έκπτωση είχε ο πελάτης και πόσα ευρώ εισέπραξε το κατάστημα;
- 3) Ο μεσίτης Μ, για την πώληση ενός διαμερίσματος αξίας 180.000 € παίρνει 14% για μεσιτικά. Πόσα ευρώ θα εισπράξει;

#### Λύσεις

1) Όταν λέμε ότι ο έμπορος πούλησε τα εμπορεύματα με κέρδος 18%, εννοούμε ότι σε κάθε 100 ευρώ ο έμπορος κερδίζει 18 €. Δηλαδή, πρέπει να λύσουμε το εξής πρόβλημα της απλής μεθόδου των τριών.

$$\begin{array}{l} \text{Στα } 100 \text{ € ο Ε κερδίζει } 18 \text{ €} \\ \text{Στα } 365.000 \text{ € ο Ε κερδίζει } x; \text{ €} \end{array}$$


---

Επειδή τα ποσά είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$x = 18 \cdot \frac{365.000}{100} = 65.700 \text{ €}$$

Άρα, ο Ε κέρδισε 65.700 ευρώ.

2) Όταν λέμε ότι το κατάστημα κάνει έκπτωση 25%, εννοούμε ότι εμπόρευμα αξίας 100 € το πουλάει 75 €.

Δηλαδή:

Στα 100 € κάνει έκπτωση 25 € και εισπράττει 75 €  
 Στα 160 € κάνει έκπτωση  $x_1$ ; € και εισπράττει  $x_2$ ; €

---

Επειδή τα ποσά είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$\text{Έκπτωση} = x_1 = 25 \cdot \frac{160}{100} = 40 \text{ €}$$

$$\text{Είσπραξη} = x_2 = 75 \cdot \frac{160}{100} = 120 \text{ €}$$

3) Όταν λέμε ότι ο μεσίτης παίρνει 14% μεσιτικά, εννοούμε ότι για κάθε 1000 € αυτός θα εισπράττει 14 € για μεσιτικά.

Δηλαδή:

Για αξία 1000 € παίρνει 14 € μεσιτικά  
 Για αξία 180.000 € παίρνει  $x$ ; € μεσιτικά

---

Τα ποσά είναι ανάλογα, άρα θα έχουμε:

$$x = 14 \cdot \frac{180.000}{1000} = 2.520 \text{ €}$$

Ωστε, ο μεσίτης θα εισπράξει 2.520 €.

Από τα παραπάνω προβλήματα συνάγουμε τις ακόλουθες έννοιες: Τα 18%, 25%, 14% παριστάνουν τα δεκαδικά κλάσματα:

$$\frac{18}{100}, \frac{25}{100}, \frac{14}{1000}$$

και απαγγέλλονται: **18 στα εκατό** (18 τοις εκατό), **25 στα εκατό** (25 τοις εκατό) και **14 στα χίλια** (14 τοις χιλίοις).

Το ποσό που, με βάση το 100 ή το 1000, βρίσκεται ότι αναλογεί στο αρχικό ποσό ονομάζεται **ποσοστό**. Στα πιο πάνω προβλήματα βρήκαμε τα ποσοστά:

1) 65.700 € 2) 40 € και 3) 2.520 €.

Το ποσό, με βάση το οποίο υπολογίζεται το ποσοστό ονομάζεται **αρχικό ποσό**. Στα παραπάνω προβλήματα αρχικά ποσά είναι:

1) 365.000 € 2) 160 € και 3) 180.000 €.

Το τόσο τοις εκατό (%) ή τοις χιλίοις (‰) είναι ο λόγος του κέρδους ή της έκπτωσης ή της μεσιτείας, κτλ. προς το αρχικό ποσό. Έτσι, στα πιο πάνω προβλήματα έχουμε:

$$1) \frac{65.700}{365.000} = 0,18 = \frac{18}{100} \text{ που γράφεται } 18\%$$

$$2) \frac{40}{160} = 0,25 = \frac{25}{100} \text{ που γράφεται } 25\%$$

$$3) \frac{2.520}{180.000} = 0,014 = \frac{14}{1000} \text{ που γράφεται } 14\text{‰}$$

Τέλος, το ποσό που προκύπτει από το αρχικό ποσό, αυξημένο ή ελαττωμένο κατά το ποσοστό, λέγεται **τελικό ποσό**. Στα προβλήματα 1 και 2 τελικά ποσά είναι:

$$365.000 + 65.700 = 430.700 \text{ € και } 160 - 40 = 120 \text{ €}$$

Τα ποσοστά είναι ανάλογα των ποσών με βάση τα οποία υπολογίζονται· γι' αυτό όλα τα προβλήματα των ποσοστών λύνονται με την απλή μέθοδο των τριών και **τα ποσά είναι πάντοτε ανάλογα**. Πρέπει όμως να προσέχουμε, κατά την κατάταξη των δεδομένων του προβλήματος, να βάζουμε τα ομοειδή ποσά στην ίδια κατακόρυφη στήλη.

Τα προβλήματα που θα εξετάσουμε στις επόμενες παραγράφους είναι:

1) Η εύρεση του ποσοστού, 2) η εύρεση του αρχικού ποσού, 3) η εύρεση του τόσο τοις % ή τόσο τοις ‰.



### 2.4.2. Εύρεση του ποσοστού

**Πρόβλημα 1ο.** Ο έμπορος Ε πουλάει, τα εμπορεύματά του με κέρδος 26%. Πόσα ευρώ θα κερδίσει, αν πουλήσει εμπορεύματα αξίας 445.000 ευρώ;

**Λύση.** Για τη λύση οποιουδήποτε προβλήματος ποσοστών πρέπει να προσέχουμε, ώστε, κατά την κατάταξη των δεδομένων του προβλήματος, να βάζουμε τα ομοειδή ποσά στην ίδια στήλη. Έτσι, για το πιο πάνω πρόβλημα έχουμε:

**Κατάταξη:**

|                          |               |   |
|--------------------------|---------------|---|
| Για εμπ/τα αξίας 100     | € κερδίζει 26 | € |
| Για εμπ/τα αξίας 445.000 | € κερδίζει x; | € |

---

Τα ποσά είναι ανάλογα, άρα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{100}{445.000} = \frac{26}{x}$$

ή  $100 \cdot x = 26 \cdot 445.000$

και  $x = 26 \cdot \frac{445.000}{100} = 115.700$

Άρα: ο Ε θα κερδίσει 115.700 €



**Σημείωση.** Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν, εφαρμόσουμε το γνωστό πρακτικό κανόνα: Ο άγνωστος  $x$  είναι ίσος με τον υπεράνω αυτού αριθμό επί το κλάσμα (που σχηματίζουν οι άλλες τιμές) αντεστραμμένο ο ίδιος κανόνας εφαρμόζεται σε όλα τα προβλήματα των ποσοστών, γιατί, όπως είπαμε, τα ποσά είναι πάντοτε ανάλογα.

**Πρόβλημα 2ο.** Ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών κάνει έκπτωση 30% (επί της αναγραφόμενης τιμής) για κάθε αγορά «τοίς μετρητοίς». Ο πελάτης Π αγόρασε ένα ηλεκτρικό ψυγείο, στο οποίο η αναγραφόμενη τιμή είναι: 1.200 €. Πόση είναι η έκπτωση και πόσα ευρώ εισέπραξε το κατάστημα;

**Λύση.** Όταν λέμε ότι το κατάστημα κάνει έκπτωση 30%, εννοούμε ότι εμπόρευμα αξίας 100 € το πουλάει 70 € (= 100 - 30).

**Κατάταξη:**

Στα 100 € κάνει έκπτωση 30 € και εισπράττει 70 €  
 Στα 1.200 € κάνει έκπτωση  $x_1$  € και εισπράττει  $x_2$  €

---

Επειδή τα ποσά είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$\text{Έκπτωση} = x_1 = 30 \cdot \frac{1.200}{100} = 360 \text{ €}$$

$$\text{Είσπραξη} = x_2 = 70 \cdot \frac{1.200}{100} = 840 \text{ €}$$

**Πρόβλημα 3ο.** Ένας εξαγωγέας φρούτων πούλησε πέντε τόνους ροδάκινα με ζημία 18% επί της τιμής της αγοράς και εισέπραξε 5.200 €. Πόσα ευρώ ζημιώθηκε;

**Λύση.** Όταν λέμε ότι ο εξαγωγέας πούλησε με ζημία 18%, εννοούμε ότι σε κάθε 100 € έχασε 18 €, δηλαδή ροδάκινα αξίας αγοράς -100 ευρώ τα πούλησε 82 € (= 100 - 18).

**Κατάταξη:**

Αγορά 100 € ζημία 18 € πώληση 82 €  
 ζημία  $x$ ; € πώληση 5.200 €

---

$$x = 18 \cdot \frac{5.200}{82} = 1.141,46 \text{ €}$$

**Πρόβλημα 4ο.** Ένα διαμέρισμα, αξίας 187.500 €, ασφαλίστηκε (για περίπτωση πυρκαγιάς) με 4 % το έτος. Σε πόσα ευρώ ανέρχονται τα ετήσια ασφάλιστρα;

**Λύση.** Όταν λέμε ότι τα ασφάλιστρα είναι 4 %, εννοούμε ότι ο ιδιοκτήτης του διαμερίσματος, για κάθε 1000 € της αξίας του διαμερίσματος καταβάλλει 4 € για ασφάλιστρα.

**Κατάταξη:**

Στα 1000 € καταβάλλει 4 € ασφάλιστρα  
 Στα 187.500 € καταβάλλει x; € ασφάλιστρα

---

$$x = 4 \cdot \frac{187.500}{100} = 750 \text{ €}$$

Ωστε: Ο ιδιοκτήτης του διαμερίσματος πρέπει να πληρώνει 750 € το χρόνο για ασφάλιστρα.

**Πρόβλημα 5ο.** Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πούλησε ένα αυτοκίνητο αξίας αγοράς 26.000 € με κέρδος 32%. Πόσα ευρώ κέρδισε και πόσα ευρώ εισέπραξε από την πώληση;

**Λύση.**

**Κατάταξη:**

Αγορά 100 € κέρδος 32 € εισπραξη 132 €  
 Αγορά 26.000 € κέρδος x<sub>1</sub> € εισπραξη x<sub>2</sub> €

---

$$\text{Κέρδος} = x_1 = 32 \cdot \frac{26.000}{100} = 8.320 \text{ €}$$

$$\text{Εισπραξη} = x_2 = 132 \cdot \frac{26.000}{100} = 34.320 \text{ €}$$

### 2.4.3. Εύρεση του αρχικού ποσού

**Πρόβλημα 1ο.** Έμπορος ηλεκτρικών ειδών πούλησε ένα ηλεκτρικό ψυγείο με κέρδος 25% και εισέπραξε 1.500 €. Πόσα ευρώ του είχε κοστίσει το ψυγείο και πόσα ευρώ κέρδισε;

**Λύση**

**Κατάταξη:**

Όταν εισπράττει 125 €, το εμπόρευμα κοστίζει 100 €  
 Όταν εισπράττει 1.500 €, το εμπόρευμα κοστίζει x; €

---

$$x = 100 \cdot \frac{1.500}{125} = 1.200 \text{ €}$$

Ωστε: Το ηλεκτρικό ψυγείο είχε κοστίσει 1.200 €

Κέρδος = τιμή πωλήσεως - τιμή κόστους = 1.500 - 1.200 = 300 €.

**Πρόβλημα 2ο.** Έμπορος έτοιμων ενδυμάτων πούλησε ενδύματα παλαιάς μόδας με ζημία 32% και εισέπραξε 340 €. Πόσα ευρώ του είχαν κοστίσει τα εμπορεύματα και πόσα ευρώ ζημιώθηκε ο έμπορος;

**Λύση.** Όταν λέμε ότι ο έμπορος πούλησε με ζημία 32%, εννοούμε ότι σε 100 € χάνουμε 32 €, άρα πουλάμε με 68 (= 100 - 32) €.

**Κατάταξη:**

Όταν πουλιέται 68 €, το εμπ/μα κοστίζει 100 €

Όταν πουλιέται 340 €, το εμπ/μα κοστίζει x; €

$$x = 100 \cdot \frac{340}{68} = 500 \text{ €}$$

Άρα, τα ενδύματα είχαν κοστίσει στον έμπορο 500 €.

Επειδή: Τιμή πώλησης - τιμή κόστους = 340 - 500 = -160, συμπεραίνουμε ότι ο έμπορος ζημιώθηκε 160 €.

**Πρόβλημα 3ο.** Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πούλησε ένα αυτοκίνητο με κέρδος 32% επί της τιμής της αγοράς και κέρδισε 832 €. Πόσα ευρώ είχε κοστίσει το αυτοκίνητο;

**Λύση.**

**Κατάταξη:**

Σε αγορά 100 € το κέρδος είναι 32 €

Σε αγορά x; € το κέρδος είναι 832 €

$$x = 100 \cdot \frac{832}{32} = 2.600 \text{ €}$$

Ωστε: Το αυτοκίνητο είχε κοστίσει 2.600 €.

**Πρόβλημα 4ο.** Πουλήθηκαν εμπορεύματα με μετρητά αντί 59.000 €, συμπεριλαμβανομένου Φ.Π.Α. 18%. Να βρεθεί η αξία των πωλήσεων χωρίς το Φ.Π.Α.

**Λύση.** Σε αξία 100 τιμή με Φ.Π.Α. 118  
 Σε αξία  $x$ ; τιμή με Φ.Π.Α. 59.000

$$x = 100 \cdot \frac{59.000}{118} = 59.000 \cdot \frac{1}{1,18} = \frac{59.000}{1,18} = 50.000$$

Πράγματι:  $50.000 \cdot 18\% = 9.000$ ,  $50.000 + 9.000 = 59.000$

$$\text{Γενικά: Αξία Πωλήσεων} = \frac{\text{Τιμή Πώλησης με Φ.Π.Α. } 18\%}{1,18}$$

Αν ο συντελεστής Φ.Π.Α. είναι 4% ή 8%, τότε ο παρονομαστής γίνεται 1,04 ή 1,08 αντίστοιχα.

#### 2.4.4. Εύρεση του τόσο τοις % ή τοις %

**Πρόβλημα 1ο.** Έμπορος πούλησε εμπορεύματα αντί 120.000 € και κέρδισε 36.000 €. Πόσο τοις εκατό κέρδισε;

**Λύση**

**Κατάταξη:**

Για εμπ/τα αξίας 120.000 € το κέρδος είναι 36.000 €

Για εμπ/τα αξίας 100 € το κέρδος είναι  $x$ ; €

$$x = 36.000 \cdot \frac{100}{120.000} = 30\%$$

Άρα, κέρδισε 30%.

**Πρόβλημα 2ο.** Ο ιδιοκτήτης ενός διαμερίσματος αξίας 187.500 € πληρώνει για πυρασφάλεια 750 € το έτος. Πόσο τοις % είναι τα ετήσια ασφάλιστρα;

**Λύση**

**Κατάταξη:**

Στα 187 500 € πληρώνει 750 € ασφάλιστρα

Στα 1000 € πληρώνει x; € ασφάλιστρα

---

$$x = 750 \cdot \frac{1000}{187.500} = 4\%$$

Ωστε: Για κάθε 1000 € ο ιδιοκτήτης πληρώνει 4 € για ασφάλιστρα.

**Πρόβλημα 3ο. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πούλησε ένα αυτοκίνητο αντί 30.000 € και κέρδισε 6.000 €. Πόσο τοις % κέρδισε επί του κόστους αγοράς;**

**Λύση.** Το αυτοκίνητο είχε στοιχίσει στην αντιπροσωπεία: 30.000 - 6.000 = 24.000 €.

**Κατάταξη:**

Για πώληση 30.000 € έχει κέρδος 6.000 € και κόστος 24.000 €

κέρδος x; € και κόστος 100 €

---

$$x = 6.000 \cdot \frac{100}{24.000} = 25\%$$

**Πρόβλημα 4ο. Εξαγωγέας φρούτων πούλησε ροδάκινα αντί 72.000 € με ζημία 48.000 €. Πόσο τοις % επί του κόστους ζημιώθηκε;**

**Λύση.** ο εξαγωγέας, για να αγοράσει τα ροδάκινα είχε δώσει 72.000 + 48.000 = 120.000 €

Άρα: Για πώληση 72.000 € έχει ζημία 48.000 και κόστος 120.000 €

ζημία x; και κόστος 100 €

---

$$x = 48.000 \cdot \frac{100}{120.000} = 40\%$$



### Προβλήματα ποσοστών

- Ένας έμπορος πούλησε εμπορεύματα κόστους 22.500 € με κέρδος 28%. α) Πόσα € κέρδισε και β) πόσα € εισέπραξε;  
(Απ. α) 6300. β) 28.000)
- Κάποιος ασφάλισε τα εμπορεύματά του, που τα μετέφερε με πλοίο, προς 4% και πλήρωσε 720 € για ασφάλιστρα. Ποια ήταν η αξία των εμπορευμάτων;  
(Απ. 180.000)
- Έμπορος πούλησε εμπορεύματα με κέρδος 25%. Ποια ήταν η αξία τους, αν είναι γνωστό ότι κέρδισε 23.500 €;  
(Απ. 94.000)
- Οι κτηματομεσίτες, στις αγοραπωλησίες, παίρνουν μεσιτικά 4% επί της αξίας των διαμερισμάτων, οικοπέδων, κτλ. Για την πώληση ενός οικοπέδου, αξίας 178.500 € πόσα € θα πάρει ο μεσίτης;  
(Απ. 714)
- Ένα εμπορικό κατάστημα πουλάει τα εμπορεύματά του με έκπτωση 30%. Πόσα € θα πληρώσουμε, αν αγοράσουμε εμπορεύματα αξίας 28.750 € και πόσα € θα είναι η έκπτωση;  
(Απ. 20.125 - 8625)
- Έμπορος κερδίζει 25% επί της τιμής αγοράς των εμπορευμάτων του. Πόσα € πρέπει να πουλήσει ένα εμπόρευμα που το αγόρασε 18.500 €;  
(Απ. 23.125)
- Εμπόρευμα πουλήθηκε με ζημία 20% αντί 16.000 €. Πόση ήταν η αξία του εμπορεύματος;  
(Απ. 20.000)
- Για εμπόρευμα αξίας 62.500 € πληρώσαμε 50.000 €. Με πόσο τοις % υπολογίστηκε η έκπτωση;  
(Απ. 20%)
- Αγόρασε κάποιος ένα διαμέρισμα και ύστερα από δύο χρόνια το πούλησε με κέρδος 40% επί της τιμής της αγοράς. Αν από την πώληση κέρδισε 32.000 €, να βρεθεί η αξία της αγοράς του διαμερίσματος.  
(Απ. 80.000)
- Έμπορος αγόρασε 5200 μέτρα ύφασμα προς 10 € το μέτρο και πλήρωσε για μεταφορικά 500 €. Το ύφασμα πουλήθηκε προς 14 € το

μέτρο. Πόσο τοις % κέρδισε: α) επί του κόστους αγοράς και β) επί της τιμής πωλήσεως; *(Απ. 38,7% - 27,9%)*

11. Αγόρασε κάποιος 8.000 κιλά σιτάρι προς 1,20 € το κιλό. Κατά τη μεταφορά χάθηκε το 5% του σιταριού. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό του υπόλοιπου σιταριού, για να κερδίσει 15%;

*(Απ. 2,8 € το κιλό)*

12. Ένας έμπορος αγόρασε 3250 κιλά λάδι προς 2,8 € το κιλό και πλήρωσε: για μεταφορικά 0,10 € το κιλό και για αποθήκευτρα 750 €. Το λάδι το πούλησε προς 3,5 € το κιλό. Το λάδι είχε 1% φύρα. Να βρεθεί αν κέρδισε ή ζημιώθηκε και πόσο τοις % επί του κόστους.

*(Απ. κέρδος 10,7%)*

13. Ένας παραγγελιοδόχος, όταν πηγαίνει σε επαρχιακές πόλεις, παίρνει έξοδα εκτός έδρας 120 € την ημέρα και 2,5% προμήθεια για τα εμπορεύματα που πουλάει. Ύστερα από περιοδεία 24 ημερών πήρε για προμήθειες και έξοδα 5.880 €. Να βρεθεί η αξία των εμπορευμάτων που πούλησε.

*(Απ. 120.000)*

14. Αγόρασε κάποιος ένα οικοπέδο 15 στρεμμάτων και έδωσε για μεσιτικά 3.600 € ο μεσίτης πήρε 2% επί της αξίας του οικοπέδου. Πόσο κόστισε το στρέμμα;

*(Απ. 12.000)*

15. Ασφάλισε κάποιος ένα διαμέρισμα αξίας 200.000 € για 5 έτη με 1,5% ετήσια ασφάλιστρα. Επειδή πλήρωσε αμέσως ολόκληρο το ποσό, του χαρίστηκαν ενός έτους ασφάλιστρα. Πλήρωσε επί πλέον για φόρο δημοσίου 14% επί των ασφαλίσεων και 5 € για χαρτόσημο. Πόσα ευρώ πλήρωσε συνολικά;

*(Απ. 1.415)*

16. Έμπορος αγόρασε μια ποσότητα σιταριού. Στην αρχή πούλησε το ένα τέταρτο της ποσότητας με κέρδος 5%. Έπειτα πούλησε άλλο ένα τέταρτο με κέρδος 15% και το υπόλοιπο με ζημία 4,67%. Από την πώληση κέρδισε 5.000 €. Πόσο του κόστισε η αγορά;

*(Απ. 187.617)*

17. Αγόρασε κάποιος δύο κομμάτια ύφασμα. Για το α' έδωσε 450 € και για το β' 400 €. Το α' το πούλησε με ζημία 4,8%. Πόσο τοις % πρέπει

να πουλήσει το β', για να κερδίσει και από τα δυο κομμάτια 156 €;  
(Απ. 44,4%)

18. Αντιπροσωπεία αυτοκινήτων έκανε σε αγοραστή μεταχειρισμένου αυτοκινήτου αξίας 6.000 €, έκπτωση 12%. Τα έξοδα μεταβίβασης κτλ., που βαρύνουν τον αγοραστή, είναι κατά 285 € λιγότερα της έκπτωσης. Σε πόσο τοις % επί της τιμής της αγοράς ανέρχεται η έκπτωση και σε πόσο επί της τιμής του κόστους του αγοραστή;  
(Απ. 12,6%)
19. Έμπορος αγόρασε 1200 μέτρα ύφασμα προς 5,8 € το μέτρο και πλήρωσε για μεταφορικά 20 €. Το ύφασμα πουλήθηκε προς 7,2 € το μέτρο. Να βρεθεί πόσο τοις % κέρδισε: α) επί του κόστους αγοράς και β) επί της τιμής πώλησεως.  
(Απ. α) 23,7%. β) 19,21%)
20. Έμπορος αγόρασε 2150 κιλά καρπούζι προς 0,32 € το κιλό και πλήρωσε 0,02 € κατά κιλό για μεταφορικά και 100 € για αποθήκευτρα. Το καρπούζι πουλήθηκε προς 0,39 € το κιλό. Κατά την πώληση το καρπούζι παρουσίασε φύρα 2%. Να βρεθεί αν ο έμπορος κέρδισε ή ζημιώθηκε και πόσο τοις % επί του κόστους.  
(Απ. ζημία 1,12%)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

### 3.1. Αριθμοί: ανάλογοι προς άλλους, αντίστροφοι και αντιστρώφως ανάλογοι

Έστω ότι έχουμε τους αριθμούς: 2, 3, 5

Αν πολλαπλασιάσουμε τους πιο πάνω αριθμούς επί τον ίδιο αριθμό, π.χ. επί 5, τότε προκύπτουν οι αριθμοί: 10, 15, 25.

Οι αριθμοί 10, 15, 25 λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 2, 3, 5.

Αν τώρα οι αριθμοί 10, 15, 25 πολλαπλασιαστούν επί τον αριθμό  $1/5$ , τότε προκύπτουν οι αριθμοί:

$$10 \cdot \frac{1}{5} = 2, \quad 15 \cdot \frac{1}{5} = 3, \quad 25 \cdot \frac{1}{5} = 5$$

Οι αριθμοί 2, 3, 5 λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 10, 15, 25, διότι προκύπτουν από αυτούς, όταν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό.

Ωστε: Δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται **ανάλογοι προς άλλους, αν γίνονται από αυτούς όταν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό.**

Π.χ. οι αριθμοί 28, 40, 48 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 7, 10, 12, γιατί προκύπτουν από αυτούς, όταν πολλαπλασιαστούν με τον αριθμό 4, αλλά και οι αριθμοί 7, 10, 12 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 28, 40, 48, γιατί γίνονται από αυτούς, όταν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό  $1/4$ .

Από τα πιο πάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι:

Ο αριθμός 28 προκύπτει από τον αριθμό 7, όταν πολλαπλασιαστεί με 4, αλλά και ο 7 προκύπτει από τον 28, όταν πολλαπλασιαστεί με  $1/4$ .

Οι αριθμοί 7 και 28 λέγονται **ομόλογοι** αριθμοί. Επίσης, οι αριθμοί 10 και 40, καθώς και οι 12 και 48 είναι ομόλογοι αριθμοί.

Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύουν οι αναλογίες:

$$\frac{7}{28} = \frac{1}{4} \quad \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \quad \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι:

**Αν οι αριθμοί  $x, \psi, \omega, \dots$  είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , τότε ο λόγος των ομόλογων αριθμών είναι ο ίδιος για όλους.**

Δηλαδή, αν  $x, \psi, \omega$  είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$ , τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \lambda$$

Από αυτή τη σχέση έχουμε:

$$x = \lambda \cdot \alpha, \quad \psi = \lambda \cdot \beta, \quad \omega = \lambda \cdot \gamma$$

Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με τη μονάδα, τότε οι αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι**. Π.χ., οι αριθμοί 6 και  $1/6$  είναι αντίστροφοι, διότι  $6 \cdot 1/6 = 1$ . Επίσης, το κλάσμα  $4/8$  έχει αντίστροφο το κλάσμα  $8/4$ , διότι  $4/8 \cdot 8/4 = 1$ .

Αν τώρα δύο ή περισσότεροι αριθμοί είναι ανάλογοι προς τους αντίστροφους τους, τότε οι αριθμοί αυτοί λέγονται **αντιστρόφως ανάλογοι** προς άλλους ισοπληθείς.

Έστω π.χ. οι αριθμοί 3, 4, 5. Οι αντίστροφοί τους είναι:  $1/3, 1/4, 1/5$ . Οι αριθμοί 12, 16, 20 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3, 4, 5 αλλά αντιστρόφως ανάλογοι προς τους  $1/3, 1/4, 1/5$ .

## 3.2. Προβλήματα μερισμού

### 3.2.1. Μερισμός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα

Μερισμός ενός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι η εύρεση άλλων αριθμών  $x, \psi, \omega, \dots$  τέτοιων, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \dots \quad \text{με} \quad x + \psi + \omega = M$$

Ο αριθμός  $M$  τον οποίο θέλουμε να μερίσουμε, λέγεται **μεριστέος** αριθμός. Από τις ιδιότητες των αναλογιών είναι γνωστό ότι αν οι αριθμοί  $x$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \dots = \frac{x + \psi + \omega + \dots}{\alpha + \beta + \gamma + \dots} = \frac{M}{\alpha + \beta + \gamma + \dots} = \lambda$$

Λύνοντας ως προς  $x$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  βρίσκουμε ότι

$$x = \lambda \cdot \alpha \quad \psi = \lambda \cdot \beta \quad \omega = \lambda \cdot \gamma$$

Από τα παραπάνω συνάγουμε τον ακόλουθο κανόνα:

**Για να μερίσουμε έναν αριθμό  $M$  σε μέρη ανάλογα προς άλλους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ..., διαιρούμε το μεριστέο αριθμό  $M$  με το άθροισμα  $\alpha + \beta + \gamma + \dots$  και με το πηλίκο ( $= \lambda$ ) πολλαπλασιάζουμε καθέναν από τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ...**



**Παράδειγμα. Να μεριστεί ο αριθμός 1000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3 και 5.**

Εάν  $x$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  είναι οι άγνωστοι αριθμοί που είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 2, 3, 5, τότε θα έχουμε  $x + \psi + \omega = 1000$  και επειδή οι  $x$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  είναι ανάλογοι προς τους 2, 3 και 5, θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{\omega}{5} = \frac{x + \psi + \omega}{2 + 3 + 5} = \frac{1000}{10} = 100$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$\frac{x}{2} = 100 \text{ και } x = 200, \quad \frac{\psi}{3} = 100 \text{ και } \psi = 300, \quad \frac{\omega}{5} = 100 \text{ και } \omega = 500.$$

Επαλήθευση:  $x + \psi + \omega = 200 + 300 + 500 = 1000$ .

### 3.2.2. Μερισμός σε μέρη ανάλογα ακέραιων αριθμών

**Πρόβλημα 1ο.** Ένας εργολάβος οικοδομών χρησιμοποίησε (στο ίδιο χρονικό διάστημα) τέσσερις εργάτες, για να σκάψουν ένα πηγάδι και πλήρωσε με τα εξής ημερομίσθια: Ο Α εργάτης πήρε 55 €, ο Β εργάτης πήρε 65 €, ο Γ πήρε 50 € και ο Δ 70 € ο εργολάβος έδωσε συνολικά 4.800 €. Πόσα € θα πάρει ο κάθε εργάτης;

**Λύση.** Για να βρούμε το μερίδιο κάθε εργάτη, θα πρέπει να μοιράσουμε το ποσό των 4.800 € σε μέρη ανάλογα των ημερομισθίων των εργατών, δηλαδή σε μέρη ανάλογα των αριθμών:

$$55, 65, 50, 70$$

Το άθροισμα των ημερομισθίων είναι:

$$55 + 65 + 50 + 70 = 240 = A + B + \Gamma + \Delta$$

Το μεριστέο ποσό είναι  $4.800 = M$

Αν τώρα παραστήσουμε με  $\varphi, x, \psi, \omega$  τα τέσσερα μερίδια, θα είναι:

$$\varphi + x + \psi + \omega = 4.800 \text{ και ισχύει η σχέση:}$$

$$\frac{\varphi}{55} = \frac{x}{65} = \frac{\psi}{50} = \frac{\omega}{70} = \frac{\varphi + x + \psi + \omega}{55 + 65 + 50 + 70} = \frac{4.800}{240} = 20$$

$$\text{Άρα: } \frac{\varphi}{55} = 20 \text{ και } \varphi = 1.100, \frac{x}{65} = 20 \text{ και } x = 1.300$$

$$\frac{\psi}{50} = 20 \text{ και } \psi = 1.000, \frac{\omega}{70} = 20 \text{ και } \omega = 1.400$$

Ωστε: Ο Α εργάτης θα πάρει 1.100 €

Ο Β εργάτης θα πάρει 1.300 €

Ο Γ εργάτης θα πάρει 1.000 €

Ο Δ εργάτης θα πάρει 1.400 €

---

Σύνολο: 4.800 €

**Πρόβλημα 2ο.** Ένα φιλανθρωπικό σωματείο θέλει να μοιράσει 15.000 € σε τρεις πτωχές οικογένειες ανάλογα με τα άτομα κάθε οικογένειας. Η α' οικογένεια έχει 4 άτομα, η β' 6 άτομα και η γ' 10 άτομα. Πόσα χρήματα θα πάρει κάθε οικογένεια;

**Λύση.** Μεριστέος = 15.000,  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 6$ ,  $\gamma = 10$

Για να βρούμε πόσα χρήματα θα πάρει κάθε οικογένεια, θα πρέπει να μερίσουμε τον αριθμό 15.000 σε μέρη ανάλογα των αριθμών 4, 6, 10.

**Πρακτικός κανόνας μερισμού:**

Για να μερίσουμε έναν αριθμό  $M$  σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ..., πολλαπλασιάζουμε το μεριστέο αριθμό  $M$  με καθέναν από τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... και το γινόμενο το διαιρούμε με το άθροισμα  $\alpha + \beta + \gamma + \dots$

Δηλαδή, ο μερισμός γίνεται με βάση τις σχέσεις:

$$\alpha = \frac{M \cdot \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \beta = \frac{M \cdot \beta}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \gamma = \frac{M \cdot \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα, βρίσκουμε ότι:

$$\text{Η α' οικογένεια θα πάρει: } \frac{15.000 \cdot 4}{4 + 6 + 10} = 3.000 \text{ €}$$

$$\text{Η β' οικογένεια θα πάρει: } \frac{15.000 \cdot 6}{4 + 6 + 10} = 4.500 \text{ €}$$

$$\text{Η γ' οικογένεια θα πάρει: } \frac{15.000 \cdot 10}{4 + 6 + 10} = 7.500 \text{ €}$$

### 3.2.3. Μερισμός σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών

**Πρόβλημα 1ο.** Να μεριστεί ο αριθμός 250.000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς  $1/2$ ,  $3/4$ ,  $5/6$ .

**Λύση.**  $M = 250.000$ ,  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 3/4$ ,  $\gamma = 5/6$ .

Για να βρούμε το άθροισμα  $\alpha + \beta + \gamma$ , τρέπουμε τα ετερόνυμα κλάσματα  $1/2$ ,  $3/4$ ,  $5/6$  στα ισοδύναμα ομώνυμα  $6/12$ ,  $9/12$ ,  $10/12$ , οπότε:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{6}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{25}{12}$$

Μερίζουμε κατόπιν τον αριθμό 250.000 ανάλογα προς τα ομώνυμα κλάσματα  $6/12$ ,  $9/12$ ,  $10/12$ .

Εφαρμόζοντας τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού έχουμε:

$$\frac{250.000 \cdot \frac{6}{12}}{\frac{25}{12}} = \frac{250.000 \cdot 6}{25} = 60.000$$

$$\frac{250.000 \cdot \frac{9}{12}}{\frac{25}{12}} = \frac{250.000 \cdot 9}{25} = 90.000$$

$$\frac{250.000 \cdot \frac{10}{12}}{\frac{25}{12}} = \frac{250.000 \cdot 10}{25} = 100.000$$

$$\text{Σύνολο:} \quad \frac{\quad}{\quad} \quad 250.000 = M$$

Από τη λύση του πιο πάνω προβλήματος συμπεραίνουμε ότι: **Για να μερίσουμε έναν αριθμό M σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών, τρέπουμε τα κλάσματα σε ισοδύναμα ομώνυμα και έπειτα μερίζουμε τον αριθμό M ανάλογα προς τους αριθμητές των ομώνυμων κλασμάτων.**

**Πρόβλημα 2ο.** Ένας θείος άφησε στους ανεψιούς του Α, Β, Γ 6.000.000 €. Στη διαθήκη του όρισε ότι ο Α θα πάρει τα  $2/5$  των χρημάτων, ο Β το  $1/3$  και ο Γ τα υπόλοιπα. Πόσα χρήματα θα πάρει ο κάθε ανεψιός;

$$\text{Λύση. } M = 6.000.000, \quad \alpha = \frac{2}{5}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = ;$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15} \quad \text{Άρα: } \gamma = \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

Άρα: Ο Α θα πάρει τα  $\frac{6}{15}$  των χρημάτων.

Ο Β θα πάρει τα  $\frac{5}{15}$  των χρημάτων.

Ο Γ θα πάρει τα  $\frac{4}{15}$  των χρημάτων.

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκουμε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{6.000.000 \cdot 6}{15} = 2.400.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{6.000.000 \cdot 5}{15} = 2.000.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{6.000.000 \cdot 4}{15} = 1.600.000 \text{ €}$$

$$\text{Σύνολο: } \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} 6.000.000 \text{ €}$$

**Πρόβλημα 3ο.** Ένας πατέρας όρισε στη διαθήκη του να μοιραστεί η περιουσία του στα παιδιά του α, β, γ, ηλικίας 10, 12 και 15 χρονών, σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα με τις ηλικίες τους. Η περιουσία του ήταν 600 στρέμματα· πόσα στρέμματα θα πάρει το κάθε παιδί;

**Λύση.** Ο μερισμός ενός αριθμού Μ σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ, ανάγεται στο μερισμό του Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς  $1/\alpha$ ,  $1/\beta$ ,  $1/\gamma$ , οι οποίοι είναι αντίστροφοι των αριθμών α, β, γ.

Οι αντίστροφοι των αριθμών 10, 12, 15, που εκφράζουν τις ηλικίες των παιδιών, είναι  $1/10$ ,  $1/12$ ,  $1/15$ .

Ο αριθμός Μ = 600 στρέμματα θα μεριστεί ανάλογα προς τα κλάσματα  $1/10$ ,  $1/12$ ,  $1/15$ , τα οποία εάν τραπούν σε ομώνυμα είναι:  $6/60$ ,  $5/60$ ,  $4/60$ . Συνεπώς, τα 600 στρέμματα θα μοιραστούν ανάλογα προς τους αριθμούς 6, 5, 4. Είναι  $6 + 5 + 4 = 15$ . Εφαρμόζοντας τον πρακτικό κανόνα βρίσκουμε ότι:

$$\text{Το α' παιδί θα πάρει: } \frac{600 \cdot 6}{15} = 240 \text{ στρέμματα}$$

$$\text{Το β' παιδί θα πάρει: } \frac{600 \cdot 5}{15} = 200 \text{ στρέμματα}$$

$$\text{Το γ' παιδί θα πάρει: } \frac{600 \cdot 4}{15} = 160 \text{ στρέμματα}$$

---

Σύνολο: 600 στρέμματα

Παρατηρούμε ότι το μικρότερο σε ηλικία παιδί πήρε τα περισσότερα στρέμματα, ενώ το μεγαλύτερο παιδί πήρε τα λιγότερα στρέμματα. Τούτο οφείλεται στο ότι η περιουσία μοιράστηκε σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τις ηλικίες των παιδιών.

### 3.3. Προβλήματα Εταιρείας

#### 3.3.1. Βασικές έννοιες

Για την οργάνωση και τη διοίκηση μιας σύγχρονης επιχείρησης, δεν επαρκεί μόνο η προσωπική εργασία και η εποπτεία ενός ατόμου· χρειάζεται η συμβολή περισσότερων ατόμων. Γι' αυτό το λόγο, δύο ή περισσότεροι άνθρωποι ενώνουν τα χρήματά τους, για να κάνουν μαζί μια εμπορική, βιομηχανική, κτλ. επιχείρηση, η οποία ονομάζεται **Εταιρεία**. Τα πρόσωπα που συμμετέχουν σε μια εταιρεία ονομάζονται **εταίροι** ή **συνεταίροι**. Τα χρηματικά ποσά που καταθέτουν οι συνεταίροι στην εταιρεία λέγονται **κεφάλαια**, γιατί είναι χρηματικά ποσά που έχουν παραγωγική ικανότητα.

Οι εμπορικές εταιρείες διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

**1) Προσωπικές εταιρείες:** Προσωπικές εταιρείες είναι οι **ομόρρυθμες** και οι **ετερόρρυθμες** εταιρείες.

**2) Κεφαλαιουχικές εταιρείες:** Οι κεφαλαιουχικές εταιρείες είναι ο πιο συνηθισμένος εταιρικός τύπος και ονομάζονται **ανώνυμες εταιρείες**. Οι συνεταίροι μιας ανώνυμης εταιρείας ονομάζονται **μέτοχοι**, διότι το κεφάλ-

λαιο μιας ανώνυμης εταιρείας διαιρείται σε χρηματικούς τίτλους, που λέγονται **μετοχές**.

**3) Μεικτής φύσεως εταιρείες:** Αυτές έχουν χαρακτηριστικά και από τις δύο προηγούμενες κατηγορίες. Τέτοιες εταιρείες είναι: α) Οι διάφοροι προμηθευτικοί, οικοδομικοί, γεωργικοί κτλ. **συνεταιρισμοί**, β) **Οι εταιρείες περιορισμένης ευθύνης**.

Οι συνεταίροι ενδέχεται να συμμετέχουν στην εταιρεία όλοι με τα ίδια κεφάλαια· ενδέχεται όμως να συμμετέχουν και με διαφορετικά κεφάλαια, δηλαδή άλλοι με περισσότερα και άλλοι με λιγότερα. Τα κεφάλαια των συνεταίρων μπορεί να μείνουν στην εταιρεία ίσο χρονικό διάστημα, μπορεί όμως να μείνουν και διαφορετικό χρονικό διάστημα.

Τα κέρδη ή οι ζημίες που θα προκύψουν από τις εργασίες μιας εταιρείας μοιράζονται, συνήθως, στους συνεταίρους ανάλογα με τα κεφάλαια συμμετοχής κάθε εταίρου ή ανάλογα με το χρόνο που μένουν στην εταιρεία τα κεφάλαια.

Τα προβλήματα που έχουν σχέση με τη διανομή των κερδών ή ζημιών στους συνεταίρους μιας εταιρείας ονομάζονται **προβλήματα εταιρείας** και λύνονται όπως ακριβώς και τα προβλήματα μερισμού σε μέρη ανάλογα.

### 3.3.2.Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής

**Πρόβλημα 1ο.** Τέσσερα άτομα αποφάσισαν να συνεταιριστούν, ο Α εισέφερε 450.000 €, ο Β 500.000 €, ο Γ 700.000 € και ο Δ 850.000 €. Στο τέλος του πρώτου έτους η εταιρεία είχε πραγματοποιήσει κέρδη 400.000 €. Ποιο είναι το κέρδος κάθε συνεταίρου;

**Λύση.** Το κέρδος των 400.000 € θα μοιραστεί ανάλογα με τα κεφάλαια συμμετοχής κάθε συνεταίρου. Δηλαδή πρέπει να μερίσουμε τον αριθμό 400.000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 450.000, 500.000, 700.000 και 850.000 ή προς τους αριθμούς 450, 500, 700 και 850. (Τα μέρη του μεριστέου αριθμού δε μεταβάλλονται, αν τα κεφάλαια διαιρεθούν διά του αριθμού 1000).

$$\text{Μεριστέος} = M = 400.000$$

$$A + B + \Gamma + \Delta = 450 + 500 + 700 + 850 = 2500$$

Εφαρμόζοντας τον πρακτικό κανόνα μερισμού βρίσκουμε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{400.000 \cdot 450}{2500} = 72.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{400.000 \cdot 500}{2500} = 80.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{400.000 \cdot 700}{2500} = 112.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Δ θα πάρει: } \frac{400.000 \cdot 850}{2500} = 136.000 \text{ €}$$

$$\text{Σύνολο: } \underline{400.000 \text{ €.}}$$

**Πρόβλημα 2ο.** Τρεις έμποροι συνεταιρίστηκαν. Ο Α εισέφερε 1.500.000 €, ο Β 1.200.000 € και ο Γ 8.000.000 €. Στο τέλος του πρώτου έτους, η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδη 900.000 €. Ο Α, ο οποίος εκτελεί και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας, δικαιούται 10% επί πλέον επί των κερδών. Πόσο είναι το κέρδος κάθε συνεταιίρου;

**Λύση.** Το κέρδος του πρώτου έτους είναι 900.000 €. Ο Α, ως διαχειριστής, παίρνει 10% πριν από τη διανομή των κερδών, δηλαδή  $900.000 \cdot 0,1 = 90.000 \text{ €}$ . Συνεπώς, το κέρδος που θα διανεμηθεί είναι:

$$900.000 - 90.000 = 810.000 \text{ €}$$

Το κέρδος των 810.000 θα μοιραστεί ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής των συνεταιίρων: 1.500.000, 1.200.000 και 8.000.000 ή ανάλογα προς τους αριθμούς:  $15 = \alpha$ ,  $12 = \beta$  και  $80 = \gamma$ .

$$\text{Έχουμε: } M = 810.000 \text{ και } \alpha + \beta + \gamma = 107$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού βρίσκουμε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{810.000 \cdot 15}{107} = 113.551,40$$

$$\text{Άρα, } 113.551,40 + 90.000 = 203.551,40$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{810.000 \cdot 12}{107} = 90.841,12$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{810.000 \cdot 80}{107} = 605.607,48$$

$$\text{Σύνολο: } \underline{900.000}$$

**Πρόβλημα 3ο.** Εταιρεία από δύο πρόσωπα είχε κέρδος 1.330.000 €. Ο Α, που εκτελεί και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας, πήρε πριν από τη διανομή των κερδών τα 18% αυτών και τα υπόλοιπα κέρδη μοιράστηκαν ανάλογα με τα κεφάλαια συμμετοχής, τα οποία ήταν όπως οι αριθμοί 5 και 9. Να βρεθεί το κεφάλαιο που εισέφερε κάθε συνεταιίρος, αν είναι γνωστό ότι το κεφάλαιο και το συνολικό κέρδος του Α ανέρχονται σε 2.750.650 €.

**Λύση.** Βρίσκουμε πρώτα την ιδιαίτερη αμοιβή του Α με 18% επί των κερδών.

Στα 100 € κέρδος η αμοιβή είναι 18 €

Στα 1.330.000 € κέρδος η αμοιβή είναι  $x$ ; €

και 
$$x = 18 \cdot \frac{1.330.000}{100} = 239.400 \text{ €}$$

Άρα, ο Α πήρε 239.400 € πρόσθετη αμοιβή, γιατί εκτελούσε καθήκοντα διαχειριστή. Το υπόλοιπο κέρδος 1.090.600 (= 1.330.000 - 239.400) θα μοιραστεί ανάλογα προς τους αριθμούς:

$$5 = \alpha \text{ και } 9 = \beta, \alpha + \beta = 5 + 9 = 14, M = 1.090.600.$$

Εφαρμόζουμε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{1.090.600 \cdot 5}{14} = 389.500 \text{ €}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{1.090.600 \cdot 9}{14} = 701.100 \text{ €}$$

---


$$\text{Σύνολο: } 1.090.600 \text{ €}$$

Το συνολικό κέρδος του Α είναι:  $239.400 + 389.500 = 628.900 \text{ €}$

Αφού το κεφάλαιο και το συνολικό κέρδος του Α ανέρχονται σε 2.750.650 €, συμπεραίνουμε ότι το κεφάλαιο που εισέφερε ο Α θα είναι:  $2.750.650 - 628.900 = 2.121.750 \text{ €}$ . Για να βρούμε τώρα το κεφάλαιο που εισέφερε ο Β, σκεπτόμαστε ως εξής:

Τα 5 μερίδια του Α αποτελούν κεφάλαιο 2.121.750 €  
 Τα 9 μερίδια του Β αποτελούν κεφάλαιο x; €

---

και 
$$x = 2.121.750 \cdot \frac{9}{5} = 3.819.150 \text{ €}$$

Ωστε: Το κεφάλαιο που εισέφερε ο Β ανέρχεται σε 3.819.150 €.

### 3.3.3. Μερисμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τους χρόνους συμμετοχής

**Πρόβλημα 1ο.** Τρεις έμποροι συνεταιρίστηκαν με τα ίδια κεφάλαια συμμετοχής. Τα χρήματα του Α έμειναν στην εταιρεία ένα έτος, του Β 10 μήνες και του Γ 8 μήνες. Στο τέλος του έτους βρέθηκε κέρδος 3.000.000 €. Πόσα χρήματα πήρε ο κάθε συνεταίρος από το κέρδος;

**Λύση.** Αφού και οι τρεις συνεταίροι εισέφεραν το ίδιο κεφάλαιο, είναι φανερό ότι το κέρδος των 3.000.000 € θα μοιραστεί ανάλογα με το χρόνο που τα κεφάλαια έμειναν στην εταιρεία, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς 12, 10 και 8 μήνες.

Έχουμε:  $M = 3.000.000$ ,  $\alpha = 12$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 8$  και

Εφαρμόζουμε τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{3.000.000 \cdot 12}{30} = 1.200.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{3.000.000 \cdot 10}{30} = 1.000.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{3.000.000 \cdot 8}{30} = 800.000 \text{ €}$$

---


$$\text{Σύνολο: } 3.000.000 \text{ €}$$

**Πρόβλημα 2ο.** Ένας έμπορος άρχισε μια εμπορική επιχείρηση με κεφάλαιο 6.000.000 €. Τέσσερις μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε το ίδιο κεφάλαιο. Έξι μήνες μετά την πρόσληψη του β' συνεταίρου πήρε και τρίτο συνεταίρο με το ίδιο κεφάλαιο. Όταν συ-

**μπληρώθηκε ένα έτος από τη συμμετοχή του τρίτου συνεταίρου, βρέθηκε κέρδος 520.000 €. Πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος;**

**Λύση.** Εύκολα βρίσκουμε ότι το κεφάλαιο του Γ έμεινε στην εταιρεία 12 μήνες, ότι το κεφάλαιο του Β έμεινε  $12 + 6 = 18$  μήνες και ότι το κεφάλαιο του Α έμεινε  $12 + 6 + 4 = 22$  μήνες.

Αφού και οι τρεις συνεταίροι εισέφεραν το ίδιο κεφάλαιο, είναι φανερό ότι το κέρδος των 520.000 € θα μοιραστεί στους τρεις συνεταίρους ανάλογα με το χρόνο που τα κεφάλαια έμειναν στην εταιρεία, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς:  $22 = \alpha$ ,  $18 = \beta$ ,  $12 = \gamma$ .

Έχουμε:  $M = 520.000$  και  $\alpha + \beta + \gamma = 22 + 18 + 12 = 52$ .

Εφαρμόζουμε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{520.000 \cdot 22}{52} = 220.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{520.000 \cdot 18}{52} = 180.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{520.000 \cdot 12}{52} = 120.000 \text{ €}$$

$$\text{Σύνολο: } \underline{\quad 520.000 \text{ €}} \quad$$

### 3.3.4. Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τα κεφάλαια και τους χρόνους συμμετοχής

**Πρόβλημα 1ο.** Ένας έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με 8.000.000 €. Έξι μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 1.500.000 €. Ύστερα από 8 ακόμη μήνες πήρε και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 2.000.000 €. Δύο χρόνια μετά την έναρξη της επιχείρησης βρέθηκε κέρδος 3.310.000 €. Πόσο κέρδος αναλογεί σε κάθε συνεταίρο.

**Λύση.** Όπως βλέπουμε, στο πρόβλημα αυτό είναι διάφορα και τα κεφάλαια και οι χρόνοι συμμετοχής. Πρέπει λοιπόν το κέρδος να μοιραστεί όχι μόνο ανάλογα προς τα κεφάλαια αλλά και ανάλογα προς το χρόνο συμμετοχής.

Για να λύσουμε το πιο πάνω πρόβλημα, πρέπει να χωρίσουμε το κέρδος σε μερίδια: ένα μερίδιο θα είναι το κέρδος της 1 € σε 1 μήνα. Αν ο Α εισέφερε 8.000.000 € σε 1 μήνα, θα είχε 8.000.000 μερίδια. Αφού όμως εισέφερε 8.000.000 € σε 24 μήνες (εύκολα βρίσκουμε ότι τα κεφάλαια των Α, Β και Γ έμειναν στην εταιρεία 24, 18 και 10 μήνες αντιστοίχως), έχει  $8.000.000 \cdot 24 = 192.000.000$  μερίδια. Ο Β έχει  $1.500.000 \cdot 18 = 27.000.000$  μερίδια και ο Γ έχει  $2.000.000 \cdot 10 = 20.000.000$  μερίδια. Επομένως, ολόκληρο το κέρδος θα χωριστεί σε:  $192.000.000 + 27.000.000 + 20.000.000 = 239.000.000$  μερίδια. Πρέπει λοιπόν να μερίσουμε το κέρδος των 3.310.000 € σε μέρη ανάλογα των μεριδίων: 192.000.000, 27.000.000 και 20.000.000 ή σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς: 192, 27, 20.

Έχουμε:  $M = 3.310.000$  και  $192 + 27 + 20 = 239$

Εφαρμόζουμε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{3.310.000 \cdot 192}{239} = 2.659.080 \text{ €}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{3.310.000 \cdot 27}{239} = 373.933 \text{ €}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{3.310.000 \cdot 20}{239} = 276.987 \text{ €}$$

$$\text{Σύνολο: } \underline{\hspace{10em}} 3.310.000 \text{ €}$$



**Παρατήρηση.** Από τη λύση του πιο πάνω προβλήματος συμπεραίνουμε ότι: Στα προβλήματα εταιρείας, στα οποία και τα κεφάλαια και οι χρόνοι είναι διάφοροι, μοιράζουμε, συνήθως, τα κέρδη (ή και τις ζημίες) **ανάλογα προς τα γινόμενα των κεφαλαίων επί τους αντίστοιχους χρόνους** παραμονής των κεφαλαίων στην εταιρεία.

**Πρόβλημα 2ο.** Ένας έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με 3.000.000 €. Μετά τέσσερις μήνες πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 5.000.000 €. Έξι μήνες αργότερα πήρε και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 8.000.000 €. Αφού συμπληρώθηκαν δύο έτη από την έναρξη λειτουργίας της εταιρείας, διαπίστωσαν ότι είχαν κερδίσει 5.680.000 €. Πόσα χρήματα θα πάρει ο κάθε συνεταίρος από τα κέρδη;

**Λύση.** Για τη λύση του προβλήματος ταξινομούμε τα δεδομένα στον παρακάτω πίνακα:

|                          | Συνεταίροι |             |             |
|--------------------------|------------|-------------|-------------|
|                          | A          | B           | Γ           |
| Κεφάλαια                 | 3.000.000  | 5.000.000   | 8.000.000   |
| Χρόνοι                   | 24 μην.    | 20 μην.     | 14 μην.     |
| Γινόμενα Κεφαλ. x Χρόνοι | 72.000.000 | 100.000.000 | 112.000.000 |

Το κέρδος των 5.680.000 € θα μοιραστεί στους συνεταίρους Α, Β και Γ ανάλογα προς τα γινόμενα: Κεφάλαια · Χρόνοι, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς: 72.000.000, 100.000.000, 112.000.000 ή σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς: 72, 100 και 112.

Έχουμε:  $M = 5.680.000$  και  $72 + 100 + 112 = 284$

Εφαρμόζουμε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

$$\text{Ο Α θα πάρει: } \frac{5.680.000 \cdot 72}{284} = 1.440.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Β θα πάρει: } \frac{5.680.000 \cdot 100}{284} = 2.000.000 \text{ €}$$

$$\text{Ο Γ θα πάρει: } \frac{5.680.000 \cdot 112}{284} = 2.240.000 \text{ €}$$

$$\text{Σύνολο: } \underline{\quad 5.680.000 \text{ €} \quad}$$



### Προβλήματα Μερισμού και Εταιρείας

1. Τρεις εργάτες εργάστηκαν με το ίδιο ημερομίσθιο ο Α εργάστηκε 2 ημέρες, ο Β 3 ημ. και ο Γ 5 ημ. Ο εργοδότης τους έδωσε 400 € να τα μοιράσουν ανάλογα με τις ημέρες που εργάστηκε ο καθένας. Πόσα ευρώ αναλογούν στον καθένα:

(Απ. α) 80, β) 120, γ) 200)

2. Τέσσερις εργάτες έσκαψαν ένα κτήμα και πληρώθηκαν με το ίδιο ημερομίσθιο. Ο α' εργάστηκε 6 ημέρες, ο β' 7 ημέρες, ο γ' 9 ημέρες και ο δ' 12 ημέρες. Πήραν και οι τέσσερις μαζί 1.360 €. Πάσα ευρώ αναλογούν σε κάθε εργάτη;

*(Απ. α) 240, β) 280, γ) 360, δ) 480)*

3. Θεός άφησε στους τρεις ανεπιούς του 540000 € και όρισε στη διαθήκη του να τα μοιραστούν σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα με τις ηλικίες τους. Ο α' ήταν 18 χρονών, ο β' 12 και ο γ' 9 χρονών. Πόσα ευρώ θα πάρει ο κάθε ανεπιός;

*(Απ. α) 120.000, β) 180.000, γ) 240.000)*

4. Τέσσερις αδελφοί πούλησαν ένα οικόπεδο αντί 1.600.000 €. Αν στον Α ανήκε το  $\frac{1}{5}$  του οικοπέδου, στον Β τα  $\frac{3}{8}$  αυτού, στον Γ τα  $\frac{3}{10}$  και στον Δ το υπόλοιπο, πόσα χρήματα αναλογούν στον κάθε αδελφό;

*(Απ. α) 320.000, β) 600.000, γ) 480.000, δ) 200.000)*

5. Μοιράστηκαν 36.800 € σε 4 πτωχές οικογένειες ως εξής: Η β' πήρε τα  $\frac{2}{3}$  του μεριδίου της α', η γ' πήρε το  $\frac{1}{5}$  του μεριδίου της α' και β' μαζί και η δ' πήρε τα  $\frac{4}{7}$  του μεριδίου της γ'. Να βρεθεί το μερίδιο κάθε οικογένειας.

*(Απ. α) 16.800, β) 11.200, γ) 5.600, δ) 3.200)*

6. Ένας πατέρας όρισε στη διαθήκη του να μοιραστεί η περιουσία του στη σύζυγό του, στην κόρη του και στον γιο του ως εξής: Η κόρη του να πάρει τα  $\frac{3}{4}$  του μεριδίου της συζύγου και ο γιος τα  $\frac{3}{5}$  της κόρης. Αν η περιουσία του ήταν 4.400.000 €, να βρεθεί πόσα ευρώ θα πάρει το κάθε μέλος της οικογένειας.

*(Απ. 2.000.000 - 1.500.000 - 900.000)*

7. Να μοιραστούν 7.440 € σε 2 εργοδηγούς, 17 τεχνίτες και 30 εργάτες έτσι, ώστε ο κάθε τεχνίτης να πάρει τριπλάσια από κάθε εργάτη και ο κάθε εργοδηγός να πάρει διπλάσια από κάθε τεχνίτη.

*(Απ. εργ. 80, τεχν. 240, εργοδ. 480)*

8. Τρεις έμποροι συνεταιρίστηκαν. Ο α' εισέφερε 120.000 €, ο β' 80.000 € και ο γ' 200.000 €. Στο τέλος του πρώτου έτους η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδος 84.000 €. Ο α', που εκτελεί καθήκοντα διαχειριστή, δικαιούται 10% επί πλέον από τα κέρδη. Πόσο κέρδος αναλογεί στον κάθε συνεταίρο;

*(Απ. α) 31.080, β) 15.120, γ) 37.800)*

9. Ποσό 420.000 € μοιράστηκε σε τρία άτομα ανάλογα προς τους αριθμούς 12, 15, 18 και με τα χρήματα που πήραν έκαναν μια εταιρεία, αφού αύξησαν τις εισφορές τους κατά 100.000 € ο καθένας. Στο τέλος του πρώτου έτους η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδη 300.000 €. Πόσο κέρδος αναλογεί στον κάθε συνεταίρο;

*(Απ. α) 88.333,33, β) 100.000, γ) 111.666,67)*

10. Έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με κεφάλαιο 150.000 €. Δύο μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε τα 80% του κεφαλαίου του πρώτου. Ύστερα από τρεις ακόμη μήνες πήρε και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε τα 4/5 της εισφοράς του β' συνεταίρου. Όταν συμπληρώθηκε ένα έτος από τη συμμετοχή του τρίτου συνεταίρου, βρέθηκε κέρδος 426.800 €. Πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος;

*(Απ. α) 197.808, β) 139.629, γ) 89.363)*

11. Τρεις συνεταίροι κέρδισαν από την εταιρεία τους 165.000 €. Τα κεφάλαια που είχαν εισφέρει στην εταιρεία είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 1, 2, 3, ενώ οι χρόνοι παραμονής των κεφαλαίων στην εταιρεία είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 1, 2/3 και 3/4. Να βρεθεί πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος.

*(Απ. α) 36.000, β) 48.000, γ) 81.000)*

12. Δύο έμποροι συνεταιρίστηκαν με κεφάλαιο 900.000 €. Μετά δύο έτη, αφού κέρδισαν 300.000 €, διέλυσαν εταιρεία. Ο ένας από τους συνεταίρους πήρε 720.000 € για κεφάλαιο και κέρδος. Να βρεθούν το κεφάλαιο και το κέρδος χωριστά που πήρε ο κάθε συνεταίρος.

*(Απ. α) κεφ. 540.000, κέρδος 180.000, β) κεφ. 360.000, κέρδος 120.000)*

13. Τρεις άνθρωποι συνεταιρίστηκαν με συνολικό κεφάλαιο 1.200.000 €. Ο α' εισέφερε 450.000 €, ο β' 330.000 € και ο γ' το υπόλοιπο. Στο τέλος του πρώτου έτους τα κέρδη ήταν τα 8% του συνολικού κεφαλαίου. Πλήρωσαν φόρο στο Δημόσιο 3% από τα κέρδη και τα υπόλοιπα κέρδη τα μοίρασαν ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής τους. Πόσα ευρώ πήρε ο καθένας από το καθαρό κέρδος;

*(Απ. α) 34.920, β) 25.608, γ) 32.592)*

14. Δύο έμποροι συνεταιρίστηκαν. Ο α' εισέφερε 250.000 € και ο β' 400.000 €. Τέσσερις μήνες αργότερα πήραν και τρίτο συνetaίρο, ο οποίος εισέφερε κεφάλαιο ίσο προς το κεφάλαιο που εισέφεραν οι δυο πρώτοι μαζί. Όταν συμπληρώθηκε ένα έτος από την έναρξη λειτουργίας της εταιρείας, βρέθηκε κέρδος 325.000 €. Να βρεθεί πόσο κέρδος αναλογεί σε κάθε συνetaίρο, αν είναι γνωστό ότι ο α', πριν από τη διανομή των κερδών, πήρε 20% από τα κέρδη, διότι εκτελούσε και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας.

*(Απ. α) 125.000, β) 96.000, γ) 104.000)*

# **ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ**

## **ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ**





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

### 4.1. Υπολογισμός του Απλού Τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε Έτη, Εξάμηνα, Μήνες, Ημέρες

Στα προβλήματα του τόκου συμπλέκονται τέσσερα ποσά:

- 1) Ο **τόκος**, ο οποίος θα συμβολίζεται με το γράμμα **I** (αρχικό της λέξης Interest = τόκος).
- 2) Το **κεφάλαιο**, το οποίο θα συμβολίζεται με το γράμμα **K**.
- 3) Το **επιτόκιο**, το οποίο θα συμβολίζεται με το γράμμα **i**.
- 4) Ο **χρόνος**, ο οποίος θα συμβολίζεται με το **n**, όταν εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα, τρίμηνα, με το **μ**, όταν εκφράζεται σε μήνες και με το **v**, όταν εκφράζεται σε ημέρες.



Για τον υπολογισμό του απλού τόκου διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

### 4.1.1. Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα, τρίμηνα

Στην παράγραφο 1.3 της Εισαγωγής είπαμε ότι: **Επιτόκιο είναι ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο (π.χ. σε ένα έτος).**

Για την εξαγωγή του γενικού τύπου του απλού τόκου βασιζόμαστε στον ορισμό του επιτοκίου και σκεπτόμαστε ως εξής:

Κεφάλαιο 1 νομισματικής μονάδας σε 1 έτος φέρνει τόκο  $1 \cdot i$

" 1 " " 2 έτη " "  $2 \cdot i$

" 1 " " 3 έτη " "  $3 \cdot i$

.....  
.....

Κεφάλαιο 1 νομισμ. μονάδας σε  $n$  έτη φέρνει τόκο  $n \cdot i$

Αν τώρα διαθέτουμε κεφάλαιο  $K$  νομισματικών μονάδων, τότε ο συνολικός ετήσιος τόκος θα είναι:  $K \cdot n \cdot i$ . Συνεπώς, ο συνολικός τόκος ( $= I$ ) ενός κεφαλαίου ( $= K$ ), το οποίο τοκίζεται επί  $n$  έτη ή εξάμηνα με επιτόκιο  $i$ , υπολογίζεται από τον ακόλουθο θεμελιώδη τύπο του απλού τόκου:



$$I = K \cdot n \cdot i$$

Από τον τύπο (4.1) συμπεραίνουμε ότι: **Ο απλός τόκος είναι ευθέως ανάλογος προς το κεφάλαιο, το χρόνο και το επιτόκιο.** Δηλαδή, αν ένα από τα ποσά του β' μέλους της σχέσης (4.1) διπλασιαστεί, τριπλασιαστεί κτλ., τότε και ο τόκος διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κτλ.

**Παράδειγμα 1.** Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 10.000 €, το οποίο τοκίστηκε με επιτόκιο 15% για 1, 2, 3 έτη.

**Λύση:**  $K = 10.000$ ,  $i = 0,15$   $n = 1, 2, 3$   
 Για  $n = 1$ ,  $I = 10.000 \cdot 1 \cdot 0,15 = 1.500$   
 Για  $n = 2$ ,  $I = 10.000 \cdot 2 \cdot 0,15 = 3.000$   
 Για  $n = 3$ ,  $I = 10.000 \cdot 3 \cdot 0,15 = 4.500$

**Παράδειγμα 2.** Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 20.000 €, το οποίο τοκίστηκε με 8% το εξάμηνο για δύο έτη και έξι μήνες.

**Λύση:**  $K = 20.000$ ,  $i = 0,08$ ,  $n = 2 \cdot 2 + 1 = 5$  εξάμηνα  
 $I = K \cdot n \cdot i = 20.000 \cdot 5 \cdot 0,08 = 8.000$

**Παράδειγμα 3.** Πόσο τόκο φέρνει κεφάλαιο 20.000 € σε 2 έτη και 6 μήνες με 4% το τρίμηνο;

**Λύση:**  $K = 20.000$ ,  $i = 0,04$ ,  $n = 2 \cdot 4 + 2 = 10$  τρίμηνα  
 $I = K \cdot n \cdot i = 20.000 \cdot 10 \cdot 0,04 = 8.000$

#### 4.1.2. Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες

Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες, πρέπει να αντικαταστήσουμε το  $n$  του τύπου (4.1) με το κλάσμα  $\mu/12$  του έτους που αντιπροσωπεύουν οι μήνες. Στην περίπτωση αυτή, ο τόκος υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$I = \frac{K \cdot \mu \cdot i^*}{12} \quad (4.2)$$


**Παράδειγμα.** Πόσο τόκο φέρνει κεφάλαιο 10.000 € σε 8 μήνες με 12%;

**Λύση:**  $K = 10.000$ ,  $\mu = 8$ ,  $i = 0,12$   
 $I = 10.000 \cdot \frac{8}{12} \cdot 0,12 = 800 \text{ €}$

#### 4.1.3. Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες

Όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες, τότε πρέπει να αντικαταστήσουμε το  $n$  του τύπου (4.1) με το κλάσμα  $v/365$  (ή  $v/360$ ) του έτους που αντιπροσωπεύουν οι ημέρες. Στην περίπτωση αυτή, ο τόκος υπολογίζεται με τους τύπους:

$$I = \frac{K \cdot v \cdot i^*}{365 \text{ ή } 366} \quad \text{για πολιτικό έτος} \quad (4.3)$$


\* Διευκρινίζεται ότι το επιτόκιο είναι ετήσιο.



$$I = \frac{K \cdot v \cdot i}{360} \quad \text{για μεικτό ή εμπορικό έτος} \quad (4.4)$$

Για να εφαρμόσουμε τους τύπους (4.3) και (4.4), πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις **τοκοφόρες ημέρες**. Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών ισχύουν διεθνώς τα εξής:

1) Αν θεωρήσουμε τους μήνες με τις πραγματικές τους ημέρες (30 ή 31 και για το Φεβρουάριο 28 ή 29 για δίσεκτο έτος) και το έτος με **365** (ή 366 για δίσεκτο έτος) ημέρες, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **πολιτικό έτος\***.

2) Αν θεωρήσουμε τους μήνες με τις πραγματικές του ημέρες (30, 31, 28 ή 29) και το έτος με **360** ημέρες, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **μεικτό έτος**.

3) Αν, τέλος, θεωρήσουμε ότι όλοι οι μήνες έχουν 30 ημέρες και το έτος 360 (= 30 · 12), τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **εμπορικό έτος**.

**Σημείωση.** Η εφαρμογή του τύπου (4.4), δηλαδή η διαίρεση του Κνι διά του 360 και η διάκριση σε μεικτό και εμπορικό έτος, έχει πλέον ιστορική αξία και είχε επινοηθεί, για να υπολογίζουν με ευκολία τον τόκο. Σήμερα οι Τράπεζες και τα Ταμειυτήρια εφαρμόζουν το **πολιτικό έτος**, δηλαδή τον τύπο (4.3).



**Παρατήρηση:** Στο Ταχυδρομικό Ταμειυτήριο και στα ταμειυτήρια των Τραπεζών, για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών, ισχύουν τα εξής: i) Τα χρήματα που καταθέτουν οι πελάτες φέρνουν τόκο από την **επόμενη ημέρα**. ii) Τα χρήματα που δανείζουν οι διάφοροι πιστωτικοί οργανισμοί παράγουν τόκο από την ημέρα που χορηγούνται στους πελάτες.

\* Το έτος των 365 ημερών (με μία επί πλέον ημέρα κάθε 4 χρόνια) το καθιέρωσε ο Ιούλιος Καίσαρας, ύστερα από εισήγηση του Αλεξανδρινού αστρονόμου Σωσιγένη. Το Ιουλιανό ημερολόγιο επεκτάθηκε στη χρονολόγηση των γεγονότων και δημιούργησε μian επί πλέον διαφορά 10 ημερών. Τη διαφορά αυτή τη ρύθμισε το 1582 ο Πάπας Γρηγόριος ο ΙΓ', ο δημιουργός του Γρηγοριανού ημερολογίου, που χρησιμοποιούμε σήμερα. Τότε, η επόμενη ημέρα της 4ης Οκτωβρίου 1582 αντί 5η Οκτωβρίου γράφτηκε 15η Οκτωβρίου. Υπερπηδήθηκαν δηλαδή 10 ημέρες, για να διορθωθεί το Ιουλιανό ημερολόγιο. Στην Ελλάδα η καθιέρωση του Γρηγοριανού ημερολογίου έγινε το έτος 1923, κατά το οποίο η επόμενη της 16 Φεβρουαρίου ορίστηκε η 1η Μαρτίου. Υπερπηδήθηκαν δηλαδή 13 ημέρες, για να διορθωθεί το παμπάλαιο Ιουλιανό ημερολόγιο.

**Πίνακας 4.1**  
**Αριθμοί ημερών του έτους, για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών**

| ΗΜΕΡΑ | Ι  | Φ   | Μ  | Α   | Μ   | Ι   | Ι   | Α   | Σ   | Ο   | Ν   | Δ   | ΗΜΕΡΑ |
|-------|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| 1     | 1  | 32  | 60 | 91  | 121 | 152 | 182 | 213 | 244 | 274 | 305 | 335 | 1     |
| 2     | 2  | 33  | 61 | 92  | 122 | 153 | 183 | 214 | 245 | 275 | 306 | 336 | 2     |
| 3     | 3  | 34  | 62 | 93  | 123 | 154 | 184 | 215 | 246 | 276 | 307 | 337 | 3     |
| 4     | 4  | 35  | 63 | 94  | 124 | 155 | 185 | 216 | 247 | 277 | 308 | 338 | 4     |
| 5     | 5  | 36  | 64 | 95  | 125 | 156 | 186 | 217 | 248 | 278 | 309 | 339 | 5     |
| 6     | 6  | 37  | 65 | 96  | 126 | 157 | 187 | 218 | 249 | 279 | 310 | 340 | 6     |
| 7     | 7  | 38  | 66 | 97  | 127 | 158 | 188 | 219 | 250 | 280 | 311 | 341 | 7     |
| 8     | 8  | 39  | 67 | 98  | 128 | 159 | 189 | 220 | 251 | 281 | 312 | 342 | 8     |
| 9     | 9  | 40  | 68 | 99  | 129 | 160 | 190 | 221 | 252 | 282 | 313 | 343 | 9     |
| 10    | 10 | 41  | 69 | 100 | 130 | 161 | 191 | 222 | 253 | 283 | 314 | 344 | 10    |
| 11    | 11 | 42  | 70 | 101 | 131 | 162 | 192 | 223 | 254 | 284 | 315 | 345 | 11    |
| 12    | 12 | 43  | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 | 12    |
| 13    | 13 | 44  | 72 | 103 | 133 | 164 | 194 | 225 | 256 | 286 | 317 | 347 | 13    |
| 14    | 14 | 45  | 73 | 104 | 134 | 165 | 195 | 226 | 257 | 287 | 318 | 348 | 14    |
| 15    | 15 | 46  | 74 | 105 | 135 | 166 | 196 | 227 | 258 | 288 | 319 | 349 | 15    |
| 16    | 16 | 47  | 75 | 106 | 136 | 167 | 197 | 228 | 259 | 289 | 320 | 350 | 16    |
| 17    | 17 | 48  | 76 | 107 | 137 | 168 | 198 | 229 | 260 | 290 | 321 | 351 | 17    |
| 18    | 18 | 49  | 77 | 108 | 138 | 169 | 199 | 230 | 261 | 291 | 322 | 352 | 18    |
| 19    | 19 | 50  | 78 | 109 | 139 | 170 | 200 | 231 | 262 | 292 | 323 | 353 | 19    |
| 20    | 20 | 51  | 79 | 110 | 140 | 171 | 201 | 232 | 263 | 293 | 324 | 354 | 20    |
| 21    | 21 | 52  | 80 | 111 | 141 | 172 | 202 | 233 | 264 | 294 | 325 | 355 | 21    |
| 22    | 22 | 53  | 81 | 112 | 142 | 173 | 203 | 234 | 265 | 295 | 326 | 356 | 22    |
| 23    | 23 | 54  | 82 | 113 | 143 | 174 | 204 | 235 | 266 | 296 | 327 | 357 | 23    |
| 24    | 24 | 55  | 83 | 114 | 144 | 175 | 205 | 236 | 267 | 297 | 328 | 358 | 24    |
| 25    | 25 | 56  | 84 | 115 | 145 | 176 | 206 | 237 | 268 | 298 | 329 | 359 | 25    |
| 26    | 26 | 57  | 85 | 116 | 146 | 177 | 207 | 238 | 269 | 299 | 330 | 360 | 26    |
| 27    | 27 | 58  | 86 | 117 | 147 | 178 | 208 | 239 | 270 | 300 | 331 | 361 | 27    |
| 28    | 28 | 59  | 87 | 118 | 148 | 179 | 209 | 240 | 271 | 301 | 332 | 362 | 28    |
| 29    | 29 | ... | 88 | 119 | 149 | 180 | 210 | 241 | 272 | 302 | 333 | 363 | 29    |
| 30    | 30 | ... | 89 | 120 | 150 | 181 | 211 | 242 | 273 | 303 | 334 | 364 | 30    |
| 31    | 31 | ... | 90 | ... | 151 | ... | 212 | 243 | ... | 304 | ... | 365 | 31    |

**Σημείωση:** Για τα δίσεκτα έτη, κάθε αριθμός του πίνακα, από την 1η Μαρτίου και έπειτα, πρέπει να αυξάνεται κατά μία μονάδα.

**Παράδειγμα.** Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 100.000 δρχ., το οποίο τοκίστηκε με 15%: α) Από 27.1.1990 έως 10.4.1990· πολιτικό έτος. β) Από 20.6.1990 έως 31.8.1990· μεικτό έτος. γ) Από 1.2.1992 έως 1.4.1992· πολιτικό έτος.

**Λύση.** Πριν εφαρμόσουμε τους τύπους (4.3) και (4.4), πρέπει να υπολογίσουμε τις τοκοφόρες ημέρες. Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών χρησιμοποιούμε τον Πίνακα 4.1. Ο πίνακας αυτός δίνει αθροιστικά τον αριθμό των ημερών του έτους από την 1η Ιανουαρίου έως την 31η Δεκεμβρίου. Για να βρούμε τις τοκοφόρες ημέρες μεταξύ δύο ημερομηνιών εκτελούμε μια απλή αφαίρεση. Ο υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών του ανωτέρω παραδείγματος, με τη βοήθεια του Πίνακα 4.1, γίνεται ως εξής:

|      |     |           |     |           |         |     |                   |
|------|-----|-----------|-----|-----------|---------|-----|-------------------|
| α)   | Από | 1.1.1990  | έως | 10.4.1990 | έχουμε: | 100 | ημέρες            |
|      | "   | 1.1.1990  | "   | 27.1.1990 | "       | -27 | "                 |
| Άρα: | Από | 27.1.1990 | "   | 10.4.1990 | "       | 73  | τοκοφόρες ημέρες. |

|      |     |           |     |           |         |      |                   |
|------|-----|-----------|-----|-----------|---------|------|-------------------|
| β)   | Από | 1.1.1990  | έως | 31.8.1990 | έχουμε: | 243  | ημέρες            |
|      | "   | 1.1.1990  | "   | 20.6.1990 | "       | -171 | "                 |
| Άρα: | Από | 20.6.1990 | "   | 31.8.1990 | "       | 72   | τοκοφόρες ημέρες. |

|      |     |          |     |          |         |     |                   |
|------|-----|----------|-----|----------|---------|-----|-------------------|
| γ)   | Από | 1.1.1992 | έως | 1.4.1992 | έχουμε: | 92  | ημέρες*           |
|      | "   | 1.1.1992 | "   | 1.2.1992 | "       | -32 | "                 |
| Άρα: | Από | 1.2.1992 | "   | 1.4.1992 | "       | 60  | τοκοφόρες ημέρες. |

Επομένως, θα έχουμε:

$$K = 100.000, \quad i = 0,15, \quad v = 73, \quad v = 72, \quad v = 60.$$

Αντικαθιστώντας τώρα στους τύπους (4.3) και (4.4) βρίσκουμε αντίστοιχα:

---

\* Το 1992 : 4 = 498, άρα δίσεκτο έτος. Συνεπώς, θα έχουμε:  
 Ιαν. 31 + Φεβρ. 29 + Μαρτ. 31 + Απρ. 1 = 92 ημέρες

$$\alpha) \quad I = \frac{100.000 \cdot 73 \cdot 0,15}{365 = 5 \cdot 73} = 3.000 \text{ δρχ.}$$

$$\beta) \quad I = \frac{100.000 \cdot 72 \cdot 0,15}{360 = 5 \cdot 72} = 3.000 \text{ δρχ.}$$

$$\gamma) \quad I = \frac{100.000 \cdot 60 \cdot 0,15}{366} = 2.459 \text{ δρχ.}$$

#### 4.2. Υπολογισμός του απλού τόκου με τους Τοκάριθμους, τους Σταθερούς Διαιρέτες και τους Σταθερούς Πολλαπλασιαστές

Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους του β' μέλους των τύπων:

$$I = \frac{K \cdot v \cdot i}{365} \quad \text{και} \quad I = \frac{K \cdot v \cdot i}{360}$$

με το επιτόκιο  $i$ , τότε προκύπτουν οι τύποι:

$$I = \frac{K \cdot v}{\frac{365}{i}} \quad \text{και} \quad I = \frac{K \cdot v}{\frac{360}{i}}$$

Το γινόμενο  $K \cdot v$  ( $=$  Κεφάλαιο  $\cdot$  τοκοφόρες ημέρες) ονομάζεται **Τοκάριθμος** και συμβολίζεται με το γράμμα **N**. Το πηλίκο  $365 : i$  (ή  $360 : i$ ), το οποίο για ορισμένα επιτόκια είναι **ακέραιος αριθμός**, συμβολίζεται με το γράμμα  **$\Delta$**  και ονομάζεται **Σταθερός Διαιρέτης**. Συνεπώς, για τον υπολογισμό του τόκου μπορεί να εφαρμοστεί και ο παρακάτω τύπος:



$$I = \frac{K \cdot v}{\Delta} = \frac{\text{Τοκάριθμος}}{\text{Σταθερός Διαιρέτης}} = \frac{N}{\Delta}$$



(4.5)

**Παράδειγμα.** Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 30.000 €, το οποίο τοκίστηκε: α) με ετήσιο επιτόκιο 12% για 100 ημέρες και έτος μεικτό και β) με ετήσιο επιτόκιο 10% για 73 ημέρες και έτος πολιτικό.

**Λύση:**  $K = 30.000$ ,  $v = 100$ ,  $i = 0,12$ ,  $v = 73$ ,  $i = 0,10$

α)  $\Delta = 360 : 0,12 = 3.000$ . β)  $\Delta = 365 : 0,10 = 3.650$

Αντικαθιστώντας στον τύπο (4.5) βρίσκουμε:

$$I = \frac{K \cdot v}{\Delta} = \frac{30.000 \cdot 100}{3.000} = 1.000 \text{ €}$$

$$I = \frac{K \cdot v}{\Delta} = \frac{30.000 \cdot 73}{3.650} = 50 \cdot 73 = 3.650 \text{ €}$$

**Πίνακας 4.2**  
**Σταθεροί Διαιρέτες**

| i    | $360 : i = \Delta$ | i     | $365 : i = \Delta$ |
|------|--------------------|-------|--------------------|
| 0,06 | 6.000              | 0,05  | 7.300              |
| 0,08 | 4.500              | 0,10  | 3.650              |
| 0,09 | 4.000              | 0,125 | 2.920              |
| 0,10 | 3.600              | 0,20  | 1.825              |
| 0,12 | 3.000              |       |                    |
| 0,15 | 2.400              |       |                    |



**Παρατήρηση:** Η εφαρμογή του τύπου (4.5) παρέχει ευχέρεια υπολογισμών, αλλά πρέπει τα πηλίκα  $360 : i$  και  $365 : i$  να δίνουν πάντοτε ακέραιο αριθμό. Στον Πίνακα 4.2 παραθέτουμε ενδεικτικά ορισμένους σταθερούς διαιρέτες.

**Εύρεση τόκου με τη μέθοδο των Σταθερών Πολλαπλασιαστών.** Οι τύποι υπολογισμού του τόκου:

$$I = \frac{K \cdot v \cdot i}{360} \quad \text{ή} \quad I = \frac{K \cdot v \cdot i}{365}$$

μπορούν να γραφούν ως εξής:



$$I = K \cdot v \cdot \frac{i}{360} = K \cdot v \cdot \Pi$$

$$I = K \cdot \nu \cdot \frac{i}{365} = K \cdot \nu \cdot \Pi$$



(4.7)

Τα πηλίκα  $i : 360 = \Pi$  και  $i : 365 = \Pi$  ονομάζονται **σταθεροί πολλαπλασιαστές**. Από τους τύπους (4.6) και (4.7) συνάγεται ότι: Για να υπολογίσουμε τον τόκο ενός κεφαλαίου πολλαπλασιάζουμε τον **Τοκάριθμο** ( $= K \cdot \nu$ ) επί το **Σταθερό πολλαπλασιαστή** ( $= \Pi$ ). Η μέθοδος των Σταθερών Πολλαπλασιαστών εφαρμόζεται, όταν ο εκτοκισμός γίνεται με Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές (H/Y). Συγκεκριμένα ο Σταθερός Πολλαπλασιαστής είναι κατωρισμένος σε μια μνήμη του H/Y και αφού υπολογιστεί ο τοκάριθμος, ο υπολογισμός του τόκου γίνεται αυτομάτως: Τοκάριθμος επί το Σταθερό Πολλαπλασιαστή.



**Παράδειγμα:** Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 1.000.000 €, το οποίο τοκίστηκε επί 100 ημέρες με επιτόκιο 14,5% και έτος πολιτικό.

**Λύση:**  $K = 1.000.000$ ,  $\nu = 100$ ,  $i = 0,145$

Ο Σταθερός Πολλαπλασιαστής είναι:  $\Pi = 0,145 : 365 = 0,00039726$ .

Αντικαθιστούμε στον τύπο (4.7) και βρίσκουμε:

$$I = 1.000.000 \cdot 100 \cdot 0,00039726 = 39.726 \text{ €}.$$

**Πίνακας 4.3**  
**Σταθεροί Πολλαπλασιαστές**

| Επιτόκια (i) | $\Pi = i : 360$ | $\Pi = i : 365$ |
|--------------|-----------------|-----------------|
| 0,06         | 0,0001667       | 0,0001644       |
| 0,08         | 0,0002222       | 0,0002192       |
| 0,09         | 0,0002500       | 0,0002466       |
| 0,10         | 0,0002778       | 0,0002740       |
| 0,12         | 0,0003333       | 0,0003288       |
| 0,14         | 0,0003889       | 0,0003836       |
| 0,15         | 0,0004167       | 0,0004109       |

Στον Πίνακα 4.3 παραθέτουμε ενδεικτικά ορισμένους Σταθερούς Πολλαπλασιαστές.

### 4.3. Υπολογισμός συνολικού τόκου πολλών κεφαλαίων

Υποθέτουμε ότι κεφάλαια  $K_1, K_2, \dots, K_\mu$  τοκίζονται αντίστοιχα για  $v_1, v_2, \dots, v_\mu$  ημέρες με το ίδιο επιτόκιο  $i$ . Ο συνολικός τόκος των δοσμένων κεφαλαίων θα αποτελείται από το άθροισμα των τόκων κάθε κεφαλαίου, δηλαδή:

$$I_{\text{ολ}} = I_1 + I_2 + \dots + I_\mu$$

$$\text{ή} \quad I_{\text{ολ}} = \frac{K_1 \cdot v_1 \cdot i}{365} + \frac{K_2 \cdot v_2 \cdot i}{365} + \dots + \frac{K_\mu \cdot v_\mu \cdot i}{365} =$$



$$= \frac{i \cdot (K_1 \cdot v_1 + K_2 \cdot v_2 + \dots + K_\mu \cdot v_\mu)}{365} = \frac{i \cdot \Sigma K v}{365} \quad (4.8)$$

Αν τώρα το επιτόκιο είναι «κατάλληλο» για σταθερό διαιρέτη, τότε χρησιμοποιείται ο τύπος:

$$I_{\text{ολ}} = \frac{K_1 \cdot v_1 + K_2 \cdot v_2 + \dots + K_\mu \cdot v_\mu}{\Delta} = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_\mu}{\Delta} \quad (4.9)$$

όπου:  $N_1, N_2, \dots, N_\mu$  = Τοκάριθμοι και  $\Delta$  = σταθερός διαιρέτης.

**Παράδειγμα:** Ο υπάλληλος Υ κατέθεσε στην Τράπεζα Τ, με ετήσιο επιτόκιο\* 15%, στις 9/2/1996 20.000 δρχ., στις 22/3/1996 25.000 δρχ. και την 21/5/1996 30.000 δρχ. Στις 30/6/1996 ο Υ έκανε ανάληψη 50.000 δρχ. Στη συνέχεια, ο Υ κατέθεσε 30.000 δρχ. στις 22/9/1996 και 40.000 δρχ. την 1/11/1996. Να βρεθεί το ποσό (υπόλοιπο) που θα εμφανίζει ο λογ/σμός του Υ στις 31/12/1996, αν είναι γνωστό ότι: α) η Τράπεζα υπολογίζει τους τόκους των καταθέσεων ταμειωτηρίου στις 30 Ιουνίου και 31 Δεκεμβρίου

\* Στις 29.06.1999, το επιτόκιο Καταθέσεων Ταμειωτηρίου, στις Εμπορικές τράπεζες ήταν 8%.

και β) ο φόρος του Δημοσίου επί των τόκων των καταθέσεων ανέρχεται σε 15%· έτος πολιτικό.

**Λύση:** Στις Τράπεζες και στα Ταμιευτήρια, για τις «Καταθέσεις Ταμιευτηρίου»\*, υπολογίζουν τους τόκους δύο φορές το χρόνο: Στις 30 Ιουνίου και στις 31 Δεκεμβρίου· εφαρμόζουν δε το **πολιτικό έτος**. Στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο υπολογίζουν τους τόκους στις 31 Δεκεμβρίου κάθε χρόνου.

Κατά τη διάρκεια του εξαμήνου γίνονται **καταθέσεις** και **αναλήψεις**, χωρίς να υπολογίζονται οι τόκοι. Στις 30 Ιουνίου υπολογίζονται οι **τοκοφόρες ημέρες** για το κάθε υπόλοιπο και στη συνέχεια οι αντίστοιχοι **τοκάριθμοι**. Στις 30 Ιουνίου αθροίζεται η στήλη «Τοκάριθμοι», το άθροισμα των τοκαρίθμων πολλαπλασιάζεται με το ισχύον επιτόκιο και το γινόμενο διαιρείται με το 365. Έτσι, προκύπτουν οι τόκοι που έχουν παραχθεί κατά τη διάρκεια του πρώτου εξαμήνου κάθε έτους. Οι τόκοι του α' εξαμήνου συνήθως κεφαλαιοποιούνται. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για το β' εξάμηνο.

Πίνακας 4.4

| Ημερομηνία | Καταθέσεις          | Αναλήψεις | Υπόλοιπο<br>(Κ)                                      | Τοκοφ. ημ.<br>(ν) | Τοκάριθμοι<br>(Κ·ν) |
|------------|---------------------|-----------|------------------------------------------------------|-------------------|---------------------|
| 09/02/1996 | 20.000              | -         | 20.000                                               | 42                | 840.000             |
| 22/03/1996 | 25.000              | -         | 45.000                                               | 60                | 2.700.000           |
| 21/05/1996 | 30.000              | -         | 75.000                                               | 40                | 3.000.000           |
| 30/06/1996 | -                   | 50.000    | 25.000                                               | -                 | -                   |
| 30/06/1996 | Τόκοι               |           | $+2.680 = \text{Τόκοι} = (6.540.000 \cdot 0,15)/366$ |                   |                     |
| 30/06/1996 | Φόρος 15% επί τόκων |           | -402                                                 |                   |                     |
| 30/06/1996 |                     |           | 27.278                                               |                   |                     |
| 30/06/1996 | Υπόλοιπο            |           | 27.278                                               | 84                | 2.291.352           |
| 22/09/1996 | 30.000              | -         | 57.278                                               | 40                | 2.291.120           |
| 01/11/1996 | 40.000              | -         | 97.278                                               | 60                | 5.836.680           |
| 31/12/1996 | Τόκοι               |           | $+ 4.270 = (10.419.152 \cdot 0,15)/366$              |                   |                     |
| 31/12/1996 | Φόρος 15% επί τόκων |           | -640                                                 |                   |                     |
| 31/12/1996 | Υπόλοιπο            |           | 100.908                                              |                   |                     |

\* Για τα διάφορα είδη των καταθέσεων βλέπε στην παράγραφο 4.6 αυτού του Κεφαλαίου

Ο Πίνακας 4.4 επεξηγεί πλήρως την ακολουθούμενη διαδικασία εκτοκισμού. Δηλαδή, το υπόλοιπο 20.000 δρχ. παράγει τόκο από 10/2/96 έως και 22/3/96, δηλαδή για 42 ημέρες. Υπολογίζουμε τον τοκάριθμο 840.000 ( $= 20.000 \times 42$ ) και τον καταχωρίζουμε στη στήλη «Τοκάριθμοι» του Πίνακα 4.4. Επίσης, το υπόλοιπο 45.000 παράγει τόκο από 23/3/1996 έως και 21/5/96, δηλαδή 60 ημέρες. Υπολογίζουμε πάλι τον τοκάριθμο 2.700.000 ( $= 45.000 \times 60$ ) και τον καταχωρίζουμε στη στήλη «Τοκάριθμοι». Τέλος, το υπόλοιπο 75.000 παράγει τόκο από 22/5/1996 έως και 30/6/1996, δηλαδή για 40 ημέρες και δίνει τοκάριθμο 3.000.000, ο οποίος καταχωρίζεται στη στήλη «Τοκάριθμοι».

Στις 30/6/1996, για τον εκτοκισμό ( $=$  υπολογισμός τόκων), αθροίζουμε τους τοκάριθμους, το άθροισμά τους ( $= 6.540.000$ ) πολλαπλασιάζουμε με το επιτόκιο 0,15 (15%) και το γινόμενο διαιρούμε με το 366 και βρίσκουμε τους τόκους 2.680, οι οποίοι καταχωρίζονται προσθετικά στη στήλη «Υπόλοιπο». Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το φόρο επί των τόκων 402 ( $= 2.680 \times 15\%$ ), ο οποίος καταχωρίζεται αφαιρετικά στη στήλη «Υπόλοιπο». Κατά συνέπεια, το βιβλιάριο καταθέσεων του Υ, στις 30/6/1996, δείχνει «Υπόλοιπο» 27.278 δρχ.

Η ίδια ακριβώς διαδικασία ακολουθείται και κατά το β' εξάμηνο και, όπως βλέπουμε στον Πίνακα 4.4, στις 31/12/1996 το βιβλιάριο καταθέσεων του Υ εμφανίζει «Υπόλοιπο» 100.908 δρχ.

#### 4.4. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστό το τελικό κεφάλαιο (αυξημένο κατά τους τόκους του κεφάλαιο)



Στον απλό τόκο, ονομάζουμε **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία** (Amount) ενός κεφαλαίου ή **αυξημένο** κατά τους τόκους του κεφάλαιο, το άθροισμα του **αρχικού κεφαλαίου** αυξημένο κατά τον τόκο που έχει παραχθεί στο τέλος μιας χρονικής περιόδου.

Αν παραστήσουμε με το  $K_0$  το αρχικό κεφάλαιο και με το  $K_n$  το τελικό κεφάλαιο, με βάση τον πιο πάνω ορισμό, θα έχουμε:

α) Αν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη:

$$K_n = K_0 + I = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i$$



(4.10)

β) Αν τώρα ο χρόνος δίνεται σε μήνες:

$$K_\mu = K_0 + \frac{K_0 \cdot \mu \cdot i}{12}$$

(4.11)

γ) Αν, τέλος, ο χρόνος δίνεται σε ημέρες:

$$K_v = K_0 + \frac{K_0 \cdot v \cdot i}{360 \text{ ή } 365}$$

(4.12)

ή με σταθερούς διαιρέτες:

$$K_v = K_0 + \frac{K_0 \cdot v}{\Delta}$$

(4.13)

**Παρατήρηση:** Με την τελική αξία ενός κεφαλαίου σχετίζεται το εξής πρόβλημα: Σε πόσο χρόνο ένα κεφάλαιο διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κτλ.;

Για να βρούμε ύστερα από πόσο χρόνο, ένα κεφάλαιο που τοκίζεται με απλό τόκο, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κτλ. αρκεί να αντικαταστήσουμε σε έναν από τους παραπάνω τύπους όπου  $K_v = 2K_0$ , ή  $K_v = 3K_0$ , κλπ.



Έτσι, αν στον τύπο (4.13) θέσουμε όπου  $K_v = 2K_0$  θα έχουμε:

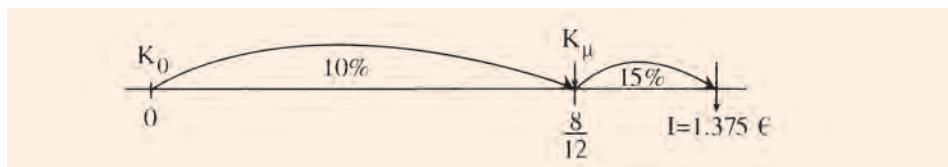
$$2K_0 = K_0 + \frac{K_0 \cdot v}{\Delta} \quad \text{ή} \quad K_0 = \frac{K_0 \cdot v}{\Delta}, \quad \text{οπότε} \quad v = \Delta$$

$$3K_0 = K_0 + \frac{K_0 \cdot v}{\Delta} \quad \text{ή} \quad 2K_0 = \frac{K_0 \cdot v}{\Delta}, \quad \text{οπότε} \quad v = 2\Delta$$

Ωστε: Κεφάλαιο, τοκισμένο με απλό τόκο, διπλασιάζεται σε τόσες ημέρες όσες και ο σταθερός διαιρέτης, τριπλασιάζεται σε αριθμό ημερών διπλάσιο του σταθερού διαιρέτη.

**Παράδειγμα 1ο.** Κεφάλαιο τοκίστηκε με 10% επί 8 μήνες και το τοκο-κεφάλαιο τοκίστηκε πάλι με 15% και έδωσε μηνιαίο τόκο 1.375 €. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο;

**Λύση:**



Έστω  $K_\mu$  το τοκοκεφάλαιο που τοκίστηκε με 15% και έδωσε μηνιαίο τόκο 1.375 € Δηλαδή:

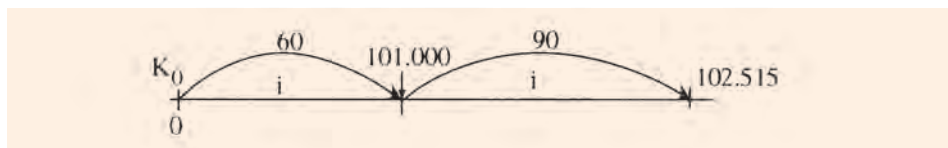
$$\frac{K_\mu \cdot 1 \cdot 0,15}{12} = 1.375, \text{ οπότε: } K_\mu = 110.000$$

Αντικαθιστώντας τώρα στον τύπο (4.11) έχουμε:

$$110.000 = K_0 + \frac{K_0 \cdot 8 \cdot 0,10}{12}, \text{ οπότε } K_0 = 103.125 \text{ €}$$

**Παράδειγμα 2ο.** Κεφάλαιο τοκίστηκε επί 60 ημέρες και έγινε μαζί με τους τόκους του 101.000 €. Το τοκοκεφάλαιο 101.000 € τοκίστηκε πάλι επί 90 ημέρες με το ίδιο επιτόκιο και έγινε μαζί με τους τόκους του 102.515 €. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο και το επιτόκιο\* έτος μεικτό.

**Λύση:**



Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, το κεφάλαιο των 101.000 €, που τοκίστηκε επί 90 ημέρες, έφερε τόκο:

$$102.515 - 101.000 = 1.515 = I$$

Αντικαθιστούμε τώρα στον τύπο  $I = \frac{K \cdot v \cdot i}{360}$  και βρίσκουμε το επιτόκιο. Δηλαδή:

$$1.515 = \frac{101.000 \cdot 90 \cdot i}{360} \text{ και } i = 0,06.$$

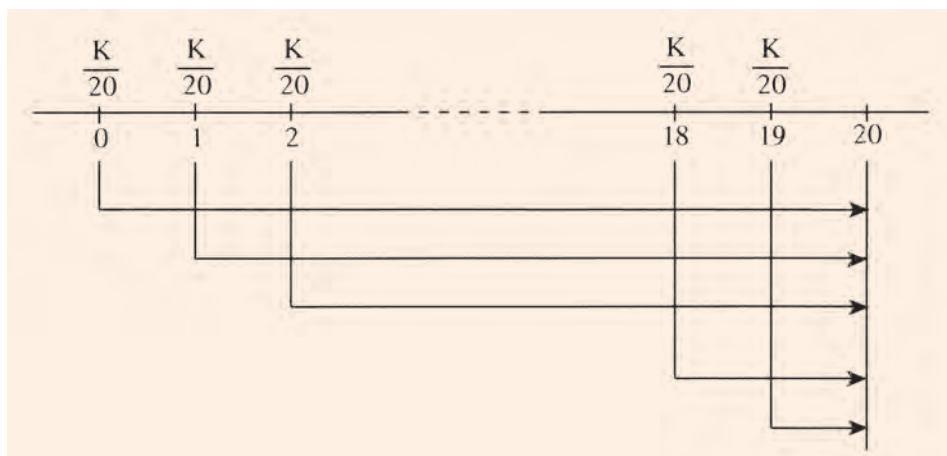
Από τη σχέση:

$$K_v = K_0 + \frac{K_0 \cdot v \cdot i}{360} \text{ θα βρούμε το αρχικό κεφάλαιο}$$

$$101.000 = K_0 + \frac{K_0 \cdot 60 \cdot 0,06}{360} \text{ και } K_0 = 100.000$$

**Παράδειγμα 3ο.** Ο κ. Α.Β. αγόρασε ένα οικόπεδο αξίας 6.000.000 € και συμφώνησε να δώσει σήμερα 4.000.000 € μετρητά και το υπόλοιπο να το εξοφλήσει με 20 μηνιαίες δόσεις. Το ετήσιο τραπεζικό επιτόκιο είναι 30%. Να υπολογιστούν οι μηνιαίες δόσεις τις οποίες θα πληρώνει ο κ. Α.Β.

**Λύση. Πρώτος Τρόπος. (Ισες Δόσεις).** Έστω  $K$  το οφειλόμενο ποσό και  $i$  το ετήσιο επιτόκιο. Κατασκευάζουμε το ακόλουθο σχήμα:



Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει:

$$\begin{aligned} \text{Σύνολο Τόκων} &= \frac{K}{20} \cdot 20 \cdot \frac{i}{12} + \frac{K}{20} \cdot 19 \cdot \frac{i}{12} + \frac{K}{20} \cdot 18 \cdot \frac{i}{12} + \dots + \\ &+ \frac{K}{20} \cdot 2 \cdot \frac{i}{12} + \frac{K}{20} \cdot 1 \cdot \frac{i}{12} = \frac{K}{20} \cdot \frac{i}{12} (20 + 19 + 18 + \dots + 2 + 1) = \\ &= \frac{K}{20} \cdot \frac{i}{12} (1 + 2 + \dots + 18 + 19 + 20) \end{aligned}$$

Το εντός της παρενθέσεως άθροισμα αποτελεί άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου και βρίσκεται με τον τύπο:

$$\Sigma = \frac{(a + \tau) \cdot v}{2} \quad (4.14)$$

όπου  $a = 1^{\text{ος}}$  μήνας,  $\tau = \text{τελευταίος μήνας}$  και  $v = \text{πλήθος όρων (μηνών)}$ . Κατά συνέπεια, θα έχουμε:

$$\text{Σύνολο Τόκων} = \frac{K}{20} \cdot \frac{(1 + 20)20}{2} \cdot \frac{i}{12} = K \cdot \frac{1 + 20}{2} \cdot \frac{i}{12} = \quad (4.15)$$

$$= 2.000.000 \cdot \frac{1 + 20}{2} \cdot \frac{0,30}{12}$$

$$= 2.000.000 \cdot 10,5 \cdot 0,025 = 525.000$$

Συνεπώς, η μηνιαία δόση θα είναι:

$$\text{Μηνιαία Δόση} = (2.000.000 + 525.000) : 20 = \mathbf{126.250}$$

Γενικός τύπος υπολογισμού συνολικών τόκων:



$$I_{\text{ολ}} = K \left( \frac{1 + \tau}{2} \right) \cdot \frac{i}{12}$$

(4.16)

$K = \text{οφειλόμενο ποσό}$

$1 = 1^{\text{ος}}$  μήνας

$\tau = \text{τελευταίος μήνας}$

$i = \text{ετήσιο επιτόκιο}$

**Δεύτερος Τρόπος (Άνισες Δόσεις).** Ο τρόπος αυτός ανταποκρίνεται πλήρως στην **Αρχή της Οικονομικής ισοδυναμίας**. Έτσι, θα έχουμε:

$$\text{Μηνιαία Δόση} = \frac{K}{\mu} + \frac{K}{\mu} \cdot \frac{i}{12} \cdot \mu \quad (4.17)$$

Όπου:  $K$  = Οφειλόμενο ποσό  
 $\mu$  = μήνες  
 $i$  = ετήσιο τραπεζικό επιτόκιο

$$K : \mu = 2.000.000 : 20 = 100.000$$

$$i : 12 = 0,30 : 12 = 0,025 \text{ και } \mu = 1, 2, 3, \dots, 20$$

Κατά συνέπεια, θα έχουμε:

| Δόση            | $\frac{K}{20} + \frac{K}{20} \cdot \frac{0,30}{12} \cdot \mu$ | $= \frac{K}{20} + \text{Τόκοι} = \text{Δόσεις}$ |
|-----------------|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1 <sup>η</sup>  | $100.000 + 100.000 \cdot 0,025 \cdot 1$                       | $= 100.000 + 2.500 = 102.500$                   |
| 2 <sup>η</sup>  | $100.000 + 100.000 \cdot 0,025 \cdot 2$                       | $= 100.000 + 5.000 = 105.000$                   |
| 3 <sup>η</sup>  | $100.000 + 100.000 \cdot 0,025 \cdot 3$                       | $= 100.000 + 7.500 = 107.500$                   |
| .               | .....                                                         | .....                                           |
| .               | .....                                                         | .....                                           |
| 19 <sup>η</sup> | $100.000 + 100.000 \cdot 0,025 \cdot 19$                      | $= 100.000 + 47.500 = 147.500$                  |
| 20 <sup>η</sup> | $100.000 + 100.000 \cdot 0,025 \cdot 20$                      | $= 100.000 + 50.000 = 150.000$                  |
|                 | Σύνολο:                                                       | $2.000.000 + 525.000 = 2.525.000$               |

**Παρατήρηση:** Παρατηρούμε ότι οι δόσεις ακολουθούν αριθμητική πρόοδο με λόγο  $\omega = 2.500$ . Συνεπώς, αν στην πρώτη δόση (= 102.500) προσθέσουμε το λόγο (= 2.500), βρίσκουμε τη 2η δόση. Αν στη 2η δόση (= 105.000) προσθέσουμε το λόγο (= 2.500), βρίσκουμε την τρίτη δόση κ.ο.κ.



#### 4.5. Προβλήματα στα οποία δίνεται το κεφάλαιο ελαττωμένο κατά τον τόκο του

Στις εμπορικές συναλλαγές, υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες ο δανειζόμενος ένα χρηματικό ποσό δεν εισπράττει ολόκληρο το ποσό που δανείζεται, γιατί ο δανειστής (πιστωτής) παρακρατεί συνήθως τον τόκο του

κεφαλαίου που δανείζει, οπότε ο δανειζόμενος (χρεώστης) εισπράττει ένα κεφάλαιο που είναι ελαττωμένο κατά τον τόκο του. Στην περίπτωση αυτή δημιουργούνται τα εξής προβλήματα: α) η εύρεση του ελαττωμένου κεφαλαίου ή β) η εύρεση του αρχικώς δανεισθέντος κεφαλαίου.

Αν παραστήσουμε με το  $K_0$  το αρχικό κεφάλαιο που δανείστηκε ο χρεώστης για  $\mu$  μήνες (ή  $\nu$  ημέρες) με επιτόκιο  $i$ , και με το  $K_e$  το ελαττωμένο κεφάλαιο (δηλαδή το κεφάλαιο το οποίο εισέπραξε ο χρεώστης από τον πιστωτή μετά την αφαίρεση του τόκου), τότε το ελαττωμένο κατά τον τόκο του κεφαλαίο θα βρεθεί από τις σχέσεις:



$$K_0 - \frac{K_0 \cdot \mu \cdot i}{12} = K_e, \quad K_0 > K_e \quad (4.18)$$

$$K_0 - \frac{K_0 \cdot \nu \cdot i}{360 \text{ ή } 365} = K_e, \quad K_0 > K_e \quad (4.19)$$

**Παράδειγμα 1ο.** Μια εταιρεία δανείστηκε από τον εισοδηματία Ε ένα χρηματικό ποσό με επιτόκιο 20% για έξι μήνες και συμφωνήθηκε να κρατηθούν προκαταβολικά οι τόκοι. Η εταιρεία εισέπραξε 90.000 €. Ποιο χρηματικό ποσό θα επιστρέψει στο τέλος των έξι μηνών;

**Λύση:**  $K_0 = ?$ ;  $i = 0,20$ ,  $\mu = 6$ ,  $K_e = 90.000$

Αντικαθιστώντας στον τύπο (4.18) βρίσκουμε:

$$K_0 - \frac{K_0 \cdot 6 \cdot 0,20}{12} = 90.000 \quad \text{και} \quad K_0 = 100.000$$

**Παράδειγμα 2ο.** Στις 19 Φεβρουάριου ο έμπορος Ε δανείστηκε ένα χρηματικό ποσό με τη συμφωνία να το εξοφλήσει την 20ή Απριλίου του ίδιου έτους. Ο πιστωτής κράτησε προκαταβολικά τον τόκο του ποσού που δάνεισε με 8% και ο Ε εισέπραξε 44.400 €. Ποιο είναι το οφειλόμενο ποσό; Έτος μεικτό.

**Λύση:**  $\nu = 60$ ,  $i = 0,08$ ,  $K_e = 44.400$ ,  $K_0 = ?$

Αντικαθιστώντας στον τύπο (4.19) βρίσκουμε:

$$K_0 - \frac{K_0 \cdot 60 \cdot 0,08}{360} = 44.400 \quad \text{και} \quad K_0 = 45.000 \text{ €}$$

#### 4.6. Είδη Καταθέσεων

Ανάλογα με τους όρους της κατάθεσης και με τη χρονική διάρκεια, οι καταθέσεις διακρίνονται σε: α) **Καταθέσεις Ταμιευτηρίου**, β) **Καταθέσεις Όψεως**, γ) **Καταθέσεις με προειδοποίηση**, δ) **Καταθέσεις Προθεσμίας**, ε) **Καταθέσεις σε κοινό λογαριασμό**, ζ) **Καταθέσεις τρεχούμενων λογαριασμών**.



#### 4.7. Καταθέσεις Ταμιευτηρίου

Οι Εμπορικές Τράπεζες (Εμπορική, Ιονική, Εθνική, Τράπεζα Πίστεως κτλ.), οι Κτηματικές Τράπεζες, η Αγροτική Τράπεζα, το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων δέχονται καταθέσεις σε πρώτη ζήτηση, οι οποίες ονομάζονται Καταθέσεις Ταμιευτηρίου.

Η κατηγορία αυτή των καταθέσεων καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος των τραπεζικών καταθέσεων και αποτελεί βασική πηγή για την άσκηση της πιστοδοτικής λειτουργίας των τραπεζών. Είναι η πιο δημοφιλής μορφή καταθέσεων, γι' αυτό προσελκύονται οικονομίες μεγάλου αριθμού ατόμων με μικρά εισοδήματα.

**Άνοιγμα Λογαριασμού.** Κατά την αρχική κατάθεση συμπληρώνεται ειδική καρτέλα και εκδίδεται Γραμμάτιο Εισπράξεως και **Βιβλιάριο Ταμιευτηρίου**, το οποίο παραδίδεται στον καταθέτη. Στην καρτέλα αναγράφονται όλα τα στοιχεία του καταθέτη: Ονοματεπώνυμο, διεύθυνση και άλλα στοιχεία της αστυνομικής ταυτότητας ή του διαβατηρίου. Στην καρτέλα τίθεται υπόδειγμα υπογραφής του καταθέτη. Στη συνέχεια, το όνομα του καταθέτη καταχωρίζεται στο **Βιβλίο Μητρώου** και με βάση αυτή την καταχώριση ο

ανοιγμένος λογαριασμός παίρνει **Αριθμό**. Ο αριθμός αυτός καταχωρίζεται ως πρώτο στοιχείο στην καρτέλα και αναγράφεται και στο βιβλιάριο του καταθέτη.

**Κατάθεση (Deposit).** Κατά το άνοιγμα του λογαριασμού και εφόσον διενεργείται νέα κατάθεση, συμπληρώνεται το «**Γραμμάτιο Εισπράξεως**»\* και μέσω του συστήματος «ON LINE» γίνεται ενημέρωση του «Βιβλιαρίου Καταθέσεων» (**Passbook Savings accounts**). Στο «Γραμμάτιο Εισπράξεως» αναγράφεται ο κωδικός του υποκαταστήματος στο οποίο έγινε η οικονομική πράξη, η ημερομηνία και ο αριθμός του λογαριασμού, το ονοματεπώνυμο και το ποσό της κατάθεσης. Το «Γραμμάτιο Εισπράξεως» υπογράφεται από τον καταθέτη, ο οποίος παραλαμβάνει το βιβλιάριο ενημερωμένο.

Εκτός από μετρητά μπορεί να κατατεθούν στο λογαριασμό και επιταγές. Στην περίπτωση αυτή, στο «Γραμμάτιο Εισπράξεως» πρέπει να καταχωρίζονται: α) το ποσό των μετρητών και β) το ποσό των επιταγών. Για τις επιταγές πρέπει να εξακριβώνεται η συνέχεια των οπισθογραφήσεων.

**Ανάληψη (Withdrawal).** Για την ανάληψη μέρους ή ολόκληρου του ποσού της κατάθεσης εκδίδεται «**Ένταλμα Πληρωμής**»,\*\* στο οποίο αναγράφονται: το υποκατάστημα όπου έγινε η πράξη, η ημερομηνία, ο αριθμός του λογαριασμού, το όνομα του καταθέτη και το ποσό της ανάληψης. Το «Ένταλμα Πληρωμής» υπογράφεται από τον πελάτη και αναγράφονται σ' αυτό τα στοιχεία της ταυτότητας και ο αριθμός τηλεφώνου του πελάτη. Ταυτόχρονα, ενημερώνεται και το βιβλιάριο καταθέσεων του, το οποίο πρέπει απαραίτητα να προσκομίζεται, όταν ο πελάτης θέλει να κάνει ανάληψη.

---

\* Βλέπε «Γραμμάτιο Εισπράξεως» της Τράπεζας «Τ» στις επόμενες σελίδες.

\*\* Βλέπε «Ένταλμα Πληρωμής» της Τράπεζας «Τ» στις επόμενες σελίδες.



Μετά την καταχώριση της κατάθεσης ή της ανάληψης το υπόλοιπο που προκύπτει κάθε φορά θα πρέπει να είναι ίσο με το υπόλοιπο που εμφανίζει το βιβλιάριο του πελάτη.

**Κλείσιμο λογαριασμού.** Σε περίπτωση που ο καταθέτης αναλαμβάνει ολόκληρο το υπόλοιπο του λογαριασμού με τους τόκους και θέλει να κλείσει το λογαριασμό του, υπολογίζονται οι τόκοι που αναλογούν στο διάστημα από την ημερομηνία του τελευταίου εκτοκισμού έως την ημερομηνία κλεισίματος του λογαριασμού, και το νέο υπόλοιπο αποδίδεται στο δικαιούχο.

**Εκτοκισμός (= Υπολογισμός τόκων).** Στις καταθέσεις υπολογίζονται τόκοι από την επόμενη εργάσιμη ημέρα της κατάθεσης· η ημέρα της ανάληψης δε θεωρείται τοκοφόρος. Οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται και ανατοκίζονται την επόμενη ημέρα του υπολογισμού των τόκων και ο λογαριασμός του καταθέτη θα παρουσιάζει πιστωτικό υπόλοιπο, το οποίο θα συνεχίσει στο εξής να είναι τοκοφόρο.

**Τοκοφόρος ημερομηνία (Valeur).** Ο όρος «τοκοφόρος ημερομηνία ή Valeur (Βαλέρ)» έχει την έννοια της ημερομηνίας, ύστερα από την οποία το ποσό που κατατέθηκε σε λογαριασμό κατάθεσης είναι έντοκο.

## ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΤΑΓΗΣ

|                                                                                     |           |                                                             |            |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------|------------|------|
| ΑΡΙΘ.                                                                               | 5275239-2 | Τόπος                                                       | Ημερομηνία | ΔΡΧ. |
|  |           | ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ Α.Ε.                             |            |      |
| ΠΑΡΗΡΩΣΤΕ ΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΤΑΓΗ ΜΟΥ ΑΥΤΗ ΣΕ ΔΙΑΤΑΓΗ                                        |           | ΚΑΤΑΣΤΗΜΑ: ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ<br>ΥΠ/ΜΑ ΧΟΛΑΡΓΟΥ 099 |            |      |
| ΔΡΑΧΜΕΣ                                                                             |           |                                                             |            |      |
| ΜΕ ΧΡΕΩΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓ/ΣΜΟΥ ΜΟΥ: 011                                                     |           | (υπογραφή - σφραγίδα)                                       |            |      |

## ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟΥ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΙΟΥ

| ΚΑΤ/ΜΑ | ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ | ΑΝΑΛΗΨΕΙΣ | ΑΙΤ. | ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ | ΥΠΟΛΟΙΠΟ | Ε  |
|--------|------------|-----------|------|------------|----------|----|
| 1      |            |           |      |            |          | 1  |
| 2      |            |           |      |            |          | 2  |
| 3      |            |           |      |            |          | 3  |
| 4      |            |           |      |            |          | 4  |
| 5      |            |           |      |            |          | 5  |
| 6      |            |           |      |            |          | 6  |
| 7      |            |           |      |            |          | 7  |
| 8      |            |           |      |            |          | 8  |
| 9      |            |           |      |            |          | 9  |
| 10     |            |           |      |            |          | 10 |
| 11     |            |           |      |            |          | 11 |
| 12     |            |           |      |            |          | 12 |
| 13     |            |           |      |            |          | 13 |
| 14     |            |           |      |            |          | 14 |
| 15     |            |           |      |            |          | 15 |
| 16     |            |           |      |            |          | 16 |

|                                         |                              |
|-----------------------------------------|------------------------------|
| ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΣΤΗΛΗΣ (ΑΙΤ.)        | Τ Ο Κ ΤΟΚΟΙ                  |
| Κ Μ Ε ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΜΕΤΡΗΤΩΝ ΜΕ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ    | Α Ν Κ ΑΝΤΙΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΤΑΘΕΣΗΣ |
| Κ Ε Π ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΕΠΙΤΑΓΗΣ                 | Α Ν Α ΑΝΤΙΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΑΛΗΨΗΣ  |
| Κ Χ Β ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΜΕΤΡΗΤΩΝ ΧΩΡΙΣ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ | Κ Λ Σ ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ   |
| Κ Χ Ρ ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΗ               | Ε Μ Β ΕΜΒΑΣΙΜΑ               |
| Α Μ Ε ΑΝΑΛΗΨΗ ΜΕΤΡΗΤΩΝ ΜΕ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ     | Μ Τ Φ ΜΕΤΑΦΟΡΑ               |
| Α Χ Β ΑΝΑΛΗΨΗ ΜΕΤΡΗΤΩΝ ΧΩΡΙΣ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ  | Α Κ Ε ΑΚΥΡΩΣΗ ΕΠΙΤΑΓΗΣ       |
| Α Χ Ρ ΑΝΑΛΗΨΗ ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΗ                | Μ Σ Θ ΜΙΣΘΩΔΟΣΙΑ             |
|                                         | Σ Ν Τ ΣΥΝΤΑΣΗ                |

## 4.8. Καταθέσεις Όψεως

Με τον όρο «Καταθέσεις όψεως» δηλώνεται ότι η υποχρέωση της Τράπεζας για απόδοση των καταθέσεων αυτών είναι άμεση και σε **πρώτη ζήτηση** από το δικαιούχο.

Κατά το άνοιγμα του λογαριασμού, συμπληρώνεται το προβλεπόμενο δελτίο και εξετάζονται με προσοχή τα στοιχεία που αναγράφονται σ' αυτό.

Δηλαδή: α) Η ιδιότητα του πελάτη, η πίστη και η οικονομική του κατάσταση. β) Αν έχει πραγματική επαγγελματική εγκατάσταση και εφόσον πρόκειται για ιδιώτη, αν η κύρια κατοικία του βρίσκεται στην περιοχή του υποκαταστήματος στο οποίο ανοίγεται ο λογαριασμός, γ) Αν για το συγκεκριμένο πελάτη δεν υπάρχουν δυσμενείς πληροφορίες.

Ο καταθέτης που επιθυμεί να κινήσει το λογαριασμό του με επιταγές, ζητάει από την Τράπεζα να τον εφοδιάσει με στέλεχος (μπλοκ) επιταγών. Έτσι, ο καταθέτης ενεργεί αναλήψεις με τις επιταγές, οι οποίες σύρονται εις βάρος του λογαριασμού του «**Καταθέσεις Όψεως**».

Όταν παραλαμβάνει το στέλεχος των επιταγών υπογράφει απόδειξη, στην οποία αναγράφονται οι αριθμοί των επιταγών του στελέχους και απαλλάσσει την τράπεζα από κάθε ευθύνη. Ο αριθμός των επιταγών αρχικά είναι περιορισμένος. Πριν από τη χορήγηση νέου στελέχους (μπλοκ) επιταγών, διαπιστώνεται ότι έγινε καλή χρήση των προηγούμενων επιταγών, δηλαδή ότι οι επιταγές που εκδόθηκαν έχουν πληρωθεί και ότι δεν έχουν εκδοθεί ακάλυπτες επιταγές\*. Ο αριθμός των επιταγών αναγράφεται στην καρτέλλα του πελάτη, για να γίνεται εύκολα ο απαραίτητος έλεγχος του αριθμού της επιταγής.

Σε περίπτωση έκδοσης ακάλυπτων επιταγών από τον καταθέτη κλείνει οριστικά ο λογαριασμός του και ειδοποιείται αμέσως με συστημένη επιστολή ο πελάτης για την επιστροφή των αχρησιμοποίητων φύλλων του μπλοκ των επιταγών που βρίσκονται στα χέρια του, ενώ παράλληλα κινείται η προβλεπόμενη διαδικασία αναγγελίας των ακάλυπτων επιταγών που εκδόθηκαν. Επίσης δεν επιτρέπεται να χορηγηθεί νέο μπλοκ επιταγών σε δικαιούχο λογ/σμού όψεως, αν έχει εκδώσει ακάλυπτες επιταγές, παρά μόνο μετά από παρέλευση 12 μηνών από την έκδοση της τελευταίας ακάλυπτης επιταγής.

Για τις Καταθέσεις Όψεως έχουμε:

- 1) Κλιμακωτό επιτόκιο, το οποίο αυξάνεται με το ύψος του λογαριασμού.
- 2) Πληρωμή των τόκων κάθε εξάμηνο.

---

\* Επιταγές χωρίς αντίκρισμα.

- 3) Αποστολή κάθε μήνα αντίγραφου κίνησης του λογαριασμού.
- 4) Αποστολή των Επιταγών που πληρώνονται στη διεύθυνση του δικαιούχου.
- 5) Χορήγηση επιταγών υπο όρους.

Η πίστωση των άτοκων λογαριασμών όψεως με τα ποσά που καταθέτονται γίνεται με Valeur (τοκοφόρος ημερομηνία) την ίδια ημέρα που πραγματοποιείται η κατάθεση και όχι την επόμενη εργάσιμη ημέρα, όπως συμβαίνει με τους λογαριασμούς των έντοκων καταθέσεων. Η Χρέωση των λογαριασμών όψεως για τα ποσά των επιταγών που έχουν εκδοθεί εις βάρος του, σύρονται με Valeur την ημέρα αγοράς τους από την τράπεζα ή άλλο πιστωτικό ίδρυμα.

#### **4.9. Καταθέσεις Ταμιευτηρίου με προειδοποίηση**

Οι Τράπεζες και οι πιστωτικοί οργανισμοί μπορούν να δέχονται καταθέσεις ταμιευτηρίου με προειδοποίηση (συνήθως 3 μηνών), που πραγματοποιούν φυσικά πρόσωπα και νομικά πρόσωπα ιδιωτικού δικαίου μη κερδοσκοπικού χαρακτήρα. Ειδικότεροι όροι:

- α) Οι καταθέσεις αυτής της μορφής εμφανίζονται στο γενικό λογαριασμό «Καταθέσεις ταμιευτηρίου με προειδοποίηση».
- β) Στους καταθέτες αυτής της μορφής παραδίδεται βιβλιάριο διαφορετικής εξωτερικής εμφάνισης από αυτήν του συνηθισμένου βιβλιαρίου των καταθέσεων απλού ταμιευτηρίου.
- γ) Οι καταθέτες δεν μπορούν να προβαίνουν σε αναλήψεις παρά μόνο όταν καταθέσουν στην Τράπεζα έγγραφη προειδοποίηση τριών (3) τουλάχιστον μηνών πριν από την ημερομηνία της ανάληψης.

Οι λογαριασμοί των καταθέσεων με προειδοποίηση εκτοκίζονται την 30ή Ιουνίου και 31η Δεκεμβρίου κάθε χρόνου. Οι τόκοι που προκύπτουν μπορούν να αναλαμβάνονται από τους δικαιούχους χωρίς προειδοποίηση

μέσα στο επόμενο εξάμηνο, διαφορετικά κεφαλαιοποιούνται.

Σε περίπτωση που οι καταθέτες έχουν μια έκτακτη ανάγκη, και κατά την κρίση των διευθυντών των υποκαταστημάτων, επιτρέπεται η μερική ή ολική απόδοση της κατάθεσης, χωρίς έγγραφη προειδοποίηση ή πριν συμπληρωθεί το τρίμηνο από τη λήψη της έγγραφης προειδοποίησης.

Στην περίπτωση αυτή, ο καταθέτης υποχρεούται να καταβάλει τους τόκους, οι οποίοι υπολογίζονται επί του ποσού που αναλαμβάνει, με επιτόκιο 6% το χρόνο, για τρίμηνο χρονικό διάστημα.

#### 4.10. Καταθέσεις Προθεσμίας

Οι Εμπορικές Τράπεζες, το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και το Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων δέχονται Προθεσμιακές Καταθέσεις διάρκειας μεγαλύτερης των τριών (3) μηνών.

Ως «Προθεσμιακή Κατάθεση» νοείται η κατάθεση η οποία διενεργείται μεταξύ του καταθέτη και της Τράπεζας και κατά την οποία συμφωνείται ότι θα αποδοθεί αυτή μετά από παρέλευση ορισμένου χρονικού διαστήματος και σε τακτή μάλιστα προθεσμία.

Οι καταθέσεις προθεσμίας διακρίνονται σε:

- α) Καταθέσεις προθεσμίας από 3 έως 6 μήνες. Περιλαμβάνονται οι καταθέσεις, οι οποίες έχουν ως ελάχιστο χρονικό όριο τους τρεις (3) μήνες και φτάνουν τους έξι (6) μήνες.
- β) Καταθέσεις προθεσμίας από έξι (6) μήνες έως ένα (1) έτος. Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται οι καταθέσεις, οι οποίες έχουν σαν ελάχιστο χρονικό όριο τους έξι (6) μήνες και φτάνουν τους 12 μήνες.
- γ) Καταθέσεις προθεσμίας ενός (1) έτους και πάνω.

Οι Τράπεζες, για τις προθεσμιακές καταθέσεις σε δραχμές και σε συνάλλαγμα, υποχρεώνονται να εκδίδουν «Ομολογία Προθεσμιακής Κατάθεσης», χωρίς να επιτρέπουν τη χορήγηση βιβλιαρίων καταθέσεων. Ως απόδειξη της διενέργειας προθεσμιακής κατάθεσης παραδίδουν υποχρε-

ωτικά στον καταθέτη απόδειξη - ομολογία. Για την κατάθεση εκδίδεται «Γραμμάτιο Εισπράξεως» και για την εξόφληση «Ένταλμα Πληρωμής». Η ανάληψη κάθε ποσού από το κεφάλαιο της κατάθεσης γίνεται απαραίτητα με την προσκόμιση της ομολογίας και η οποία μετά την τελική εξόφληση μετατρέπεται σε «Ένταλμα Πληρωμής».

Ο εκτοκισμός και η απόδοση των τόκων των προθεσμιικών καταθέσεων από τις εμπορικές τράπεζες, γίνεται στη λήξη της προθεσμίας των καταθέσεων. Ο εκτοκισμός γίνεται με βάση την ημερομηνία της κατάθεσης.

Τα επιτόκια των προθεσμιικών καταθέσεων, τα οποία ίσχυαν στην Εμπορική Τράπεζα κατά τον Ιούλιο του 1999 ήταν:

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| Από 3-6 μήνες:        | 9,25% |
| Από 6-9 μήνες:        | 9%    |
| Για 1 έτος και πάνω : | 9%    |

**Απόδοση τόκων.** Όταν γίνεται συμφωνία ότι οι τόκοι θα καταβάλλονται κάθε εξάμηνο, σημειώνεται πάνω στην ομολογία ο όρος «τόκος καταβλητέος ανά εξάμηνο». Όταν όμως γίνεται συμφωνία ότι οι τόκοι θα ανατοκίζονται σημειώνεται η ένδειξη «ΕΠΙ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΩ». Στην περίπτωση αυτή, οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται και εκτοκίζονται με το αρχικό ποσό της κατάθεσης.

Για τις προθεσμιακές καταθέσεις με «Πιστοποιητικά Καταθέσεων» καθορίζονται οι εξής όροι:

- α) Έκδοση από τα πιστωτικά ιδρύματα τίτλων στον κομιστή (πιστοποιητικά καταθέσεων), που είναι ελεύθερα διαπραγματεύσιμοι.
- β) Ελάχιστο επιτρεπόμενο όριο κατάθεσης. Το επιτόκιο είναι διαπραγματεύσιμο.
- γ) Η διάρκεια της κατάθεσης είναι από 3 - 18 μήνες.

#### 4.11. Καταθέσεις σε κοινό λογαριασμό (Joint Account)

Κατάθεση σε κοινό λογαριασμό είναι η χρηματική κατάθεση, η οποία τηρείται στο όνομα δύο ή περισσότερων προσώπων από κοινού, με τον όρο ο κάθε δικαιούχος να μπορεί να κάνει μερική ή ολική χρήση του λογαριασμού χωρίς τη σύμπραξη του άλλου ή των άλλων συνδικαιούχων.

Επιτρέπεται στις τράπεζες να δέχονται καταθέσεις μόνιμων κατοίκων του εξωτερικού σε ευρώ (ή σε συνάλλαγμα) σε κοινό λογαριασμό με προθεσμία ή ταμιευτηρίου υπό προειδοποίηση.

Στις καταθέσεις σε κοινό λογαριασμό μπορεί να προστεθεί ο όρος ότι σε περίπτωση θανάτου οποιουδήποτε από τους δικαιούχους, η κατάθεση και ο λογαριασμός που δημιουργήθηκαν θα περιέχονται αυτοδικαίως στους λοιπούς συνδικαιούχους.

Κάθε φυσικό πρόσωπο, από τη στιγμή που γίνεται συνδικαιούχο κατάθεσης σε κοινό λογ/σμό, αποκτά ευθύ, άμεσο και αυτοτελές δικαίωμα στην κατάθεση.



**Σημείωση.** Τα επιτόκια καταθέσεων σε συνάλλαγμα, την 29.6.1999 ήταν: Για το Δολλάριο (\$) 4%, για το Γερμανικό Μάρκο (D.M.) 1,9%, για τη Στερλίνα (£) 4%.

#### 4.12. Τρεχούμενοι Λογαριασμοί Καταθέσεων

Οι Τρεχούμενοι Λογαριασμοί Καταθέσεων (Τ.Λ.Κ.) είναι είδος λογαριασμών καταθέσεων, οι οποίοι ανήκουν στην κατηγορία των λογαριασμών καταθέσεων «σε πρώτη ζήτηση», δηλαδή ο δικαιούχος τους μπορεί να καταθέτει ή να κάνει ανάληψη ποσών οποτεδήποτε. Οι Τ.Λ.Κ. αποτελούν συνδυασμό των καταθέσεων ταμιευτηρίου και των καταθέσεων όψεως.

Μόνο φυσικά πρόσωπα που δεν είναι έμποροι μπορούν ν' ανοίξουν Τ.Λ.Κ. Για το άνοιγμα ενός Τ.Λ.Κ. είναι υποχρεωτική η υποβολή από τον καταθέτη στην τράπεζα υπεύθυνης δήλωσης του Ν. 1599/1986 με την οποία δηλώνει ότι:

- 1) Δεν είναι έμπορος.
- 2) Κατά το τελευταίο δωδεκάμηνο δεν έχει εκδώσει επιταγές χωρίς αντίκρισμα.
- 3) Δεν τηρεί άλλο Τ.Λ.Κ., εκτός από τους προβλεπόμενους (δηλαδή έναν απλό κι έναν κοινό Τ.Λ.Κ.).
- 4) Δε θα χρησιμοποιήσει τον Τ.Λ.Κ. για εμπορικούς σκοπούς.

Οι πληρωμές από Τ.Λ.Κ. μπορεί να γίνονται με επιταγές ή με εντολές. Στο δικαιούχο χορηγείται μπλοκ επιταγών.

Εφόσον το επιθυμεί ο πελάτης, η τράπεζα είναι υποχρεωμένη να του στέλνει ανά τρίμηνο αντίγραφο κίνησης του Τ.Λ.Κ.

## Ερωτήσεις

1. Τι είναι καταθέσεις ταμειυτηρίου; Πώς γίνεται: το «άνοιγμα λογαριασμού», η «κατάθεση» η «ανάληψη» και το «κλείσιμο» σε ένα λογαριασμό ταμειυτηρίου; Πώς γίνεται ο εκτοκισμός στις καταθέσεις ταμειυτηρίου;
2. Τι είναι «καταθέσεις προθεσμίας»;
3. Τι είναι «καταθέσεις σε κοινό λογαριασμό»;
4. Τι είναι «τρεχούμενοι λογαριασμοί καταθέσεων»;





## Προβλήματα απλού τόκου

1. Τοκίστηκαν τα εξής κεφάλαια:

α) 15.000 € από 1η Ιαν/ρίου έως 10 Φεβ/ρίου

β) 20.000 " " 20 " " 19 "

γ) 3.000 " " 25 " " 24 "

Να βρεθεί ο συνολικός τόκος, αν το επιτόκιο είναι 8% και το έτος μεικτό.

(Απ. 286,67)

2. Τόκισε κάποιος (με απλό τόκο) ένα χρηματικό ποσό πριν από έξι (6) χρόνια. Τα δύο πρώτα χρόνια ο τόκος υπολογίστηκε με 5% και τα υπόλοιπα χρόνια με 7%. Στο τέλος των 6 ετών εισέπραξε για τόκους και κεφάλαιο 138.000 €. Ποιο ήταν το κεφάλαιο που τοκίστηκε;

(Απ. 100.000)

3. Να υπολογιστεί το ποσό που θα εμφανίζει ο λογαριασμός του καταθέτη Κ στις 30/6/2002 από τις «καταθέσεις - αναλήψεις» που έγιναν σε μία Τράπεζα με επιτόκιο 15%, αν είναι γνωστό ότι το βιβλιário καταθέσεων του Κ εμφάνιζε την 31/12/2001 «υπόλοιπο» 20.500 € και ότι κατά τη διάρκεια του 2002 έγιναν οι ακόλουθες οικονομικές πράξεις:

|            |          |   |        |
|------------|----------|---|--------|
| 1 Απριλίου | Κατάθεση | € | 20.000 |
| 20 "       | Ανάληψη  | " | 11.000 |
| 31 Μαΐου   | Κατάθεση | " | 10.000 |

Έτος πολιτικό.

(Απ. 41.821,71)

4. Ο έμπορος Ε κατέθεσε σε μια Τράπεζα ένα χρηματικό ποσό Χ με απλό τόκο 12%. Ύστερα από 27 μήνες ο Ε απέσυρε το ποσό που είχε συγκεντρωθεί και αγόρασε ομόλογα, τα οποία του αποφέρουν ετήσιο τόκο 15%. Αν είναι γνωστό ότι από τα ομόλογα ο Ε έχει ετήσιο εισόδημα 19.050 €, να βρεθεί το ποσό Χ.

(Απ. 100.000)

5. Δύο κεφάλαια, από 10.000 € το καθένα, τοκίστηκαν με κοινό επιτόκιο 6%. Έως σήμερα, το πρώτο έδωσε τόκο 300 € και το δεύτερο 100 €. Σε πόσο χρόνο (ημέρες) από σήμερα, ο συνολικός τόκος του πρώτου

κεφαλαίου θα είναι διπλάσιος του συνολικού τόκου του δεύτερου κεφαλαίου;

6. Ο εισοδηματίας Ε αγόρασε ένα ακίνητο, αξίας 9.000.000 €. Το ακίνητο είναι επιβαρημένο με ενυπόθηκο δάνειο 3.000.000 € με 10% το χρόνο. Ο ετήσιος φόρος ανέρχεται σε 60.000 €. Για επισκευές και λοιπά έξοδα απαιτούνται 40.000 €. Αν το ετήσιο ενοίκιο ανέρχεται σε 1.300.000 €, με ποιο επιτόκιο τοκίζεται το κεφάλαιο που αντιπροσωπεύει το ακίνητο;

(Απ.  $i = 0,10$ )

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο Ε θέλει να πουλήσει το ακίνητο και να τοποθετήσει τα 9.000.000 € σε μια Τράπεζα, με προθεσμία ενός έτους και με επιτόκιο 20%. Τι θα συμβουλευάτε να κάνει ο Ε;

7. Δάνεισε κάποιος, με απλό τόκο, 24.000 €. Το επιτόκιο του δανείου συμφωνήθηκε στην αρχή 5% και ύστερα από μερικές ημέρες έγινε 4%. Ύστερα από πόσες ημέρες (από την αρχή του δανείου) άλλαξε το επιτόκιο, αν είναι γνωστό ότι το σύνολο των τόκων στο τέλος του έτους ήταν 1.010 €; Έτος μεικτό.

(Απ. 75 ημ.)

8. Δάνεισε κάποιος ένα χρηματικό ποσό Κ. Το  $\frac{1}{3}$  του ποσού το δάνεισε για 2 χρόνια και 4 μήνες με 8% και το υπόλοιπο για 3 χρόνια και 20 ημέρες με 10%, και εισέπραξε και από τα δύο ποσά συνολικό τόκο 15.955,55 €. Να βρεθεί το ποσό Κ.

(Απ. 60.000)

9. Ο έμπορος Ε τόκισε το  $\frac{1}{6}$  του κεφαλαίου του με 9% και το υπόλοιπο με 2%. Το β' τμήμα του κεφαλαίου έφερε ετήσιο τόκο 300 € περισσότερο από το α' τμήμα. Ποιο ήταν το κεφάλαιο που τόκισε ο Ε;

(Απ. 180.000)

10. Κεφάλαιο τοκίστηκε επί 10 μήνες και έγινε μαζί με τους τόκους του 12.600 €. Το τοκοκεφάλαιο 12.600 € τοκίστηκε επί 2 έτη και 6 μήνες, με το ίδιο επιτόκιο, και έγινε μαζί με τους τόκους του 14.490 €. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιο το επιτόκιο;

(Απ. 12.000 - 0,06)

11. Κεφάλαια 40.000 € και 30.000 € τοκίστηκαν με δύο διαφορετικά επιτόκια και έδωσαν συνολικό ετήσιο τόκο 5.900 €. Αν ο ετήσιος τόκος

του πρώτου κεφαλαίου είναι μεγαλύτερος του ετήσιου τόκου του δεύτερου κατά 500 €, με ποια επιτόκια τοκίστηκαν τα πιο πάνω κεφάλαια;

(Απ. 0,08 - 0,09)

12. Δύο κεφάλαια τοκίστηκαν επί 9 μήνες· το πρώτο με 6% και το δεύτερο με 7% και έδωσαν συνολικό τόκο 4.500 €. Αν ο τόκος του β' κεφαλαίου είναι μεγαλύτερος του τόκου του α' κεφαλαίου κατά 1.800 €, ποια είναι τα κεφάλαια που τοκίστηκαν;

(Απ. 30.000 - 60.000)

13. Ο καταθέτης Κ κατάθεσε στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο 60.000 δρχ. στις 31/1/1996 και 40.000 την 1/3/1996. Στις 30/4/1996 καταχωρίστηκε στο βιβλιάριο καταθέσεων του Κ συνολικός τόκος 1.625 δρχ. Με ποιο επιτόκιο υπολογίστηκαν οι τόκοι των καταθέσεων; Έτος μεικτό.

(Απ. 0,075)

14. Κεφάλαια 20.000 €, 40.000 € και 55.000 € τοκίστηκαν αντίστοιχα επί 40, 60 και 80 ημέρες με αντίστοιχα επιτόκια 5,5%, 7%, 9%. Να υπολογιστεί το μέσο επιτόκιο. Έτος μεικτό.

(Απ. 0,08)

15. Ο έμπορος Ε κατέθεσε 7.500 € με ετήσιο επιτόκιο 6% και ύστερα από ορισμένους μήνες απέσυρε κεφάλαιο και τόκο, για να δανείσει όλο το ποσό με ετήσιο επιτόκιο 8% για 15 μήνες. Αν ο Ε εισέπραξε τελικά 9.240 €, πόσο ήταν το χρονικό διάστημα της πρώτης κατάθεσής του;

(Απ.  $\mu = 24$ )

16. Κάποιος πατέρας άφησε στα τρία παιδιά του 542.675 € και όρισε στη διαθήκη του να τα μοιράσουν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το κάθε παιδί, αν καταθέσει το μερίδιό του στην Τράπεζα Τ με απλό τόκο 9%, να αποσύρει από την Τράπεζα το ίδιο ποσό, όταν συμπληρώσει το 21ο έτος της ηλικίας του. Αν, κατά το θάνατο του πατέρα, οι ηλικίες των παιδιών ήταν 11, 13 και 15 ετών, να βρεθεί το μερίδιο του κάθε παιδιού.

(Απ.  $K_1 = 162.555 - K_2 = 179.566 - K_3 = 200.554$ )

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΜΕ ΑΠΛΟ ΤΟΚΟ

### 5.1. Βασικές οικονομικοεμπορικές έννοιες και ορισμοί

Είναι γεγονός ότι στις εμπορικές συναλλαγές, η εξόφληση μιας χρηματικής υποχρέωσης δεν γίνεται πάντοτε «τοις μετρητοίς». Κατά την αγορά π.χ. εμπορευμάτων, ο αγοραστής δεν μπορεί συνήθως να καταβάλει αμέσως στον πωλητή το αντίτιμο της αξίας των εμπορευμάτων που αγόρασε σε μετρητά. Ο πωλητής (πιστωτής), για να εξασφαλίσει την απαίτησή του, υποχρεώνει τον αγοραστή (χρεώστη) να υπογράψει ένα ειδικό νομικό έγγραφο, με το οποίο να μπορεί στο μέλλον να εισπράξει από τον αγοραστή το οφειλόμενο χρηματικό ποσό.

Ο Νόμος 5325 του 1932 έχει καθιερώσει δύο τύπους τέτοιων εγγράφων: α) Το «**Γραμμάτιο εις διαταγήν**» και β) τη «**Συναλλαγματική**». Το Γραμμάτιο συντάσσεται και υπογράφεται από τον οφειλέτη, ο οποίος υπόσχεται να πληρώσει ορισμένο χρηματικό ποσό, σε ορισμένο τόπο και χρόνο. Στο Γραμμάτιο υπάρχουν δύο πρόσωπα: α) Ο **εκδότης**, δηλαδή ο χρεώστης (οφειλέτης) και β) ο **πιστωτής**, δηλαδή αυτός που θα εισπράξει το χρηματικό ποσό, το οποίο είναι γραμμένο στο Γραμμάτιο.



Στην καθημερινή πρακτική, σπάνια χρησιμοποιείται το Γραμμάτιο. Στις εμπορικές συναλλαγές χρησιμοποιείται συνήθως η **Συναλλαγματική** (για συντομία: συν/κή). Η συν/κή είναι έγγραφο, το οποίο υπογράφει ο πιστωτής -ο οποίος ονομάζεται Εκδότης- και με αυτό δίνει εντολή στον οφειλέτη - ο οποίος ονομάζεται Αποδέκτης- να πληρώσει στον κομιστή του εγγρά-

φου (ή για λογαριασμό του), σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το ποσό που είναι γραμμένο στη συν/κή.

Το γραμμάτιο και η συν/κή είναι **πιστωτικοί τίτλοι**, εκδίδονται συνήθως κατά την αγορά εμπορευμάτων με πίστωση ή για την τακτοποίηση αμοιβαίων υποχρεώσεων.

Ο Νόμος 5325/1932 έχει εξομοιώσει ο γραμμάτιο και τη συν/κή και η διαφορά τους είναι τυπική: Το γραμμάτιο εκδίδεται από τον οφειλέτη και αποτελεί υπόσχεσή του να πληρώσει στον πιστωτή του, σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το χρηματικό ποσό που αναγράφεται στο γραμμάτιο, ενώ η συν/κή εκδίδεται από τον πιστωτή (εκδότη), ο οποίος δίνει εντολή στον οφειλέτη (αποδέκτη) να πληρώσει, σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το ποσό που είναι γραμμένο στη συν/κή.

Οι παραπάνω πιστωτικοί τίτλοι, για να είναι έγκυροι, πρέπει να περιέχουν ορισμένα τυπικά και ουσιαστικά στοιχεία που προβλέπει ο Νόμος 5325/1932, δηλαδή: τη λέξη «Συναλλαγματική» ή «Γραμμάτιο εις διαταγήν», την εντολή για πληρωμή ορισμένου χρηματικού ποσού, τη χρονολογία και τον τόπο πληρωμής, το ποσό (αριθμητικώς και ολογράφως), τις υπογραφές του εκδότη και του αποδέκτη και το προβλεπόμενο από το Νόμο\* χαρτόσημο, το οποίο είναι συνήθως ενσωματωμένο στη συν/κή και στο γραμμάτιο.

Η μεταβίβαση μιας συν/κής (ή γραμματίου) από έναν έμπορο σε μια τράπεζα (ή από ένα πρόσωπο σε άλλο πρόσωπο) γίνεται με ειδική νομική πράξη, η οποία ονομάζεται οπισθογράφιση και γίνεται στην οπίσθια όψη της συν/κής (ή του γραμματίου) από τον εκδότη (ή από τον τυχόντα κομιστή), σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο:

«Αντ' εμού πληρώσατε στον κ. Χ.Κ.»

Αθήνα, 20 Ιουλίου 1990

(Υπογραφή) Α. Ανδρέου

Για να καταλάβει ο αναγνώστης τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ των δύο νομικών εγγράφων, παραθέτουμε έντυπα «Γραμματίου εις διαταγήν» και «Συναλλαγματικής», τα οποία χρησιμοποιούνται σήμερα στις εμπορικές συναλλαγές (Βλ. σελ. 104).

---

\* Με την υπ αριθ. 2232/1975 Απόφαση του Υπουργού Οικονομικών, το χαρτόσημο είναι ενσωματωμένο στη συν/κή και στο γραμμάτιο.

Όπως είπαμε πιο πάνω, αν και δεν υπάρχει καμιά ουσιαστική νομική διαφορά μεταξύ του «Γραμματίου εις διαταγήν» και της «Συναλλαγματικής», εντούτοις, στην πράξη χρησιμοποιούνται, κατά κανόνα, οι συναλλαγματικές και σπανιότερα τα γραμμάτια, γιατί οι συναλλαγματικές έχουν δύο υπογραφές (την υπογραφή του εκδότη και την υπογραφή του αποδέκτη) πράγμα απαραίτητο για την προεξόφλησή τους από τις εμπορικές τράπεζες, δηλαδή την εξόφλησή τους πριν από τη λήξη τους.

Στις εμπορικές συναλλαγές, τα «Γραμμάτια εις διαταγήν» και οι «Συναλλαγματικές» αναφέρονται συνήθως με το κοινό όνομα: **Εμπορικά Γραμμάτια** ή απλώς **Γραμμάτια**. Στο εξής, όταν χρησιμοποιούμε τη λέξη «γραμμάτια», θα εννοούμε και τις συναλλαγματικές και τα «γραμμάτια εις διαταγήν».

Για την πλήρη κατανόηση του μηχανισμού των εμπορικών γραμματίων, παραθέτουμε μια συνηθισμένη οικονομική πράξη, η οποία γίνεται καθημερινώς μεταξύ των εμπόρων και των πελατών τους. Υποθέτουμε ότι ο έμπορος Ε πούλησε στον πελάτη Π μια τηλεόραση αξίας 100.000 € «μετρητής». Επειδή όμως ο Π δεν μπορεί να πληρώσει «τοις μετρητοίς» την αξία της τηλεόρασης, υπογράφει μια συν/κή 105.000 €, η οποία θα πληρωθεί μετά πέντε (5) μήνες. Το χρηματικό ποσό (105.000) που είναι γραμμένο στη συν/κή καλείται **ονομαστική αξία (Nominal Value or Maturity Value)** της συν/κής. Η ημέρα κατά την οποία πρέπει να πληρωθεί η συν/κή, ονομάζεται **λήξη (Maturity date)** της συν/κής.



Στο παραπάνω παράδειγμα, το ποσό των 105.000 €, δηλαδή η ονομαστική αξία της συν/κής, πρέπει να εισπραχθεί μετά πέντε (5) μήνες από την ημερομηνία έκδοσης της. Επομένως, η ονομαστική αξία της συν/κής αποτελείται από την αξία της τηλεόρασης συν τον τόκο των 5 μηνών με επιτόκιο 12%. Είναι όμως ενδεχόμενο ο Ε να χρειαστεί μετρητά πριν από τη λήξη της συν/κής. Τότε ο Ε προσκομίζει τη συν/κή σε μια τράπεζα, για να την «πουλήσει» και να εισπράξει μετρητά π.χ. τρεις (3) μήνες πριν από τη λήξη της συν/κής. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τράπεζα προεξοφλεί τη συν/κή του Ε, δηλαδή ότι η τράπεζα δίνει στον Ε ένα ποσό μικρότερο των 105.000 €, ελαττωμένο κατά τον τόκο των 3 μηνών. Συνεπώς, αν η τράπεζα προεξοφλήσει τη συν/κή των 105.000 €, με επιτόκιο 12% για τους υπόλοιπους τρεις (3) μήνες, θα δώσει στον Ε το ποσό των 101.850 €. Το ποσό

**Υπόδειγμα**  
**Γραμματίου σε διαταγή και Συναλλαγματικής**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ<br/>ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΗ<br/>ΑΡΧ. 10101 - 120100</p> <p>ΑΛΞΗ ΤΗΝ 30-12-1999 Συναλλαγματική δρχ. # 100.000 #</p> <p>Την ΤΡΙΑΚΟΣΤΗ ΔΕΚ/ΡΙΟΥ 1999 πληρώσατε με την παρούσα μόνη συναλλαγματική σε διαταγή</p> <p>ΑΝΤΩΝΗ ΑΝΔΡΕΟΥ</p> <p>και στο Κατάστημα 099 ΧΟΛΑΡΓΟΥ της ΕΘΝΙΚΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ</p> <p>της ΕΛΛΑΔΟΣ το ποσό των δραχμών ΕΚΑΤΟ</p> <p>ΧΙΛΙΑΔΩΝ</p> | <p>Προς ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ</p> <p>Αρκετή 01/09/1999</p> <p>01/09 1999</p> <p>Ο εκδότης</p> <p>Δημήτριος</p> <p>Ανδρέου</p> <p>Τραπεζούχος υπέρ τ</p>                         | <p>ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ<br/>ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΗ<br/>ΑΡΧ. 10001 - 20000</p> <p>ΑΛΞΗ ΤΗΝ 20-12-1999 Γραμμάτιο σε διαταγή δρχ. # 20.000</p> <p>Την ΕΙΚΟΣΤΗ ΔΕΚ/ΡΙΟΥ 1999 υπογράμμειος υπόσχομαι να πληρώσω με το παρόν μόνον γραμμάτιο σε διαταγή στον ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ</p> <p>ή σε διαταγή του και στο Κατάστημα της ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ</p> <p>ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΕΛΛΑΔΟΣ στην πόλη ΡΑΦΗΝΑ</p> <p>το ποσό των δραχμών ΕΙΚΟΣΙ ΧΙΛΙΑΔΩΝ</p> | <p>Προς ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Δημήτριο</p> <p>Αρκετή 10/09 1999</p> <p>10/09 1999</p> <p>Ο εκδότης</p> <p>Δομήτριος</p> <p>Τραπεζούχος υπέρ τ</p>                               |
| <p>Υπογραφή εκδότη (φωτογράφη)</p> <p>ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΕΡΑ</p> <p>ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΕΡΑ</p> <p>Ταχ. Κωδ. 155 61 Πόλη ΧΟΛΑΡΓΟΣ-ΑΤΤΙΚΗΣ</p> <p>Α.Φ.Μ. 009654480 Αρ. Ταμ. Π. 330890</p>                                                                                                                                                                                                       | <p>Υπογραφή εκδότη (φωτογράφη)</p> <p>ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΕΡΑ</p> <p>ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΕΡΑ</p> <p>Ταχ. Κωδ. 155 61 Πόλη ΧΟΛΑΡΓΟΣ-ΑΤΤΙΚΗΣ</p> <p>Α.Φ.Μ. 009654480 Αρ. Ταμ. Π. 330890</p> | <p>Υπογραφή εκδότη (φωτογράφη)</p> <p>ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΕΡΑ</p> <p>ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΕΡΑ</p> <p>Ταχ. Κωδ. 155 61 Πόλη ΧΟΛΑΡΓΟΣ-ΑΤΤΙΚΗΣ</p> <p>Α.Φ.Μ. 009654480 Αρ. Ταμ. Π. 330890</p>                                                                                                                                                                                                                                                 | <p>Υπογραφή εκδότη (φωτογράφη)</p> <p>ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΕΡΑ</p> <p>ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΕΡΑ</p> <p>Ταχ. Κωδ. 155 61 Πόλη ΧΟΛΑΡΓΟΣ-ΑΤΤΙΚΗΣ</p> <p>Α.Φ.Μ. 009654480 Αρ. Ταμ. Π. 330890</p> |

αυτό (101.850) ονομάζεται **παρούσα αξία** (Present Value or proceeds) της συν/κής. Το ποσό των 3.150 € το οποίο κράτησε η τράπεζα και που είναι ο τόκος των 105.000 € για τους τρεις (3) μήνες πριν από τη λήξη της συν/κής, ονομάζεται **προεξόφλημα** (Discount).

Στο πιο πάνω παράδειγμα, το ποσό των 3.150 ευρώ, το οποίο είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας της συν/κής, ονομάζεται ειδικότερα **εξωτερικό προεξόφλημα**. Η τράπεζα όμως κράτησε τόκο περισσότερο από τον κανονικό· η τράπεζα θα έπρεπε να δώσει στον Ε ένα ποσό Α, τέτοιο ώστε, αφού αυξηθεί κατά τον τόκο των τριών (3) μηνών με 12% να είναι ίσο με την ονομαστική αξία της συν/κής, δηλαδή:

$$A + A \cdot \frac{3}{12} \cdot 0,12 = 105.000 \Rightarrow A = 101.942$$

Συνεπώς, η τράπεζα θα έπρεπε να είχε κρατήσει για προεξόφλημα 3.058 € (= 105.000 - 101.942) και όχι 3.150 €. Το ποσό των 3.058 €, το οποίο αποτελεί τον τόκο της παρούσας αξίας (=  $101.942 \cdot 3 \cdot 0,12/12$ ) της συν/κής, ονομάζεται **εσωτερικό προεξόφλημα** και είναι μικρότερο από το εξωτερικό προεξόφλημα.

Από τα παραπάνω προκύπτουν οι ακόλουθοι βασικοί ορισμοί στην προεξόφληση:

**-Ονομαστική (ή μέλλουσα) αξία** μιας συν/κής είναι το ποσό που είναι γραμμένο στη συν/κή και το οποίο πρέπει να πληρωθεί κατά τη λήξη της.

**-Παρούσα αξία** μιας συν/κής (ή ενός γραμματίου) είναι το ποσό που πρέπει να πληρωθεί σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από τη λήξη της συν/κής.

**-Προεξόφλημα** είναι το ποσό που κρατάει η τράπεζα κατά την προεξόφληση. Ειδικότερα:

**-Εξωτερικό προεξόφλημα** είναι τόκος επί της ονομαστικής αξίας μιας συν/κής.

**-Εσωτερικό προεξόφλημα** είναι τόκος επί της παρούσας αξίας μιας συν/κής.



- **Εσωτερικό προεξόφλημα** είναι τόκος επί της παρούσας αξίας μιας συν/κής.

Η εξωτερική προεξόφληση, αν και είναι άδικη για τον έμπορο, ο οποίος δίνει τις συν/κές στην τράπεζα για προεξόφληση, εντούτοις εφαρμόζεται στις τράπεζες. Σε όλες τις χώρες της Ευρώπης -εκτός από την Αγγλία και την Ολλανδία- και στην Ελλάδα, **οι τράπεζες εφαρμόζουν την εξωτερική προεξόφληση**. Βασική προϋπόθεση και στα δύο είδη προεξοφλήσεων είναι ότι ισχύει η θεμελιώδης ισότητα:

$$\text{Ονομαστική Αξία} = \text{Παρούσα Αξία} + \text{Προεξόφλημα}$$

Αν παραστήσουμε με τα σύμβολα:

$K$  = Ονομαστική αξία συν/κής

$A$  = Παρούσα αξία με εξωτερική προεξόφληση

$E$  = Εξωτερικό προεξόφλημα

$E_1$  = Εσωτερικό Προεξόφλημα

$A_1$  = Παρούσα αξία με εσωτερική προεξόφληση.

τότε η μεν έννοια της εξωτερικής προεξόφλησης αποδίδεται με την ισότητα:



$$A = K - E$$

(5.1)

η δε έννοια της εσωτερικής προεξόφλησης αποδίδεται με την ισότητα:



$$A_1 + E_1 = K$$

(5.2)



Το επιτόκιο με το οποίο γίνεται η προεξόφληση των συν/κών (ή και των γραμματίων) από τις εμπορικές τράπεζες ονομάζεται **προεξοφλητικό επιτόκιο (Discount rate)**. Το ύψος του προεξοφλητικού επιτοκίου καθορίζεται από την Τράπεζα της Ελλάδος. Σήμερα, τα προεξοφλητικά επιτόκια υπάγονται στις διατάξεις των «ελεύθερα καθοριζόμενων επι-

τοκίων», δηλαδή η Νομισματική Επιτροπή της Τράπεζας της Ελλάδος έχει καθορίσει ένα ελάχιστο επιτόκιο, το οποίο ονομάζεται **βασικό επιτόκιο\***, πάνω στο οποίο η κάθε τράπεζα προσθέτει ένα ακόμη μικρό ποσοστό, το οποίο λέγεται περιθώριο και συνθέτει το τελικό επιτόκιο προεξοφλήσεως.

Οι τράπεζες, κατά την προεξόφληση συν/κών και γραμματίων, εκτός από το προεξόφλημα, κρατάνε διάφορες προμήθειες, εισπρακτικά, ταχυδρομικά και τον Ειδικό Φόρο Τραπεζικών Εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.), ο οποίος αντικατέστησε το Φόρο Κύκλου Εργασιών. (Για όλα αυτά θα μιλήσουμε εκτενέστερα πιο κάτω).

Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών, υπάρχουν διάφορες ρυθμίσεις, οι οποίες αποβαίνουν προς το συμφέρον των τραπεζών. Γενικά ισχύουν τα εξής:

α) Για την προεξόφληση συναλλαγματικών και γραμματίων, οι εμπορικές τράπεζες υπολογίζουν ως **τοκοφόρες ημέρες, την ημέρα που γίνεται η προεξόφληση συν την ημέρα της λήξης συν τις ημέρες που παρεμβάλλονται συν δύο (2) εργάσιμες\*\*** ημέρες μετά τη λήξη της συν/κής. Π.χ. για συναλλαγματική που έληγε στις 15 Απριλίου 1998 και εμφανίστηκε στην τράπεζα για προεξόφληση στις 21 Ιανουαρίου 1998, θα υπολογιστούν 87 τοκοφόρες ημέρες (Ιαν. 11 + Φεβ. 28 + Μάρτ. 31 + Απρ. 15 + 2 εργάσιμες ημέρες = 87).



β) Ποσό που χορηγείται από μια τράπεζα φέρνει τόκο από την ημέρα που χορηγήθηκε από την τράπεζα. Ποσό που κατατίθεται σε μία τράπεζα αποδίδει τόκο από την επόμενη ημέρα.

---

\* Τα προεξοφλητικά επιτόκια διαφέρουν. Άλλο επιτόκιο ισχύει στη Βιομηχανία, άλλο στη Βιοτεχνία και άλλο στο Εμπόριο.

\*\* Ο αποδέκτης (πληρωτής) μιας συν/κής μπορεί να πληρώσει την ονομαστική αξία της και μετά δύο εργάσιμες ημέρες από την ημερομηνία λήξης της συν/κής, γιατί το προβλέπει ο νόμος.

## 5.2. Προεξόφληση χωρίς έξοδα

### 5.2.1. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Είπαμε ότι το προεξόφλημα διακρίνεται σε εξωτερικό και εσωτερικό. Επομένως, το προεξόφλημα θα υπολογιστεί με δύο τρόπους:

**α) Με εξωτερική προεξόφληση.** Επειδή το εξωτερικό προεξόφλημα ( $= E$ ) είναι απλός τόκος πάνω στην ονομαστική αξία ( $= K$ ), έπεται ότι:



$$\begin{aligned} E &= \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} \quad \text{ή} \quad E = \frac{K \cdot v \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \\ E &= \frac{K \cdot v}{\Delta} \quad \text{ή} \quad E = K \cdot v \cdot \Pi \end{aligned} \quad (5.3)$$

**β) Με εσωτερική προεξόφληση.** Επειδή το εσωτερικό προεξόφλημα είναι απλός τόκος πάνω στην παρούσα αξία, δηλαδή:

$$E = \frac{A_1 \cdot v \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \quad \text{ή} \quad E = \frac{A_1 \cdot v}{\Delta}$$

βρίσκουμε πρώτα την παρούσα αξία σε συνάρτηση με την ονομαστική αξία και αφού υπολογίσουμε τον τόκο της, βρίσκουμε το εσωτερικό προεξόφλημα.

Από τη σχέση:  $A_1 + E_1 = K$  προκύπτει:

$$A_1 = K - E_1 = K - \frac{A_1 v}{\Delta} \quad \text{ή} \quad A_1 \Delta = K \Delta - A_1 v \quad \text{ή} \quad A_1 (\Delta + v) = K \Delta \quad \text{και} \quad A_1 = \frac{K \Delta}{\Delta + v}$$

Υπολογίζουμε τον τόκο του τελευταίου ποσού και έχουμε:

$$A_1 \cdot \frac{v}{\Delta} = \frac{K \Delta}{\Delta + v} \cdot \frac{v}{\Delta} = \frac{K \cdot v}{\Delta + v} = E_1$$

Ωστε:

$$E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta + v} \quad \text{ή} \quad E_1 = \frac{K \cdot v \cdot i}{365 + v \cdot i} \quad \text{ή} \quad E_1 = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12 + \mu \cdot i} \quad (5.4)$$

**Παράδειγμα 1.** Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 120.000 €, προεξοφλήθηκε τρεις (3) μήνες προτού λήξει με 12%. Να υπολογιστεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα.

**Λύση.**  $K = 120.000$ ,  $\mu = 3$ ,  $i = 0,12$ ,  $E = ?$ ;  $E_1 = ?$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στους τύπους (5.3) και (5.4) και βρίσκουμε:

$$E = \frac{120.000 \cdot 3 \cdot 0,12}{12} = 3.600 \text{ €}$$

$$E_1 = \frac{120.000 \cdot 3 \cdot 0,12}{12 + 3 \cdot 0,12} = \frac{43.200}{12,36} = 3.495 \text{ €}$$

**Παράδειγμα 2.** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 100.000 €, η οποία λήγει στις 17 Απριλίου, προεξοφλήθηκε στις 19 Φεβρουάριου (του ίδιου έτους) με 24%. Να βρεθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα. Έτος μεικτό και πολιτικό.

**Λύση.**  $K = 100.000$ ,  $v = 60$  (= Φεβ. 10 + Μάρτ. 31 + Απρ. 17 + 2)

$$i = 0,24, \Delta = \frac{360}{0,24} = 1.500, \Pi = \frac{0,24}{360} = 0,0006667$$

$$\alpha) \text{ Έτος μεικτό: } E = \frac{K \cdot v}{\Delta} = \frac{100.000 \cdot 60}{1.500} = 4.000 \text{ €}$$

$$E = K \cdot v \cdot \Pi = 100.000 \cdot 60 \cdot 0,0006667 = 4.000 \text{ €}$$

$$E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta + v} = \frac{100.000 \cdot 60}{1.500 + 60} = 3.846 \text{ €}$$

$$\beta) \text{ Έτος πολιτικό: } E = \frac{100.000 \cdot 60 \cdot 0,24}{365} = 3.945 \text{ €}$$

$$E_1 = \frac{100.000 \cdot 60 \cdot 0,24}{365 + 60 \cdot 0,24} = 3.795 \text{ €}$$

### 5.2.2. Διαφορά των δύο προεξοφλημάτων

Επειδή η ονομαστική αξία ( $= K$ ) είναι μεγαλύτερη από την παρούσα αξία ( $= A$ ) και επειδή το εξωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας, ενώ το εσωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της παρούσας αξίας, έπεται ότι  $E > E_1$ . Συνεπώς, υπάρχει διαφορά στα δύο προεξοφλήματα.



$$E - E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta} - \frac{K \cdot v}{\Delta + v} = \frac{K \cdot v \cdot \Delta + K \cdot v \cdot v - K \cdot v \cdot \Delta}{\Delta(\Delta + v)} = \frac{K \cdot v \cdot v}{\Delta(\Delta + v)} \quad (5.5)$$

Η σχέση (5.5) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$E - E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta + v} \cdot \frac{v}{\Delta} = E_1 \cdot \frac{v}{\Delta} \quad (5.5a)$$

Δηλαδή η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων ισούται με το εξωτερικό προεξόφλημα του εσωτερικού προεξοφλήματος.

Εξάλλου, η σχέση (5.5) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

$$E - E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta} \cdot \frac{v}{\Delta + v} = E \cdot \frac{v}{\Delta + v} \quad (5.5\beta)$$

Δηλαδή η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων ισούται με το εσωτερικό προεξόφλημα του εξωτερικού προεξοφλήματος.

**Παράδειγμα:** Συναλλαγματική η οποία λήγει στις 8 Απριλίου προεξοφλήθηκε στις 10 Φεβρουάριου με 20%. Ποια είναι η ονομαστική αξία της συν/κής, αν είναι γνωστό ότι η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων είναι 50€;

**Λύση.**  $v = \text{Φεβ. } 19 + \text{Μάρτ. } 31 + \text{Απρ. } 8 + 2 = 60$  ημέρες,

$$i = 0,20, \Delta = 1.800, E - E_1 = 50$$

$$E - E_1 = \frac{K \cdot v \cdot v}{\Delta(\Delta + v)} \quad \text{ή} \quad 50 = \frac{K \cdot 60 \cdot 60}{1.800(1.800 + 60)} \quad \text{και} \quad K = 46.500$$

### 5.2.3. Υπολογισμός του προεξόφληματος όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία

**α) Με εξωτερική προεξόφληση.** Είπαμε ότι, το εξωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας· γνωρίζουμε όμως την παρούσα αξία. Συνεπώς, αν βρούμε την ονομαστική αξία σε συνάρτηση με την παρούσα αξία και υπολογίσουμε τον τόκο της, τότε βρίσκουμε και το εξωτερικό προεξόφλημα. Θα έχουμε:

$$A + E = K \quad \text{ή} \quad A = K - E = K - \frac{Kv}{\Delta} \quad \text{ή} \quad A\Delta = K\Delta - Kv = K(\Delta - v)$$

και

$$K = \frac{A\Delta}{\Delta - v}$$

Υπολογίζοντας τώρα τον τόκο του τελευταίου ποσού βρίσκουμε:

$$K \cdot \frac{v}{\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta - v} \cdot \frac{v}{\Delta} \quad \text{Αλλά} \quad K \frac{v}{\Delta} = E.$$

Ωστε:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta - v} = \frac{A \cdot v \cdot i}{360 - v \cdot i} \quad \text{ή} \quad E = \frac{A \cdot \mu \cdot i}{12 - \mu \cdot i} \quad (5.6)$$

**β) Με εσωτερική προεξόφληση.** Γνωρίζουμε ότι το εσωτερικό προεξόφλημα είναι απλός τόκος πάνω στην παρούσα αξία. Επομένως:

$$E_1 = \frac{A \cdot v}{\Delta} = \frac{A \cdot v \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \quad \text{ή} \quad E_1 = \frac{A \cdot \mu \cdot i}{12} \quad (5.7)$$

### 5.2.4. Εύρεση της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

**α) Με εξωτερική προεξόφληση.** Είπαμε ότι η εξωτερική προεξόφληση αποδίδεται με την εξίσωση:



$$A = K - E = K - \frac{K \cdot v}{\Delta} = K - \frac{K \cdot v \cdot i}{360 \text{ ή } 365} \quad (5.8)$$

**Παράδειγμα:** Ποια είναι η παρούσα αξία συν/κής, ονομαστικής αξίας 6.000 €, η οποία προεξοφλήθηκε 75 ημέρες πριν από τη λήξη της με 12%; Έτος μεικτό.

**Λύση.**  $A = ?$ ;  $K = 6.000$ ,  $v = 75$ ,  $i = 0,12$ ,  $\Delta = 3.000$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (5.8) και βρίσκουμε:

$$A = 6.000 - \frac{6.000 \cdot 75}{3.000} = 5.850 \text{ €}$$

**β) Με εσωτερική προεξόφληση.** Η εσωτερική προεξόφληση αποδίδεται με την ισότητα:

$$A_1 + E_1 = K \Rightarrow A_1 = K - E_1$$

Αλλά 
$$E_1 = \frac{K \cdot v}{\Delta + v} = \frac{K \cdot v \cdot i}{360 + v \cdot i}$$

Επομένως:

$$A_1 = K - \frac{K \cdot v}{\Delta + v} = K - \frac{K \cdot v \cdot i}{360 + v \cdot i} \quad (5.9)$$



**Σημείωση.** Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι οι εμπορικές τράπεζες, κατά την προεξόφληση συναλλαγματικών, χρησιμοποιούν την εξωτερική προεξόφληση και έτος πολιτικό.

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

### 5.3. Προεξόφληση με έξοδα

Όπως είπαμε και στην παράγραφο 5.1 του παρόντος Κεφαλαίου, οι εμπορικές τράπεζες, κατά την προεξόφληση συν/κών και γραμματίων, εκτός από το προεξόφλημα, κρατάνε και διάφορα άλλα ποσά όπως: **Προμήθειες, εισπρακτικά, ταχυδρομικά - τηλεγραφικά, καθώς και τον Ειδικό Φόρο Τραπεζικών Εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.).**



**Υπολογισμός Προμήθειας.** Η προμήθεια αποτελεί την αμοιβή της τράπεζας για τις υπηρεσίες της προεξόφλησης. Το ποσοστό της προμήθειας είναι 1% το χρόνο **«κατά μήνα αδιαίρετο»**. Αν π.χ. έχουμε μια συν/κή, ονομαστικής αξίας 180 €, η οποία λήγει στις 28 Απριλίου και προεξοφλείται στις 25 Φεβρουάριου και η τράπεζα υπολογίζει προμήθεια 1% ετησίως **«κατά μήνα αδιαίρετο»**, τότε το ποσό της προμήθειας θα βρεθεί ως εξής: Τοκοφόρες ημέρες = Φεβρ 4 + Μάρτ. 31 + Απρ. 28 + 2 = 65 ημέρες. Η τράπεζα θα υπολογίσει προμήθεια για 3 μήνες. Δηλαδή:  $180 \cdot 3/12 \cdot 1/100 = 0,45$  €. Στο ποσό αυτό υπολογίζεται Ειδικός Φόρος Τραπεζικών Εργασιών (σήμερα 3%):  $0,45 + 0,45 \cdot 3/100 = 0,45 + 0,0135 = 0,4635$ .

**Υπολογισμός Εισπρακτικών.** Οι εμπορικές τράπεζες, για να καλύψουν τα έξοδά τους, κατά την προεξόφληση συν/κών, κρατάνε και **«εισπρακτικά»** για κάθε συναλλαγματική. Τα «εισπρακτικά» ανέρχονται σήμερα σε 3‰, συν 3% Ε.Φ.Τ.Ε. Αν π.χ. έχουμε για προεξόφληση επτά (7) συν/κές και η τράπεζα κρατάει 0,8 € για καθεμία συν/κή συν 3% Ε.Φ.Τ.Ε., τα «εισπρακτικά» θα υπολογιστούν ως εξής:  $0,8 + 0,8 \cdot 3/100 = 0,8 + 0,024 = 0,824$  € για κάθε συν/κή. Επομένως, τα «εισπρακτικά» θα είναι  $7 \cdot 0,824 = 5,768$  €.

**Υπολογισμός Ταχυδρομικών.** Εκτός από τα «εισπρακτικά», υπολογίζονται για κάθε συν/κή και **«ταχυδρομικά»** έξοδα διακίνησης της συν/κής και των παραστατικών της. Τα «Ταχυδρομικά» για τις συν/κές που είναι εισπρακτέες εντός της έδρας της τράπεζας είναι διαφορετικά από τα ταχυδρομικά για τις συν/κές που πρέπει να εισπραχθούν εκτός της έδρας της τράπεζας. Αν, π.χ., έχουμε τρεις συν/κές που είναι εισπρακτέες στην περιοχή της τράπεζας και δύο συν/κές εκτός της έδρας της τράπεζας και τα ταχυδρομικά είναι 0,60 και 0,70 € αντίστοιχα, τότε τα «ταχυδρομικά» θα υπολογιστούν ως εξής: Εντός της έδρας της τράπεζας:  $0,60 + 0,60 \cdot 3/100 = 0,60 + 0,018 = 0,618$  € για κάθε συν/κή. Άρα:  $3 \cdot 0,618 = 1,854$  €. Εκτός της έδρας της τράπεζας:  $0,70 + 0,70 \cdot 3/100 = 0,70 + 0,021 = 0,721$  € για κάθε συν/κή. Άρα  $2 \cdot 0,721 = 1,442$  €. Επομένως, για «ταχυδρομικά» η τράπεζα θα υπολογίσει συνολικά:  $1,854 + 1,442 = 3,296$  €.

#### 5.4. Εύρεση της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Η εύρεση της παρούσας αξίας μιας συν/κής αποτελεί το κεντρικό πρόβλημα της προεξόφλησης. Οι εμπορικές τράπεζες εφαρμόζουν την **εξωτερική προεξόφληση** και το πολιτικό έτος.

Είπαμε ότι οι εμπορικές τράπεζες, κατά την προεξόφληση συν/κών και γραμματίων, κρατάνε: **Προεξόφλημα** ( $= E$ ), **Προμήθεια** ( $= \theta$ ), **Εισπρακτικά** ( $= \varepsilon$ ), **Ταχυδρομικά** ( $= \tau$ ), καθώς και **Ειδικό Φόρο Τραπεζικών Εργασιών** ( $= \varphi$ ).

Το άθροισμα: **προεξόφλημα** + **προμήθεια** + **εισπρακτικά** + **ταχυδρομικά** + **Ε.Φ.Τ.Ε.** -το οποίο ονομάζεται **Σύνθετο Προεξόφλημα**- αφαιρείται από την ονομαστική αξία της συν/κής και έτσι προκύπτει η παρούσα αξία της συν/κής ή το καθαρό προϊόν από την προεξόφληση.

**Παράδειγμα.** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 200 €, η οποία λήγει στις 10 Απριλίου, προεξοφλείται στις 27 Ιανουαρίου με προεξοφλητικό επιτόκιο 24%. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια 1% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο», εισπρακτικά 3%, ταχυδρομικά έξοδα 0,60 € και ειδικό φόρο τραπεζικών εργασιών 3%. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος πολιτικό. Να βρεθεί η παρούσα αξία της συν/κής.

**Λύση.** Δίνονται:  $K = 200$ ,  $i = 0,24$ , Τοκοφόρες ημέρες  $= v = \text{Ιαν. } 5 + \text{Φεβ. } 28 + \text{Μαρτ. } 31 + \text{Απρ. } 10 + 2 = 76$ ,  $\theta = 1\%$  κατά μήνα αδιαίρετο. Άρα 3 μήνες,  $\varepsilon = 3\%$ ,  $\tau = 0,60$ ,  $\varphi = 3\%$ .

Υπολογίζουμε τις διάφορες κρατήσεις:

$$\text{Προεξόφλημα: } E = \frac{K \cdot v \cdot i}{365} = \frac{200 \cdot 76 \cdot 0,24}{365} = 9,995$$

$$\text{Προμήθεια: } \theta = K \cdot \frac{\mu}{12} \cdot \frac{1}{100} = 200 \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{100} = 0,5$$

$$\text{Εισπρακτικά: } \varepsilon = 200 \cdot \frac{3}{1.000} = 0,6$$

$$\text{Ταχυδρομικά: } \tau = 0,6$$

$$\text{Ε.Φ.Τ.Ε.: } \varphi = \underbrace{(9,995 + 0,5 + 0,6 + 0,6)}_{11,695} \cdot \frac{3}{100} = 0,35$$

Συνεπώς, η παρούσα αξία θα είναι:

$$\begin{aligned} A &= K - (E + \theta + \varepsilon + \tau + \varphi) = \\ &= 200 - \underbrace{(9,995 + 0,5 + 0,6 + 0,6 + 0,35)}_{12,045} = 187,955 \end{aligned}$$

### 5.5. Εύρεση του πραγματικού επιτοκίου στην προεξόφληση

Όπως είπαμε πιο πάνω, ο κομιστής μιας συναλλαγματικής, ονομαστικής αξίας  $K$ , που θα την προεξοφλήσει σε μια τράπεζα, θα εισπράξει ένα ποσό  $A$ , το οποίο προκύπτει από τη σχέση:  $A = K - (E + \theta + \varepsilon + \tau + \varphi)$ . Συνεπώς η τράπεζα κρατάει το σύνθετο προεξόφλημα  $(K - A) = E + \theta + \varepsilon + \tau + \varphi$ . Αν το ποσό που κρατάει η τράπεζα θεωρηθεί τόκος του καθαρού ποσού ( $= A$ ), το οποίο εισπράττει ο κομιστής μιας συν/κής, τότε δημιουργείται το εξής πρόβλημα: Με ποιο επιτόκιο πρέπει να τοκίσουμε το ποσό  $A$  επί  $n$  ημέρες (ή  $m$  μήνες), ώστε να εισπράξουμε τόκο  $(K - A)$ , δηλαδή όσο κράτησε η τράπεζα;

Αν παραστήσουμε με το  $j$  το **πραγματικό επιτόκιο** προεξόφλησης, τότε πρέπει να ισχύει η ισότητα:



$$K - A = \frac{A \cdot n \cdot j}{365 \text{ ή } 360}$$



(5.10)

**Παράδειγμα.** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 40.000 δρχ., η οποία έληγε στις 30/6/1996, προεξοφλήθηκε στις 29/3/1996 με επιτόκιο 20%. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια 1% το χρόνο «κατά μήνα αδιαίρετο», εισπρακτικά 4%, ταχυδρομικά έξοδα 250 δρχ. και Ε.Φ.Τ.Ε. 3%. Η τράπεζα εφάρμοσε την εξωτερική προεξόφληση και έτος πολιτικό. Με ποιο πραγματικό επιτόκιο έγινε η προεξόφληση;

**Λύση:** Δίνονται:  $K = 40.000$ ,  $i = 0,20$ , Τοκοφόρες ημέρες  $= v = \text{Μάρτ. } 3 + \text{Απρ. } 30 + \text{Μάιος } 31 + \text{Ιούν. } 30 + 2 = 96$ ,  $\theta = 1\%$  ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο». Θα υπολογίσουμε προμήθεια για 4 μήνες.  $\varepsilon = 4\%$ ,  $\tau = 250$ ,  $\varphi = 3\%$ .

Υπολογίζουμε τα ποσά που κράτησε η τράπεζα:

$$\text{Προεξόφλημα: } E = \frac{K \cdot v \cdot i}{366^*} = \frac{40.000 \cdot 96 \cdot 0,20}{366} = 2.098$$

$$\text{Προμήθεια: } \theta = K \cdot \frac{\mu}{12} \cdot \frac{1}{100} = 40.000 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{100} = 133$$

$$\text{Εισπρακτικά: } \varepsilon = K \cdot \frac{\varepsilon}{1.000} = 40.000 \cdot \frac{4}{1.000} = 160$$

$$\text{Ταχυδρομικά: } \tau = 250$$

$$E.F.T.E. = \varphi = (E + \theta + \varepsilon + \tau) \cdot 3\% = 2.641 \cdot 3/100 = 79$$

$$\text{Σύνθετο προεξόφλημα} = 2.720$$

Συνεπώς, ο κομιστής της συν/κής θα εισπράξει το ποσό

$$A = K - (E + \theta + \varepsilon + \tau + \varphi) = 40.000 - 2.720 = 37.280$$

$$\text{Η τράπεζα κράτησε: } K - A = 40.000 - 37.280 = 2.720.$$

Αντικαθιστώντας τώρα τα δεδομένα στον τύπο (5.10) βρίσκουμε το πραγματικό επιτόκιο:

$$2.720 = \frac{37.280 \cdot 96 \cdot j}{366} \quad \text{ή} \quad 366 \cdot 2.720 = 37.280 \cdot 96 \cdot j$$

$$\text{και} \quad j = \frac{995.520}{3.578.880} = 0,278 \quad \text{ή} \quad j = 27,8\%.$$

Ωστε: Ο έμπορος που προεξόφλησε τη συν/κή, επιβαρύνθηκε τελικά με επιτόκιο 27,8%.

---

\* Το έτος 1996 ήταν δίσεκτο.

## 5.6. Πινάκιο Προεξοφλήσεων

Στην πράξη, οι προεξοφλήσεις γίνονται από τις Εμπορικές Τράπεζες, οι οποίες δε δέχονται για προεξόφληση μεμονωμένες συν/κές, αλλά ολόκληρη σειρά συν/κών. Οι Εμπορικές Τράπεζες δέχονται για προεξόφληση συν/κές και γραμμάτια που αναφέρονται στη Βιομηχανία, στη Βιοτεχνία και το Εσωτερικό Εμπόριο, λήξης το πολύ έως πέντε μηνών.

Υποθέτουμε ότι ο έμπορος Ε χρειάζεται χρήματα (μετρητά) και για να τα εξοικονομήσει προσκομίζει στην Τράπεζα Τ έναν ορισμένο αριθμό συν/κών με σκοπό να τις προεξοφήσει και να εισπράξει το αναγκαίο χρηματικό ποσό.

Η Τράπεζα Τ, για να προεξοφήσει τις συναλλαγματικές τις οποίες προσκόμισε ο Ε υποχρεώνει τον έμπορο: 1) Να μεταβιβάσει στην τράπεζα τις συν/κές που θέλει να προεξοφήσει, αφού προηγουμένως τις οπισθογραφήσει και 2) να καταχωρίσει τις συν/κές (και τα γραμμάτια) σε ειδικό έντυπο, που χορηγεί δωρεάν η τράπεζα και το οποίο ονομάζεται ΠΙΝΑΚΙΟ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΙΚΩΝ. Το Πινάκιο Προεξοφλήσεων έχει μεγάλη σημασία για τις τραπεζικές εργασίες, γιατί με αυτό διακινούνται οι πιστωτικοί τίτλοι των πελατών κάθε τράπεζας και έτσι διευκολύνονται πολύ οι εμπορικές συναλλαγές.

Το Πινάκιο Προεξοφλήσεων φέρει επικεφαλής τα εξής στοιχεία: α) το όνομα και το υποκατάστημα της τράπεζας, β) την ημερομηνία προεξόφλησης, γ) τον αριθμό των συναλλαγματικών που θα προεξοφληθούν, καθώς και το όνομα του κομιστή των συν/κών και δ) τους όρους προεξόφλησης, δηλαδή το προεξοφλητικό επιτόκιο και τις διάφορες κρατήσεις της τράπεζας: προμήθεια, εισπρακτικά, ταχυδρομικά και τον ειδικό φόρο τραπεζικών εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.).

Το Πινάκιο Προεξοφλήσεων είναι γραμμογραφημένο σε στήλες στις οποίες αναγράφονται: 1) Ο αύξων αριθμός (Α/Α) των συν/κών που θα προεξοφληθούν. 2) Οι αριθμοί που υπάρχουν στις συν/κές των πελατών κατά την έκδοσή τους. 3) Τα ποσά, δηλαδή οι ονομαστικές αξίες των συν/κών. 4) Η ημερομηνία λήξης. 5) Οι τοκοφόρες ημέρες, δηλαδή οι ημέρες που

μεσολαβούν από την ημερομηνία προεξόφλησης ως την ημέρα λήξης κάθε συν/κής. Είπαμε ότι οι τράπεζες υπολογίζουν ως τοκοφόρες ημέρες: **την ημέρα προεξόφλησης συν την ημέρα λήξης συν τις παρεμβαλλόμενες ημέρες συν δύο (2) εργάσιμες ημέρες.** 6) Οι **Τοκάριθμοι**, δηλαδή το γινόμενο κάθε ποσού (ονομαστική αξία συν/κής) επί τον αντίστοιχο αριθμό τοκοφόρων ημερών· οι Τοκάριθμοι, για τεχνικούς λόγους, διαιρούνται δια του 100. 7) Ο τόπος πληρωμής της συν/κής. 8) Η προμήθεια. 9) Τα εισπρακτικά. 10) Τα ταχυδρομικά. 11) Το όνομα του αποδέκτη (πληρωτή) της συν/κής.

Για την πλήρη κατανόηση και εμπέδωση του μηχανισμού σύνταξης ενός Πινακίου Προεξοφλήσεων παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Ο έμπορος Α. Ανδρέου προσκόμισε στην Τράπεζα Τ στην Αθήνα, στις 25 Φεβρουάριου 2002, για προεξόφληση, τις εξής συναλλαγματικές:

1) Συν/κή αριθ. 110, ονομαστικής αξίας 20.000 €, λήξη 31-3-2002, αποδοχής Γ. Γεωργίου, εμπόρου Αθήνας.

2) Συν/κή αριθ. 111, ονομαστικής αξίας 18.000 €, λήξης 28-4-2002, αποδοχής Δ. Δημητρίου, εμπόρου Αθήνας.

3) Συν/κή αριθ. 109, ονομαστικής αξίας 15.000 €, λήξης 3-3-2002, αποδοχής Β. Βασιλείου, εμπόρου Θεσ/νίκης.

4) Συν/κή αριθ. 112, ονομαστικής αξίας 10.000 €, λήξης 10-5-2002, αποδοχής Ε. Ευθυμίου, βιοτέχνη Βόλου.

5) Συν/κή αριθ. 113, ονομαστικής αξίας 15.000 €, λήξης 30-6-2002, αποδοχής Ζ. Ζήση, βιομήχανου Αθήνας.

6) Γραμμάτιο αριθ. 108, ονομαστικής αξίας 50.000 €, λήξης 30-8-2002, του Ι. Ιωάννου, δικηγόρου Πάτρας.

Να συνταχθεί το «Πινάκιο Προεξοφλήσεων» και να βρεθεί το καθαρό ποσό το οποίο θα εισπράξει ο Α. Ανδρέου, αν: α) το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 25%, β) η προμήθεια της Τράπεζας 1% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο σε δωδέκατα», γ) τα εισπρακτικά 3‰ με minimum 2,5 € ανά τεμάχιο συν/κής, δ) τα ταχυδρομικά 0,60 € ανά τεμάχιο συν/κής για τις συν/κές εντός της Αθήνας και 0,70 € ανά συν/κή για συν/κές εκτός Αθήνας και ε) 3% ο

Ειδικός Φόρος Τραπεζικών Εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.). Προεξόφληση εξωτερική. Έτος πολιτικό. (Το Πινάκιο Προεξοφλήσεων είναι στη σελίδα 130).

### Επεξηγήσεις συντάξεως του Πινακίου Προεξοφλήσεων

- 1) Οι συναλλαγματικές καταχωρίζονται στο Πινάκιο Προεξοφλήσεων με βάση τη χρονολογική σειρά λήξης τους, αρχίζοντας με τη συν/κή, της οποίας η ημερομηνία λήξης είναι η πλησιέστερη στην ημερομηνία προεξόφλησης (25.2.02).
- 2) Ο αρμόδιος υπάλληλος της τράπεζας ελέγχει αν έχουν καταχωριστεί σωστά οι συν/κές στο «Πινάκιο», γιατί οι τράπεζες δεν προεξοφλούν συν/κές που λήγουν νωρίτερα από 15 ημέρες (15 ημέρες είναι το ελάχιστο όριο αποδεκτού χρόνου προεξόφλησης), ούτε συν/κές που λήγουν αργότερα από πέντε (5) μήνες. Έτσι, στη συν/κή αριθ. 109, αν και οι τοκοφόρες ημέρες είναι 9 (= Φεβ. 4 + Μάρτ. 3 + 2), εντούτοις υπολογίσαμε 15 ημέρες. Επίσης το υπ' αριθ. 108 Γραμμάτιο, ονομαστικής αξίας 50.000 € λήξης 30-8-2002, δεν καταχωρίστηκε στο «Πινάκιο», γιατί λήγει αργότερα από πέντε μήνες.
- 3) Για τον υπολογισμό του προεξοφλήματος εφαρμόζεται ο τύπος:

$$\text{Προεξόφλημα} = \frac{\text{Συνολικός Τοκάριθμος} \cdot \text{Επιτόκιο}}{365 (\text{ή } 366)}$$

- 4) Η προμήθεια υπολογίζεται «κατά μήνα αδιαίρετο» ως εξής:  $K \cdot \mu / 12 \cdot 1\%$ .
- 5) Τα «εισπρακτικά» είναι συνήθως 3‰ για κάθε συν/κή αλλά όχι λιγότερο από 2,5 €.
- 6) Στο άθροισμα (προεξόφλημα + προμήθεια + εισπρακτικά + ταχυδρομικά) υπολογίζουμε 3% ειδικό φόρο τραπεζικών εργασιών και έτσι προκύπτει το σύνολο των κρατήσεων (= 3.603,78), το οποίο αφαιρείται από το άθροισμα των ποσών (= 78.000). Έτσι προκύπτει το καθαρό ποσό (= 74.396,22), το οποίο θα εισπράξει ο Α. Ανδρέου.

Ο αρμόδιος υπάλληλος της τράπεζας χαρτοσημαίνει με το προβλεπόμενο χαρτόσημο το «Πινάκιο Προεξοφλήσεων», το οποίο έχει πλέον θέση «Εντάλματος Πληρωμής» για την τράπεζα.

ΤΡΑΠΕΖΑ Γ**ΠΙΝΑΚΙΟ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΕΩΝ**

ΕΔΡΑ : ΑΘΗΝΑ

Πέντε (5) συν/κόν του κ. Α. Ανδρέου

Αθήνα 25-2-1990

ΑΡΙΘ. ΛΕΓΜΟΥ : 130200

Επιτόκιο 25%. Προμήθεια 1%. Εισπρακτικά 3%

Ταχυδρομικά 200 και 250. Ε.Φ.Τ.Ε. 8%

| A/A      | Αριθ. συν/κής ή γρ/τίου | Ποσά € | Λήξεις<br>Μήνας | Ημερ | Τοκο-<br>φόρες<br>ημέρες | Τοκάρι-<br>μοι<br>Κ·ν/100 | Τόπος<br>Πληρωμής | μ | Προμήθεια<br>$\frac{\mu}{\kappa} \cdot \frac{1}{12 \cdot 100}$ | Εισπρα-<br>κτικά | Ταχυ-<br>δρομι-<br>κά | Αποδέκτης<br>(Πληρωτής) |
|----------|-------------------------|--------|-----------------|------|--------------------------|---------------------------|-------------------|---|----------------------------------------------------------------|------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1        | 109                     | 15.000 | Μάρτιος         | 3    | 15                       | 2.250                     | Θεσ/νίκη          | 1 | 12,50                                                          | 2,5              | 0,7                   | Β. Βασιλείου            |
| 2        | 110                     | 20.000 | Μάρτιος         | 31   | 37                       | 7.400                     | Αθήνα             | 2 | 33,33                                                          | 2,5              | 0,6                   | Γ. Γεωργίου             |
| 3        | 111                     | 18.000 | Απρίλιος        | 28   | 65                       | 11.700                    | Αθήνα             | 3 | 45,00                                                          | 2,5              | 0,6                   | Δ. Δημητρίου            |
| 4        | 112                     | 10.000 | Μάιος           | 10   | 77                       | 7.700                     | Βόλος             | 3 | 25,00                                                          | 2,5              | 0,7                   | Ε. Ευθυμίου             |
| 5        | 113                     | 15.000 | Ιούνιος         | 30   | 128                      | 19.200                    | Αθήνα             | 5 | 62,50                                                          | 2,5              | 0,6                   | Ζ. Ζήση                 |
| Άθροισμα |                         | 78.000 |                 |      | Άθροισμα 48.250          |                           | Άθροισμα          |   | 178,33                                                         | 12,5             | 3,2                   |                         |

**Κρατήσεις Τράπεζας**

$$\text{Προεξόφλημα: } E = \frac{48.250 \cdot 25}{365} = 3.304,79$$

$$\text{Προμήθεια: } \theta = 178,33$$

$$\text{Εισπρακτικά: } \varepsilon = 12,5$$

$$\text{Ταχυδρομικά: } \tau = 3,2$$

$$\text{Άθροισμα } (E + \theta + \varepsilon + \tau) = 3.498,82$$

$$\text{Ε.Φ.Τ.Ε. } 3.498,82 \cdot 3\% = 104,96$$

$$\text{Σύνολο Κρατήσεων} = 3.603,78$$

-3.603,78 ← 74.396,22 = Καθαρό ποσό που θα εισπράτζει ο Α. Ανδρέου

Ο υποφαινόμενος, αφού προσέβαλε τα παραπάνω στοιχεία, κλείει το έντυπο αυτή την παραπάνω λειτουργία, δηλώνει ότι ότι οι πληροφορίες μη έγκαιρα διασπαραγμένες σε βάρος της Τράπεζας για αποστέλλονται λόγω φύσης πάντα στην καλύτερη των συνθηκών.

ΕΠΩΝΥΜΙΑ ΠΕΛΑΤΗ \_\_\_\_\_

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ \_\_\_\_\_

ΑΡΧΗΜ. ΛΕΓΟΜ. ΕΚΔΟΣΗΤΗ \_\_\_\_\_

ΑΡΧΗΜ. ΠΙΝΑΚΙΟΥ \_\_\_\_\_

ΚΩΔ. ΓΡΑΜ/ΤΙΩΝ \_\_\_\_\_

ΚΩΔ. ΟΔΗΓΙΩΝ \_\_\_\_\_

ΤΕΜΑΧΙΑ ΓΡΑΜΜ./ΠΟΛΥΩ. \_\_\_\_\_

ΑΠΟ \_\_\_\_\_

ΜΕΤΡΗ \_\_\_\_\_

ΔΡΧ. \_\_\_\_\_

Ο ΛΑΒΟΝ \_\_\_\_\_ (Πόλη) \_\_\_\_\_ 198 \_\_\_\_

\_\_\_\_\_ (Ημερομηνία) \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

| Α/Α    | ΑΡΧ. ΠΕΛΑΤΗ | ΠΟΣΟ ΣΥΜΦΩΝ | ΗΜΕΡ. ΠΩΤ. | ΗΜΕΡ. ΛΗΞΗΣ | ΠΡΟΣΕΙΣΜΑ | ΤΟΚΑΡΕΜΟΙ | ΑΠΟΔΕΚΤΗ | ΤΟΠΟΙ ΠΛΗΡΩΜΗΣ | ΗΜΕΡΟΜ. ΕΚΔΟΣΗΣ | ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ * |
|--------|-------------|-------------|------------|-------------|-----------|-----------|----------|----------------|-----------------|----------------|
| 1      |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 2      |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 3      |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 4      |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 5      |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 6      |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 7      |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 8      |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 9      |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 10     |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 11     |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| 12     |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |
| ΣΥΝΟΛΟ |             |             |            |             |           |           |          |                |                 |                |

\* Νο σημειώνεται από το Εξ/μα το άνωμα αποστέλλονται ή επιτηρούν.

Α.Ε. 21 - 5663 (2 8000 - 100 = 1 6/84) Πρωτ. 786

## Ερωτήσεις

1. Τι είναι «Γραμμάτιο σε διαταγή»;
2. Τι είναι «Συναλλαγματική»;
3. Ποια είναι τα τυπικά στοιχεία που προβλέπει ο Ν. 5325/1932 για να είναι έγκυροι οι με αριθ. 1 και 2 πιστωτικοί τίτλοι;
4. Τι είναι «ονομαστική» και τι «παρούσα» αξία συναλλαγματικής;
5. Τι είναι προεξόφλημα; Τι είναι εξωτερικό και τι εσωτερικό προεξόφλημα; Ποιο προεξόφλημα είναι μεγαλύτερο και γιατί;
6. Πώς υπολογίζονται οι «προμήθειες», τα «εισπρακτικά», τα «ταχυδρομικά» και ο «Ε.Φ.Τ.Ε.» κατά την προεξόφληση συναλλαγματικών από τις εμπορικές τράπεζες;
7. Τι είναι το «προεξοφλητικό επιτόκιο» και τι το «πραγματικό επιτόκιο» που αντιστοιχεί στην προεξόφληση συναλλαγματικών;
8. Τι είναι το «Πινάκιο Προεξοφλήσεων»; Περιγράψτε τη διαδικασία σύνταξης ενός «Πινακίου Προεξοφλήσεων».



## Προβλήματα προεξόφλησης



1. Να βρεθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα συναλλαγματικής, ονομαστικής αξίας 10.000 €, η οποία προεξοφλήθηκε 60 ημέρες πριν από τη λήξη της: α) με έτος πολιτικό και β) με έτος μεικτό. Επιτόκιο 6%.

Αν τώρα η πιο πάνω συν/κή είχε προεξοφληθεί τρεις (3) μήνες πριν από τη λήξη της, ποιο είναι το προεξόφλημα (εξωτερικό και εσωτερικό);

(Απ. 98,63 - 100 - 97,67 - 99 - 150 - 147,78)

2. Γραμμάτιο προεξοφλήθηκε 7 μήνες προτού λήξει με  $5\frac{3}{4}\%$  και έδωσε παρούσα αξία 10.000 €. Να βρεθούν τα δύο προεξοφλήματα.

(Απ. 347,06 - 335,42)

3. Συναλλαγματική, η οποία προεξοφλήθηκε με εξωτερική προεξόφληση, πέντε μήνες προτού λήξει, προς επτά και τρία τέταρτα «τοις εκατό» έδωσε παρούσα αξία τρία εκατομύρια τριάντα χιλιάδες τριάντα ευρώ. Ποιο είναι το εξωτερικό προεξόφλημα; (Οι μήνες να μη μετατραπούν σε ημέρες). **(Απ. 101.109,71)**
4. Προεξοφλήθηκαν εξωτερικώς με 4% δύο γραμμάτια. Το πρώτο έληγε μετά 50 ημέρες και το δεύτερο μετά 60 ημέρες. Και τα δύο μαζί έδωσαν προεξόφλημα 2.250 €. Να βρεθούν οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων, αν είναι γνωστό ότι η ονομαστική αξία του δεύτερου είναι το δύο τρίτα της ονομαστικής αξίας του πρώτου. Έτος μεικτό. **(Απ. 22.500 - 15.000)**
5. Ο έμπορος Ε αγόρασε σήμερα εμπορεύματα συνολικής αξίας 26.500 € και έδωσε μια συν/κή ονομαστικής αξίας 16.700 €, η οποία λήγει μετά 54 ημέρες. Η συν/κή προεξοφλήθηκε εξωτερικώς την ίδια ημέρα με 8% και έτος μεικτό. Πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσει ακόμη ο έμπορος, για να εξοφλήσει τη συνολική αξία των εμπορευμάτων που αγόρασε; **(Απ. 10.000 €)**
6. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 100.000 € προεξοφλήθηκε εξωτερικώς 80 ημέρες προτού λήξει, με έτος πολιτικό. Η Τράπεζα έκανε τις εξής κρατήσεις: α) Προμήθεια 1,5% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο», β) Εισπρακτικά 4%. γ) Ταχυδρομικά έξοδα 600 € δ) Ειδικό φόρο τραπεζικών εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.) 8%. Προεξοφλητικό επιτόκιο 25%. Να βρεθεί η παρούσα αξία της συν/κής. **(Απ. 92.598)**
7. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 100.000 € προεξοφλήθηκε εξωτερικώς 80 ημέρες προτού λήξει, με έτος πολιτικό. Η Τράπεζα κράτησε: α) Προμήθεια 1,5% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο». β) Εισπρακτικά

4%. γ) Ταχυδρομικά έξοδα 600 €. Ο κομιστής της συν/κής εισέπραξε καθαρό ποσό 93.146 €. Ποιο πραγματικό επιτόκιο αντιστοιχεί στην προεξόφληση; **(Απ. 33,57)**

8. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 48.000 δρχ., η οποία έληγε στις 12 Μαΐου 1992 προεξοφλήθηκε εξωτερικώς στις 25 Ιανουαρίου 1992 με 25%. Η Τράπεζα έκανε τις εξής κρατήσεις: α) Προμήθεια 2% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο». β). Εισπρακτικά 4%. γ) Ταχυδρομικά έξοδα 850 δρχ. δ) Ε.Φ. Τ.Ε. 8%. Έτος πολιτικό. α) Να βρεθεί το καθαρό ποσό που εισέπραξε ο κομιστής της συν/κής. β) Ποιο πραγματικό επιτόκιο αντιστοιχεί στην προεξόφληση;

**(Απ. 42.588 - 41.79%)**

9. Ύστερα από πόσες ημέρες πρέπει να λήγει γραμμάτιο, το οποίο, όταν προεξοφληθεί εξωτερικώς με 9% και εσωτερικώς με 10%, δίνει την ίδια παρούσα αξία; **(Απ. 400 ημ.)**

10. Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 50.000 €, η οποία λήγει στις 19 Φεβρουαρίου επιστρέφεται απλήρωτη. Για την είσπραξή της εκδίδεται νέα συν/κή (λέγεται Επισυναλλαγματική), η οποία λήγει στις 25 Απριλίου του ίδιου έτους. Η Επισυναλλαγματική προεξοφλείται στις 19 Φεβρουαρίου με 20% και έτος πολιτικό. Η Τράπεζα κρατάει: α) Προμήθεια 1% «κατά μήνα αδιαίρετο», β) Εισπρακτικά 3%. γ) Ταχυδρομικά 600 € δ) Ε.Φ.Τ.Ε. 240 €. Ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία της Επισυναλλαγματικής, ώστε ο κομιστής να εισπράξει τελικά τις 50.000 €;

**Λύση.** Η ονομαστική αξία της παλιάς συν/κής θεωρείται πλέον παρούσα αξία της επισυναλλαγματικής. Δηλαδή:  $A = 50.000$  €. Η ονομαστική αξία της επισυναλλαγματικής θα βρεθεί, αν στην ονομαστική αξία της παλιάς συν/κής προσθέσουμε όλες τις κρατήσεις της Τράπεζας. Δηλαδή

$$\begin{aligned}
 K &= 50.000 + \frac{50.000 \cdot 68 \cdot 0,20}{365} + 50.000 \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{100} + \\
 &+ 50.000 \cdot \frac{3}{1.000} + 600 + 240 = \\
 &= 50.000 + 1.863 + 125 + 150 + 600 + 240 = 52.978
 \end{aligned}$$

11. Ο Έμπορος Α Ανδρέου προσκόμισε στην Τράπεζα Τ στην Αθήνα, στις 25 Ιαν/ρίου 2002, για προεξόφληση, τις εξής συναλλαγματικές: 1) Αριθ., 1040, ονομαστικής αξίας 62.000 €, λήξης 15 Μαρτίου 2002, αποδοχής Β. Βασιλείου εμπόρου Αθήνας. 2) Αριθ 1680, ονομαστικής αξίας 81.500 €, λήξης 30 Μαρτίου 2002, αποδοχής Γ. Γεωργίου, εμπόρου Πάτρας. 3) Αριθ. 5080, ονομαστικής αξίας 42.000 €, λήξης 31 Ιανουαρίου 2002, αποδοχής Δ. Δημητρίου, βιοτέχνη Θεσ/νίκης. 4) Αριθ 2020, ονομαστικής αξίας 40.000 €, λήξης 14 Απριλίου 2002 αποδοχής Ε. Ευθυμίου, εμπόρου Καλαμάτας. 5) Αριθ. 2021, ονομαστικής αξίας 50.000 €, λήξης 15 Ιουλίου 2002, αποδοχής Ζ. Ζήσιμου, ιδιωτικού υπαλλήλου Αθήνας.

Να συνταχθεί το Πινάκιο Προεξοφλήσεων και να βρεθεί το καθαρό ποσό που εισέπραξε ο Α. Ανδρέου, αν το προεξοφλητικό επιτόκιο ήταν 24%, η προμήθεια 1,5% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο σε δωδέκατα», τα εισπρακτικά 4‰, τα ταχυδρομικά 600 € για τις συν/κές εντός της έδρας της Τράπεζας και 850 € για τις συν/κές εκτός της έδρας της Τράπεζας και 8%. Ε.ΦΤ.Ε. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος πολιτικό.

**(Απ. 211.463)**

12. Ο βιοτέχνης Β. Βασιλείου προκόμισε στο υποκατάστημα 099 της Εθνικής Τράπεζας στην Αθήνα, στις 20 Αυγούστου 2002, τις εξής συναλλαγματικές: 1) Αριθ. 3140, ονομαστικής αξίας 20.000 €, λήξης 4.10.02, αποδοχής Η.Η., εμπόρου Αθήνας. 2) Αριθ 3138, ονομαστικής αξίας 50.000 €, λήξης 5.9.02 αποδοχής Θ.Θ. βιομήχανου Θεσ/νίκης. 3) Αριθ 3141, ονομ. αξίας 38.000 €, λήξης 3.11.02, αποδοχής Ι.Ι.

εμπόρου Πάτρας. 4) Αριθ. 3139, ονομαστικής αξίας 45.000 €, λήξης 24.9.02, αποδοχής Κ.Κ. βιοτέχνη Βόλου. 5) Αριθ. 3142, ονομαστικής αξίας 48.000 €, λήξεως 30.11.02, αποδοχής Λ.Λ. καπνεμπόρου Αγρίνιου. 6) Αριθ. 3143, ονομαστικής αξίας 50.000 €, λήξεως 3.11.2003, αποδοχής Μ.Μ. καθηγητή Αθήνας.

Να συνταχθεί το Πινάκιο Προεξοφλήσεων και να βρεθεί το καθαρό ποσό, το οποίο έδωσε η Τράπεζα στο Β. Βασιλείου, αν το προεξοφλητικό επιτόκιο ήταν 25%, η προμήθεια 2% ετησίως «κατά μήνα αδιαίρετο σε δωδέκατα», τα εισπρακτικά 4%» τα ταχυδρομικά έξοδα 700 € για τις συν/κές εντός της έδρας της τράπεζας και 900 € για τις συν/κές εκτός της έδρας της τράπεζας και 8% ο Ε.Φ.Τ.Ε. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος πολιτικό.

**(Απ. 186.015)**

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ

### 6.1. Βασικές έννοιες και ορισμοί

Στις εμπορικές συναλλαγές συμβαίνει πολλές φορές ο οφειλέτης να ζητήσει από το δανειστή την αντικατάσταση δύο ή περισσότερων γραμματίων ( $K_1, K_2, \dots, K_\mu$ ) διάφορων λήξεων με ένα **ενιαίο γραμμάτιο** ( $= K$ ) ή την αντικατάσταση ενός ενιαίου γραμματίου με δύο ή περισσότερα γραμμάτια, **οικονομικώς ισοδύναμα** με το ενιαίο γραμμάτιο. (Στο Κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιούμε μόνο τον όρο «Γραμμάτια» και θα εννοούμε και τα «Γραμμάτια εις διαταγήν» και τις «Συναλλαγματικές»).

Η αντικατάσταση γραμματίων στηρίζεται στην **Αρχή της Οικονομικής Ισοδυναμίας\*** και πρέπει να γίνει χωρίς κέρδος ή ζημιά του οφειλέτη ή του δανειστή.



Για να πραγματοποιηθεί **οικονομική ισοδυναμία** μεταξύ του ενιαίου γραμματίου ( $= K$ ) και των αντικαθιστάμενων γραμματίων ( $K_1, K_2, \dots, K_\mu$ ), πρέπει **το άθροισμα των παρούσων αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων να ισούται με την παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου**, σε ορισμένη χρονική στιγμή και με το ίδιο επιτόκιο. Επομένως, για τη λύση

---

\* Δύο άνισα χρηματικά ποσά, σε ορισμένη χρονική στιγμή, θεωρούνται οικονομικώς ισοδύναμα. Καταθέτουμε σήμερα 100.000 € με 18%. Μετά ένα έτος εισπράττουμε 118.000 €. Οι 100.000 € σήμερα είναι οικονομικώς ισοδύναμες με τις 118.000 € μετά ένα έτος. Βλέπε και παράγραφο 1.4 του Κεφαλαίου 1.

οποιοδήποτε προβλήματος αντικατάστασης γραμματίων, θα καταστρώνεται μία εξίσωση, η οποία ονομάζεται **εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας**. Το πρώτο μέλος της εξίσωσης οικονομικής ισοδυναμίας θα αποτελείται από την παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου και το δεύτερο μέλος της εξίσωσης θα αποτελείται από το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων.

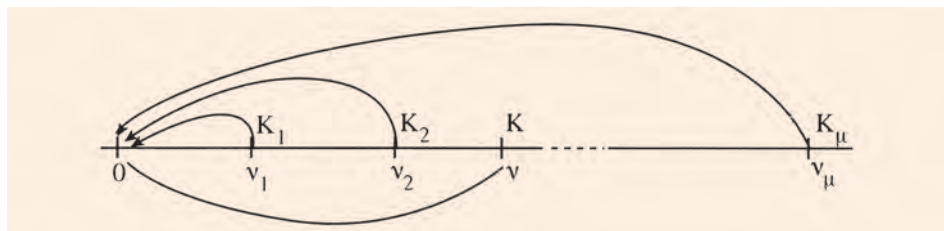
Η χρονική στιγμή κατά την οποία η παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων ονομάζεται **Εποχή Ισοδυναμίας (Focal Date)**. Ως Εποχή Ισοδυναμίας μπορούμε να πάρουμε: 1) την **Ημέρα Υπολογισμού**, δηλαδή την ημερομηνία κατά την οποία γίνεται η αντικατάσταση των γραμματίων, ή 2) την **Κοινή Λήξη**, δηλαδή την ημερομηνία λήξης του ενιαίου γραμματίου, ή 3) μια οποιαδήποτε ημερομηνία.

Το γενικό πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Γραμμάτια ονομαστικής αξίας:  $K_1, K_2, \dots, K_\mu$ , τα οποία λήγουν αντίστοιχα μετά:  $v_1, v_2, \dots, v_\mu$  ημέρες, αντικαθίστανται με ένα ενιαίο ισοδύναμο γραμμάτιο  $K$ , το οποίο λήγει μετά  $v$  ημέρες με επιτόκιο  $i$ . Στο πρόβλημα αυτό μπορεί να ζητείται: 1) Η εύρεση της ονομαστικής αξίας του  $K$ . 2) Η εύρεση της ονομαστικής αξίας (ή λήξης) οποιουδήποτε γραμματίου ( $K_1$  ή  $K_2$  ή ... ή  $K_\mu$ ). 3) Η εύρεση της κοινής λήξης ( $= v$ ). 4) Η εύρεση του επιτοκίου. Σε κάθε περίπτωση θα εφαρμόζεται η εξωτερική προεξόφληση.

## 6.2. Εύρεση της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου

Υποθέτουμε ότι γραμμάτια:  $K_1, K_2, \dots, K_\mu$ , τα οποία λήγουν αντίστοιχα μετά  $v_1, v_2, \dots, v_\mu$  ημέρες από σήμερα ( $= 0$ ), θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε με ένα ενιαίο γραμμάτιο ( $= K$ ), το οποίο να λήγει μετά  $v$  ημέρες από σήμερα. Ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία του  $K$ , ώστε να υπάρξει οικονομική ισοδυναμία; Εποχή ισοδυναμίας: 1) η ημέρα υπολογισμού και β) η κοινή λήξη. Προεξόφληση εξωτερική και έτος μεικτό.

### 1) Εποχή Ισοδυναμίας Ημέρα Υπολογισμού (Ε.Ι.Η.Υ.)



Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία κατά τη χρονική στιγμή 0 (ημέρα υπολογισμού), πρέπει να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας:

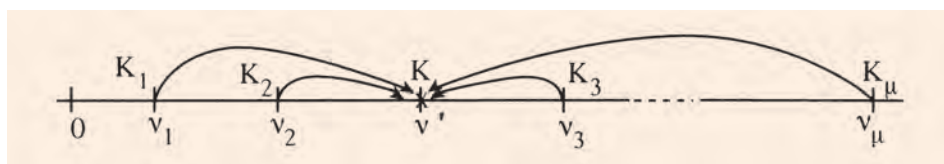
Παρούσα Αξία  $K = \Pi.A.K_1 + \Pi.A.K_2 + \dots + \Pi.A.K_\mu$ . Δηλαδή:

$$K - \frac{K \cdot v}{\Delta} = \left( K_1 - \frac{K_1 \cdot v_1}{\Delta} \right) + \left( K_2 - \frac{K_2 \cdot v_2}{\Delta} \right) + \dots + \left( K_\mu - \frac{K_\mu \cdot v_\mu}{\Delta} \right) \quad (6.1)$$



Αν το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε θέτουμε:  
 $\Delta = 365/i$  ή  $360/i$ .

### 2) Εποχή Ισοδυναμίας η Κοινή Λήξη (Ε.Ι.Κ.Λ.)



Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία κατά τη χρονική στιγμή  $v$  (= κοινή λήξη), πρέπει η παρούσα αξία του  $K$  να ισούται με το άθροισμα των παρούσων αξιών των  $K_1, K_2, K_3, \dots, K_\mu$ . Αλλά η παρούσα αξία του  $K$  κατά την ημέρα της λήξης του ισούται με την ονομαστική του αξία.

Η εξίσωση της οικονομικής ισοδυναμίας θα είναι:



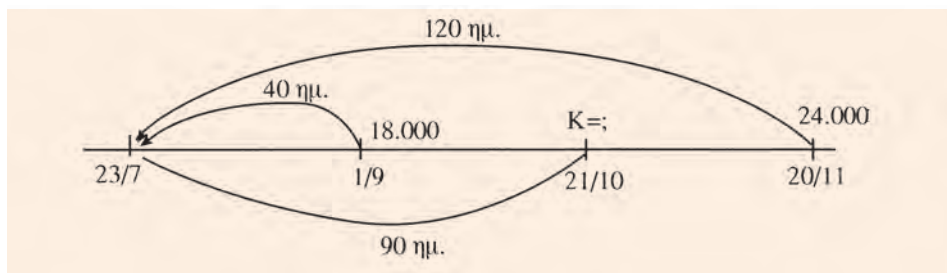
$$K = \left( K_1 + \frac{K_1 \cdot v_1}{\Delta} \right) + \left( K_2 + \frac{K_2 \cdot v_2}{\Delta} \right) + \left( K_3 - \frac{K_3 \cdot v_3}{\Delta} \right) + \dots + \left( K_\mu - \frac{K_\mu \cdot v_\mu}{\Delta} \right) \quad (6.2)$$

Η τιμή του  $K$  θα βρεθεί, αν εκτελεστούν οι πράξεις στο β' μέλος της (6.2).

**Παράδειγμα 1.** Έστω ότι έχουμε τα γραμμάτια 18.000 € και 24.000 €, τα οποία λήγουν αντίστοιχα την 1/9 και την 20/11, και θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε στις 23/7 με ένα ενιαίο γραμμάτιο, το οποίο να λήγει την 21/10. Ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 6%, το έτος μεικτό και ως εποχή ισοδυναμίας πάρουμε: 1) την ημέρα υπολογισμού και 2) την κοινή λήξη;

**Λύση.** 1) Ε.Ι.Η.Υ.

Για την καλύτερη κατανόηση κατασκευάζουμε το ακόλουθο σχήμα:



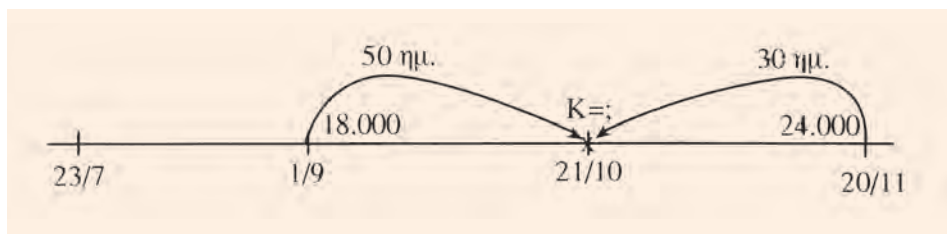
|                |          |                |                  |
|----------------|----------|----------------|------------------|
| $K_1 = 18.000$ | $K = ;$  | $K_2 = 24.000$ | $i = 0,06$       |
| $v_1 = 40$     | $v = 90$ | $v_2 = 120$    | $\Delta = 6.000$ |

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση (6.1)

$$K - \frac{K \cdot 90}{6.000} = \left( 18.000 - \frac{18.000 \cdot 40}{6.000} \right) + \left( 24.000 - \frac{24.000 \cdot 120}{6.000} \right)$$

Λύνουμε ως προς  $K$  και βρίσκουμε:  $K = 42.030,46$ .

2) Ε.Ι.Κ.Λ. Κατασκευάζουμε το ακόλουθο σχήμα:



$$\begin{array}{llll} K_1 = 18.000 & K = ; & K_2 = 24.000 & i = 0,06 \\ v_1 = 50 & v = 0 & v_2 = 30 & \Delta = 6.000 \end{array}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση (6.2)

$$K = \left( 18.000 + \frac{18.000 \cdot 50}{6.000} \right) + \left( 24.000 - \frac{24.000 \cdot 30}{6.000} \right) = 42.030$$

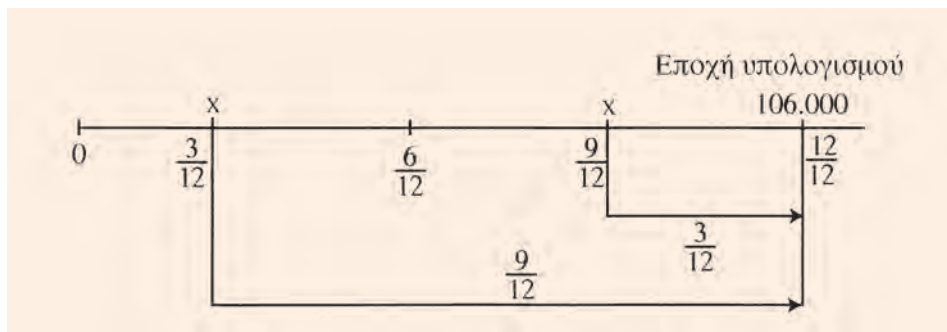
**Σημείωση.** Ως αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών πήραμε την κοινή λήξη (21/10). Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών χρησιμοποιήσαμε τον Πίνακα 4.1 που είναι στο κεφάλαιο 4.

**Παράδειγμα 2.** Οφείλει κάποιος σήμερα 100.000 €, τα οποία πρέπει να πληρώσει σε 1 έτος με επιτόκιο 6%. Θέλει να εξοφλήσει το χρέος του με δύο ισόποσες πληρωμές σε 3 και 9 μήνες αντίστοιχα. Ποιο θα είναι το μέγεθος αυτών των πληρωμών, αν το επιτόκιο είναι 6% και ως εποχή ισοδυναμίας ληφθεί το 1 έτος από σήμερα.

**Λύση.** Βρίσκουμε κατ' αρχάς το ύψος του χρέους μετά ένα έτος:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = 100.000 + 100.000 \cdot 1 \cdot 0,06 = 106.000 \text{ €}$$

Έστω  $X$  το μέγεθος κάθε πληρωμής. Κατασκευάζουμε το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα:



Σύμφωνα με την αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας θα είναι:

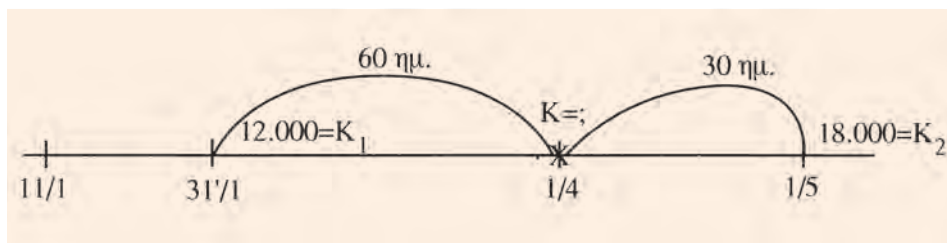
$$\left( X + X \cdot \frac{9}{12} \cdot 0,06 \right) + \left( X + X \cdot \frac{3}{12} \cdot 0,06 \right) = 106.000$$

$$12,54X + 12,18X = 1.272.000$$

$$24,72X = 1.272.000 \quad \text{και} \quad X = 51.456,31$$

**Παράδειγμα 3.** Οφείλει κάποιος δύο γραμμάτια: α) Γραμμάτιο 12.000 €, το οποίο λήγει την 31η Ιαν/ρίου και β) Γραμμάτιο 18.000 €, το οποίο λήγει την 1η Μαΐου, και θέλει να τα αντικαταστήσει την 11η Ιαν/ρίου με ένα ενιαίο γραμμάτιο, το οποίο να λήγει την 1η Απριλίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας: 1) η κοινή λήξη και 2) η 11η Ιαν/ρίου. Επιτόκιο 7%. Έτος πολιτικό.

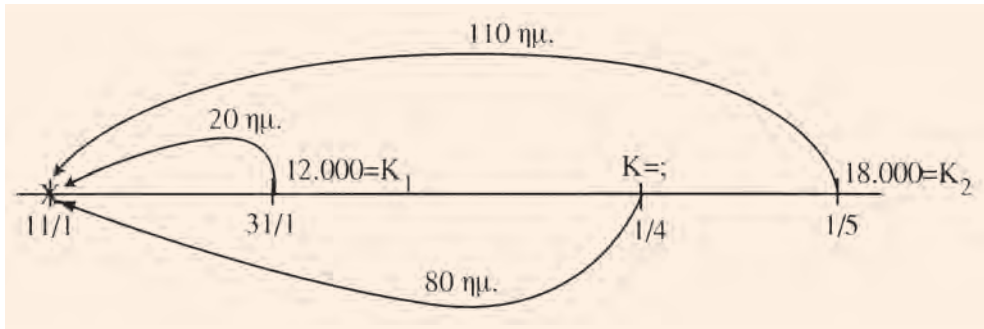
**Λύση.** 1) Ε.Ι.Κ.Α. Κατασκευάζουμε το χρονοδιάγραμμα:



Η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας είναι της μορφής (6.2). Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε:

$$K = \left( 12.000 + \frac{12.000 \cdot 60 \cdot 0,07}{365} \right) + \left( 18.000 - \frac{18.000 \cdot 30 \cdot 0,07}{365} \right) = 30.034,52$$

2) Ε.Ι.Η.Υ.



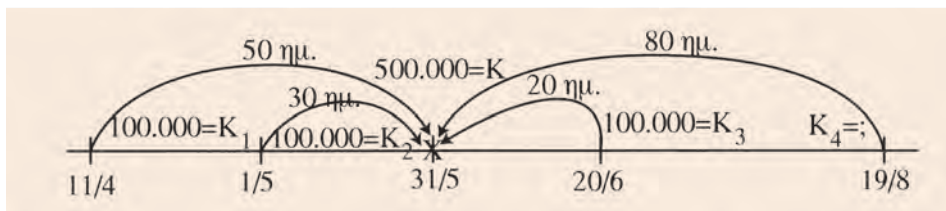
Η εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας είναι της μορφής (6.1). Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκουμε:

$$K - \frac{K \cdot 80 \cdot 0,07}{365} = \left( 12.000 - \frac{12.000 \cdot 20 \cdot 0,07}{365} \right) + \left( 18.000 - \frac{18.000 \cdot 110 \cdot 0,07}{365} \right) \text{ και } K = 30.035,06$$

### 6.3. Εύρεση της ονομαστικής αξίας ή της λήξης οποιουδήποτε γραμματίου

**Παράδειγμα 1.** Ο έμπορος Ε δεν μπορεί να πληρώσει γραμμάτιο 500.000 €, το οποίο λήγει την 31η Μαΐου, γι' αυτό υπογράφει τα εξής γραμμάτια: α) Γραμμάτιο 100.000 €, λήξης 11 Απριλίου, β) Γραμμάτιο 100.000 €, λήξης 1 Μαΐου, γ) 100.000 €, λήξης 20 Ιουνίου και δ) γραμμάτιο που λήγει στις 19 Αυγούστου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του τελευταίου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 8% και το έτος πολιτικό. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη (31/5).

**Λύση.** Κατασκευάζουμε το χρονοδιάγραμμα:



Αφού εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη (31/5), έπεται ότι θα εφαρμόσουμε την εξίσωση οικονομικής ισοδυναμίας (6.2). Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε

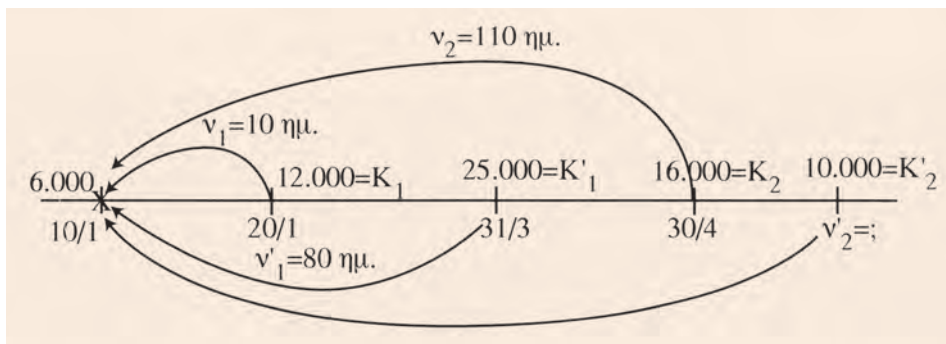
$$500.000 = \left( 100.000 + \frac{100.000 \cdot 50 \cdot 0,08}{365} \right) + \left( 100.000 + \frac{100.000 \cdot 30 \cdot 0,08}{365} \right) +$$

$$+ \left( 100.000 - \frac{100.000 \cdot 20 \cdot 0,08}{365} \right) + \left( K_4 - \frac{K_4 \cdot 80 \cdot 0,08}{365} \right)$$

και  $K_4 = 202.230,89$ .

**Παράδειγμα 2.** Οφείλει κάποιος γραμμάτιο 12.000 € που λήγει την 20η Ιαν/ρίου, άλλο γρ/τιο 16.000 €, που λήγει την 30ή Απριλίου και 6.000 € μετρητά. Για να εξοφλήσει το χρέος, υπογράφει στις 10 Ιαν/ρίου δύο γραμμάτια: α) Γραμμάτιο 25.000 €, το οποίο λήγει την 31η Μαρτίου και β) Γραμμάτιο 10.000 €. Πότε πρέπει να λήγει το β γραμμάτιο, για να εξοφληθεί το χρέος; Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού. Εττιτόκιο 6% και έτος μεικτό.

**Λύση.** Κατασκευάζουμε το ακόλουθο χρονοδιάγραμμα:



Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία, πρέπει το άθροισμα των παρουσών αξιών των παλαιών γραμματίων να είναι ίσο με το άθροισμα των παρουσών αξιών των νέων γραμματίων. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$6.000 + \left( 12.000 - \frac{12.000 \cdot 10}{6.000} \right) + \left( 16.000 - \frac{16.000 \cdot 110}{6.000} \right) = \\ = \left( 25.000 - \frac{25.000 \cdot 80}{6.000} \right) + \left( 10.000 - \frac{10.000 \cdot v'_2}{6.000} \right)$$

και  $v'_2 = 588$  ημ.

Ωστε: το β' γραμμάτιο πρέπει να λήγει 588 ημέρες μετά την 10η Ιαν/ρίου, δηλαδή στις 21 Αυγούστου του επόμενου έτους.

#### 6.4. Εύρεση της κοινής λήξης

Είπαμε ότι κοινή λήξη είναι η ημερομηνία κατά την οποία λήγει το ενιαίο γραμμάτιο.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε τα γραμμάτια:  $K_1, K_2, \dots, K_\mu$ , τα οποία λήγουν αντίστοιχα μετά  $v_1, v_2, \dots, v_\mu$  ημέρες από σήμερα. Τα πιο πάνω γραμμάτια αντικαθίστανται με ένα ενιαίο γραμμάτιο  $K$ . Πότε πρέπει να λήγει το γραμμάτιο  $K$ , ώστε να πραγματοποιηθεί η οικονομική ισοδυναμία;

**1) Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.** Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση:

$$K - \frac{K \cdot v}{\Delta} = \left( K_1 - \frac{K_1 \cdot v_1}{\Delta} \right) + \left( K_2 - \frac{K_2 \cdot v_2}{\Delta} \right) + \dots + \left( K_\mu - \frac{K_\mu \cdot v_\mu}{\Delta} \right)$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $v$  βρίσκουμε την κοινή λήξη.



$$v = \frac{K_1 v_1 + K_2 v_2 + \dots + K_\mu v_\mu}{K} + \Delta \cdot \frac{K - (K_1 + K_2 + \dots + K_\mu)}{K} \quad (6.3)$$

$$\Delta = 360/i$$

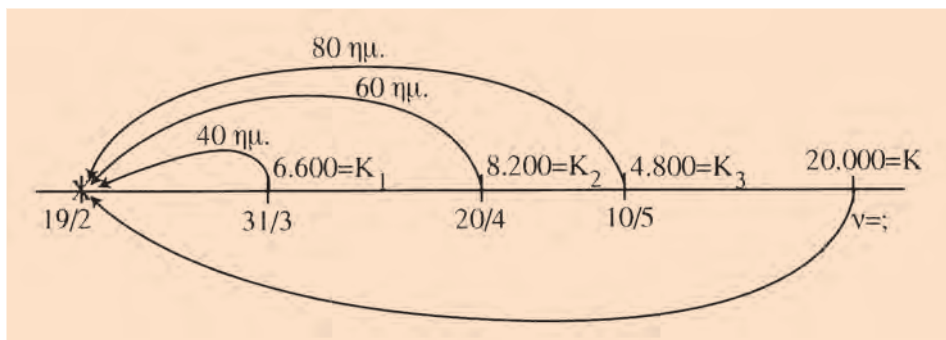
**2) Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.** Η κοινή λήξη ( $= v$ ) βρίσκεται με τον τύπο:



$$v = \frac{K_1 v_1 + K_2 v_2 + \dots + K_\mu v_\mu}{K_1 + K_2 + \dots + K_\mu} + \Delta \cdot \frac{K - (K_1 + K_2 + \dots + K_\mu)}{K_1 + K_2 + \dots + K_\mu} \quad (6.4)$$

**Παράδειγμα.** Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 20.000 €, το οποίο στις 19/2 αντικαθιστά τα εξής γραμμάτια: α) Γραμμάτιο 6.600 € λήξης 31/3, β) Γραμμάτιο 8.200 € λήξης 20/4 και γ) γραμμάτιο 4.800 € λήξης 10/5. Επιτόκιο 9%. Έτος μεικτό. ( $\Delta = 360:0,09 = 4.000$ ).

**Λύση.** Εποχή ισοδυναμίας η 19/2.



Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (6.3) ή (6.4) και έχουμε:

$$v = \frac{6.600 \cdot 40 + 8.200 \cdot 60 + 4.800 \cdot 80}{20.000} + 4.000 \cdot \frac{20.000 - 19.600}{20.000} =$$

$= 56,1 + 80 + 136,1$  136 ημέρες μετά την 19/2 πρέπει να λήγει το ενιαίο γραμμάτιο, δηλαδή την 6/7.

### 6.5. Εύρεση της μέσης λήξης

Μέση λήξη είναι η περίπτωση εκείνη της κοινής λήξης, κατά την οποία **η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου ισούται με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων.**

Όταν λοιπόν είναι:  $K = K_1 + K_2 + \dots + K_\mu$ , τότε το δεύτερο κλάσμα του β' μέλους του τύπου (6.3) μηδενίζεται, και έτσι προκύπτει ο τύπος υπολογισμού της μέσης λήξης:

$$v = \frac{K_1 v_1 + K_2 v_2 + \dots + K_\mu v_\mu}{K} \quad (6.5)$$

Από τον τύπο (6.5) προκύπτει η εξίσωση:

$$K \cdot v = K_1 v_1 + K_2 v_2 + \dots + K_\mu v_\mu \quad (6.6)$$

Η εξίσωση (6.6) αποτελεί τη γενική εξίσωση επίλυσης των προβλημάτων της μέσης λήξης.

Από τον τύπο (6.5) και την εξίσωση (6.6) συνάγεται ότι η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη από το επιτόκιο και το έτος υπολογισμού, γιατί δεν περιέχουν το  $\Delta$ .

Η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη από την εποχή υπολογισμού.

Αν συμβεί να είναι  $K_1 = K_2 = \dots = K_\mu$ , τότε η μέση λήξη ισούται με το μέσο όρο των λήξεων των γραμματίων. Δηλαδή:

$$v = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_\mu}{\mu} \quad (6.7)$$

**Παράδειγμα.** Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 60.000 €, το οποίο την 1/9 αντικαθίσταται από δύο γραμμάτια: α) γραμμάτιο 35.000 € λήξης 20/11 και β) γραμμάτιο 25.000 € λήξης 11/10. Επιτόκιο 9%. Έτος πολιτικό.

**Λύση.** Επειδή  $K = 60.000 = 35.000 + 25.000 = K_1 + K_2$ , πρόκειται για πρόβλημα μέσης λήξης.

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση (6.6) και έχουμε:

$$60.000 v = 25.000 \cdot 40 + 35.000 \cdot 80 \text{ και}$$

$v = 63,33 \approx 63$  ημέρες μετά την  $1/9$ , δηλαδή την  $3/11$ . Το επιτόκιο και το έτος δε μας χρειάζονται, γιατί η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη απ' αυτά.



### Προβλήματα αντικατάστασης γραμματίων

1. Γραμμάτια 4.000, 9.000 και 15.000 €, τα οποία λήγουν αντιστοίχως την  $20/1$ ,  $9/2$  και  $30/4$ , τα αντικαθιστούμε στις  $10/1$  με ένα γραμμάτιο, το οποίο λήγει στις  $31/3$ . Να βρεθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας: α) η κοινή λήξη και β) η ημέρα υπολογισμού. Επιτόκιο 4%. Έτος πολιτικό.

(Απ. 28.030,68 - 28.030,95)

2. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 50.000 €, το οποίο την 1η Σεπ/βρίου αντικαθιστά τα εξής γραμμάτια: α) γραμμάτιο 20.000 € λήξης 10 Οκτωβρίου και β) γραμμάτιο 30.000 € λήξης 19 Νοεμβρίου. Επιτόκιο 8% και έτος πολιτικό. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

(Απ.  $v = 108$  ημ.)

3. Οφείλει κάποιος γραμμάτιο 50.000 €, το οποίο λήγει την 20ή Απριλίου. Για να εξοφλήσει το γραμμάτιο, υπογράφει τα εξής γραμμάτια: α) γραμμάτιο 10.000 € λήξης 21 Μαρτίου, β) γραμμάτιο 10.000 €, λήξης 10 Απριλίου, γ) γραμμάτιο 10.000 € λήξης 10 Μαΐου και δ) γραμμάτιο που λήγει στις 10 Ιουνίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του δ' γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη. Επιτόκιο 7% και έτος πολιτικό.

(Απ.  $K_4 = 20.158,81$ )

4. Δύο γραμμάτια από 5.000 € το καθένα λήγουν: το πρώτο μετά 30 ημέρες και το δεύτερο μετά 100 ημέρες από σήμερα. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 10.000 €, το οποίο αντικαθιστά τα δύο γραμμάτια;

**(Απ.  $v = 65$  ημ. από σήμερα)**

5. Γραμμάτιο 12.000 € έπρεπε να πληρωθεί την 30ή Μαΐου. Για την εξόφλησή του έγιναν τρία γραμμάτια: α) γραμμάτιο 4.500 € λήξης 15/4, β) γραμμάτιο 4.500 € λήξης 10/5 και γ) γραμμάτιο 3.000 € Να βρεθεί η λήξη του γ' γραμματίου.

**(Απ.  $v_3 = 143$  ημ. μετά την 15/4)**

6. Δύο γραμμάτια λήγουν μετά 60 και 180 ημέρες αντιστοίχως, έχουν μέση λήξη μετά 80 ημέρες, άθροισμα ονομαστικών αξιών ισοδύναμο με γραμμάτιο 20.000 €, το οποίο λήγει μετά 120 ημέρες από σήμερα. Να βρεθούν οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων.

**(Απ.  $K_1 = 16.554 - K_2 = 3.310,8$ )**

7. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο 60.000 €, το οποίο την 1η Σεπτεμβρίου αντικαθίσταται από δύο γραμμάτια: α) από γραμμάτιο 35.000 € λήξης 20 Νοεμβρίου και β) από γραμμάτιο 25.000 € λήξης 11 Οκτωβρίου. Εποχή ισοδυναμίας: α) ημέρα υπολογισμού και β) η κοινή λήξη. Επιτόκιο 9%. Έτος πολιτικό.

**(Απ.  $v = 63$  ημ. μετά την 1η Σεπτεμβρίου)**

8. Γραμμάτιο 60.000 € πρέπει να πληρωθεί μετά 80 ημέρες από σήμερα. Συμφωνήθηκε να γίνουν 4 ίσα γραμμάτια από 15.000 € το καθένα, τα οποία να λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα από σήμερα. Να βρεθούν οι λήξεις των τεσσάρων γραμματίων. Επιτόκιο 12% και έτος μεικτό.

**(Απ.  $v_1 = 32, v_2 = 64, v_3 = 96, v_4 = 128$ )**

9. Ο έμπορος Ε αγόρασε εμπορεύματα αξίας 500.000 € και πλήρωσε 140.000 € μετρητά· για το υπόλοιπο ποσόν υπέγραψε τρία ισόποσα

γραμματία, τα οποία λήγουν μετά 20, 40 και 60 ημέρες από σήμερα. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του κάθε γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 6%, το έτος μεικτό και η εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

**(Απ.  $K_1 = K_2 = K_3 = 120.805$ )**

10. Χρέος 420.000 € πρέπει να πληρωθεί μετά 40 ημέρες από σήμερα. Έναντι αυτού εκδίδονται δύο συναλλαγματικές αξίας 120.000 € και 260.000 €, οι οποίες λήγουν αντίστοιχα μετά 35 και 60 ημέρες από σήμερα. Πότε πρέπει να λήγει τρίτη συναλλαγματική, αξίας 40.000 € για να εξοφληθεί το χρέος;

**(Απ.  $v_3 = -75$  δηλαδή πριν από 75 ημ. από σήμερα, άρα πρακτικώς αδύνατο)**

# **ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ**

## **ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ**





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

## ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ Ή ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

### 7.1. Γενικά

Όπως είπαμε και στην παράγραφο 1.4 της Εισαγωγής, έχουμε δύο είδη τόκων:

1) Τον **Απλό Τόκο** (**Simple Interest**), κατά τον οποίο ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, εισπράττεται από τον καταθέτη, ο οποίος αφήνει το αρχικό κεφάλαιο να τοκίζεται για δεύτερη, τρίτη, κ.ο.κ. χρονική περίοδο. Δηλαδή το αρχικό κεφάλαιο παραμένει το ίδιο σε όλες τις χρονικές περιόδους του τοκισμού.

2) Το **Σύνθετο Τόκο** (**Compound Interest**) ή **Ανατοκισμό**, κατά τον οποίο ο καταθέτης αφήνει τον τόκο που έχει παραχθεί, (στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου), στο ταμειευτήριο, με σκοπό να προστεθεί στο κεφάλαιο (δηλαδή να κεφαλαιοποιηθεί), οπότε από την επόμενη χρονική περίοδο να φέρει τόκο το αρχικό κεφάλαιο συν τον τόκο του αρχικού κεφαλαίου. Το ίδιο θα επαναλαμβάνεται και στις επόμενες χρονικές περιόδους έως τη λήξη της κατάθεσης. Στον ανατοκισμό, τόσο ο τόκος όσο και το τοκιζόμενο

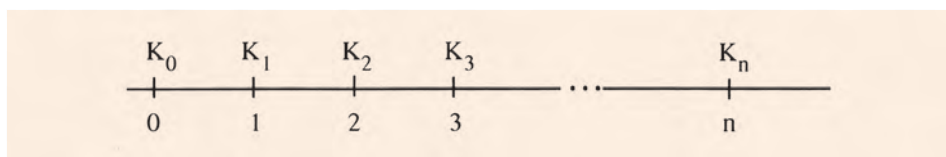
κεφάλαιο αυξάνουν κάθε χρονική περίοδο, ενώ στον απλό τόκο ο τόκος και το αρχικό κεφάλαιο παραμένουν αμετάβλητα.

Η περίοδος του ανατοκισμού μπορεί να είναι το έτος ή το εξάμηνο ή το τρίμηνο ή και ο μήνας και λέμε ότι ο ανατοκισμός γίνεται ανά έτος ή ανά εξάμηνο ή ανά τρίμηνο, κτλ.



Αν ένα κεφάλαιο ανατοκίζεται κατά τις χρονικές περιόδους  $0, 1, 2, 3, \dots, n$ , τότε το κεφάλαιο που αντιστοιχεί στη χρονική περίοδο **(0)** ονομάζεται **αρχικό κεφάλαιο** ή **αρχική αξία** ή **παρούσα αξία** (**present value**) και θα το παριστάνουμε με το  $K_0$ , ενώ το κεφάλαιο που θα έχει σχηματιστεί στο τέλος της  $n$  περιόδου ονομάζεται **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία** του  $K_0$  (**compound amount**) και θα το παριστάνουμε με το  $K_n$ .

Διάγραμμα 7.1



Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 7.1, στον ανατοκισμό το αρχικό κεφάλαιο ( $= K_0$ ) στο τέλος της 1ης χρονικής περιόδου θα αυξηθεί κατά τον τόκο του και θα γίνει  $K_1$ . Στο τέλος της 2ης περιόδου θα έχουμε  $K_1$  συν τον τόκο του και γίνεται  $K_2$ . Στο τέλος της 3ης περιόδου, το  $K_3$  σχηματίζεται από το  $K_2$  συν τον τόκο του. Το ίδιο θα γίνεται και στις επόμενες χρονικές περιόδους μέχρις ότου ο καταθέτης αποσύρει το τελικό κεφάλαιο. Συνεπώς, είναι δυνατόν από ένα μικρό αρχικό κεφάλαιο, το οποίο θα ανατοκιστεί για πολλά χρόνια, να παραχθεί ένα τεράστιο τελικό κεφάλαιο. Αν π.χ. ανατοκίσουμε 1 ευρώ για 1000 χρόνια, τότε θα παραχθεί τελικό κεφάλαιο, το οποίο θα αποτελείται από δεκαοκταψηφίο αριθμό, δηλαδή ποσό το οποίο υπερβαίνει το ύψος των κεφαλαίων που υπάρχουν σε όλη τη Γη.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του μαγικού φαινομένου του ανατοκισμού είναι το κληροδότημα των 1000 λιρών (στερλινών), τις οποίες έδωσε με διαθήκη ο Βενιαμίν Φραγκλίνος\* στην πόλη της Βοστόνης (Η.Π.Α.). Ο

\* Βλ. "Mathematics of Finance", Robert & Helen Cissell, Houghton Mifflin Company, Boston 1973, p. 76.

Βενιαμίν Φραγκλίνος πέθανε στις 17 Απριλίου 1790 και η πόλη της Βοστώνης έκανε δεκτή τη δωρεά την 1η Ιουνίου 1790. Σύμφωνα με τη διαθήκη του Φραγκλίνου, τα χρήματα κατατέθηκαν σε μια τράπεζα με ανατοκισμό για 100 χρόνια. Στο τέλος των 100 ετών, ένα τμήμα του συσσωρευμένου κεφαλαίου διατέθηκε για δημόσια έργα και το υπόλοιπο ανατοκίστηκε για άλλα 100 χρόνια.

Το 1907 το τεράστιο κτίριο Franklin Institute of Boston άρχισε με 438.742 δολλάρια. Περισσότεροι από 75.000 σπουδαστές έχουν φοιτήσει μέχρι το 1971 σε αυτό το ινστιτούτο, το οποίο άνοιξε το 1908. Το 1971 το ποσό που είχε συσσωρευτεί ήταν 2.552.267 δολλάρια. Από αυτά τα χρήματα χρηματοδοτούνται σήμερα σπουδαστές της Ιατρικής. Όλα αυτά από ένα κληροδότημα ισοδύναμο με 4.570 δολλάρια.

Ο ανατοκισμός κρίθηκε αρκετές φορές ως κοινωνικά άδικος όταν επιβάλλεται στις καθυστερούμενες δόσεις δανείων. Πρόσφατα, απαγορεύτηκε από το Ανώτατο Δικαστήριο της χώρας μας ο ανατοκισμός των καθυστερούμενων δόσεων δανείων όταν αυτός γίνεται με επιτόκιο υπερημερίας, ενώ ορίστηκε ότι το επιτόκιο υπερημερίας δεν μπορεί να υπερβαίνει τις δύο εκατοστιαίες μονάδες έναντι του ανώτατου επιτοκίου που χρησιμοποιεί η κάθε τράπεζα στις δανειοδοτήσεις της.

## 7.2. Εύρεση της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου τοκισμένου με ανατοκισμό. Γενικός τύπος ανατοκισμού

Στα προβλήματα του ανατοκισμού συμπλέκονται τέσσερα ποσά: α) το **αρχικό κεφάλαιο** ( $= K_0$ ), το οποίο αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή 0, β) το **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία** ( $= K_n$ ) του  $K_0$ , που θα έχει σχηματιστεί στο τέλος της  $n$  χρονικής περιόδου, γ) το **επιτόκιο** ( $= i$ ), το οποίο θεωρείται σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια του ανατοκισμού και δ) ο **χρόνος**, ο οποίος θα συμβολίζεται με το  $n$ , αν εκφράζεται σε ακέραιες περιόδους (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα) και με το  $\mu/\rho$  αν εκφράζεται σε κλάσμα της ακέραιας περιόδου.

Για τον υπολογισμό του τελικού κεφαλαίου ( $= K_n$ ) διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

### 7.2.1. Εύρεση του $K_n$ όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ακέραιες χρονικές περιόδους

Είπαμε ότι σύνθετο τόκο έχουμε, όταν ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε περιόδου, προστίθεται στο τοκιζόμενο κεφάλαιο (= κεφαλαιοποιείται) και παράγει και αυτός τόκο από την επόμενη χρονική περίοδο κτλ., ώσπου να λήξει η κατάθεση.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό (Βλέπε και Διάγραμμα 7.1) ο γενικός τύπος του ανατοκισμού θα προκύψει ως εξής:

Στο τέλος της 1ης περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 (1 + i)$$

Στο τέλος της 2ης περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 (1 + i)$$

Στο τέλος της 3ης περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2 (1 + i)$$

.....  
 .....  
 .....

Στο τέλος της n-στής περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i = K_{n-1} (1 + i)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και έχουμε:

$$\begin{aligned} K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \dots K_n &= K_0 (1 + i) \cdot K_1 (1 + i) \cdot K_2 (1 + i) \cdot \dots \cdot K_{n-1} (1 + i) \\ &= K_0 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_{n-1} \underbrace{[(1 + i)(1 + i)(1 + i) \dots (1 + i)]}_{n \text{ φορές}} \\ &= K_0 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_{n-1} (1 + i)^n \end{aligned}$$

Μετά τις απαλοιφές παίρνουμε το γενικό τύπο του ανατοκισμού:\*



$$K_n = K_0 (1 + i)^n$$

(7.1)

**Παρατήρηση 1η.** Ο τύπος (7.1) αποτελεί το γενικό τύπο του ανατοκισμού και με βάση αυτόν λύνονται όλα τα προβλήματα του ανατοκισμού. Το διώνυμο  $(1 + i)^n$  ονομάζεται **συντελεστής κεφαλαιοποίησης** ή **ανατοκισμού** και το παίρνουμε από ειδικούς πίνακες\*\* για διάφορα επιτόκια ( $= i$ ) και  $n$ . Ο τύπος (7.1) προϋποθέτει ότι το επιτόκιο  $i$  αναφέρεται στην ίδια με το  $n$  χρονική περίοδο. Δηλαδή: Ετήσιο επιτόκιο,  $n =$  έτη, εξαμηνιαίο επιτόκιο,  $n =$  εξάμηνα.



**Παρατήρηση 2η.** Το διώνυμο  $(1 + i)^n$  είναι η τελική αξία 1 νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί  $n$  ακέραιες χρονικές περιόδους. Επειδή το  $(1 + i)^n$  είναι δύναμη, όταν αυξάνεται το  $i$  ή το  $n$ , το  $(1 + i)^n$  δεν αυξάνεται ανάλογα προς τα  $i$  και  $n$  αλλά κατά γεωμετρική πρόοδο, όπως δείχνουν τα Διαγράμματα 7.2 και 7.3.

\* Στην ξένη βιβλιογραφία ο γενικός τύπος του ανατοκισμού έχει την ακόλουθη μορφή:

$$FV = PV (1 + r)^n \quad (7.1a)$$

όπου: FV = Future Value = Μέλλουσα αξία του ποσού

PV = Present Value = Παρούσα αξία

$r$  = Επιτόκιο (απόδοση μιας επένδυσης)

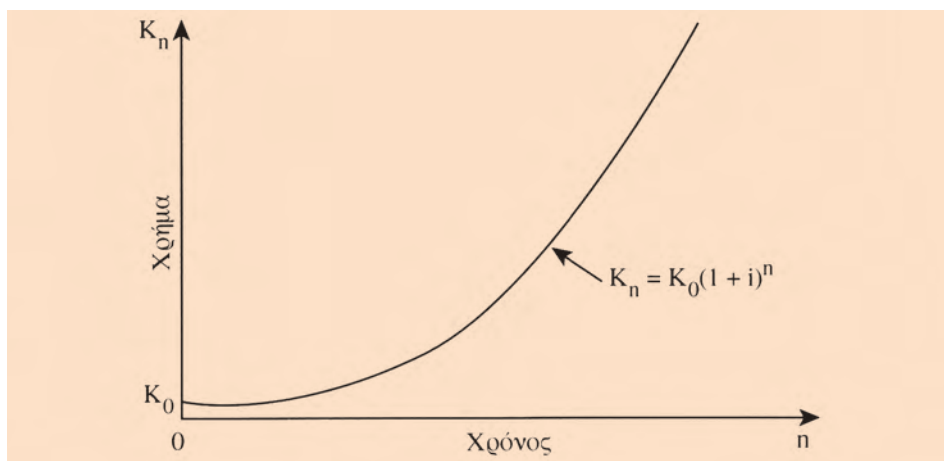
$n$  = αριθμός χρονικών περιόδων,

Οι τύποι (7.1) και (7.1a) εκφράζουν τη **Διαχρονική Αξία του Χρήματος** (Time Value of Money).

Η έννοια αυτή είναι ο θεμέλιος λίθος, πάνω στον οποίο έχει κτιστεί ολόκληρο το οικοδόμημα της χρηματοοικονομικής (Finance).

\*\* Βλ. Πίνακες Ανατοκισμού - Ραντών - Χρεολυσίων, στο τέλος του βιβλίου.

Διάγραμμα 7.2



**Παράδειγμα 1ο.** Κεφάλαιο 20.000 € ανατοκίζεται κάθε χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 6%. Τι ποσό θα έχει συσσωρευτεί στο ταμειυτήριο στο τέλος των 10 ετών;

**Λύση.**  $K_0 = 20.000$ ,  $n = 10$ ,  $i = 0,06$ ,  $K_n =$ ;

Η τελική αξία (τελικό κεφάλαιο) του δοσμένου κεφαλαίου θα βρεθεί με τον τύπο (7.1). Αντικαθιστούμε τα δεδομένα, και έχουμε:

$$K_n = 20.000(1 + 0,06)^{10} = 20.000 (1,06)^{10} \quad (\alpha)$$

Το συντελεστή\*  $(1,06)^{10}$  τον βρίσκουμε στον Πίνακα I (βλέπε στο τέλος του βιβλίου) ως εξής: Στην πρώτη γραμμή του Πίνακα I εντοπίζουμε πρώτα το επιτόκιο 6% και στην πρώτη στήλη εντοπίζουμε το  $n = 10$ . Στη διασταύρωση της γραμμής  $n = 10$  και της στήλης 6%, βρίσκουμε τον αριθμό 1,7908477, ο οποίος αποτελεί το εξαγόμενο της δύναμης  $(1,06)^{10}$ . Αντικαθιστώντας τώρα το  $(1,06)^{10}$  με τον αριθμό 1,7908477 στην (α) βρίσκουμε το  $K_n$ . Δηλαδή:

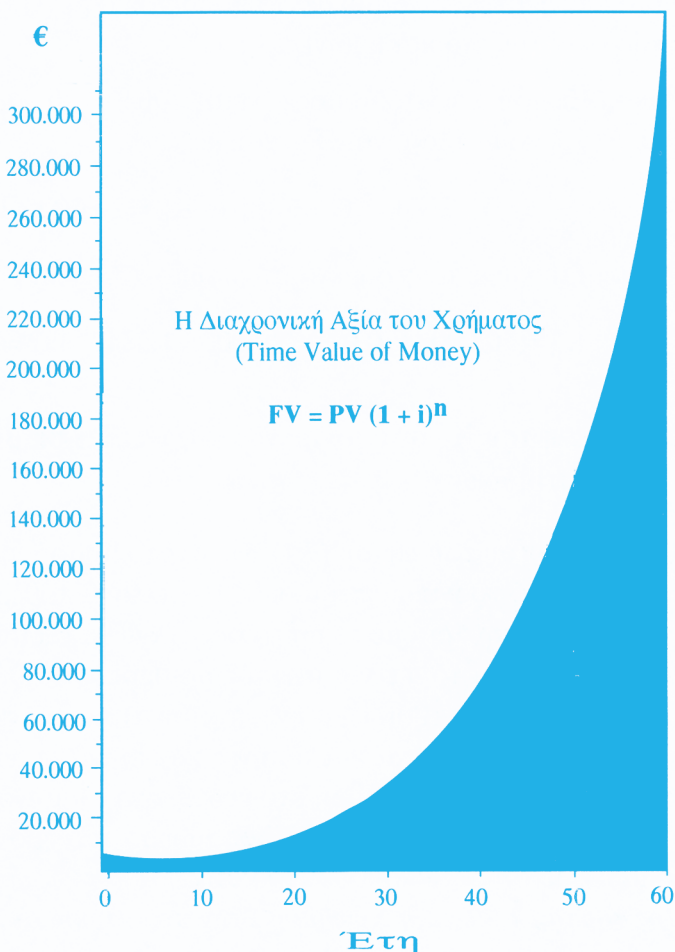
$$K_n = 20.000 \times 1,7908477 = 35.816,95 \text{ €}$$

\* Το συντελεστή ανατοκισμού  $(1,06)^{10}$  μπορούμε να τον υπολογίσουμε με το Scientific Calculator (Κομπιουτεράκι), που διαθέτει το πλήκτρο  $x^y$ , ακολουθώντας την ακόλουθη διαδικασία : α) πληκτρολογούμε: α) 1,06, β) το  $x^y$ , γ) το 10 και δ) το =. Το κομπιουτεράκι θα εμφανίσει στην οθόνη το αποτέλεσμα: 1,7908477.

**Διάγραμμα 7.3**

Ο παρακάτω πίνακας και το αντίστοιχο διάγραμμα δείχνουν το κεφάλαιο που σχηματίζεται στο τέλος των 10, 15, 20, ..., 100 ετών, αν ανατοκίσουμε 1000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 10%.

| n   | $K_n = 1000(1+0,1)^n$ |
|-----|-----------------------|
| 10  | 2.594                 |
| 15  | 4.177                 |
| 20  | 6.727                 |
| 25  | 10.835                |
| 30  | 17.449                |
| 35  | 28.102                |
| 40  | 45.259                |
| 45  | 72.890                |
| 50  | 117.391               |
| 60  | 304.482               |
| 70  | 789.747               |
| 80  | 2.048.400             |
| 90  | 5.313.023             |
| 100 | 13.780.612            |





**Παρατήρηση 3η.** Αν τώρα ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο ή κάθε τρίμηνο και ο χρόνος δίνεται σε έτη και εξάμηνα ή σε έτη και τρίμηνα, τότε πρέπει να μετατρέψουμε τα έτη σε εξάμηνα ή τρίμηνα και εργαζόμαστε πλέον όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Πρέπει να έχουμε πάντοτε υπόψη μας ότι το επιτόκιο  $i$  πρέπει να αναφέρεται στην ίδια με το  $n$  χρονική περίοδο.

**Παράδειγμα 2ο.** Κεφάλαιο 20.000 € ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο ταμειυτήριο μετά 5 έτη και 6 μήνες.

**Λύση.** Επειδή ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο, πρέπει να μετατρέψουμε το χρόνο σε εξάμηνα. Θα έχουμε:

$$n = 5 \cdot 2 + 1 = 11 \text{ εξάμηνα, } K_0 = 20.000, i = 0,03$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο, (7.1) και βρίσκουμε:

$$K_n = 20.000 (1, 03)^{11} = 20.000 \cdot 1,38423387 = 27.684,68$$

## 7.2.2 Εύρεση του $K_n$ όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μεικτό αριθμό χρονικών περιόδων

Για την εύρεση του τύπου (7.1) του ανατοκισμού υποθέσαμε ότι είχαμε ακέραιο αριθμό χρονικών περιόδων. Επιπλέον υποθέσαμε ότι το επιτόκιο  $i$  αναφερόταν στην ίδια με το  $n$  περίοδο. Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία το  $n$  είναι μεικτός αριθμός, δηλαδή αποτελείται από  $n$  ακέραιες περιόδους (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα) και μήνες ( $\mu/\rho$ ), π.χ. 10 έτη και 5 μήνες ή 15 εξάμηνα και 6 μήνες κ.ο.κ., και το επιτόκιο αναφέρεται στην ακεραία περίοδο, δηλαδή στο έτος ή στο εξάμηνο αντίστοιχα. Για να βρούμε το τελικό κεφάλαιο στο τέλος των  $n + \mu/\rho$  χρονικών περιόδων, εργαζόμαστε με τους ακόλουθους τρόπους:

**1ος τρόπος. Εκθετική Συνθήκη.** Στην περίπτωση αυτή, για να βρούμε το τελικό κεφάλαιο στο τέλος των  $n + \mu/\rho$  χρονικών περιόδων, εφαρμόζουμε το γενικό τύπο του ανατοκισμού, ο οποίος έχει τώρα την ακόλουθη μορφή:



$$K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^{n+\frac{\mu}{\rho}} = K_0(1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{\rho}} \quad (7.2)$$

Αν όμως η ακέραια περίοδος είναι το έτος, τότε η (7.2) γράφεται:

$$K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{12}} \quad (7.3)$$

Αν όμως η ακεραία περίοδος είναι το εξάμηνο, τότε:

$$K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{6}} \quad (7.4)$$

**Παράδειγμα 1ο.** Καταθέσαμε στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο με ετήσιο ανατοκισμό 20.000 € και με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί το ύψος του κεφαλαίου μετά 5 έτη και 8 μήνες.

**Λύση.**  $K_0 = 20.000$ ,  $i = 0,06$ ,  $n = 5$ ,  $\mu = 8$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (7.3) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} K_{n+\mu/12} &= 20.000(1,06)^5(1,06)^{\frac{8}{12}} = 20.000 \cdot 1,33822 \cdot 1,03961 = \\ &= 27.824,54. \end{aligned}$$

**Σημείωση:** Το συντελεστή  $(1,06)^{\frac{8}{12}}$  τον πήραμε από τον Πίνακα II.

**Παράδειγμα 2ο.** Κεφάλαιο 20.000 € ανατοκίζεται καθ' εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3% επί 5 έτη και 8 μήνες. Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο.

**Λύση.** Στην περίπτωση αυτή, ως ακέραια περίοδος θεωρείται το εξάμηνο, οπότε: 5 έτη και 8 μήνες  $= 5 \cdot 2 + 1 = 11$  εξάμηνα και  $\mu = 2$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (7.4) βρίσκουμε:

$$K_{n+\mu/\rho} = 20.000(1,03)^{11}(1,03)^{\frac{2}{6}} = 20.000(1,03)^{11}(1,03)^{\frac{4}{12}} =$$

$$= 20.000 \cdot 1,38423387 \cdot 1,0099 = 27.958,76$$

**Σημείωση:** Ο κλασματικός εκθέτης  $(1,03)^{\frac{2}{6}}$  πρέπει να μετατρέπεται σε δωδέκατα  $(1,03)^{\frac{2 \times 2}{6 \times 2} = \frac{4}{12}}$  για να χρησιμοποιείται ο Πίνακας II.

**2ος τρόπος. Γραμμική Συνθήκη.** Στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και στα Ταμιευτήρια των Τραπεζών εφαρμόζεται ο **μεικτός ανατοκισμός** για τις ακέραιες περιόδους εφαρμόζεται ο ανατοκισμός, ενώ για το κλάσμα της ακέραιας περιόδου εφαρμόζεται ο απλός τόκος. Συνεπώς, κεφάλαιο  $K_0$ , το οποίο ανατοκίζεται επί η ακέραιες περιόδους και  $\mu/\rho$  κλασματικές, στο τέλος των  $n + \mu/\rho$  χρονικών περιόδων θα έχει τελική αξία:

$$K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n + K_0 \cdot (1+i)^n \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot i =$$



$$= K_0 \cdot (1+i)^n \left( 1 + \frac{\mu}{\rho} \cdot i \right) \quad (7.5)$$

Αν η ακέραια περίοδος είναι το έτος, τότε:

$$K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n \left( 1 + \frac{\mu}{12} \cdot i \right) \quad (7.6)$$

όπου  $n = \text{έτη}$ ,  $\mu = \text{μήνες}$

Αν η ακέραια περίοδος είναι το εξάμηνο, τότε:

$$K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n \left( 1 + \frac{\mu}{6} \cdot i \right) \quad (7.7)$$

όπου  $n = \text{εξάμηνα}$ ,  $\mu = \text{μήνες}$

Αν, τέλος, ο χρόνος εκφράζεται σε έτη (ή σε εξάμηνα) μήνες και ημέρες, τότε μετατρέπουμε τους μήνες σε ημέρες και εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$K_{n+\mu/\rho} = K_0(1+i)^n \left( 1 + \frac{v}{360} \cdot i \right) \quad (7.8)$$

**Παράδειγμα 1ο.** Κεφάλαιο 20.000 € ανατοκίζεται κάθε χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 6%. Τι ποσό θα έχει συσσωρευτεί μετά 5 έτη και 8 μήνες;

**Λύση.**  $K_0 = 20.000$ ,  $n = 5$ ,  $\mu = 8$ ,  $i = 0,06$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (7.6), και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} K_{5+8/12} &= 20.000(1,06)^5 \left( 1 + \frac{8}{12} \cdot 0,06 \right) \\ &= 20.000 \cdot 1,33823 \cdot 1,04 = 27.835,18 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 2ο.** Κεφάλαιο 10.000 € ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3,5% επί 8 έτη και 8 μήνες. Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο.

**Λύση.**  $K_0 = 10.000$ ,  $i = 0,035$ ,  $n = 17$  εξάμ.,  $\mu = 2$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (7.7) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} K_n &= 10.000(1,035)^{17} \left( 1 + \frac{2}{6} \cdot 0,035 \right) = \\ &= 10.000 \cdot 1,79468 \cdot 1,01167 = 18.156,24. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 3ο.** Δανείζεται κάποιος σήμερα 1.000.000 € με ανατοκισμό. Τι ποσό πρέπει να επιστρέψει στον πιστωτή μετά 10 έτη 3 μήνες και 10 ημέρες, όταν το ετήσιο επιτόκιο είναι 6% και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε χρόνο;

**Λύση.**  $K_0 = 1.000.000$ ,  $i = 0,06$ ,  $n = 10$ ,  $\mu = 3$ ,  $v = 10$ ,  $K_n =$ ;

Μετατρέπουμε τους μήνες σε ημέρες και αντικαθιστούμε στον τύπο (7.8).  $v = 3 \cdot 30 + 10 = 100$ .

$$\begin{aligned} K_n &= 1.000.000(1,06)^{10} \left( 1 + \frac{100}{360} \cdot 0,06 \right) = \\ &= 1.000.000 \cdot 1,79085 \cdot 1,01667 = 1.820.703,40. \end{aligned}$$

### 7.3. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου (παρούσας αξίας)

Το αρχικό κεφάλαιο ( $= K_0$ ), το οποίο ανατοκίζεται επί  $n$  χρονικές περιόδους με επιτόκιο  $i$ , ονομάζεται και **παρούσα αξία (Present Value)** του κεφαλαίου που θα σχηματιστεί στο τέλος της  $n$ -ιοστής περιόδου, γιατί παριστάνει την αξία που έχει σήμερα το τελικό κεφάλαιο ( $= K_n$ ).

Στην περίπτωση αυτή δημιουργείται το εξής πρόβλημα: Ποιο κεφάλαιο  $K_0$ , το οποίο ανατοκίστηκε επί  $n$  περιόδους με επιτόκιο  $i$ , έδωσε τελικό κεφάλαιο  $K_n$ ;

Για να βρούμε το αρχικό κεφάλαιο, πρέπει να λύσουμε τον τύπο του ανατοκισμού  $K_n = K_0 (1 + i)^n$  ως προς  $K_0$ . Δηλαδή:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n (1+i)^{-n} = K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \quad (7.9)^*$$

Αν παραστήσουμε το  $\frac{1}{1+i}$  με το  $U$ , τότε η σχέση (7.9) γράφεται ως εξής:



$$K_0 = K_n \cdot U^n \quad (7.10)$$

Το  $\frac{1}{(1+i)^n} = U^n$ , το οποίο είναι η παρούσα αξία μιας νομισματικής μο-



νάδας, στον ανατοκισμό ονομάζεται **συντελεστής προεξόφλησης** και παρέχεται από τον Πίνακα ΙΙΙ για  $n = 1$  έως  $n = 100$  και για  $i = 1/4\%$  έως  $i = 20\%$ .

Αν τώρα ο χρόνος εκφράζεται σε έτη και μήνες ή σε εξάμηνα και μήνες, τότε από τον τύπο  $K_n = K_0 (1+i)^{n+\frac{\mu}{12}}$  προκύπτει ο τύπος:

---

\* Ο τύπος (7.9) στην ξένη βιβλιογραφία έχει τη μορφή:  $PV = FV / (1+r)^n$ .  
 όπου :  $PV$  = Present Value,  $r$  = επιτόκιο  
 $FV$  = Future Value,  $n$  = χρόνος



$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^{n+\frac{\mu}{12}}} = \frac{K_n}{(1+i)^n (1+i)^{\frac{\mu}{12}}} \quad (7.11)$$

Ο τύπος (7.11) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^{n+\frac{\mu}{12}}} = \frac{K_n}{(1+i)^{n+1-\frac{\mu}{12}}} = \frac{K_n}{(1+i)^{n+1} (1+i)^{-\frac{\mu}{12}}}$$

και

$$K_0 = K_n (1+i)^{-(n+1)} (1+i)^{\frac{12-\mu}{12}} = K_n U^{n+1} (1+i)^{\frac{12-\mu}{12}} \quad (7.12)$$

Δηλαδή: Προεξοφλούμε για  $n+1$  έτη, εξάμηνά κτλ. και ανατοκίζουμε για τη διαφορά των μηνών.

**Παράδειγμα 1ο.** Ποιο κεφάλαιο πρέπει να καταθέσουμε σήμερα, με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 4%, για να εισπράξουμε 100.000 μετά 20 έτη;

**Λύση.**  $K_n = 100.000$ ,  $n = 20$ ,  $i = 0,04$ ,  $K_0 = ?$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (7.11) ή (7.12) και έχουμε:

$$K_0 = 100.000 \cdot \frac{1}{(1,04)^{20}} = 100.000 \cdot 0,45639 = 45.639 \text{ €}$$

Το  $\frac{1}{(1,04)^{20}} = U_{0,04}^{20}$  το πήραμε από τον Πίνακα ΙΙΙ.

**Παράδειγμα 2ο.** Να βρεθεί το κεφάλαιο που ανατοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 4,5%, επί 11 έτη και 5 μήνες και έγινε με τους τόκους του 165.000 €.

**Λύση.**  $K_0 = ?$ ;  $n = 11$ ,  $\mu = 5$ ,  $i = 0,045$ ,  $K_n = 165.000$

Αντικαθιστούμε στον τύπο (7.11) και βρίσκουμε:

$$K_0 = \frac{165.000}{(1,045)^{11} (1,045)^{\frac{5}{12}}} = \frac{165.000}{1,622853 \cdot 1,018509} = 99.825,03$$



**Σημείωση.** Αν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη και μήνες ή σε εξάμηνα και μήνες, τότε για να βρούμε το  $K_0$  λύνουμε τις εξισώσεις (7.6) και (7.7) της Γραμμικής Συνθήκης ως προς  $K_0$ , και έχουμε:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n \left(1 + \frac{\mu}{12} \cdot i\right)}, \quad n = \text{έτη}, \mu = \text{μήνες} \quad (7.13)$$

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n \left(1 + \frac{\mu}{6} \cdot i\right)}, \quad n = \text{εξάμηνα}, \mu = \text{μήνες} \quad (7.14)$$

Με τα δεδομένα του 2ου παραδείγματος, έχουμε:

$$K_0 = \frac{165.000}{(1,045)^{11} \left(1 + \frac{5}{12} \cdot 0,045\right)} = \frac{165.000}{1,622853 \cdot 1,01875} = 99.801,52$$

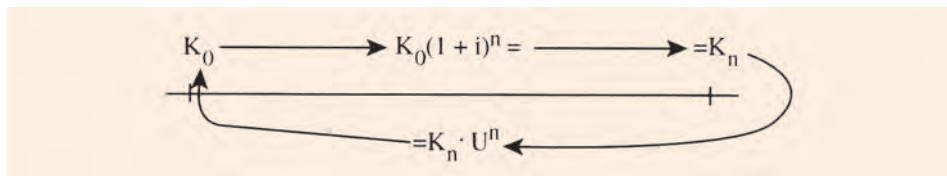
#### 7.4. Προεξόφληση με ανατοκισμό

Από το γενικό τύπο του ανατοκισμού (7.1) προκύπτει ότι: Αν το αρχικό κεφάλαιο (παρούσα αξία)  $K_0$  πολλαπλασιάσουμε επί το συντελεστή ανατοκισμού  $(1+i)^n$ , τότε βρίσκουμε το τελικό κεφάλαιο:  $K_n = K_0 (1+i)^n$ .

Εξάλλου, από τον τύπο (7.10) προκύπτει ότι: Αν το τελικό κεφάλαιο  $K_n$  πολλαπλασιάσουμε επί το συντελεστή προεξοφλήσεως  $U^n$ , τότε βρίσκουμε

το αρχικό κεφάλαιο (ή παρούσα αξία). Δηλαδή:  $K_0 = K_n \cdot U^n$ .

Τα παραπάνω φαίνονται καλύτερα στο ακόλουθο σχήμα:



Αν τώρα, από το τελικό κεφάλαιο αφαιρέσουμε το αρχικό κεφάλαιο (παρούσα αξία), τότε βρίσκουμε το **(εσωτερικό) προεξόφλημα με ανατοκισμό**. Δηλαδή:



$$E = K_n - K_n U^n$$

(7.15)

Αν τώρα γνωρίζουμε την παρούσα αξία ( $= K_0$ ), τότε το προεξόφλημα βρίσκεται με τον τύπο:



$$E = K_0(1+i)^n - K_0$$

(7.16)

**Παρατήρηση 1η.** Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (7.15) επί το συντελεστή ανατοκισμού  $(1+i)^n$ , θα έχουμε:



$$E(1+i)^n = K_n(1+i)^n - K_n \cdot U^n(1+i)^n$$

(7.17)

Αλλά:

$$U^n(1+i)^n = (1+i)^{-n}(1+i)^n = 1$$

Επομένως, η σχέση (7.17) γράφεται:

$$E(1+i)^n = K_n(1+i)^n - K_n = I = \text{Τόκος}$$

(7.18)

Ωστε:

$$I = E(1+i)^n \quad (7.19)$$

και



$$E = \frac{I}{(1+i)^n} = I \cdot U^n \quad (7.20)$$

Δηλαδή: Ο τόκος στον ανατοκισμό ισούται με την τελική αξία του προεξοφλήματος, ενώ το προεξόφλημα ισούται με την παρούσα αξία του τόκου.

**Παρατήρηση 2η.** Γνωρίζουμε ότι, ενώ στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις εφαρμόζεται η **εξωτερική προεξόφληση**, στις μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις εφαρμόζεται μόνο η **εσωτερική προεξόφληση**, γιατί η εξωτερική προεξόφληση οδηγεί σε άτοπα εξαγόμενα. Π.χ. το εξωτερικό προεξόφλημα (με ανατοκισμό) γραμματίου 10.000 €, το οποίο προεξοφλείται 10 έτη προτού λήξει με 8%, θα είναι:

$$10.000 (1,08)^{10} - 10.000 = 10.000 \cdot 2,1589 - 10.000 = 11.589$$

Επομένως, η παρούσα αξία του γραμματίου θα ήταν αρνητική:  $10.000 - 11.589 = -1.589$ . Το αποτέλεσμα όμως αυτό είναι προφανώς εξωπραγματικό.

**Παράδειγμα.** Ποια η παρούσα αξία και ποιο το προεξόφλημα με ανατοκισμό συναλλαγματικής ονομαστικής αξίας 100.000 €, η οποία προεξοφλήθηκε 5 έτη προτού λήξει με ετήσιο επιτόκιο 8,5%;

**Λύση.**  $K_0 = ; K_n = 100.000, n = 5, i = 0,085, E = ;$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στους τύπους (7.10), (7.15), (7.19) και (7.20) και βρίσκουμε:

$$K_0 = K_n \cdot U^n = 100.000 \cdot 0,6650454 = 66.504,54 \text{ €}$$

$$E = K_n - K_0 \cdot U^n = 100.000 - 66.504,54 = 33.495,46 \text{ €}$$

$$\begin{aligned} I &= E(1+i)^n = 33.495,46 (1,085)^5 = 33.495,46 \cdot 1,5036567 = \\ &= 50.365,67 \text{ €} \end{aligned}$$

$$E = I \cdot U^n = 50.365,67 \cdot 0,6650454 = 33.495,45 \text{ €}$$



## Προβλήματα Ανατοκισμού



1. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 200.000 €, το οποίο ανατοκίστηκε με  $4\frac{1}{4}\%$  επί 8 έτη και 10 μήνες.  
(Απ. 288.869)
2. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 100.000 €, το οποίο ανατοκίστηκε επί 12 έτη 7 μήνες και 13 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο 4,5%.  
(Απ. 174.310)
3. Καταθέτει κάποιος σήμερα 1.000.000 € με ανατοκισμό και με ετήσιο πραγματικό επιτόκιο 20%. Να βρεθεί το ποσό που θα σχηματιστεί μετά 10 έτη, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο.  
(Απ. 6.256.860)
4. Ο έμπορος Ε κατέθεσε στην Τράπεζα Τ 250.000 €, με ανατοκισμό και με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2,5%. Έξι (6) έτη μετά την αρχική κατάθεση, το επιτόκιο άλλαξε και έγινε 3% το εξάμηνο. Να βρεθεί το ποσό που θα εμφανίζει ο λογαριασμός του Ε 10 έτη μετά την αλλαγή του επιτοκίου, αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο.  
(Απ. 607.255)
5. Ο υπάλληλος Υ κατέθεσε με ανατοκισμό στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο 200.000 € με εξαμηνιαίο επιτόκιο 4,5% για μια περίοδο 5 ετών. Στο τέλος όμως των 2,5 ετών ο Υ απέσυρε 100.000 €. Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό του Υ στο τέλος των 5 ετών; (ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο).  
(Απ. 185.975)
6. Την 31/03/2002, ο έμπορος Υ πήρε από την Κτηματική Τράπεζα δάνειο 6.000.000 €. Ποιο ποσό πρέπει να επιστρέψει στις 31/03/2008, αν οι τόκοι του δανείου υπολογίστηκαν με ανατοκισμό, με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 16% και ο ανατοκισμός γινόταν κάθε εξάμηνο;  
(Απ. 15.109.020)

7. Ποιο κεφάλαιο, αν ανατοκιστεί με ετήσιο επιτόκιο 6%, θα δώσει μετά 14 έτη και 3 μήνες τελικό κεφάλαιο 300.000; **(Απ. 130.772)**
8. Ένα οικόπεδο μπορεί να αγοραστεί αντί 2.850.000 € «μετρητοίς» ή αντί 3.000.000 € πληρωτέων μετά 12 μήνες με ανατοκισμό και με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 7%, όταν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο. Ποιός είναι ο οικονομικότερος τρόπος αγοράς του οικοπέδου; Αν, τώρα, το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι 4% και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, τι είναι προτιμότερο; Να αγοραστεί το οικόπεδο «μετρητοίς» ή με προθεσμία;  
(Απ. Στην πρώτη περίπτωση συμφέρει να πληρώσει ο αγοραστής μετά 12 μήνες, γιατί κερδίζει 51.123 €. Η παρούσα αξία των 3.000.000 είναι:  
 $3.000.000 (1,0175)^{-4} = 3.000.000 \cdot 0,932959 = 2.798.877$ .  
 Άρα:  $2.850.000 - 2.798.877 = 51.123 = \text{κέρδος}$ .  
 Στη β' περίπτωση συμφέρει να αγοράσει «μετρητοίς» γιατί η παρούσα αξία των 3.000.000 με 1% το τρίμηνο είναι:  
 $3.000.000(1,01)^{-4} = 3.000.000 \cdot 0,960980 = 2.832.940$ .  
 Αν πληρώσει «μετρητοίς», κερδίζει 32.940 (= 2.882.940 – 2.850.000)).
9. Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 10.000 € προεξοφλείται 3 έτη και 8 μήνες προτού λήξει με ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η παρούσα αξία και το προεξόφλημα. **(Απ. 8.076,33 - 1.923,77)**
10. Ο έμπορος Ε κατέχει γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 25.000 €, το οποίο λήγει μετά 5 έτη. Επειδή ο Ε έχει ανάγκη από χρήματα, προεξοφλεί το γραμμάτιο με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 5%. Αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, ποια θα είναι η παρούσα αξία και ποιο το προεξόφλημα; **(Απ. 19.500,20 - 5.499,80)**
11. Δάνεισε κάποιος κεφάλαιο 60.000 € με ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 5,5% για 8 χρόνια. Επί πόσο χρόνο πρέπει να δανείσει το ίδιο κεφάλαιο και με το ίδιο επιτόκιο, με απλό τόκο, για να εισπράξει το ίδιο τελικό κεφάλαιο και στις δύο περιπτώσεις; **(Απ. 3.500 ημ. ή 9 έτη 8 μην. 20 ημ.)**

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

## PANTEΣ

### 8.1. Ορισμοί, κατάταξη και σύμβολα ραντών

Η εξόφληση ενός χρέους με δόσεις, ο σχηματισμός ενός κεφαλαίου με καταθέσεις, οι οποίες γίνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα, οι μηνιαίες κρατήσεις των μισθωτών για τα ασφαλιστικά ταμεία, η εύρεση της αξίας που αντιπροσωπεύει σήμερα ένα πλήθος χρηματικών ποσών, τα οποία θα εισπράττει κάποιος σε ορισμένα χρονικά διαστήματα (π.χ. μια υποτροφία) και πλήθος άλλων προβλημάτων, τα οποία συναντάμε συχνά στις εμπορικές και στις τραπεζικές συναλλαγές, συνιστούν μια ιδιαίτερη κατηγορία προβλημάτων του ανατοκισμού.

Μια σειρά δόσεων για την εξόφληση ενός δανείου ή οι διάφορες περιοδικές καταθέσεις για το σχηματισμό ενός κεφαλαίου, στα Οικονομικά Μαθηματικά, ονομάζονται ειδικότερα **Ράντα\***.

**Ωστε: Ράντα καλείται σειρά (ακολουθία) κεφαλαίων, τα οποία καταβάλλονται ή καταθέτονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.**

Κάθε χρηματικό ποσό που καταβάλλεται ή καταθέτεται στα ίσα χρονικά διαστήματα, λέγεται **όρος ή δόση (Rent)** της ράντας. Η χρονική στιγμή της

---

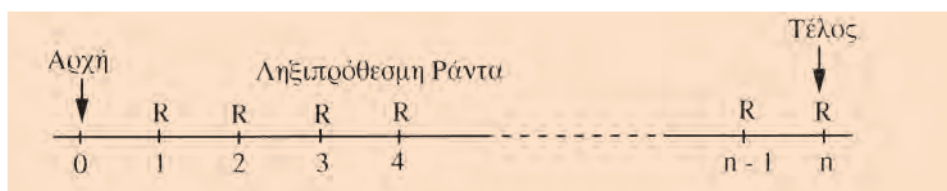
\* Η λέξη Ράντα προέρχεται από τη λατινική λέξη Reddita. Στις λατινογενείς γλώσσες αποδίδεται με τις λέξεις: Rent ή Annuity (Αγγλ.), Rente ή Annuite (Γαλλ.), die Rente ή die Annuitat (Γερμ.) και Rendita ή Annualita (Ιταλ.). Στην ελληνική ορολογία χρησιμοποιήθηκαν οι λέξεις: Παροχή, Πρόσοδος, Χρηματοσειρά, Περιοδική καταβολή, αλλά επικράτησε τελικά ο μονολεκτικός όρος Ράντα.

πληρωμής ή της κατάθεσης της δόσης λέγεται **λήξη** της δόσης. Ο χρόνος που περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών λήξεων, ονομάζεται **περίοδος** της ράντας.

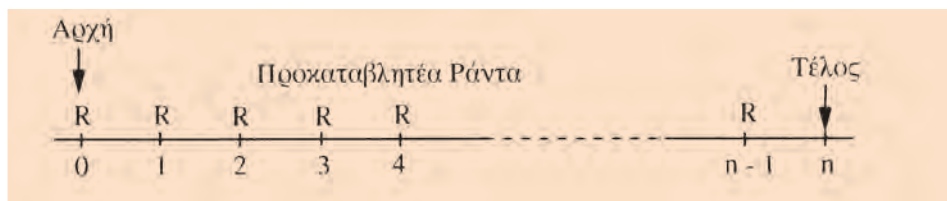
**Ληξιπρόθεσμη Ράντα (Ordinary Annuity)** λέγεται η ράντα, της οποίας ο όρος καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου.

**Προκαταβλητέα Ράντα (Annuity Due)** ονομάζεται η ράντα, της οποίας ο όρος καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω ορισμών, παρατηρήστε τα επόμενα σχήματα:



$R$  = Όρος ή δόση,  $0, 1, 2, \dots, n$  = Περίοδος της ράντας.



**Αρχή** ράντας λέγεται, στις ληξιπρόθεσμες ράντες, μία περίοδος πριν από την καταβολή του πρώτου όρου, ενώ στις προκαταβλητέες ράντες η περίοδος καταβολής του πρώτου όρου της ράντας.

**Τέλος** ράντας είναι, στις ληξιπρόθεσμες ράντες, η περίοδος καταβολής του τελευταίου όρου, ενώ στις προκαταβλητέες ράντες, μία περίοδος μετά την καταβολή του τελευταίου όρου. Η χρονική στιγμή κατά την οποία ζητείται ο υπολογισμός της αξίας των όρων μιας ράντας λέγεται **Εποχή Υπολογισμού (Focal Date)**.

**Παρούσα Αξία (Present Value)** ράντας λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας σε μια ορισμένη χρονική στιγμή. Αν η χρονική στιγμή συμπίπτει με την αρχή της ράντας, τότε η παρούσα αξία ονομάζεται **Αρχική Αξία**.

**Τελική Αξία (Final Value or amount of an annuity)** ράντας λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας στο τέλος της ράντας.



**Βέβαιη Ράντα** λέγεται η ράντα, της οποίας η καταβολή των όρων δεν εξαρτάται από την πραγματοποίηση ή όχι κάποιου γεγονότος.

**Τυχαία Ράντα (Contingent Annuity)** λέγεται η ράντα, της οποίας η καταβολή των όρων της εξαρτάται από την πραγματοποίηση ενός τυχαίου γεγονότος (π.χ. ζωής ή θανάτου ενός προσώπου). Στις τυχαίες ράντες ανήκουν και οι ράντες ζωής, με τις οποίες ασχολούνται τα **Ασφαλιστικά Μαθηματικά**. Στο Κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μόνο της Βέβαιες Ράντες.

**Κατάταξη Ραντών.** Οι Ράντες κατατάσσονται:

**1) Ανάλογα με τον όρο:** α) Σε **σταθερές**, όταν όλοι οι όροι της ράντας είναι ίσοι και β) σε **μεταβλητές**, όταν οι όροι δεν είναι ίσοι. Όταν όλοι οι όροι της ράντας είναι ίσοι με τη μονάδα, τότε η ράντα ονομάζεται **μοναδιαία**.

**2) Ανάλογα με τη διάρκεια:** α) σε **πρόσκαιρες (Annuity Certain)**, όταν το πλήθος των όρων της ράντας είναι ορισμένο, β) σε **διηνεκείς (Perpetuity)**, όταν το πλήθος των όρων της ράντας είναι άπειρο και γ) σε **ράντες ζωής (Life annuity)**, όταν το πλήθος των όρων μιας ράντας εξαρτάται από τη διάρκεια της ζωής ενός ή περισσότερων ατόμων. Στο Κεφάλαιο αυτό θα σπουδάσουμε μόνο τις πρόσκαιρες ράντες.

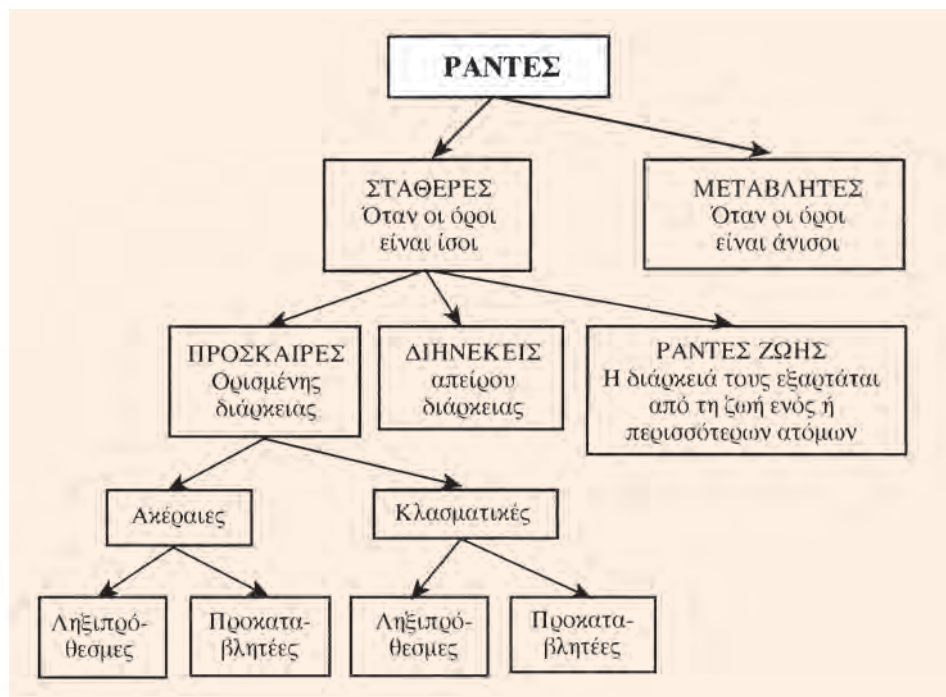


**3) Ανάλογα με την εποχή υπολογισμού:** α) σε **άμεσες (Immediate)**, όταν η εποχή υπολογισμού της ράντας συμπίπτει με την αρχή της ράντας, β) σε **μέλλουσες (Deffered)**, όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται πριν από την αρχή της ράντας και γ) σε **αρξάμενες (Anticipated)**, όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται μετά την αρχή της ράντας.

**4) Ανάλογα με την περίοδο:** α) σε **ακέραιες** και β) σε **κλασματικές**. Όταν η περίοδος της ράντας είναι το έτος, το εξάμηνο, κτλ., ο όρος της ράντας είναι ετήσιος, εξαμηνιαίος, κτλ. και το επιτόκιο είναι ετήσιο, εξαμηνιαίο, κτλ. τότε η ράντα λέγεται **ακέραια**. Αν όμως ο όρος της ακέραιας ράντας διαιρείται σε  $p$  ίσα τμήματα και κάθε ένα από αυτά καταβάλλεται  $p$  φορές εντός της ακέραιας περιόδου ανά  $1/p$  αυτής, τότε η ράντα ονομάζεται **κλασματική**.

Για την καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των παραπάνω ορισμών, παραθέτουμε το επόμενο διάγραμμα:

Διάγραμμα 8.1



**Σύμβολα Ραντών.** Κατά τη λύση των διαφόρων προβλημάτων των ραντών, θα χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα διεθνή σύμβολα:

$R$  = Όρος (δόση) μιας σταθερής ράντας.

$a_{\overline{n}|i}$  = Παρούσα (αρχική) αξία ράντας σταθερής, άμεσης, **ληξιπρόθεσμης**,  $n$  όρων αξίας 1 νομ. μονάδας με επιτόκιο  $i$ .

$a_{\overline{n}|i}$  = Παρούσα αξία **προκαταβλητέας** ράντας σταθερής, άμεσης, κτλ.

$S_{\overline{n}|i}$  = Τελική αξία **ληξιπρόθεσμης** ράντας,  $n$  όρων 1 νομισμ. μονάδας, με επιτόκιο  $i$ .

$\varsigma_{\overline{n}|i}$  = Τελική αξία **προκαταβλητέας** ράντας,  $n$  όρων 1 νομισματικής μονάδας, με επιτόκιο  $i$ .

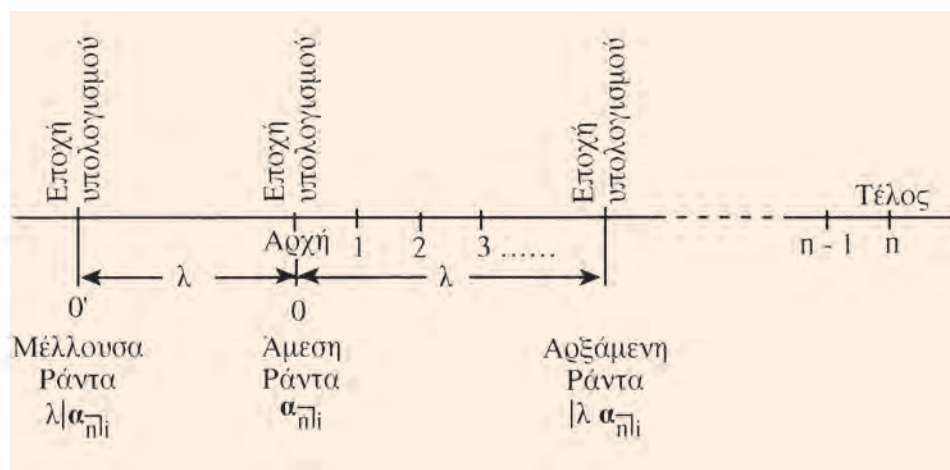
$\lambda|\alpha_{\overline{n}|i}$  = Παρούσα αξία μέλλουσας ληξιπρόθεσμης ράντας.

$|\lambda\alpha_{\overline{n}|i}$  = Παρούσα αξία αρξάμενης ληξιπρόθεσμης ράντας.

$\lambda|\mathbf{a}_{\overline{n}|i}$  και  $|\lambda\mathbf{a}_{\overline{n}|i}$  = Παρούσα αξία μέλλουσας και αρξάμενης προκαταβλητέας ράντας.

$\mathbf{V}$  = αξία ράντας,  $n$  όρων σε ορισμένη χρονική στιγμή.

Διάγραμμα 8.2



Στο Κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με τις ράντες εκείνες οι οποίες εφαρμόζονται ευρύτατα στις εμπορικές και τραπεζικές συναλλαγές, δηλαδή με ράντες: Βέβαιες, σταθερές, πρόσκαιρες, ακέραιες.

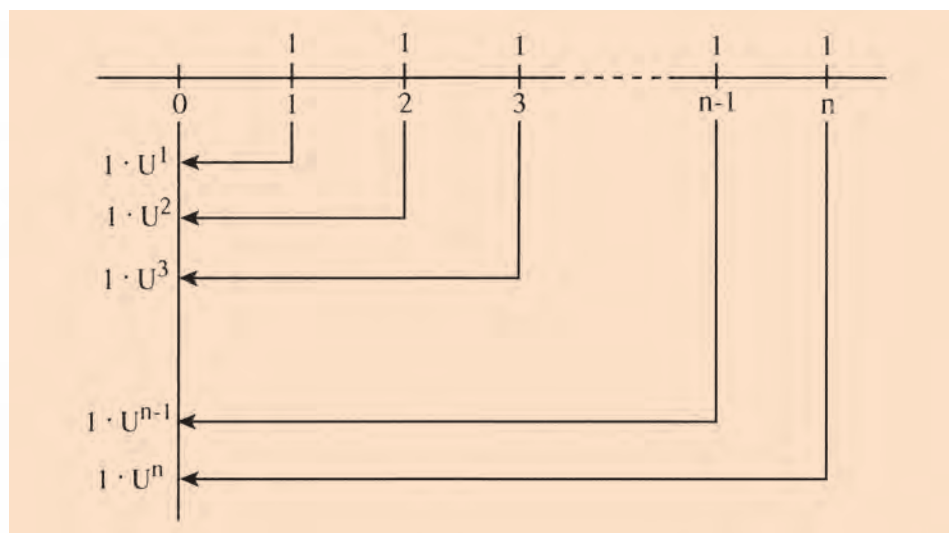
## ΠΡΟΣΚΑΙΡΕΣ ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΡΑΝΤΕΣ

### 8.2. Εύρεση της αρχικής (παρούσας) αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας

#### 8.2.1. Άμεση Ράντα

Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα, διάρκειας  $n$  ετών (ή εξαμήνων, κτλ.), όρου 1 νομισματικής μονάδας, με επιτόκιο  $i$  και θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική (παρούσα) αξία των όρων της ράντας, δηλαδή να βρούμε την αξία της ράντας στην αρχή της. Για την καλύτερη κατανόηση κατασκευάζουμε το Διάγραμμα 8.3.

Διάγραμμα 8.3



Η παρούσα (αρχική) αξία κάθε όρου της ράντας θα βρεθεί με βάση το γνωστό τύπο:

$$K_0 = K_n \cdot U^n \quad \text{όπου} \quad K_n = 1.$$

Κατά συνέπεια θα έχουμε:

|                                        |                     |
|----------------------------------------|---------------------|
| H 1η νομισμ. μονάδα έχει παρούσα αξία: | $1 \cdot U^1 = U^1$ |
| H 2η " " " " "                         | $1 \cdot U^2 = U^2$ |
| H 3η " " " " "                         | $1 \cdot U^3 = U^3$ |

.....

H n νομισμ. μονάδα έχει παρούσα αξία:  $1 \cdot U^n = U^n$

Η ζητούμενη αρχική (παρούσα) αξία -η οποία συμβολίζεται με το  $\alpha_{n|i}$ - ισούται με το άθροισμα των επιμέρους παρουσών αξιών των όρων της ράντας, δηλαδή:

$$\alpha_{n|i} = U^1 + U^2 + U^3 + \dots + U^{n-1} + U^n \quad (8.1)$$



Το β' μέλος της σχέσεως (8.1) είναι το άθροισμα των n όρων γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο το U, με λόγο το U και τελευταίο όρο το  $U^n$ . Αν στον τύπο\*:

$$\Sigma = \frac{\tau \cdot \omega - \alpha}{\omega - 1}, \quad \omega \neq 1 \quad (8.2)$$

θέσουμε όπου:  $\alpha = U$ ,  $\omega = U$  και  $\tau = U^n$ , τότε θα έχουμε:

$$\alpha_{n|i} = \frac{U^n \cdot U - U}{U - 1} = \frac{U(U^n - 1)}{U - 1} = \frac{U^n - 1}{1 - \frac{1}{U}} = \frac{1 - U^n}{\frac{1}{U} - 1}$$

Γνωρίζουμε ότι:  $U = \frac{1}{1+i}$ , οπότε  $\frac{1}{U} = 1+i$ . Αν τώρα αντικαταστήσουμε στον παρονομαστή της τελευταίας σχέσης το  $1/U$  με το  $1+i$ , τότε προκύπτει η επόμενη θεμελιώδης σχέση:

$$\alpha_{n|i} = \frac{1 - U^n}{i} \quad (8.3)$$



Ο συντελεστής  $\alpha_{n|i}$  είναι η αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας. Το συντελεστή αυτό το βρίσκουμε στον Πίνακα IV, ο οποίος είναι στο τέλος του βιβλίου. Μπορούμε

\* Με τον τύπο (8.2) βρίσκουμε το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο  $\omega \neq 1$ .

όμως να πάρουμε το  $U^n$  από τον Πίνακα III και να το αντικαταστήσουμε στον αριθμητή του τύπου (8.3). Αν π.χ. θέλουμε να βρούμε την τιμή του  $\alpha_{\overline{20}|0,12} = \frac{1 - U^{20}}{0,12}$ , ως εξής: Από τον Πίνακα III με  $i = 0,12$  και  $n = 20$  παίρνουμε  $U^{20} = 0,10366677$ . Αντικαθιστώντας τώρα το  $U^{20}$  στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε:

$$\alpha_{\overline{20}|0,12} = \frac{1 - 0,10366677}{0,12} = 7,469444$$

**Παρατήρηση:** Η παρούσα αξία, για την ίδια τιμή του  $n$ , είναι **φθίνουσα** συνάρτηση του επιτοκίου  $i$ , γιατί, όταν αυξάνεται το  $i$ , ελαττώνεται ο συντελεστής προεξοφλήσεως  $U$  καθώς και οι δυνάμεις αυτού με εκθέτες θετικούς και ακεραίους, άρα και το άθροισμα (8.1). Αντιθέτως, για την ίδια τιμή του επιτοκίου  $i$ , η παρούσα αξία είναι αύξουσα συνάρτηση του  $n$ , γιατί, όταν αυξάνει το  $n$ , αυξάνει το πλήθος των όρων του αθροίσματος, άρα αυξάνει και το  $\alpha_{\overline{n}|i}$ .

Αν ο όρος μιας ράντας είναι  $R$  νομισματικές μονάδες, τότε το  $\alpha_{\overline{n}|i}$  πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί  $R$ . Επομένως, η αρχική αξία όλων των όρων μιας ληξιπρόθεσμης ράντας θα υπολογιστεί βάσει του τύπου:



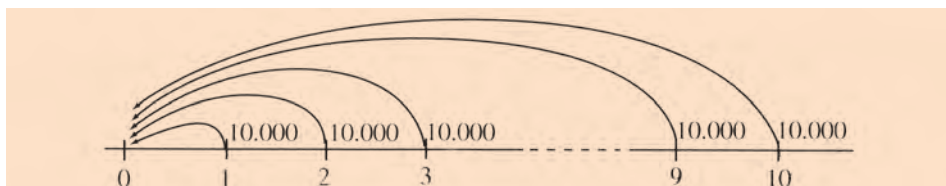
$$V_{\text{αρχ.}} = R \alpha_{\overline{n}|i}$$

(8.4)

**Παράδειγμα 1ο.** Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα σε μια τράπεζα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 7%, για να έχουμε το δικαίωμα να αποσύρουμε 10.000 € στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη.

**Λύση.**  $R = 10.000$ ,  $i = 0,07$ ,  $n = 10$ .

**Διάγραμμα 8.4**



Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (8.4) και έχουμε:

$$V_{αρχ.} = R\alpha_{\overline{n}|i} = 10.000\alpha_{\overline{10}|0,07} \quad (\alpha)$$

Από τον Πίνακα IV με  $i = 0,07$  και  $n = 10$  παίρνουμε:

$$\alpha_{\overline{10}|0,07} = 7,023581$$

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (α) βρίσκουμε:

$$V_{αρχ.} = 10.000 \cdot 7,023581 = 70.235,81 \text{ €}$$

Άρα, πρέπει να καταθέσουμε σήμερα 70.235,81 €.

**Παράδειγμα 2ο.** Ένα ίδρυμα θέλει να χορηγεί κάθε χρόνο μία υποτροφία 100.000 € και επί 10 χρόνια. Η πρώτη υποτροφία θα χορηγηθεί μετά ένα χρόνο. Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα σε μια Τράπεζα, με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 4%, για να μπορεί να δίνει τις 100.000 € στο τέλος κάθε χρόνου;

**Λύση.** Το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα αντιστοιχεί με την αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων, της οποίας ο κάθε όρος αποτελείται από 100.000 €. Δηλαδή:

$$R = 100.000, \quad n = 10, \quad i = 0,04$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (8.4) και βρίσκουμε:

$$V_{αρχ.} = 10.000\alpha_{\overline{10}|0,04} = 100.000 \cdot 8,11089578 = 811.089,58$$

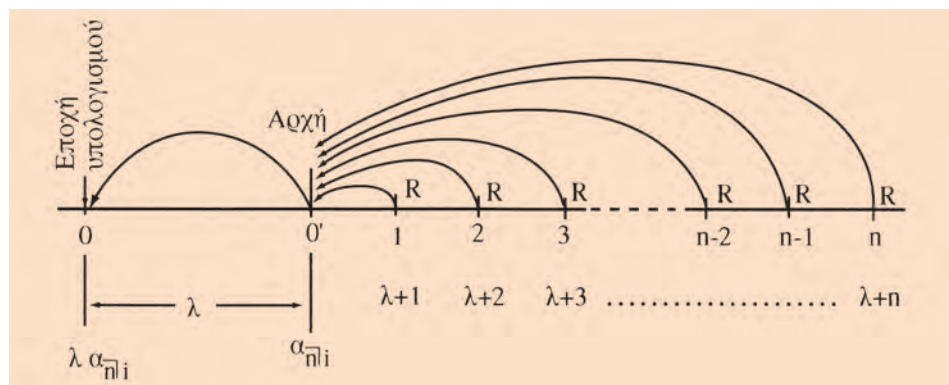
Ωστε: Το ίδρυμα πρέπει να καταθέσει σήμερα 811.089,58 €, για να μπορεί να αποσύρει κάθε χρόνο 100.000 € για την υποτροφία.

### 8.2.2. Μέλλουσα Ράντα

Είπαμε ότι, αν η εποχή υπολογισμού της αξίας των όρων μιας ράντας βρίσκεται λ περιόδους πριν από την αρχή της ράντας, τότε η ράντα ονομάζεται Μέλλουσα, δηλαδή η ράντα πρόκειται να αρχίσει λ περιόδους μετά

την εποχή υπολογισμού. Για την καλύτερη κατανόηση μιας μέλλουσας ράντας παραθέτουμε το Διάγραμμα 8.5.

Διάγραμμα 8.5



Από το Διάγραμμα 8.5 συνάγεται ότι για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης μέλλουσας ράντας, θα πρέπει να προεξοφλήσουμε  $\lambda$  περιόδους την αντίστοιχη άμεση ληξιπρόθεσμη ράντα.

Κατά συνέπεια, η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης μέλλουσας ράντας θα βρίσκεται με τον ακόλουθο τύπο:



$$V_{\pi.α.} = R \cdot \lambda \mid \alpha_{n|i} = R \alpha_{n|i} U^{\lambda} \quad (8.5)$$

Αν παρατηρήσουμε με προσοχή το Διάγραμμα 8.5, θα διαπιστώσουμε ότι στην περίπτωση της μέλλουσας ληξιπρόθεσμης ράντας, ο 1ος όρος θα καταβληθεί μετά  $(\lambda + 1)$  περιόδους, ο 2ος όρος θα καταβληθεί μετά  $(\lambda + 2)$  περιόδους κ.ο.κ. και ο  $n$ -ιστός όρος θα καταβληθεί μετά  $(\lambda + n)$  περιόδους.

**Παρατήρηση:** Το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε και στην περίπτωση κατά την οποία η παραπάνω ράντα θεωρηθεί ως διαφορά μεταξύ μιας άμεσης ράντας  $(\lambda + n)$  όρων και μιας άμεσης ράντας  $\lambda$  όρων. Δηλαδή:



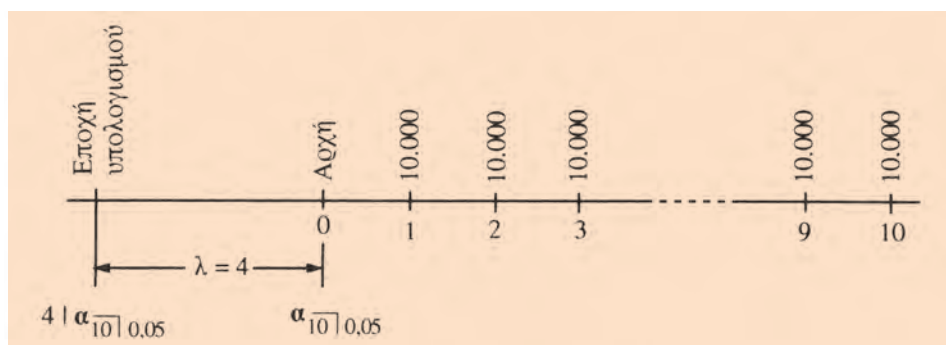
$$V_{\pi.α.} = R \cdot \lambda \mid \alpha_{n|i} = R \alpha_{\lambda+n|i} - R \alpha_{\lambda|i} \quad (8.6)$$

**Παράδειγμα.** Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσουμε σήμερα σε μια Τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 5%, για να έχουμε το δικαίωμα να αποσύρουμε (στο

τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη) 10.000 €, αρχής γενομένης μετά 5 έτη -από σήμερα.

**Λύση.** Το ποσό που πρέπει να καταθέσουμε σήμερα αποτελεί την παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων, των 10.000 €, μέλλουσα να αρχίσει μετά 4 έτη. Εφόσον η πρώτη ανάληψη θα αρχίσει μετά 5 έτη και η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη, έπεται ότι  $\lambda = 4$ . Για καλύτερη κατανόηση, παρατηρήστε το Διάγραμμα 8.6.

Διάγραμμα 8.6



Έχουμε:  $R = 10.000$ ,  $n = 10$ ,  $i = 0,05$ ,  $\lambda = 4$

Αντικαθιστούμε στον τύπο (8.5) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} V_{\pi.α.} &= 10.000 \alpha_{\overline{10}|0,05} U_{0,05}^4 = 10.000 \cdot 7,72173 \cdot 0,8227 = \\ &= 63.526,67 \text{ €} \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε, αν εφαρμόσουμε τον τύπο (8.6). Θα έχουμε:

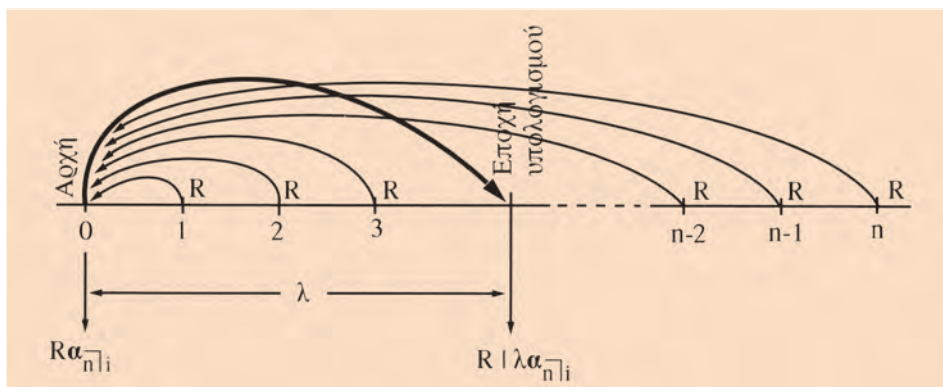
$$\begin{aligned} V_{\pi.α.} &= R \cdot \lambda | \alpha_{\overline{n}|i} = R \alpha_{\overline{\lambda+n}|i} - R \alpha_{\overline{\lambda}|i} = \\ &= 10.000 \alpha_{\overline{14}|0,05} - 10.000 \alpha_{\overline{4}|0,05} = \\ &= 10.000 \cdot 9,89864 - 10.000 \cdot 3,54595 = 63.526,90. \end{aligned}$$

### 8.2.3. Αρξάμενη Ράντα



Όταν η εποχή υπολογισμού της αξίας των όρων μιας ράντας βρίσκεται λ περιόδους μετά την αρχή της ράντας, τότε η ράντα ονομάζεται **αρξάμενη**. Δηλαδή ζητάμε την αξία της ράντας λ περιόδου μετά την αρχή της, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 8.7.

Διάγραμμα 8.7



Από το Διάγραμμα 8.7 συνάγεται ότι, για να βρούμε την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης αρξάμενης ράντας, αρκεί να υπολογίσουμε πρώτα την αρχική αξία της ράντας και κατόπιν να την ανατοκίσουμε για λ περιόδους. Κατά συνέπεια, η παρούσα αξία μιας αρξάμενης ληξιπρόθεσμης ράντας θα βρεθεί με τον τύπο:

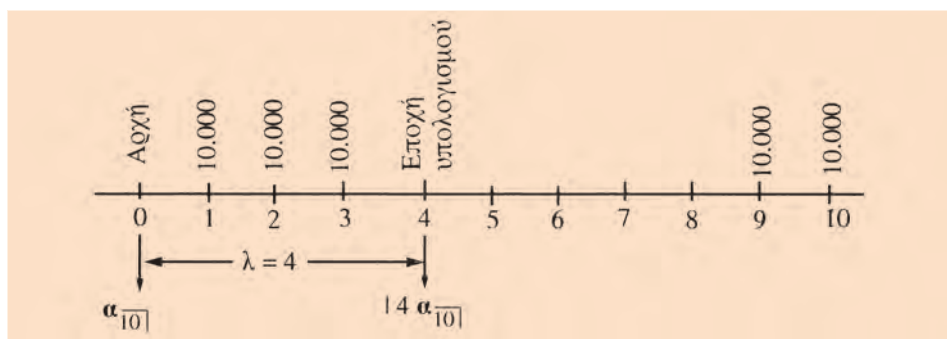


$$V_{\text{π.α.}} = R | \lambda a_{n-λ|i} = R | a_{n|i} (1+i)^λ \quad (8.7)$$

**Παράδειγμα:** Να βρεθεί η παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, διάρκειας 10 ετών, ετήσιου όρου 10.000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο 5%, της οποίας ο πρώτος όρος κατατέθηκε πριν από τρία χρόνια.

**Λύση.** Εφόσον ο πρώτος όρος κατατέθηκε πριν από τρία χρόνια και η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη, έπεται ότι  $\lambda = 4$ , γιατί κατά το τέταρτο έτος συμπληρώθηκαν τρία χρόνια από την κατάθεση του πρώτου όρου. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο Διάγραμμα 8.8.

Διάγραμμα 8.8



$$R = 10.000, n = 10, i = 0,05, \lambda = 4.$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (8.7), και βρίσκουμε:

$$V_{\pi.α.} = 10.000 a_{\overline{14}|0,05} (1,05)^4 = 10.000 \cdot 7,72173 \cdot 1,21551 = 93.858,40$$

### 8.3. Εύρεση της αρχικής (παρούσας) αξίας προκαταβλητέας ράντας

**Άμεση Ράντα.** Είπαμε ότι **Προκαταβλητέα** ονομάζεται η ράντα της οποίας ο όρος καταβάλλεται στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου.

Έστω ότι έχουμε μια **προκαταβλητέα** ράντα  $n$  όρων, 1 νομισματικής μονάδας και θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική αξία της. Θα εργαστούμε όπως ακριβώς εργαστήκαμε και στην περίπτωση της ληξιπρόθεσμης ράντας. Για την καλύτερη κατανόηση παραθέτουμε το Διάγραμμα 8.9.

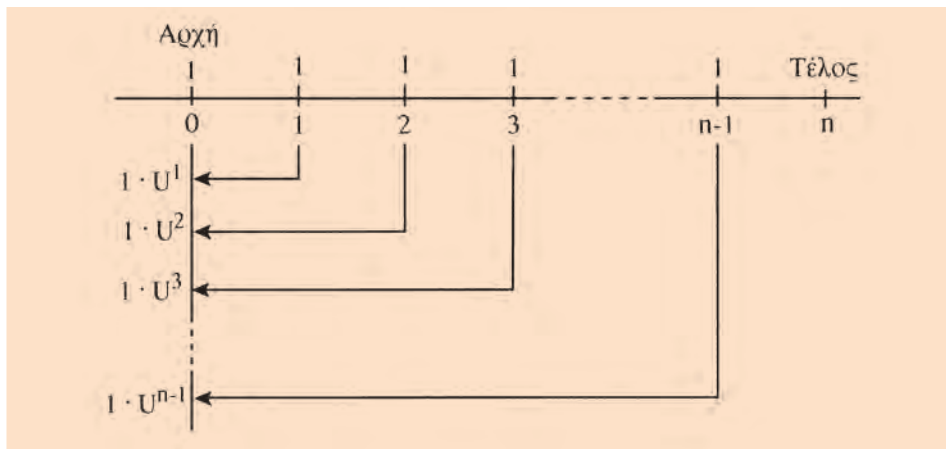
Η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας συμβολίζεται με το  $a_{\overline{n}|i}$ . Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 8.9, η παρούσα αξία του πρώτου όρου είναι 1, του δεύτερου όρου είναι  $1 \cdot U^1$ , του τρίτου  $1 \cdot U^2$  κ.ο.κ. και του τελευταίου όρου  $1 \cdot U^{n-1}$ . Δηλαδή, για να βρούμε την παρούσα αξία κάθε όρου προεξοφλούμε. Ο πρώτος όρος δεν προεξοφλείται, γιατί η παρούσα αξία του κατά τη χρονική στιγμή 0 ισούται με τον εαυτό του. Επομένως, η παρούσα (αρχική) αξία όλων των όρων μιας προκαταβλητέας ράντας ισούται με το άθροισμα των επιμέρους παρούσων αξιών των όρων της ράντας. Δηλαδή:



$$a_{n|i} = 1 + U^1 + U^2 + U^3 + \dots + U^{n-1}$$

(8.8)

Διάγραμμα 8.9



Το β' μέλος της σχέσης (8.8) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο  $a = 1$ , λόγο  $\omega = U$  και τελευταίο όρο  $\tau = U^{n-1}$ . Συνεπώς, σύμφωνα με το γνωστό τύπο:

$$\Sigma = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1} \quad \text{θα έχουμε:}$$

$$a_{n|i} = \frac{U^{n-1}U^1 - 1}{U - 1} = \frac{U^{n-1+1} - 1}{U - 1} = \frac{U^n - 1}{U - 1} = \frac{(-1)(U^n - 1)}{(-1)(U - 1)} =$$

$$= \frac{1 - U^n}{1 - U} = \frac{1 - U^n}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1 - U^n}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \frac{1 - U^n}{\frac{i}{1+i}} (1+i) =$$

$$= a_{n|i} (1+i), \quad \text{γιατί} \quad \frac{1 - U^n}{i} = a_{n|i}$$

Ώστε:



$$a_{n|i} = a_{n|i} (1+i)$$

(8.9)

Η σχέση (8.9) παρέχει την αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας  $n$  όρων 1 νομισματικής μονάδας. Αν όμως ο όρος της ράντας είναι  $R$  νο-

μισματικές μονάδες, τότε η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας θα υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$V_{αρχ.} = R a_{\overline{n}|i} = R \alpha_{\overline{n}|i} (1+i) \quad (8.10)$$

**Παρατήρηση 1η.** Από τη σχέση (8.10) συνάγεται ότι, για να βρούμε την αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, αρκεί να ανατοκίσουμε την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη για μία ακόμη χρονική περίοδο.

**Παρατήρηση 2η.** Αποδεικνύεται ότι η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας  $n$  όρων ισούται με την αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας  $(n-1)$  όρων\*, αυξημένης κατά τον όρο  $R$ . Επομένως, η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας μπορεί να υπολογιστεί με τον ακόλουθο τύπο:

$$V_{αρχ.} = R a_{\overline{n}|i} = R \alpha_{\overline{n-1}|i} + R \quad (8.11)$$

**Παρατήρηση 3η.** Αν η ράντα είναι **Μέλλουσα** να αρχίσει μετά  $\lambda$  περιόδους, τότε η παρούσα αξία της θα είναι:

$$V_{\pi.α.} = R \lambda | a_{\overline{n}|i} = R a_{\overline{n}|i} U^{\lambda} = R \alpha_{\overline{n}|i} (1+i) U^{\lambda} \quad (8.12)$$

**Παρατήρηση 4η.** Αν, τέλος, η ράντα είναι **αρξάμενη**, δηλαδή έχει αρχίσει πριν από  $\lambda$  περιόδους, τότε η παρούσα αξία της θα είναι:

$$V_{\pi.α.} = R | \lambda a_{\overline{n}|i} = R a_{\overline{n}|i} (1+i)^{\lambda} = R \alpha_{\overline{n}|i} (1+i)(1+i)^{\lambda} \quad (8.13)$$

\* Είδαμε πιο πάνω ότι:  $a_{\overline{n}|i} = \frac{U^{n-1}U-1}{U-1}$ .

Αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με το  $U$ , τότε θα έχουμε:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{U^{n-1} - \frac{1}{U}}{1 - \frac{1}{U}}. \text{ Αλλά } \frac{1}{U} = \frac{1}{1+i}.$$

Αντικαθιστούμε τώρα το  $\frac{1}{U}$  με το  $\frac{1}{1+i}$  και έχουμε:

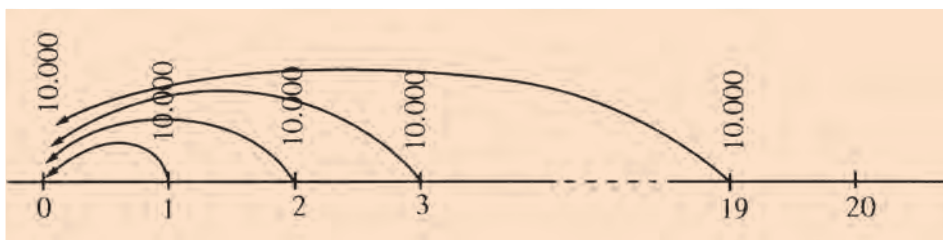
$$a_{\overline{n}|i} = \frac{U^{n-1} - 1 - i}{1 - 1 - i} = \frac{(-1)(U^{n-1} - 1 - i)}{(-1)(-i)} = \frac{1 - U^{n-1}}{i} + \frac{i}{i} = \alpha_{\overline{n-1}|i} + 1 \quad \text{και} \quad R \cdot a_{\overline{n}|i} = R \cdot \alpha_{\overline{n-1}|i} + R.$$

**Παράδειγμα:** Να βρεθεί η αρχική (παρούσα) αξία προκαταβλητέας ράντας, ετήσιου όρου 10.000 € διάρκειας 20 ετών, με ετήσιο επιτόκιο 6% αν αυτή: α) είναι άμεση, β) πρόκειται να αρχίσει μετά 4 έτη και γ) έχει αρχίσει πριν από 4 χρόνια.

**Λύση.**  $R = 10.000$ ,  $n = 20$ ,  $i = 0,06$ ,  $V_{\text{αρχ.}} = ;$

α) Άμεση.

Διάγραμμα 8.10

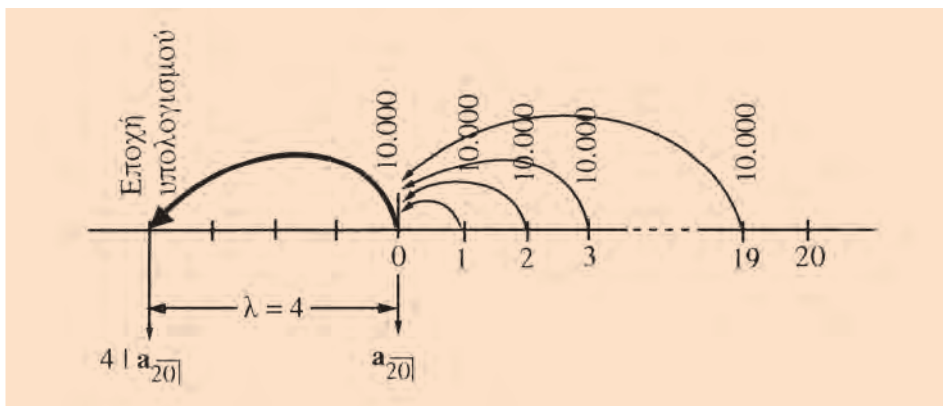


Αντικαθιστούμε στον τύπο (8.10) και βρίσκουμε:

$$V_{\text{αρχ.}} = R a_{\overline{n}|i} (1+i) = 10.000 a_{\overline{20}|0,06} (1,06) = 10.000 \cdot 11,46992 \cdot 1,06 = 121.581,15$$

β) Μέλλουσα να αρχίσει μετά 4 έτη.

Διάγραμμα 8.11

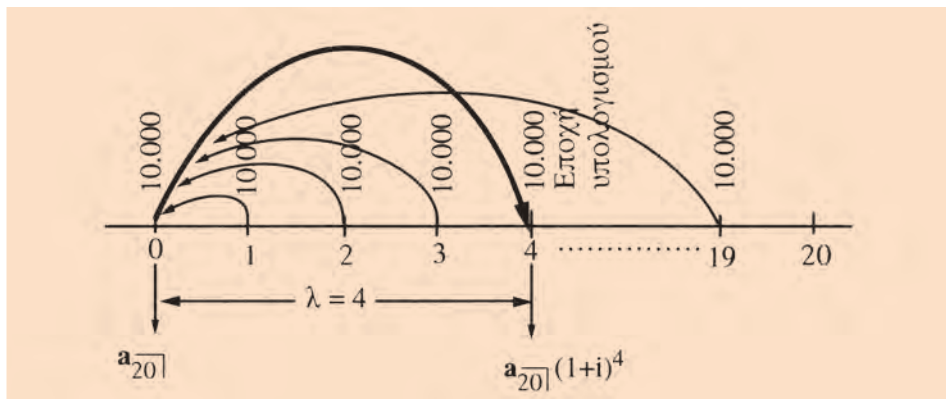


Όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα 8.11, βρίσκουμε καταρχήν την αρχική αξία της προκαταβλητέας ράντας και ύστερα την προεξοφλούμε για 4 έτη. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} V_{αρχ.} &= R \lambda |a_{\overline{n}|i} = R a_{\overline{n}|i} U^\lambda = R a_{\overline{n}|i} (1+i)^\lambda = \\ &= 10.000 a_{\overline{20}|0,06} (1,06) U^4 = 10.000 \cdot 11,46992 \cdot 1,06 \cdot \frac{1}{(1,06)^4} = \\ &= 114.699,20 \cdot 0,83961 = 96.302,59 \end{aligned}$$

γ) Αρξάμενη πριν από 4 χρόνια.

Διάγραμμα 8.12



Επειδή η ράντα έχει αρχίσει πριν από 4 χρόνια, θα πρέπει να ανατοκίσουμε την αντίστοιχη άμεση ράντα για τέσσερα χρόνια. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} V_{\pi.α.} &= R a_{\overline{n}|i} (1+i)^\lambda = R a_{\overline{n}|i} (1+i)(1+i)^\lambda = \\ &= 10.000 a_{\overline{20}|0,06} (1,06)(1,06)^4 = 10.000 \cdot 11,46992 \cdot 1,33823 = \\ &= 153.493,91. \end{aligned}$$

#### 8.4. Εύρεση της τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας

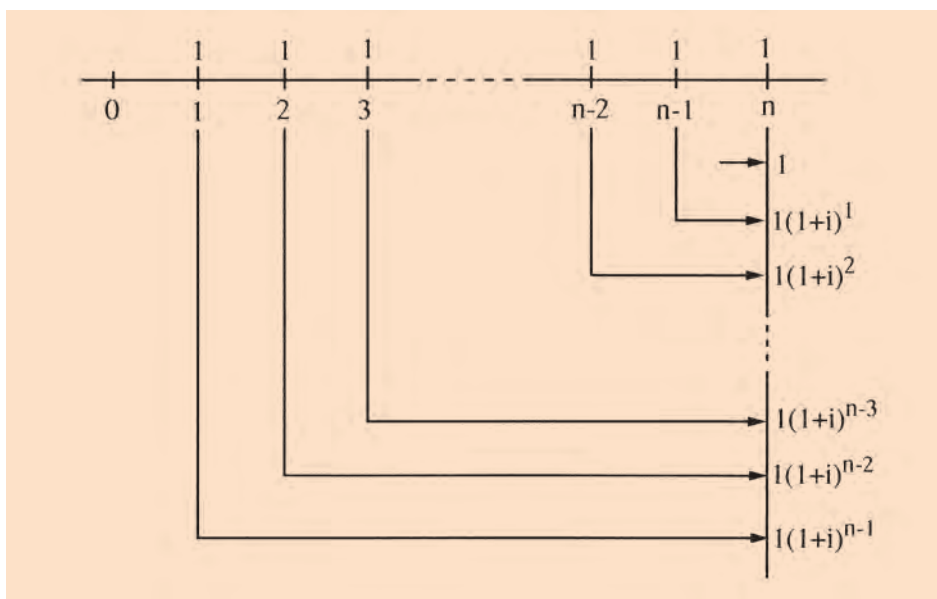
Είπαμε ότι **τελική αξία ράντας** λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας στο τέλος της ράντας.

Έστω ότι έχουμε μια **ληξιπρόθεσμη** ράντα  $n$  όρων, 1 νομισματικής μονάδας και θέλουμε να βρούμε την αξία όλων των όρων της ράντας στο τέλος της ράντας.

Για να υπολογίσουμε την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, αρκεί να υπολογίσουμε την τελική αξία κάθε όρου της ράντας και κατόπιν να αθροίσουμε τις επιμέρους τελικές αξίες.

Η εύρεση της τελικής αξίας κάθε όρου μιας ράντας γίνεται με τον τύπο του ανατοκισμού:  $K_n = K_0(1+i)^n$ , όπου  $K_0 = 1$ , κατά το ακόλουθο Διάγραμμα 8.13:

Διάγραμμα 8.13



Όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 8.13, ο 1ος όρος της ράντας ανατοκίζεται επί  $(n-1)$  χρονικές περιόδους και αποκτά τελική αξία  $1(1+i)^{n-1}$ , ο 2ος όρος αποκτά τελική αξία  $1(1+i)^{n-2}$  κ.ο.κ., ο  $(n-1)$  όρος ανατοκίζεται

για μία χρονική περίοδο και αποκτά τελική αξία  $1(1+i)^1$ . Ο  $n$ -ιστός όρος ισούται με τον εαυτό του, επειδή δεν ανατοκίζεται.

Επομένως, η τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας, η οποία συμβολίζεται με το  $S_{n|i}$ , ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τελικών αξιών των όρων της ράντας. Δηλαδή:

$$S_{n|i} = 1(1+i)^{n-1} + 1(1+i)^{n-2} + \dots + 1(1+i)^1 + 1 \quad (8.14)$$

Αν τώρα αντιμετωπίσουμε τους όρους του β' μέλους της σχέσης (8.14) θα έχουμε:

$$S_{n|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1} \quad (8.15)$$

Το β' μέλος της σχέσης (8.15) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο  $a = 1$ , λόγο  $\omega = (1+i)$  και τελευταίο όρο  $\tau = (1+i)^{n-1}$ . Επομένως, σύμφωνα με το γνωστό τύπο

$$\Sigma = \frac{\tau\omega - a}{\omega - 1}, \text{ θα έχουμε:}$$

$$S_{n|i} = \Sigma = \frac{(1+i)^{n-1}(1+i)^1 - 1}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^{n-1+1} - 1}{1+i - 1}$$

και

$$S_{n|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$



(8.16)

Το  $S_{n|i}$  παρέχει την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  όρων 1 νομισματικής μονάδας και το βρίσκουμε στον Πίνακα V με ορισμένα  $i$  και  $n$  (βλέπε στο τέλος του βιβλίου). Για επιτόκια από 9% έως και 20%, που δεν περιέχονται στον Πίνακα V, το  $S_{n|i}$  βρίσκεται ως εξής: Αν, π.χ., θέλουμε να βρούμε την τιμή

$$S_{20|0,12} = \frac{(1,12)^{20} - 1}{0,12} \quad (\alpha)$$

εργαζόμαστε ως εξής: Από τον Πίνακα I με  $i = 0,12$  και  $n = 20$  παίρνουμε  $(1,12)^{20} = 9,6462926$ . Αντικαθιστούμε το  $(1,12)^{20}$  με το ίσο του στη σχέση (α) και βρίσκουμε:

$$S_{20|0,12} = \frac{9,6462926 - 1}{0,12} = 72,052438$$

Αν τώρα ο όρος μιας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι  $R$  νομισματικές μονάδες, τότε η τελική αξία θα υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:



$$V_{\text{τελ.}} = R \cdot S_{\overline{n}|i} \quad (8.17)$$



**Παρατήρηση:** Η τελική αξία ράντας μπορεί να βρεθεί και από την αρχική αξία, την οποία ανατοκίζουμε για  $n$  έτη, δηλαδή:

$$S_{\overline{n}|i} = \alpha_{\overline{n}|i} (1+i)^n \quad (8.18)$$

Από τη σχέση (8.18) προκύπτει η σχέση (8.17). Πράγματι:

$$\begin{aligned} S_{\overline{n}|i} &= \alpha_{\overline{n}|i} (1+i)^n = \frac{1-U^n}{i} (1+i)^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} (1+i)^n = \\ &= \frac{(1+i)^n - (1+i)^{-n} (1+i)^n}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S_{\overline{n}|i} \end{aligned}$$

γιατί  $(1+i)^{-n} (1+i)^n = 1.$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε την αρχική αξία ράντας σε συνάρτηση με την τελική αξία της, την οποία προεξοφλούμε για  $n$  έτη. Δηλαδή:



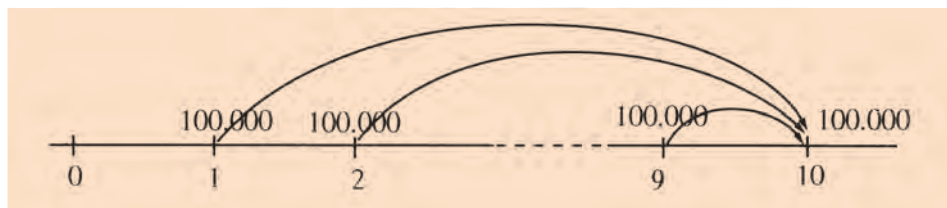
$$\alpha_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n}|i} U^n \quad (8.19)$$

**Παράδειγμα 1ο.** Ο εισοδηματίας  $E$  καταθέτει στην Τράπεζα  $T$  στο τέλος κάθε χρόνου 100.000 € με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 6%. Αυτό γίνεται επί 10 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο λογαριασμό του  $E$  στο τέλος των 10 χρόνων.

**Λύση.** Το ποσό που θα συσσωρευτεί στο λογαριασμό του  $E$  στο τέλος των 10 ετών ισοδυναμεί με την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας με τα εξής στοιχεία:  $R = 100.000$ ,  $n = 10$ ,  $i = 0,06$ .

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (8.17) και βρίσκουμε:

$$V_{\text{τελ.}} = R \cdot S_{\overline{n}|i} = 100.000 S_{\overline{10}|0,06} = 100.000 \cdot 13.18079 = 1.318.079$$



Ωστε: Στο τέλος του 10ου έτους ο λογαριασμός του Ε θα εμφανίζει 1.318.079 €.

**Παράδειγμα 2ο.** Καταθέτει κάποιος στην Τράπεζα Τ στο τέλος κάθε εξαμήνου 30.000 € με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο  $3^{1/20}\%$ . Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στην Τράπεζα στο τέλος του 10ου έτους.

**Λύση.**  $R = 30.000$ ,  $i = 0,035$ ,  $n = 10 \cdot 2 = 20$  εξάμηνα.

Εργαζόμαστε όπως ακριβώς και στο προηγούμενο παράδειγμα. Μετατρέπουμε τη διάρκεια της ράντας σε εξάμηνα, επειδή ο ανατοκισμός, ο όρος της ράντας και το επιτόκιο αντιστοιχούν σε εξάμηνο. Επομένως, θα έχουμε:

$$V_{\text{τελ.}} = R \cdot S_{\overline{n}|i} = 30.000 S_{\overline{20}|0,035} = 30.000 \cdot 28,27968 = 848.390,40.$$

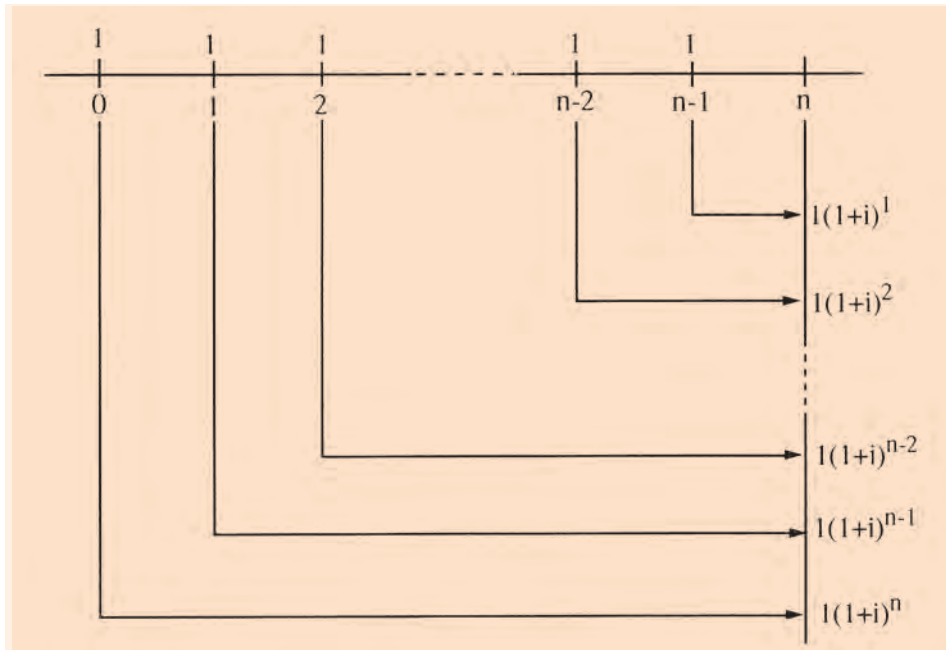
## 8.5. Εύρεση της τελικής αξίας προκαταβλητέας ράντας

Έστω ότι έχουμε μια προκαταβλητέα ράντα  $n$  όρων 1 νομισματικής μονάδας και θέλουμε να βρούμε την αξία των όρων της ράντας στο τέλος της ράντας.

Για να υπολογίσουμε την τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, αρκεί να υπολογίσουμε την τελική αξία κάθε όρου της ράντας και κατόπιν να αθροίσουμε τις επιμέρους τελικές αξίες, σύμφωνα με το Διάγραμμα 8.14.

Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 8.14, ο πρώτος όρος ανατοκίζεται επί  $n$  χρονικές περιόδους και αποκτά τελική αξία  $1(1+i)^n$ , ο δεύτερος όρος ανατοκίζεται επί  $(n-1)$  περιόδους και αποκτά τελική αξία  $1(1+i)^{n-1}$  κ.ο.κ., και ο τελευταίος όρος ανατοκίζεται για μία χρονική περίοδο και αποκτά τελική αξία  $1(1+i)$ .

Διάγραμμα 8.14



Επομένως, η τελική αξία όλων των όρων μιας προκαταβλητέας ράντας -η οποία συμβολίζεται με το  $\varsigma_{\overline{n}|i}$  - ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τελικών αξιών των όρων της ράντας. Δηλαδή:

$$\varsigma_{\overline{n}|i} = 1(1+i)^n + 1(1+i)^{n-1} + \dots + 1(1+i)^1$$

Αν τώρα αντιμετωπίσουμε τους όρους του β' μέλους, θα έχουμε:

$$\varsigma_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \quad (8.20)$$

Το β' μέλος της σχέσης (8.20) είναι άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με  $\alpha = (1+i)$ ,  $\omega = (1+i)$  και  $\tau = (1+i)^n$ . Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο  $\Sigma = (\tau\omega - \alpha)/\omega - 1$ , θα έχουμε:

$$\varsigma_{\overline{n}|i} = \Sigma = \frac{(1+i)^n(1+i) - (1+i)}{(1+i) - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = S_{\overline{n}|i}(1+i).$$

Ωστε:

$$s_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n}|i}(1+i)$$



(8.21)

Από τη σχέση (8.21) συνάγεται ότι, για να βρούμε την τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας, αρκεί να ανατοκίσουμε την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη ράντα για μία ακόμη περίοδο.

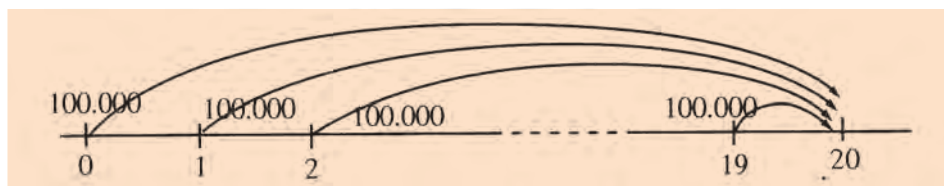
Αν τώρα ο όρος της ράντας είναι  $R$  νομισματικές μονάδες, τότε η τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας θα υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$V_{\text{τελ.}} = R \cdot s_{\overline{n}|i} = R \cdot S_{\overline{n}|i}(1+i)$$

(8.22)

**Παράδειγμα 1ο.** Ο έμπορος  $Y$ , μόλις γεννήθηκε η κόρη του, άρχισε να καταθέτει στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο στην αρχή κάθε χρόνου 100.000 € με ετήσιο ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 5%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο λογαριασμό του  $Y$ , όταν η κόρη του θα έχει συμπληρώσει το 20ό έτος της ηλικίας της.

**Λύση.** Πρόκειται για προκαταβλητέα ράντα και ζητείται η τελική της αξία.  $R = 100.000$ ,  $i = 0,05$ ,  $n = 20$ .



Αντικαθιστούμε στον τύπο (8.22) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} V_{\text{τελ.}} &= 100.000 S_{\overline{20}|0,05}(1,05) = \\ &= 100.000 \cdot 33,06595 \cdot 1,05 = 3.471.924,75 \end{aligned}$$

Ωστε: Όταν η κόρη του  $Y$  θα είναι 20 ετών, στο λογαριασμό του  $Y$  θα έχουν συσσωρευτεί 3.471.924,75 €.

**Παράδειγμα 2ο.** Ο έμπορος  $E$  καταθέτει σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε εξαμήνου 10.000 € με εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο λογαριασμό του  $E$  μετά 8 έτη και 6 μήνες από τότε που έγινε η πρώτη κατάθεση.

**Λύση.**  $R = 10.000$ ,  $n = 8 \cdot 2 + 1 = 17$  εξάμηνα,  $i = 0,04$ .

Το ποσό που θα έχει συσσωρευτεί στο τέλος του 17ου εξαμήνου, αποτελεί την τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας.

$$\begin{aligned} V_{\text{τελ.}} &= R \cdot S_{\overline{n}|i} (1+i) = 10.000 S_{\overline{17}|0,04} (1,04) = \\ &= 10.000 \cdot 23,69571 \cdot 1,04 = 246.435,40 \end{aligned}$$

## Ερωτήσεις

1. Τι είναι Ράντα; Δώστε παραδείγματα.
2. Τι είναι «ληξιπρόθεσμη» και τι «προκαταβλητέα» ράντα;
3. Τι είναι «αρχή» και τι «τέλος» ράντας;
4. Τι είναι «αρχική» και τι «τελική» αξία ράντας;
5. Τι είναι «εποχή υπολογισμού» της αξίας των όρων μιας ράντας;
6. Τι είναι «άμεσες», «μέλλουσες» και τι «αρξάμενες» ράντες;
7. Τι είναι «πρόσκαιρες», «διηνεκείς» και τι «ράντες ζωής»;



## Προβλήματα Ραντών

1. Καταθέτει κάποιος στην αρχή κάθε εξαμήνου 1 0.000 € με εξαμηνιαίο επιτόκιο 5%. Τί ποσό θα έχει συσσωρευτεί στο ταμειντήριο μετά 7 έτη και 6 μήνες από την πρώτη κατάθεση; **(Απ. 226.575)**
2. Κάποιος πατέρας, μόλις η κόρη του συμπλήρωσε το 10ο έτος της ηλικίας της, άρχισε να καταθέτει με ανατοκισμό στην Τράπεζα Τ στο τέλος κάθε χρόνου 100.000 € με ετήσιο επιτόκιο 5,5%. Τι ποσό θα εισπράξει η κόρη του, όταν θα έχει συμπληρώσει το 30ο έτος της ηλικίας της. **(Απ. 3.486.830)**

3. Καταθέτει κάποιος στο τέλος κάθε χρόνου 200.000 € με ετήσιο επιτόκιο 4,5%, και αυτό συνεχίζεται επί 12 έτη. Το κεφάλαιο που έχει σχηματιστεί στο τέλος του 12ου έτους το τοποθετεί στο ίδιο ταμειυτήριο με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 5,5%. Τι ποσό θα εισπράξει ο καταθέτης στο τέλος του 24ου έτους από την αρχική κατάθεση;  
(Απ. 5.880.074)
4. Καταθέτει κάποιος, επί 25 έτη, στην αρχή κάθε χρόνου 30.000 € με ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 3%. Ένα έτος μετά την τελευταία κατάθεση και επί 10 χρόνια αρχίζει να αποσύρει κάθε χρόνο 60.000 €. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξει στο τέλος του 35ου έτους από την πρώτη κατάθεση.  
(Απ. 805.572)
5. Ο υπάλληλος Υ καταθέτει στην Τράπεζα Τ στην αρχή κάθε τριμήνου 50.000 € με τριμηνιαίο επιτόκιο  $2^{3/40}\%$ . Τι ποσό θα εμφανίζει ο λογαριασμός του Υ μετά 4 έτη από την πρώτη κατάθεση;  
(Απ. 1.015.374)
6. Κάποιος πατέρας άρχισε να καταθέτει σε μια Τράπεζα στο τέλος κάθε εξαμήνου 40.000 € με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Η πρώτη κατάθεση έγινε, όταν ο γιος του ήταν 6 μηνών και η τελευταία, όταν ο γιος του ήταν 21 χρονών. Τα χρήματα έμειναν στην Τράπεζα ώσπου ο γιος συμπλήρωσε το 25ο έτος της ηλικίας του. Ποιο χρηματικό ποσό έχει συσσωρευτεί στην Τράπεζα;  
(Απ. 4.156.181)
7. Η βιομηχανία «ΒΗΤΑ» θέλει να αντικαταστήσει το μηχανικό εξοπλισμό της μετά 10 έτη από σήμερα και πρέπει να έχει συγκεντρώσει 12.000.000 €. Τι ποσό πρέπει να καταθέτει (με ανατοκισμό) στο τέλος κάθε χρόνου, έτσι ώστε στο τέλος του 10ου έτους να έχει συγκεντρωθεί στο ταμειυτήριο μιας Τράπεζας το απαιτούμενο χρηματικό ποσό, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 8%;  
(Απ. 828.354)
8. Ο Α δανείστηκε 400.000 € με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 10%. Το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί με 10 ετήσιες δόσεις. Κάθε δόση πληρώνεται στο τέλος κάθε χρόνου. Να υπολογιστεί η ετήσια δόση.  
(Απ. 65.098)

9. Χρέος 900.000 € εξοφλείται με ετήσια ληξιπρόθεσμη ράντα 20 όρων. Ο ετήσιος όρος είναι 75.000 €. Να βρεθεί το επιτόκιο υπολογισμού.  
(Απ. 0,0546)
10. Η βιομηχανία «ΔΕΛΤΑ», για την αγορά σύγχρονου μηχανικού εξοπλισμού, δανείστηκε από την Ε.Τ.Β.Α. 60.000.000 €. Για την εξόφληση του δανείου συμφωνήθηκε να καταθέτει η «ΔΕΛΤΑ» στο ταμιευτήριο της Ε.Τ.Β.Α. 5.000.000 € με ανατοκισμό, στο τέλος κάθε εξαμήνου, ώστε μετά 10 έτη από την τελευταία κατάθεση να έχει εξοφληθεί το δάνειο. Με ποιο εξαμηνιαίο επιτόκιο υπολογίστηκε η εξαμηνιαία δόση;  
(Απ. 5,45%)
11. Κατέθεσε κάποιος με ανατοκισμό 100.000 € για 8 χρόνια και 3 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 4%. Μετά τη λήξη του ανατοκισμού άρχισε να αποσύρει κάθε χρόνο (τέλος) 20.000 €. Επί πόσα έτη θα συνεχίσει τις αναλήψεις, ώσπου να αποσύρει ολόκληρο το ποσό; (Απ.  $n = 8,25$  έτη)
12. Ο κτηματίας Κ αγόρασε αγροτικά μηχανήματα αξίας 540.000 € και δανείστηκε το ποσό αυτό από την Α.Τ.Ε. Συμφωνήθηκε να εξοφληθεί το δάνειο με ίσες ετήσιες ληξιπρόθεσμες δόσεις των 40.000 € με ετήσιο επιτόκιο 6%. Ύστερα από πόσα χρόνια θα εξοφληθεί το δάνειο; Αν βρεθεί κλασματικός όρος να γίνει η τακτοποίησή του.  
(Απ.  $n = 28,497$ )
13. Καταθέτει κάποιος, επί 20 έτη, στην αρχή κάθε χρόνου 10.000 με ετήσιο επιτόκιο 6%. Κατόπιν αρχίζει να αποσύρει 20.000 € στο τέλος κάθε εξαμήνου. Επιτόκιο εξαμηνιαίο 3%. Επί πόσα εξάμηνα θα αποσύρει τις 20.000;  
(Απ.  $2 \cdot n = 29 + 0,75 = 29,75$  εξάμηνα ή 14 έτη, 10 μ., 15 ημ.)
14. Ο καταθέτης Κ καταθέτει κάθε εξάμηνο σε ένα Ταμιευτήριο 120.000 € με τη συμφωνία τα χρήματά του να ανατοκίζονται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 7%. Ένα ακριβώς εξάμηνο μετά τη δωδέκατη κατάθεσή του αποσύρει από το Ταμιευτήριο όλο το ποσό που συγκεντρώθηκε και το καταθέτει σε μια Τράπεζα με προθεσμία ενός έτους. Στο τέλος του έτους εισπράττει από την Τράπεζα συνολικό ποσό 2.825.158,68 €. Να βρεθεί το ετήσιο επιτόκιο με το οποίο έγινε η προθεσμιακή κατάθεση.  
(Απ. 23%)

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

## ΔΑΝΕΙΑ

### 9.1. Βασικές έννοιες και διάκριση δανείων

Οι διάφοροι οικονομικοί οργανισμοί (Κράτος, Δήμοι, Κοινότητες, Δ.Ε.Η., Ο.Τ.Ε., Ο.Σ.Ε., μεγάλες κεφαλαιουχικές εταιρίες) ή και ιδιώτες, για να καλύψουν έκτακτες (ή και τακτικές) δαπάνες τους, όταν τα έσοδά τους δεν επαρκούν συνάπτουν δάνεια.

**Δάνειο** λέγεται κάθε χρηματικό ποσό, το οποίο χορηγείται συνήθως εντόκως σε ιδιώτη, επιχείρηση, οργανισμό ή και στο Κράτος, με σκοπό να επιστραφεί στο δανειστή σε ορισμένο χρόνο.



Ο χρόνος που μεσολαβεί από την ημέρα που συνάπτεται το δάνειο έως την ημέρα που εξοφλείται λέγεται **διάρκεια του δανείου**.

Τα δάνεια, ανάλογα με τη διάρκειά τους, διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα.

**Βραχυπρόθεσμα** λέγονται τα δάνεια τα οποία διαρκούν το πολύ ένα έτος. Τα βραχυπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται μεταξύ ιδιωτών και επιχειρήσεων ή μεταξύ τραπεζών και επιχειρήσεων και γίνονται με συναλλαγματικές και με γραμμάτια. Τα κρατικά βραχυπρόθεσμα δάνεια γίνονται με **Έντοκα Γραμμάτια του Δημοσίου**. Στα βραχυπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο απλός τόκος.

**Μακροπρόθεσμα** λέγονται τα δάνεια τα οποία διαρκούν πολλά χρόνια. Τα μακροπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται μεταξύ ιδιωτών και πιστωτικών ιδρυμάτων (Κτηματική Τράπεζα, Ταχυδρομικό Ταμειστήριο, Ταμείο Παρακαταθηκών και Δανείων, Εργατική Κατοικία κ.ά.), τα οποία χορηγούν τα

στεγαστικά δάνεια, ή μεταξύ τραπεζών και επιχειρήσεων, ή δίνονται από μεγάλους οργανισμούς (Δ.Ε.Η., Ο.Τ.Ε., Δήμοι, Κοινότητες, Κράτος ή από Ανώνυμες Εταιρείες), για να καλύψουν συνήθως έκτακτες δαπάνες, δηλαδή κατασκευή δημόσιων έργων, προμήθεια πολεμικού υλικού, επέκταση εγκαταστάσεων στις δημόσιες και ιδιωτικές επιχειρήσεις κτλ. Στα μακροπρόθεσμα\* δάνεια εφαρμόζεται ο ανατοκισμός. Στο παρόν Κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα μακροπρόθεσμα δάνεια.



**Εξόφληση** ενός δανείου είναι η επιστροφή του δανεισμένου ποσού και η πληρωμή των τόκων που έχουν παραχθεί κατά τη διάρκεια του δανείου. Το σύνολο των πράξεων που γίνονται για την εξόφληση ενός δανείου ονομάζεται **απόσβεση\*\*** του δανείου.

Τα δάνεια, ανάλογα με το πλήθος των δανειστών, διακρίνονται σε:

**I. Δάνεια Ενιαία**, όταν ο δανειστής είναι ένα και μόνο (φυσικό ή νομικό) πρόσωπο. Π.χ. Το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο, η Αγροτική Τράπεζα, η Εργατική Κατοικία, η Κτηματική Τράπεζα κ.ά.

**II. Δάνεια διά τίτλων ή Ομολογιακά Δάνεια**, όταν οι δανειστές είναι πολλά πρόσωπα. Τα Ομολογιακά δάνεια εκδίδονται από το Κράτος ή από τους μεγάλους οργανισμούς. (Δ.Ε.Η., Ο.Τ.Ε., Ε.Τ.Β.Α.) ή από μεγάλες Ανώνυμες Εταιρείες. Επειδή τα ομολογιακά δάνεια αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια, τα οποία δεν μπορούν να διατεθούν από ένα και μόνο πρόσωπο, γι' αυτό το λόγο το δάνειο (κεφάλαιο) διαιρείται σε τμήματα μικρών ποσών, τα οποία αντιπροσωπεύουν πιστωτικούς τίτλους, που ονομάζονται Ομολογίες.

Τα Ενιαία Δάνεια, ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται, διακρίνονται σε Πάγια και Εξοφλητέα.

---

\* Στην Τραπεζική Τεχνική, τα δάνεια που διαρκούν από 1-3 ή 5 χρόνια ονομάζονται **Μεσοπρόθεσμα**. Η διάκριση όμως αυτή, από μαθηματικής άποψης, δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί και στα μεσοπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο ανατοκισμός.

\*\* Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση του λογιστικού όρου **απόσβεση** (Depreciation) των στοιχείων του πάγιου ενεργητικού με τον όρο **απόσβεση δανείου**, ο οποίος σημαίνει την εξόφληση ενός δανείου με περιοδικές πληρωμές. Πιο σωστοί όροι είναι οι λέξεις: **Χρεολυσία** (amortization) και **χρεολύσιο**, για το οποίο θα μιλήσουμε πιο κάτω.

Α) **Πάγια** λέγονται τα δάνεια εκείνα, στα οποία δεν υπάρχει χρόνος εξόφλησης, αλλά ο οφειλέτης έχει το δικαίωμα να εξοφλήσει οποτεδήποτε το δάνειο· είναι όμως υποχρεωμένος να πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε περιόδου (έτος, εξάμηνο, κτλ.). Πάγια δάνεια συνάπτουν συνήθως οι οργανισμοί κοινής ωφέλειας, οι Δήμοι, οι Κοινότητες κ.ά.

Β) **Εξοφλητέα** λέγονται εκείνα, στα οποία ο οφειλέτης (= λήπτης του δανείου) είναι υποχρεωμένος να εξοφλήσει σε προκαθορισμένο χρόνο (π.χ. σε 15 χρόνια).

Τα εξοφλητέα, ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται, διακρίνονται σε:

α) **Εξοφλητέα εφάπαξ**, όταν ολόκληρο το δάνειο εξοφλείται με μία πληρωμή.

β) **Εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς**, όταν η εξόφληση του δανείου γίνεται με δόσεις.

Στα εξοφλητέα εφάπαξ δάνεια μπορούν να συμβούν τα ακόλουθα:

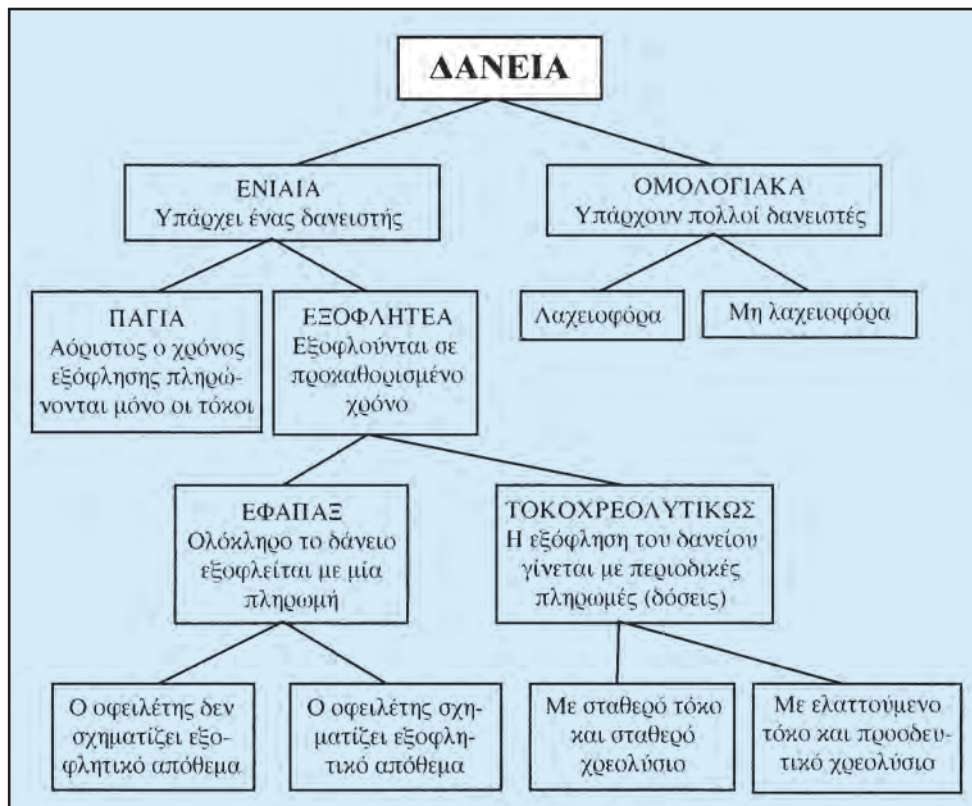
- 1) Ο οφειλέτης να πληρώνει κατά τη διάρκεια του δανείου τους τόκους και κατά τη λήξη του δανείου να επιστρέψει το ποσό που δανείστηκε.
- 2) Ο οφειλέτης να πληρώσει κατά τη λήξη του δανείου και τους τόκους και το ποσό που δανείστηκε.
- 3) Ο οφειλέτης (λήπτης του δανείου), επειδή είναι δύσκολο να εξοικονομήσει ολόκληρο το οφειλόμενο ποσό κατά τη λήξη του δανείου, καταθέτει περιοδικά σε μια τράπεζα χρηματικά ποσά με ανατοκισμό, ώστε τα ποσά αυτά μαζί με τους τόκους τους να ανασυστήσουν το οφειλόμενο ποσό κατά τη λήξη του δανείου. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο οφειλέτης σχηματίζει **εξοφλητικό απόθεμα** (*accumulating sinking fund*).



Τα **Ομολογιακά Δάνεια**, ανάλογα με τον τρόπο εξόφλησής τους, διακρίνονται: 1) σε **Πάγια** και 2) σε **Εξοφλητέα Τοκοχρεολυτικώς**. Τα εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς διακρίνονται: α) σε εξοφλητέα στο **άρτιο**, β) σε εξοφλητέα σε τιμή διαφορετική από το άρτιο και γ) **λαχειοφόρα**.

Τα Δάνεια αποτελούν το πρακτικό μέρος του Ανατοκισμού και των Ρα-ντών.

Για την πλήρη κατανόηση και εμπέδωση της διάκρισης των Δανείων, παραθέτουμε το πιο πάνω διάγραμμα.



## ΔΑΝΕΙΑ ΕΝΙΑΙΑ

### 9.2. Δάνεια ενιαία εξοφλητέα εφάπαξ

Αν παραστήσουμε με το  $K$  το ποσό του δανείου, με το  $n$  τις χρονικές περιόδους (έτη, εξάμηνα, κτλ.) που διαρκεί το δάνειο και με το  $i$  το επιτόκιο υπολογισμού των τόκων του δανείου, τότε η απόσβεση (εξόφληση) ενός ενιαίου δανείου γίνεται ως εξής:

**A) Όταν ο οφειλέτης δε σχηματίζει εξοφλητικό απόθεμα.** Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

**α) Όταν οι τόκοι πληρώνονται.** Εφόσον οι τόκοι πληρώνονται, έπεται ότι ο οφειλέτης θα πληρώνει στο τέλος κάθε έτους  $K \cdot i$  δραχμές για τόκους και κατά τη λήξη του δανείου θα επιστρέψει το ποσό  $K$ .

Το ποσό  $K \cdot i$  αποτελεί ληξιπρόθεσμη ράντα, της οποίας η παρούσα αξία ισούται με  $K \cdot i a_{\overline{n}|i}$ , κατά τη στιγμή που συνάπτεται το δάνειο, ενώ η παρούσα αξία του δανείου ισούται με  $K \cdot U^n$ . Επομένως, το ποσό του δανείου ισούται με την παρούσα αξία των τόκων συν την παρούσα αξία του δανεισμένου κεφαλαίου. Δηλαδή:

$$K = K \cdot i a_{\overline{n}|i} + K \cdot U^n \quad (9.1)$$



**β) Όταν οι τόκοι δεν πληρώνονται,** τότε η εξόφληση του δανείου θα γίνει με μία πληρωμή στο τέλος των  $n$  ετών, οπότε ο οφειλέτης θα πληρώσει το ποσό  $K_0(1 + i)^n = K$ , όπου  $K_0$  το αρχικό ποσό του δανείου.

**B) Όταν ο οφειλέτης σχηματίζει εξοφλητικό απόθεμα**

**α)** Αν οι τόκοι ( $= K \cdot i$ ) πληρώνονται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου και ο λήπτης του δανείου καταθέτει στο τέλος κάθε περιόδου ένα σταθερό ποσό  $R$  με επιτόκιο  $t$  ( $t \neq i$ ) πρέπει στο τέλος των  $n$  χρονικών περιόδων να έχει σχηματιστεί το ποσό του δανείου ( $= K$ ). Επομένως, ο σχηματισμός του **εξοφλητικού αποθέματος** γίνεται με ληξιπρόθεσμη ράντα· η τελική αξία της ράντας πρέπει να ισούται με το ποσό του δανείου. Συνεπώς, πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$$R \cdot S_{\overline{n}|t} = K \quad (9.2)$$



Το  $t$  είναι το επιτόκιο, με το οποίο ανατοκίζονται τα ποσά  $R$ , τα οποία καταθέτει ο οφειλέτης για το σχηματισμό του εξοφλητικού αποθέματος, και ονομάζεται **επιτόκιο ανασύστασης** του δανεισμένου κεφαλαίου. Το επιτόκιο  $t$  είναι συνήθως μικρότερο του επιτοκίου του δανείου  $i$ .

Τη σχέση (9.2) λύνουμε ως προς  $R$  και έχουμε:

$$R = \frac{K}{S_{n|t}} = K \cdot \frac{1}{S_{n|t}} \quad (9.3)$$

$$\text{Αν τώρα θέσουμε όπου } \frac{1}{S_{n|t}} = \frac{1}{\frac{(1+t)^n - 1}{t}} = \frac{t}{(1+t)^n - 1} = P_{n|t},$$

τότε η σχέση (9.3) γράφεται:



$$R = K \cdot P_{n|t} \quad (9.4)$$

Αν  $K = 1$ , τότε θα είναι, και  $R = P_{n|t}$ . Το ποσό πρέπει να καταθέτει ο λήπτης του δανείου στο τέλος κάθε περιόδου, με επιτόκιο  $t$ , για να σχηματιστεί ποσό 1 νομισματικής μονάδας μετά παρέλευση  $n$  χρονικών περιόδων. Το  $P_{n|t}$  ονομάζεται Χρεολύσιο (Premium) μιας νομισματικής μονάδας.

**Ωστε: Χρεολύσιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέτει ο λήπτης του δανείου στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, για να εξοφληθεί δάνειο μιας νομισματικής μονάδας.**

Οι τιμές του  $P_{n|t}$  λαμβάνονται απευθείας από τον Πίνακα VI με ορισμένα επιτόκια και ορισμένα  $n$ . Π.χ. με  $t = i = 0,04$  και  $n = 20$  στον Πίνακα VI βρίσκουμε  $0,03358175 = P_{20|0,04}$ . Ο Πίνακας VI παρέχει τις τιμές του  $P_{n|i}$  για  $i = 0,0025$  έως και  $i = 0,08$ . Αν όμως θέλουμε να βρούμε την τιμή του

$$P_{n|i} = \frac{1}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \quad (9.5)$$

για  $i = 0,09$  έως και  $i = 0,20$ , τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα I και βρίσκουμε:

$$P_{20|0,12} = \frac{0,12}{(1,12)^{20} - 1} = \frac{0,12}{9,6462926 - 1} = 0,0138787$$

β) **Αν τώρα οι τόκοι** ( $= K \cdot i$ ) δεν πληρώνονται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, πρέπει ο λήπτης του δανείου να καταθέτει στο τέλος κάθε περιόδου ένα ποσό  $R'$  τέτοιο, ώστε κατά τη λήξη του δανείου να έχει σχηματιστεί το οφειλόμενο ποσό  $K(1+i)^n$ . Δηλαδή, η τελική αξία του εξοφλητικού αποθέματος ( $= R' S_{n|t}$ ) πρέπει να είναι ίση με το οφειλόμενο ποσό  $K(1+i)^n$ . Εξισώνουμε τις τελικές αξίες και έχουμε:

$$R' S_{n|t} = K(1+i)^n$$



$$R' = K(1+i)^n \cdot \frac{1}{S_{n|t}} = K(1+i)^n \cdot P_{n|t} \quad (9.6)$$

**Παράδειγμα.** Ο βιομήχανος Β, για την επέκταση των εγκαταστάσεων της βιομηχανίας του, δανείστηκε 10.000.000 € με ετήσιο επιτόκιο 6%. Το δάνειο θα εξοφληθεί σε 20 χρόνια. Να υπολογιστεί το χρεολύσιο αν: α) οι τόκοι πληρώνονται στο τέλος κάθε χρόνου και β) αν οι τόκοι και το δάνειο πληρωθούν στο τέλος του 20ού έτους. Επιτόκιο ανασύστασης 4%.

**Λύση.**  $K = 10.000.000$ ,  $n = 20$ ,  $i = 0,06$ ,  $t = 0,04$

α) Ο Β θα πληρώνει στο τέλος κάθε χρόνου, ποσό  $K \cdot i = 10.000.000 \cdot 0,06 = 600.000$  € για τόκους και για χρεολύσιο (εξοφλητικό απόθεμα):

$$R = K \cdot P_{n|t} = 10.000.000 P_{20|0,04} = 10.000.000 \cdot 0,03358175 = 335.817,50$$

β) Αν τώρα ο Β δεν πληρώνει τους τόκους, έπεται ότι οι τόκοι και το κεφάλαιο θα πληρωθούν κατά τη λήξη του δανείου, οπότε το χρεολύσιο θα είναι:

$$\begin{aligned} R' &= K(1+i)^n P_{n|t} = 10.000.000 (1,06)^{20} P_{20|0,04} = \\ &= 10.000.000 \cdot 3,2071355 \cdot 0,03358175 = 1.077.012,22 \end{aligned}$$

### 9.3. Δάνεια ενιαία, εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς

Οι τρόποι εξόφλησης ενός δανείου, τους οποίους εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, σπάνια εφαρμόζονται στην πράξη. Η απόσβεση των ενιαίων δανείων γίνεται πάντοτε τοκοχρεολυτικώς (= με δόσεις).

Ο τρόπος εξόφλησης ενός δανείου με δόσεις παρέχει στο λήπτη του δανείου το πλεονέκτημα να το εξοφλεί με περιοδικές πληρωμές, τις οποίες κάνει με ευκολία. Για το δανειστή όμως, ο τρόπος αυτός παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι πρέπει να διαχειρίζεται τα ποσά που εισπράττει κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να εισπράττει τους τόκους από το κεφάλαιο που δάνεισε, αλλά και να ανασυστήσει το κεφάλαιο κατά τη λήξη του δανείου.

Η τοκοχρεολυτική απόσβεση των χορηγούμενων δανείων εφαρμόζεται πολύ συχνά από τα πιστωτικά ιδρύματα (τράπεζες και ταμειευτήρια). Το ποσό (η δόση) που πληρώνει ο λήπτης του δανείου στο τέλος κάθε έτους, εξαμήνου, κτλ., αποτελείται από δύο τμήματα. Το ένα τμήμα είναι ο **τόκος** του κεφαλαίου-δανείου και το άλλο τμήμα είναι το **χρεολύσιο** ανασύστασης του δανεισμένου κεφαλαίου.

Το συνολικό ποσό που πληρώνει ο λήπτης του δανείου, στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλήσει ένα μέρος από το ποσό που δανείστηκε, ονομάζεται **Τοκοχρεολύσιο** (= Τόκος + Χρεολύσιο).

Αν παραστήσουμε με το  $R$  το τοκοχρεολύσιο, με το  $K$  το ποσό του δανείου, με το  $i$  το επιτόκιο του δανείου, με το  $t$  το επιτόκιο ανασύστασης του δανεισμένου ποσού και με το  $P_{n|t}$  το χρεολύσιο, τότε το τοκοχρεολύσιο (η δόση) που πρέπει να πληρώνει ο λήπτης του δανείου, στο τέλος κάθε έτους ή εξαμήνου ή μήνα, υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο:



$$R = K \cdot i + K \cdot P_{n|t}$$

(9.7)

όπου:  $K \cdot i$  = Τόκος και  $K \cdot P_{n|t}$  = Χρεολύσιο.

Το επιτόκιο του δανείου (=  $i$ ) και το επιτόκιο ανασύστασης (=  $t$ ) του δανεισμένου κεφαλαίου μπορεί να είναι:  $i = t$  ή  $t < i$ . Αν  $i = t$ , τότε η σχέση (9.7) γράφεται:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{n|i} \quad (9.8)$$

**Σημείωση.** Για τον υπολογισμό του τοκοχρεολυσίου μπορεί να εφαρμοστεί και ο τύπος:

$$R = \frac{K}{\alpha_{n|i}} \quad (9.9)$$



Το  $1/\alpha_{n|i}$  καλείται **τοκοχρεολύσιο** 1 νομισματικής μονάδας και είναι το αντίστροφο του  $\alpha_{n|i}$ . Στις πρακτικές εφαρμογές, για τον υπολογισμό του τοκοχρεολυσίου πρέπει να χρησιμοποιούνται οι τύποι (9.7) και (9.8), γιατί παρέχουν μεγάλη ευκολία στους υπολογισμούς και δίνουν απευθείας τις συνιστώσες του τοκοχρεολυσίου (= Τόκος + Χρεολύσιο), οι οποίες χρειάζονται για την κατασκευή του πίνακα απόσβεσης του δανείου.

Η τοκοχρεολυτική απόσβεση των ενιαίων δανείων γίνεται με διάφορες μεθόδους: 1) Μέθοδος του σταθερού χρεολυσίου, 2) μέθοδος του προοδευτικού χρεολυσίου, 3) μέθοδος sinking fund, 4) απόσβεση δανείου με ίσα μέρη του κεφαλαίου κ.ά. Εδώ θα αναφέρουμε τις δύο πρώτες.

### 9.3.1. Απόσβεση ενιαίων δανείων με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου

Κατά τη μέθοδο του **Σταθερού Χρεολυσίου**, το **τοκοχρεολύσιο** αναλύεται σε **τόκο** -ο οποίος υπολογίζεται πάντοτε με βάση το αρχικό ποσό του δανείου και είναι σταθερός για όλες τις περιόδους - και σε **χρεολύσιο** με το οποίο ο δανειστής θα συγκεντρώσει σιγά σιγά το ποσό που δάνεισε. Τόσο ο τόκος όσο και το **χρεολύσιο παραμένουν σταθερά** καθ' όλη τη διάρκεια του δανείου.



**Παράδειγμα.** Χορηγήθηκε δάνειο 100.000 € και πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια, με ίσες ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις και με ετήσιο επιτόκιο 5%. Να υπολογιστεί το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και να κατασκευαστεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

**Λύση.**  $K = 100.000$ ,  $n = 5$ ,  $i = 0,05$ ,  $R = ;$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (9.8) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
 R &= 100.000 \cdot 0,05 + 100.000 P_{\overline{5}|0,05} \\
 &= 5.000 + 100.000 \cdot 0,180975 \\
 &= 5.000 + 18.097,50 = 23.097,50
 \end{aligned}$$

Δηλαδή: Τόκος + Χρεολύσιο = Τοκοχρεολύσιο

Ωστε: Ο λήπτης του δανείου πρέπει να πληρώνει στο τέλος κάθε χρόνου 23.097,50 € (5.000 € για τόκο και 18.097,50 € για χρεολύσιο), για να εξοφλήσει το δάνειο στο τέλος του 5ου έτους.



Για τη συστηματική παρακολούθηση των υποχρεώσεων του οφειλέτη, κατασκευάζεται **Πίνακας Απόσβεσης (Amortization Schedule)** του δανείου. Επίσης, ο Πίνακας Απόσβεσης του δανείου είναι πολύ χρήσιμος στο πιστωτικό ίδρυμα που χορηγεί το δάνειο, γιατί με βάση τον πίνακα αυτό τηρείται και η λογιστική του δανείου στο Λογιστήριο του πιστωτικού ιδρύματος. (Στον Πίνακα 9.1 παραθέτουμε τον «Πίνακα Απόσβεσης»).

### Πίνακας 9.1

#### ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

δανείου 100.000 € σε 5 έτη προς 5% με τη μέθοδο του  
Σταθερού Χρεολυσίου

| Τέλος έτους<br>(1) | Τοκοχρεολύσιο<br>(2) | Τόκος<br>(3) | Χρεολύσιο<br>(4) | Εξοφλημένο ποσό δανείου<br>(5) | Υπόλοιπο ανεξόφλητο<br>(6) |
|--------------------|----------------------|--------------|------------------|--------------------------------|----------------------------|
| 1ου                | 23.097,50            | 5.000        | 18.097,50        | 18.097,50                      | 81.902,50                  |
| 2ου                | 23.097,50            | 5.000        | 18.097,50        | 37.099,88                      | 62.900,12                  |
| 3ου                | 23.097,50            | 5.000        | 18.097,50        | 57.052,37                      | 42.947,63                  |
| 4ου                | 23.097,50            | 5.000        | 18.097,50        | 78.002,49                      | 21.997,51                  |
| 5ου                | 23.097,50            | 5.000        | 18.097,50        | 100.000,00                     | Ø                          |



**Παρατηρήσεις:** 1) Οι στήλες (2), (3) και (4), του Πίνακα 9.1 παραμένουν αμετάβλητες καθ' όλη τη διάρκεια του δανείου.

2) Η στήλη (5) σχηματίζεται ως εξής: Στο τέλος του 1ου έτους το εξοφλημένο ποσό του δανείου ισούται με το χρεολύσιο (= 18.097,50). Το εξοφλημένο ποσό του κάθε έτους βρίσκεται, αν πολλαπλασιάσουμε το εξοφλημένο ποσό του προηγούμενου έτους επί το  $(1 + i)$  και προσθέτουμε το χρεολύσιο. Κατά συνέπεια, θα έχουμε:

$$\begin{array}{llll} \text{Εξοφλημ. ποσό 2ου έτους:} & 18.097,50 \cdot 1,05 + 18.097,50 = & 37.099,88 \\ \text{"} & \text{"} & \text{3ου} & \text{"} : 37.099,88 \cdot 1,05 + 18.097,50 = 57.052,37 \\ \text{"} & \text{"} & \text{4ου} & \text{"} : 57.052,37 \cdot 1,05 + 18.097,50 = 78.002,49 \\ \text{"} & \text{"} & \text{5ου} & \text{"} : 78.002,49 \cdot 1,05 + 18.097,50 = 100.000,00 \end{array}$$

3) Το «υπόλοιπο ανεξόφλητο» (στήλη 6) προκύπτει ως διαφορά: Συνολικό ποσό δανείου μείον εξοφλημένο ποσό. Στο παράδειγμα το «υπόλοιπο ανεξόφλητο» στο τέλος του 4ου έτους είναι:

$$21.997,51 = 100.000 - 78.002,49$$

### 9.3.2. Απόσβεση ενιαίων δανείων με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου

Στην πράξη, η απόσβεση των ενιαίων δανείων γίνεται συνήθως με τη **Μέθοδο του Προοδευτικού Χρεολυσίου ή με το Γαλλικό Σύστημα Απόσβεσης**.

Κατά τη μέθοδο του Προοδευτικού Χρεολυσίου ο λήπτης του δανείου καταβάλλει πάντοτε το ίδιο τοκοχρεολύσιο. Δηλαδή, το τοκοχρεολύσιο (δόση) παραμένει σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια του δανείου και αναλύεται σε δύο τμήματα:

$$\text{Τοκοχρεολύσιο} = \text{Τόκος} + \text{Χρεολύσιο}$$

Στη μέθοδο του Προοδευτικού Χρεολυσίου, επειδή ο **τόκος** κάθε περιόδου **υπολογίζεται πάνω στο ανεξόφλητο ποσό του δανείου**, έπεται ότι ο τόκος κάθε περιόδου **θα ελαττώνεται** κάθε φορά κατά τον τόκο του χρεολυσίου της προηγούμενης περιόδου. Το **χρεολύσιο** κάθε περιόδου προκύπτει ως διαφορά: **Τοκοχρεολύσιο μείον Τόκος**. Επειδή ο **τόκος ελαττώνεται** κάθε περίοδο, έπεται ότι το χρεολύσιο **θα αυξάνει προοδευτικά**, γι' αυτό και η μέθοδος αυτή ονομάστηκε **Μέθοδος του Προοδευτικού Χρεολυσίου**.



Για να κατασκευάσουμε τον Πίνακα απόσβεσης του δανείου, πρέπει να υπολογίζουμε για κάθε περίοδο τα εξής στοιχεία: i) Το τοκοχρεολύσιο, ii) τον τόκο, iii) το χρεολύσιο, iv) το εξοφλημένο ποσό του δανείου και v) το ανεξόφλητο ποσό του δανείου. Ο υπολογισμός αυτών των στοιχείων γίνεται ως εξής:

Το τοκοχρεολύσιο υπολογίζεται με τον τύπο:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{n|i}$$



(9.10)

Το τοκοχρεολύσιο αναλύεται σε τόκο ( $= K \cdot i$ ) και σε χρεολύσιο  $= K \cdot P_{n|i} = P_1$  χρεολύσιο 1ης περιόδου, το οποίο αποτελεί και το εξοφλημένο ποσό του δανείου στο τέλος της 1ης περιόδου· άρα το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό, στο τέλος της 1ης περιόδου, θα είναι:

$$K - K \cdot P_{n|i} = K - P_1$$

Στο τέλος της 2ης περιόδου το **τοκοχρεολύσιο** αναλύεται σε **τόκο** - ο οποίος υπολογίζεται με βάση το υπόλοιπο ανεξόφλητο:  $(K - K \cdot P_{n|i}) \cdot i = (K - P_1) \cdot i$  - και σε **χρεολύσιο**, το οποίο προκύπτει ως διαφορά: Τοκοχρεολύσιο μείον τόκος. Δηλαδή:

$$(K \cdot i + K \cdot P_{n|i}) - (K - K \cdot P_{n|i}) \cdot i = K \cdot i + K \cdot P_{n|i} - K \cdot i + K \cdot P_{n|i} =$$

$$K \cdot P_{n|i}(1+i) = P_1(1+i) = P_2 = \text{Χρεολύσιο 2ης περιόδου.}$$

Το εξοφλημένο ποσό του δανείου στο τέλος της 2ης περιόδου θα είναι:  $P_1 + P_2$ , άρα το υπόλοιπο ανεξόφλητο θα είναι:  $K - (P_1 + P_2)$ .

Στο τέλος της 3ης περιόδου το τοκοχρεολύσιο αναλύεται σε **τόκο**:

$$[K - (P_1 + P_2)] \cdot i \text{ και σε } \textbf{χρεολύσιο:}$$

$$[K \cdot i + K \cdot P_{n|i}] - [K - (P_1 + P_2)] \cdot i = K \cdot i + P_1 - K \cdot i + P_2 \cdot i + P_1 \cdot i =$$

$$= P_1(1+i) + P_2 \cdot i = P_2 + P_2 \cdot i = P_2(1+i) = P_1(1+i)(1+i) =$$

$$= P_1(1+i)^2 = P_3 = \text{Χρεολύσιο 3ης περιόδου.}$$

$$\text{Εξοφλημένο ποσό} = P_1 + P_2 + P_3.$$

$$\text{Υπόλοιπο ανεξόφλητο} = K - (P_1 + P_2 + P_3).$$

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι το **χρεολύσιο της μ-ιστής περιόδου** θα υπολογίζεται με τον τύπο:

$$P_\mu = P_1(1+i)^{\mu-1}$$



(9.11)

όπου:  $P_1 = K \cdot P_{n|i}$  = Χρεολύσιο 1ης περιόδου.

Το **εξοφλημένο ποσό** του δανείου ( $= E_\mu$ ) στο τέλος της μ-ιστής περιόδου ισούται με το άθροισμα των χρεολυσίων 1ης, 2ης, 3ης, ..., μ-ιστής περιόδου. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} E_\mu &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_\mu = P_1 + P_1(1+i) + P_1(1+i)^2 + \dots + \\ &+ P_1(1+i)^{\mu-1} = P_1[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{\mu-1}] = \\ &= P_1 \cdot S_{\mu|i} = K \cdot P_{n|i} \cdot S_{\mu|i} \end{aligned}$$

Ωστε:

$$E_\mu = K \cdot P_{n|i} \cdot S_{\mu|i}$$



(9.12)

Το **υπόλοιπο ανεξόφλητο** ( $= Y_\mu$ ) στο τέλος της μ-ιστής περιόδου υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$Y_\mu = K - E_\mu = K - K \cdot P_{n|i} \cdot S_{\mu|i}$$

(9.13)

Ο **Τόκος** της μ-ιστής περιόδου προκύπτει με πολλαπλασιασμό του υπόλοιπου ανεξόφλητου της  $(\mu - 1)$  περιόδου επί το επιτόκιο του δανείου. Δηλαδή:

$$I_\mu = Y_{\mu-1} \cdot i = [K - K \cdot P_{n|i} \cdot S_{\mu-1|i}] \cdot i$$

(9.14)

Το **σύνολο των τόκων** που θα πληρώσει ο λήπτης του δανείου θα βρεθεί αν από το σύνολο των δόσεων ( $=$  τοκοχρεολυσίων) αφαιρέσουμε το ποσό του δανείου. Δηλαδή:



$$\text{Σύνολο Τόκων} = n \cdot R - K$$

(9.15)

**Παράδειγμα 1ο.** Δάνειο 100.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια με ίσα ετήσια τοκοχρεολύσια (δόσεις) και ετήσιο επιτόκιο 5%. Να υπολογιστεί το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και να κατασκευαστεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

**Λύση:**  $K = 100.000$ ,  $n = 5$ ,  $i = 0,05$ ,  $R =$ ;

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{n|i} = 100.000 \cdot 0,05 + 100.000 P_{5|0,05}$$

$$= 5.000 + 100.000 \cdot 0,180975 = 5.000 + 18.097,50 = 23.097,50$$

### Πίνακας 9.2

#### ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

δανείου 100.000 € σε 5 έτη προς 5% με τη μέθοδο του Προοδευτικού Χρεολυσίου

| Τέλος έτους<br>(1) | Τοκοχρεολύσιο<br>(2) | Τόκος<br>(3) | Χρεολύσιο<br>(4) | Εξοφλημένο ποσό δανείου<br>(5) | Υπόλοιπο ανεξόφλητο<br>(6) |
|--------------------|----------------------|--------------|------------------|--------------------------------|----------------------------|
| 1ου                | 23.097,50            | 5.000,00     | 18.097,50        | 18.097,50                      | 81.902,50                  |
| 2ου                | 23.097,50            | 4.095,13     | 19.002,37        | 37.099,87                      | 62.900,13                  |
| 3ου                | 23.097,50            | 3.145,00     | 19.952,50        | 57.052,37                      | 42.947,63                  |
| 4ου                | 23.097,50            | 2.147,40     | 20.950,10        | 78.002,50                      | 21.997,50                  |
| 5ου                | 23.097,50            | 1.100,00     | 21.997,50        | 100.000,00                     | Ø                          |

**Παρατηρήσεις:** 1) Στο τέλος του 1ου έτους: α) Το τοκοχρεολύσιο (= 23.097,50) αναλύεται σε τόκο (= 5.000) και σε χρεολύσιο (= 18.097,50). β) Το εξοφλημένο ποσό του δανείου ισούται με το χρεολύσιο. γ) Το ανεξόφλητο υπόλοιπο είναι η διαφορά: Ποσό δανείου μείον χρεολύσιο (= 100.000 – 18.098,50 = 81.902,50).



2) Ο τόκος κάθε έτους προκύπτει με πολλαπλασιασμό του ανεξόφλητου ποσού του δανείου επί το επιτόκιο.

3) Επειδή  $\text{Τοκοχρεολύσιο} = \text{Τόκος} + \text{Χρεολύσιο}$ , έπεται ότι:

$$\text{Χρεολύσιο} = \text{Τοκοχρεολύσιο} - \text{Τόκος}.$$

4) Το εξοφλημένο ποσό του δανείου στο τέλος κάθε έτους αποτελείται από το άθροισμα των χρεολυσίων που έχουν υπολογιστεί.

5) Το ανεξόφλητο υπόλοιπο προκύπτει ως διαφορά: Ποσό δανείου μείον υπολογισμένα τοκοχρεολύσια. Επομένως, για τη συμπλήρωση των στηλών (3), (4), (5) και (6) εργαζόμαστε ως εξής:

Στο τέλος του 2ου έτους, θα είναι:

$$\begin{aligned} \text{Τόκος} &= 81.902,50 \cdot 0,05 = 4.095,13 \\ \text{Χρεολύσιο} &= 23.097,50 - 4.095,13 = 19.002,37 \\ \text{Εξοφλημένο ποσό} &= 18.097,50 + 19.002,37 = 37.009,87 \\ \text{Υπόλοιπο ανεξόφλητο} &= 100.000 - 37.099,87 = 62.900,13 \end{aligned}$$

Στο τέλος του 3ου έτους, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Τόκος} &= 62.900,13 \cdot 0,05 = 3.145,00 \\ \text{Χρεολύσιο} &= 23.097,50 - 3.145,00 = 19.952,50 \\ \text{Εξοφλημένο ποσό} &= 37.099,87 + 19.952,50 = 57.052,37 \\ \text{Υπόλοιπο ανεξόφλητο} &= 100.000 - 57.052,37 = 42.947,63 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα, των υπόλοιπων ετών, εργαζόμαστε κατά τον ίδιο τρόπο. Αν δεν έχουμε κάνει κάπου λάθος, τότε στο τέλος του τελευταίου έτους το «εξοφλημένο ποσό» πρέπει να ισούται με το ποσό του δανείου, ενώ το «υπόλοιπο ανεξόφλητο» πρέπει να είναι μηδέν.

**Παράδειγμα 2ο.** Χορηγήθηκε δάνειο 1.000.000 € και πρέπει να εξοφληθεί σε 20 έτη με ίσες ετήσιες δόσεις, με ετήσιο επιτόκιο 6%. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο. 2) Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου, για τα τέσσερα έτη, με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. 3) Το χρεολύσιο

του 8ου έτους. 4) Το εξοφλημένο ποσό και το ανεξόφλητο υπόλοιπο στο τέλος του 5ου έτους. 5) Το σύνολο των τόκων που θα πληρώσει ο οφειλέτης.

**Λύση.**  $K = 1.000.000$ ,  $n = 20$ ,  $i = 0,06$ .

1) Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{n|i}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε:

$$\begin{aligned} R &= 1.000.000 \cdot 0,06 + 1.000.000 P_{20|0,06} \\ &= 60.000 + 1.000.000 \cdot 0,02718456 \end{aligned}$$

ή  $R = 60.000 + 27.184,56 = 87.184,56$

Ωστε: η ετήσια δόση είναι 87.184,56 €.

2) Το χρεολύσιο του 8ου έτους θα βρεθεί με βάση τον τύπο (9.11). Πράγματι, αν στον τύπο  $P_\mu = P_1(1+i)^{\mu-1}$  θέσουμε:

$$\mu = 8, \quad P_1 = 27.184,56 \quad \text{και} \quad i = 0,06, \quad \text{θα έχουμε:}$$

$$P_8 = 27.184,56 (1,06)^7 = 27.184,56 \cdot 1,50363 = 40.875,52$$

3) Το εξοφλημένο ποσό, στο τέλος του 5ου έτους, θα υπολογιστεί με βάση τον τύπο:  $E_\mu = K \cdot P_{n|i} \cdot S_{\mu|i}$ .

$$\begin{aligned} E_5 &= 1.000.000 P_{20|0,06} \cdot S_{5|0,06} \\ &= 1.000.000 \cdot 0,02718456 \cdot 5,637093 = 153.241,50 \end{aligned}$$

Επομένως, το υπόλοιπο ανεξόφλητο στο τέλος του 5ου έτους, θα υπολογιστεί με τον τύπο:

$$Y_\mu = K - K \cdot P_{n|i} \cdot S_{\mu|i}$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 Y_5 &= 1.000.000 - 1.000.000 P_{\overline{20}|0,06} \cdot S_{\overline{5}|0,06} \\
 &= 1.000.000 - 153.241,50 = 846.758,50
 \end{aligned}$$

### Πίνακας 9.3

#### ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

δανείου 1.000.000 € σε 20 έτη προς 6% με τη μέθοδο του Προοδευτικού Χρεολυσίου

| Τέλος έτους<br>(1) | Τοκοχρεολύσιο<br>(2) | Τόκος<br>(3) | Χρεολύσιο<br>(4) | Εξοφλημένο ποσό δανείου<br>(5) | Υπόλοιπο ανεξόφλητο<br>(6) |
|--------------------|----------------------|--------------|------------------|--------------------------------|----------------------------|
| 1ου                | 87.184,56            | 60.000,00    | 27.184,56        | 27.184,56                      | 972.815,50                 |
| 2ου                | 87.184,56            | 58.368,93    | 28.815,63        | 56.000,19                      | 943.999,90                 |
| 3ου                | 87.184,56            | 56.639,99    | 30.544,57        | 86.544,76                      | 913.455,30                 |
| 4ου                | 87.184,56            | 54.807,32    | 32.377,24        | 118.922,00                     | 881.078,00                 |
| ⋮                  | ⋮                    | ⋮            | ⋮                | ⋮                              | ⋮                          |
| ⋮                  | ⋮                    | ⋮            | ⋮                | ⋮                              | ⋮                          |
| ⋮                  | ⋮                    | ⋮            | ⋮                | ⋮                              | ⋮                          |
| 20ου               | 87.184,56            | 4.935,00     | 82.249,56        | 1.000.000,00                   | ∅                          |

4) Οι συνολικοί τόκοι τους οποίους θα πληρώσει ο λήπτης του δανείου, βρίσκονται αν από το σύνολο των τοκοχρεολυσίων αφαιρέσουμε το ποσό του δανείου. Επομένως, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \text{Σύνολο τοκοχρεολυσίων} &= n \cdot R = 20 \cdot 87.184,56 = 1.743.691 \\
 \text{Μείον ποσό δανείου} &= 1.000.000 \\
 \hline
 \text{Σύνολο τόκων} &= 743.691
 \end{aligned}$$

**Σημείωση 1η.** Έστω ότι χορηγείται δάνειο 1.000.000 € με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 12%, το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια. Να υπολογιστεί το εξαμηνιαίο τοκοχρεολύσιο.

Επειδή ζητείται το εξαμηνιαίο τοκοχρεολύσιο και το επιτόκιο είναι ετήσιο ονομαστικό, θα μετατρέψουμε τα έτη σε εξάμηνα ( $10 \cdot 2 = 20$  εξάμηνα) και θα διαιρέσουμε το επιτόκιο διά του 2. Οπότε:



$$R_{\text{εξαμ.}} = K \cdot \frac{i}{2} + K \cdot P_{\frac{i}{2}, n} \frac{i}{2} \quad (9.16)$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκουμε:

$$R_{\text{εξαμ.}} = 1.000.000 \times 0,06 + 1.000.000 P_{\frac{0,06}{2}, 20} = 87.184,56$$

### Σημείωση 2η. Πληρωμή ετήσιου τοκοχρεολυσίου σε $\rho$ ίσες δόσεις.



Στην πράξη, η πληρωμή του τοκοχρεολυσίου γίνεται με  $\rho$  ίσες δόσεις (δηλαδή κάθε εξάμηνο, κάθε τρίμηνο και συνήθως κάθε μήνα) κατά τους ακόλουθους τρόπους:

Αν π.χ.  $K = 1.000.000$ ,  $n = 20$ ,  $i = 0,06$  και  $\rho = 12$ , δηλαδή η πληρωμή του τοκοχρεολυσίου γίνεται κάθε μήνα, τότε εργαζόμαστε ως εξής: Βρίσκουμε πρώτα το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και κατόπιν το διαιρούμε με το 12 βρίσκουμε το μηνιαίο τοκοχρεολύσιο. Επομένως, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} R_{\text{ετήσιο}} &= 1.000.000 \cdot 0,06 + 1.000.000 P_{\frac{0,06}{12}, 20} \\ &= 60.000 + 1.000.000 \cdot 0,027185 = 87.185 \end{aligned}$$

και  $R_{\text{μηνιαίο}} = 87.185 : 12 = 7.265$ .

## Ερωτήσεις

1. Τι είναι «βραχυπρόθεσμα», «μεσοπρόθεσμα» και τι «μακροπρόθεσμα» δάνεια;
2. Τι είναι «ενιαία» και τι «ομολογιακά» δάνεια;
3. Τι είναι «πάγια» και τι «εξοφλητέα» δάνεια;
4. Τι είναι δάνεια: «εξοφλητέα εφάπαξ» και τι «εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά»;
5. Τι είναι «χρεολύσιο» και τι «τοκοχρεολύσιο»;
6. Περιγράψατε τη διαδικασία απόσβεσης ενός δανείου με τις μεθόδους του «σταθερού» και του «προοδευτικού» χρεολυσίου. Πού διαφέρουν οι δύο μέθοδοι;



## Προβλήματα Δανείων



1. Δάνειο 400.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 15 χρόνια με επιτόκιο δανείου 6%. Να βρεθεί το ποσό του εξοφλητικού αποθέματος, όταν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 4,5% και όταν οι τόκοι πληρώνονται ή όχι κάθε χρόνο.  
(Απ. 19.244 – 46.119)
2. Δάνειο 1.000.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 20 χρόνια με ίσες ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις και με ετήσιο επιτόκιο 5%. Ζητούνται: 1) Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο. 2) Ο πίνακας απόσβεσης του δανείου για τα 4 πρώτα χρόνια με τις μεθόδους: α) του σταθερού χρεολυσίου και β) του προοδευτικού χρεολυσίου.  
(Απ. R = 80.242)
3. Δάνειο 1.000.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις και με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 10%. Ζητούνται: 1) Το εξαμηνιαίο τοκοχρεολύσιο. 2) Ο Πίνακας απόσβεσης του δανείου για τα 3 πρώτα εξάμηνα με τις μεθόδους: α) του σταθερού χρεολυσίου και β) του προοδευτικού χρεολυσίου. 3) Το χρεολύσιο του 15ου εξαμήνου. 4) Το εξοφλημένο ποσό στο τέλος του 16ου εξαμήνου. 5) Το υπόλοιπο ανεξόφλητο στο τέλος του 12ου εξαμήνου. 6) Ο τόκος του 13ου εξαμήνου. 7) Το σύνολο των τόκων που θα πληρώσει ο λήπτης του δανείου.  
(Απ. 80.242 – 59.872 – 481.333 – 24.067 – 604.840)
4. Η Βιομηχανία «ΒΗΤΑ» Α.Ε. θα χρειαστεί 5.000.000 € την 1η Ιουνίου 2009, για να αντικαταστήσει τμήμα του μηχανικού εξοπλισμού της. Για να συγκεντρώσει το πιο πάνω ποσό την 1.6.2009 η βιομηχανία πρέπει να καταθέτει κάθε χρόνο σε μια Τράπεζα ορισμένα χρηματικά ποσά με επιτόκιο 8%. Αν η πρώτη κατάθεση γίνει την 1.6.2004 και η τελευταία την 1.6.2009, ποιο πρέπει να είναι το ύψος κάθε κατάθεσης;  
(Απ. 681.577)
5. Δάνειο 1.000.000 € πρέπει να εξοφληθεί σε 20 ίσες ετήσιες δόσεις. Κάθε δόση είναι 87.184,50 €. Με ποιο επιτόκιο υπολογίστηκαν οι δόσεις;  
(Απ. 0,06)

6. Ο Α. Ανδρέου, για να αγοράσει μηχανήματα, δανείστηκε 1.800.000 €. Το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί με 10 ετήσιες δόσεις. Κάθε δόση είναι 268.256 €. Με ποιο επιτόκιο υπολογίστηκε κάθε δόση;

(Απ. 0,08)

7. Η απόσβεση δανείου 2.000.000 € με 5% σε 10 έτη γίνεται με το Γαλλικό σύστημα. Ποια είναι η ετήσια δόση και ποιο το υπόλοιπο του χρέους μετά την πληρωμή και της 8ης δόσης;

(Απ. 259.000 – 481.690)

8. Να βρεθεί ποιο είναι το ποσό του δανείου, το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια, με τη Γαλλική μέθοδο απόσβεσης με 8%, αν ο τόκος του όγδοου τοκοχρεολυσίου είναι 30.725 €.

(Απ. 1.000.000)

9. Ο έμπορος Ε θέλει να δανειστεί 2.000.000 € για 6 χρόνια. Η Τράπεζα Χ δανείζει με 5,5%, αν το δάνειο εξοφληθεί με ίσες ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις. Η Τράπεζα Ψ δανείζει με 5% αν οι τόκοι καταβάλλονται κάθε χρόνο και το δανεισμένο ποσό επιστραφεί στο τέλος των 6 ετών, και για την ανασύσταση του δανεισμένου ποσού ο Ε πρέπει να κάνει ίσες ετήσιες καταθέσεις με 3%. Ποιο σχέδιο δανεισμού είναι φθηνότερο και πόσα χρήματα εξοικονομεί ο Ε, αν τελικά δανειστεί;

(Απ.  $R_x = 400.358$ ,  $R_\psi = 409.195$ . Το σχέδιο δανεισμού της Τράπεζας Χ είναι φθηνότερο κατά 8.837 €).





# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ



## Α) Ελληνόγλωσση:

1. Αποστολόπουλου, Θ. «Οικονομικά Μαθηματικά», Τεύχη Α - Β, Αθήνα 1978.
2. Αποστολόπουλου, Θ. «Οικονομικά Μαθηματικά και Στοιχεία Τραπεζικών Εργασιών», Αθήνα 1998.
3. Αποστολόπουλου, Θ. «Λυμένα προβλήματα Οικονομικών Μαθηματικών και Πρακτικής Αριθμητικής», Αθήνα 1999.
4. Αλεξανδρή, Ν. «Οικονομικά Μαθηματικά», Εκδ. «Σταμούλη», Πειραιάς 1985.
5. Αλεξανδρή Ν., Γεωργουδάκη Σ., Καΐτσα Γ., «Οικονομικά Μαθηματικά», ΟΕΔΒ, Αθήνα.
6. Κεραμιδά, Τ. «Οικονομικά Μαθηματικά», Τόμοι Α - Β, «Παπαζήσης», Αθήνα 1962.
7. Κουμούση, Ι. «Οικονομικά Μαθηματικά», Εκδ. ΟΕΔΒ, Αθήνα 1985.
8. Μαργαρίτη, Ε. «Οικονομικά Μαθηματικά» Τόμοι Ι-ΙΙ, Αθήνα 1964.
9. Οικονομόπουλου, Ι. «Οικονομικά Μαθηματικά», Εκδ. ΟΕΔΒ, Αθήνα 1983.
10. Παπαμιχαήλ, Δ. «Οικονομικά Μαθηματικά», Αθήνα 1980.
11. Παπούλη, Ε. «Φροντιστηριακά Μαθήματα Οικονομικών Μαθηματικών», Αθήνα 1960.
12. Παπαευθυμίου, Γ. «Φροντιστηριακά παραδόσεις Οικονομικών Μαθηματικών», Αθήνα 1960.

13. Στεριώτη, Π. «Οικονομικά Μαθηματικά», Τόμ. Ι, Αθήνα 1978.
14. Σφακιανού, Γ. & Π. «Οικονομικά Μαθηματικά», «Interbooks», Αθήνα 1987.
15. Χρυσοκέρη, Ι. «Σύστημα Λελυμένων Ασκήσεων Οικονομικών Μαθηματικών, Τεύχη Α, Β, Γ, Δ, Αθήνα 1943 - 1946.

## **B) Ξενόγλωσση:**

1. Ayres, F. "Theory and Problems of Mathematics of Finance", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, N.Y. 1963.
2. Beighey, C. Gordon, G. – Borghart, C. "Mathematics for Business", McGraw-Hill, N.Y. 1965.
3. Cissell, R & Cissell, H. "Mathematics of Finance", 4th Edition, Houghton Mifflin Co., Boston, Mass. 1973.
4. Donald, D., "Compound Interest and Annuities Certain", Heinemann, London, 1984.
5. Harper, F. "Unified Mathematics of Finance", American Society of Pension Actuaries, 1976.
6. Mc Cutcheon, J. and Scott, W. "An Introduction to the Mathematics of Finance", Heinemann, London.
7. Nartis, E. "An Introduction to Mathematics of Finance", Glory Book - Economist, Athens 1990.
8. Piper, E.B. & Gruber, J. "Applied Business Mathematics", South-Western Pubi. Co., Ohio 1973.
9. Rice, L.G. - Boyd, A.C. & Blair, M.F. "Business Mathematics for colleges", South-Western, Ohio.
10. Rosenberg, R.R. & Lewis, H. "Business Mathematics", Mc Graw-Hill, N.Y. 1973.
11. Stelson, H. "Mathematics of Finance", D. Van Nostrand Co., 1967.

# ΠΙΝΑΚΕΣ\*

## ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ - ΠΑΝΤΩΝ - ΧΡΕΟΛΥΣΙΩΝ

---

\* Οι πίνακες αυτοί έχουν ληφθεί από το βιβλίο: «CRC Standard Mathematical Tables» 18th Edition του W.H. Beyer (CRC Press, Inc. 18901 Cranwood Parkway, Cleveland, Ohio, U.S.A.) με την άδεια του εκδότη

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΔΗΓΙΕΣ

### ΠΙΝΑΚΑΣ Ι ..... 211

Ο Πίνακας Ι παρέχει την τελική αξία κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί  $n$  ακέραιες χρονικές περιόδους. Δηλαδή ο Πίνακας Ι δίνει τα εξαγόμενα του διώνυμου  $(1 + i)^n$  για τα εξής  $i$  και  $n$ :

$i = 0,0025$  έως  $i = 0,03$  και  $n = 1$  έως  $n = 100$   
 $i = 0,035$  έως  $i = 0,20$  και  $n = 1$  έως  $n = 50$

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ ..... 222

Ο Πίνακας ΙΙ παρέχει την τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί  $\mu/12$  κάθε περιόδου. Δηλαδή ο Πίνακας ΙΙ δίνει τα εξαγόμενα του διώνυμου  $(1 + i)^{\mu/12}$  για  $\mu = 1$  έως  $\mu = 11$  και για  $i = 0,0025$  έως  $i = 0,12$ .

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ ..... 224

Ο Πίνακας ΙΙΙ δίνει την παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα. Δηλαδή ο Πίνακας ΙΙΙ παρέχει τα εξαγόμενα της παράστασης:

$$U^n = (1 + i)^{-n} = \frac{1}{(1 + i)^n}$$

για τα εξής  $i$  και  $n$ :

$i = 0,0025$  έως  $i = 0,03$  και  $n = 1$  έως  $n = 100$   
 $i = 0,035$  έως  $i = 0,20$  και  $n = 1$  έως  $n = 50$

**ΠΙΝΑΚΑΣ IV ..... 235**

Ο Πίνακας IV δίνει την αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  όρων μιας νομισματικής μονάδας. Δηλαδή ο Πίνακας IV δίνει τα εξαγόμενα της παράστασης:

$$\alpha_{n|i} = \frac{1 - U^n}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

για τα ακόλουθα  $i$  και  $n$ :

$i = 0,0025$  έως  $i = 0,03$  και  $n = 1$  έως  $n = 100$

$i = 0,035$  έως  $i = 0,20$  και  $n = 1$  έως  $n = 50$

Αν τώρα θέλουμε να βρούμε την τιμή της  $\alpha_{n|i}$  για  $i = 0,09, 0,10, \dots, 0,20$ , τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα III. Αν π.χ. θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης:

$$\alpha_{20|0,12} = \frac{1 - U^{20}}{0,12} \quad (1)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα III, με  $i = 0,12$  και  $n = 20$ , βρίσκουμε:  $U^{20} = 0,10366677$ .

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_{20|0,12} = \frac{1 - 0,10366677}{0,12} = 7,469444$$

**ΠΙΝΑΚΑΣ V ..... 243**

Ο Πίνακας V δίνει την τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  όρων μιας νομισματικής μονάδας. Δηλαδή ο Πίνακας V δίνει τα εξαγόμενα της παράστασης:

$$S_{n|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

για τα ακόλουθα  $i$  και  $n$ :

$i = 0,0025$  έως  $i = 0,03$  και  $n = 1$  έως  $n = 100$

$i = 0,035$  έως  $i = 0,20$  και  $n = 1$  έως  $n = 50$

Αν τώρα θέλουμε να βρούμε την τιμή  $S_{n|i}$  για  $i = 0,09, 0,10, \dots, 0,20$ , τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα I. Αν π.χ. θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης:

$$S_{\overline{20}|0,12} = \frac{(1,12)^{20} - 1}{0,12} \quad (2)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα I με  $i = 0,12$  και  $n = 20$  βρίσκουμε:  $(1,12)^{20} = 9,6462926$ .

Αντικαθιστώντας τώρα στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$S_{\overline{20}|0,12} = \frac{9,6462926 - 1}{0,12} = 72,052438$$

## ΠΙΝΑΚΑΣ VI ..... 251

Ο Πίνακας VI δίνει το χρεολύσιο μιας νομισματικής μονάδας, δηλαδή το ποσό που πρέπει να καταβάλεται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, για να εξοφληθεί δάνειο μιας νομισματικής μονάδας. Ο Πίνακας VI δίνει τα εξαγόμενα της παράστασης:

$$P_{\overline{n}|i} = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

για  $i = 0,0025$  έως  $i = 0,08$  και  $n = 1$  έως  $n = 100$ .

Αν τώρα θέλουμε να βρούμε την τιμή του  $P_{\overline{n}|i}$  για  $i = 0,09, 0,10, \dots, 0,20$ , τότε χρησιμοποιούμε τον Πίνακα I. Αν π.χ. θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης:

$$P_{\overline{20}|0,12} = \frac{0,12}{(1,12)^{20} - 1} \quad (3)$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής: Στον Πίνακα I με  $i = 0,12$  και  $n = 20$  βρίσκουμε:  $(1,12)^{20} = 9,6462926$ .

Αντικαθιστούμε πλέον στη σχέση (3) και βρίσκουμε:

$$P_{\overline{20}|0,12} = \frac{0,12}{9,6462926} = 0,0138787$$

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.  $(1 + i)^n$ 

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| n  | .0025 (1%)  | .004167 (1%) | .005 (1%)   | .005833 (1%) | .0075 (1%)  |
|----|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|
| 1  | 1.0025 0000 | 1.0041 6667  | 1.0050 0000 | 1.0058 3333  | 1.0075 0000 |
| 2  | 1.0050 0625 | 1.0083 5069  | 1.0100 2500 | 1.0117 0069  | 1.0150 5625 |
| 3  | 1.0075 1877 | 1.0125 5216  | 1.0150 7513 | 1.0176 0228  | 1.0226 6917 |
| 4  | 1.0100 3756 | 1.0167 7112  | 1.0201 5050 | 1.0235 3830  | 1.0303 3919 |
| 5  | 1.0125 6266 | 1.0210 0767  | 1.0252 5125 | 1.0295 0894  | 1.0380 6673 |
| 6  | 1.0150 9406 | 1.0252 6187  | 1.0303 7751 | 1.0355 1440  | 1.0458 5224 |
| 7  | 1.0176 3180 | 1.0295 3379  | 1.0355 2940 | 1.0415 5490  | 1.0536 9612 |
| 8  | 1.0201 7588 | 1.0338 2352  | 1.0407 0704 | 1.0476 3064  | 1.0615 9885 |
| 9  | 1.0227 2632 | 1.0381 3111  | 1.0459 1058 | 1.0537 4182  | 1.0695 6084 |
| 10 | 1.0252 8313 | 1.0424 5666  | 1.0511 4013 | 1.0598 8865  | 1.0775 8255 |
| 11 | 1.0278 4634 | 1.0468 0023  | 1.0563 9583 | 1.0660 7133  | 1.0856 6441 |
| 12 | 1.0304 1596 | 1.0511 6190  | 1.0616 7781 | 1.0722 9008  | 1.0938 0890 |
| 13 | 1.0329 9200 | 1.0555 4174  | 1.0669 8620 | 1.0785 4511  | 1.1020 1045 |
| 14 | 1.0355 7448 | 1.0599 3983  | 1.0723 2113 | 1.0848 3662  | 1.1102 7553 |
| 15 | 1.0381 6341 | 1.0643 5625  | 1.0778 8274 | 1.0911 6483  | 1.1186 0259 |
| 16 | 1.0407 5882 | 1.0687 9106  | 1.0830 7115 | 1.0975 2996  | 1.1269 9211 |
| 17 | 1.0433 6072 | 1.0732 4436  | 1.0884 8651 | 1.1039 3222  | 1.1354 4455 |
| 18 | 1.0459 6912 | 1.0777 1621  | 1.0939 2894 | 1.1103 7182  | 1.1439 6039 |
| 19 | 1.0485 8404 | 1.0822 0670  | 1.0993 9858 | 1.1168 4899  | 1.1525 4099 |
| 20 | 1.0512 0550 | 1.0867 1589  | 1.1048 9558 | 1.1233 6395  | 1.1611 8414 |
| 21 | 1.0538 3352 | 1.0912 4387  | 1.1104 2006 | 1.1299 1690  | 1.1698 9302 |
| 22 | 1.0564 6810 | 1.0957 9072  | 1.1159 7216 | 1.1365 0808  | 1.1786 6722 |
| 23 | 1.0591 0927 | 1.1003 5652  | 1.1215 5202 | 1.1431 3771  | 1.1875 0723 |
| 24 | 1.0617 5704 | 1.1049 4134  | 1.1271 5978 | 1.1498 0602  | 1.1964 1353 |
| 25 | 1.0644 1144 | 1.1095 4526  | 1.1327 9558 | 1.1565 1322  | 1.2053 8663 |
| 26 | 1.0670 7247 | 1.1141 6836  | 1.1384 5955 | 1.1632 5955  | 1.2144 2703 |
| 27 | 1.0697 4015 | 1.1188 1073  | 1.1441 5185 | 1.1700 4523  | 1.2235 3523 |
| 28 | 1.0724 1450 | 1.1234 7244  | 1.1498 7261 | 1.1768 7049  | 1.2327 1175 |
| 29 | 1.0750 9553 | 1.1281 5358  | 1.1556 2197 | 1.1837 3557  | 1.2419 5709 |
| 30 | 1.0777 8327 | 1.1328 5422  | 1.1614 0008 | 1.1906 4069  | 1.2512 7176 |
| 31 | 1.0804 7773 | 1.1375 7444  | 1.1672 0708 | 1.1975 8610  | 1.2606 5630 |
| 32 | 1.0831 7892 | 1.1423 1434  | 1.1730 4312 | 1.2045 7202  | 1.2701 1122 |
| 33 | 1.0858 8687 | 1.1470 7398  | 1.1789 0833 | 1.2115 9869  | 1.2796 3706 |
| 34 | 1.0886 0159 | 1.1518 5346  | 1.1848 0288 | 1.2186 6634  | 1.2892 3434 |
| 35 | 1.0913 2309 | 1.1566 5284  | 1.1907 2689 | 1.2257 7523  | 1.2989 0359 |
| 36 | 1.0940 5140 | 1.1614 7223  | 1.1966 8052 | 1.2329 2559  | 1.3086 4537 |
| 37 | 1.0967 8653 | 1.1663 1170  | 1.2026 6393 | 1.2401 1765  | 1.3184 6021 |
| 38 | 1.0995 2850 | 1.1711 7133  | 1.2086 7725 | 1.2473 5167  | 1.3283 4866 |
| 39 | 1.1022 7732 | 1.1760 5121  | 1.2147 2063 | 1.2546 2789  | 1.3383 1128 |
| 40 | 1.1050 3301 | 1.1809 5142  | 1.2207 9424 | 1.2619 4655  | 1.3483 4861 |
| 41 | 1.1077 9559 | 1.1858 7206  | 1.2268 9821 | 1.2693 0791  | 1.3584 6123 |
| 42 | 1.1105 6508 | 1.1908 1319  | 1.2330 3270 | 1.2767 1220  | 1.3686 4969 |
| 43 | 1.1133 4149 | 1.1957 7491  | 1.2391 9786 | 1.2841 5969  | 1.3789 1456 |
| 44 | 1.1161 2485 | 1.2007 5731  | 1.2453 9385 | 1.2916 5062  | 1.3892 5642 |
| 45 | 1.1189 1516 | 1.2057 6046  | 1.2516 2082 | 1.2991 8525  | 1.3996 7584 |
| 46 | 1.1217 1245 | 1.2107 8446  | 1.2578 7892 | 1.3067 6383  | 1.4101 7341 |
| 47 | 1.1245 1673 | 1.2158 2940  | 1.2641 6832 | 1.3143 8682  | 1.4207 4971 |
| 48 | 1.1273 2802 | 1.2208 9536  | 1.2704 8916 | 1.3220 5388  | 1.4314 0533 |
| 49 | 1.1301 4634 | 1.2259 8242  | 1.2768 4161 | 1.3297 6586  | 1.4421 4087 |
| 50 | 1.1329 7171 | 1.2310 9068  | 1.2832 2581 | 1.3375 2283  | 1.4529 5693 |

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.  $(1 + i)^n$ 

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| n   | .0025 ( $\frac{1}{4}\%$ ) | .004167 ( $\frac{1}{2}\%$ ) | .005 ( $\frac{1}{2}\%$ ) | .005833 ( $\frac{3}{4}\%$ ) | .0075 ( $1\%$ ) |
|-----|---------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------------|-----------------|
| 50  | 1.1329 7171               | 1.2310 9068                 | 1.2832 2581              | 1.3375 2283                 | 1.4529 5693     |
| 51  | 1.1358 0414               | 1.2362 2022                 | 1.2896 4194              | 1.3453 2504                 | 1.4638 5411     |
| 52  | 1.1386 4365               | 1.2413 7114                 | 1.2960 9015              | 1.3531 7277                 | 1.4748 3301     |
| 53  | 1.1414 9026               | 1.2465 4352                 | 1.3025 7060              | 1.3610 6628                 | 1.4858 9426     |
| 54  | 1.1443 4398               | 1.2517 3745                 | 1.3090 8346              | 1.3690 0583                 | 1.4970 3847     |
| 55  | 1.1472 0484               | 1.2569 5302                 | 1.3156 2887              | 1.3769 9170                 | 1.5082 6626     |
| 56  | 1.1500 7285               | 1.2621 9033                 | 1.3222 0702              | 1.3850 2415                 | 1.5195 7825     |
| 57  | 1.1529 4804               | 1.2674 4946                 | 1.3288 1805              | 1.3931 0346                 | 1.5309 7509     |
| 58  | 1.1558 3041               | 1.2727 3050                 | 1.3354 6214              | 1.4012 2990                 | 1.5424 5740     |
| 59  | 1.1587 1998               | 1.2780 3354                 | 1.3421 3946              | 1.4094 0374                 | 1.5540 2583     |
| 60  | 1.1616 1678               | 1.2833 5868                 | 1.3488 5015              | 1.4176 2526                 | 1.5656 8103     |
| 61  | 1.1645 2082               | 1.2887 0601                 | 1.3555 9440              | 1.4258 9474                 | 1.5774 2363     |
| 62  | 1.1674 3213               | 1.2940 7561                 | 1.3623 7238              | 1.4342 1246                 | 1.5892 5431     |
| 63  | 1.1703 5071               | 1.2994 6760                 | 1.3691 8424              | 1.4425 7870                 | 1.6011 7372     |
| 64  | 1.1732 7658               | 1.3048 8204                 | 1.3760 3016              | 1.4509 9374                 | 1.6131 8252     |
| 65  | 1.1762 0977               | 1.3103 1905                 | 1.3829 1031              | 1.4594 5787                 | 1.6252 8139     |
| 66  | 1.1791 5030               | 1.3157 7872                 | 1.3898 2486              | 1.4679 7138                 | 1.6374 7100     |
| 67  | 1.1820 9817               | 1.3212 6113                 | 1.3967 7399              | 1.4765 3454                 | 1.6497 5203     |
| 68  | 1.1850 5342               | 1.3267 6638                 | 1.4037 5785              | 1.4851 4766                 | 1.6621 2517     |
| 69  | 1.1880 1605               | 1.3322 9458                 | 1.4107 7664              | 1.4938 1102                 | 1.6745 9111     |
| 70  | 1.1909 8609               | 1.3378 4580                 | 1.4178 3053              | 1.5025 2492                 | 1.6871 5055     |
| 71  | 1.1939 6356               | 1.3434 2016                 | 1.4249 1968              | 1.5112 8965                 | 1.6998 0418     |
| 72  | 1.1969 4847               | 1.3490 1774                 | 1.4320 4428              | 1.5201 0550                 | 1.7125 5271     |
| 73  | 1.1999 4084               | 1.3546 3865                 | 1.4392 0450              | 1.5289 7279                 | 1.7253 9685     |
| 74  | 1.2029 4069               | 1.3602 8298                 | 1.4464 0052              | 1.5378 9179                 | 1.7383 3733     |
| 75  | 1.2059 4804               | 1.3659 5082                 | 1.4536 3252              | 1.5468 6283                 | 1.7513 7486     |
| 76  | 1.2089 6291               | 1.3716 4229                 | 1.4609 0069              | 1.5558 8620                 | 1.7645 1017     |
| 77  | 1.2119 8532               | 1.3773 5746                 | 1.4682 0519              | 1.5649 6220                 | 1.7777 4400     |
| 78  | 1.2150 1528               | 1.3830 9645                 | 1.4755 4622              | 1.5740 9115                 | 1.7910 7708     |
| 79  | 1.2180 5282               | 1.3888 5935                 | 1.4829 2395              | 1.5832 7334                 | 1.8045 1015     |
| 80  | 1.2210 9795               | 1.3946 4627                 | 1.4903 3857              | 1.5925 0910                 | 1.8180 4398     |
| 81  | 1.2241 5070               | 1.4004 5729                 | 1.4977 9026              | 1.6017 9874                 | 1.8316 7931     |
| 82  | 1.2272 1108               | 1.4062 9253                 | 1.5052 7921              | 1.6111 4257                 | 1.8454 1691     |
| 83  | 1.2302 7910               | 1.4121 5209                 | 1.5128 0581              | 1.6205 4090                 | 1.8592 5753     |
| 84  | 1.2333 5480               | 1.4180 3605                 | 1.5203 6964              | 1.6299 9405                 | 1.8732 0196     |
| 85  | 1.2364 3819               | 1.4239 4454                 | 1.5279 7148              | 1.6395 0235                 | 1.8872 5098     |
| 86  | 1.2395 2928               | 1.4298 7764                 | 1.5356 1134              | 1.6490 6612                 | 1.9014 0536     |
| 87  | 1.2426 2811               | 1.4358 3546                 | 1.5432 8940              | 1.6586 8567                 | 1.9156 6590     |
| 88  | 1.2457 3468               | 1.4418 1811                 | 1.5510 0585              | 1.6683 6134                 | 1.9300 3339     |
| 89  | 1.2488 4901               | 1.4478 2568                 | 1.5587 6087              | 1.6780 9344                 | 1.9445 0865     |
| 90  | 1.2519 7114               | 1.4538 5829                 | 1.5665 5468              | 1.6878 8232                 | 1.9590 9246     |
| 91  | 1.2551 0106               | 1.4599 1603                 | 1.5743 8745              | 1.6977 2830                 | 1.9737 8565     |
| 92  | 1.2582 3882               | 1.4659 9902                 | 1.5822 5939              | 1.7076 3172                 | 1.9885 8905     |
| 93  | 1.2613 8441               | 1.4721 0735                 | 1.5901 7089              | 1.7175 9290                 | 2.0035 0346     |
| 94  | 1.2645 3787               | 1.4782 4113                 | 1.5981 2154              | 1.7276 1219                 | 2.0185 2974     |
| 95  | 1.2676 9922               | 1.4844 0047                 | 1.6061 1215              | 1.7376 8993                 | 2.0336 6871     |
| 96  | 1.2708 6847               | 1.4905 8547                 | 1.6141 4271              | 1.7478 2646                 | 2.0489 2123     |
| 97  | 1.2740 4564               | 1.4967 9624                 | 1.6222 1342              | 1.7580 2211                 | 2.0642 8814     |
| 98  | 1.2772 3075               | 1.5030 3289                 | 1.6303 2449              | 1.7682 7724                 | 2.0797 7030     |
| 99  | 1.2804 2383               | 1.5092 9553                 | 1.6384 7611              | 1.7785 9219                 | 2.0953 6858     |
| 100 | 1.2836 2489               | 1.5155 8426                 | 1.6466 6849              | 1.7889 6731                 | 2.1110 8384     |

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.  $(1 + i)^n$ 

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| n  | .01 (1%)    | .0125 (1¼%) | .0125 (1½%) | .015 (1¾%)  | .0175 (1¾%) |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | 1.0100 0000 | 1.0112 5000 | 1.0125 0000 | 1.0150 0000 | 1.0175 0000 |
| 2  | 1.0201 0000 | 1.0226 2656 | 1.0251 5625 | 1.0302 2500 | 1.0355 0625 |
| 3  | 1.0303 0100 | 1.0341 3111 | 1.0379 7070 | 1.0456 7838 | 1.0534 2411 |
| 4  | 1.0406 0401 | 1.0457 6509 | 1.0509 4534 | 1.0613 6355 | 1.0718 5903 |
| 5  | 1.0510 1005 | 1.0575 2994 | 1.0640 8215 | 1.0772 8400 | 1.0906 1656 |
| 6  | 1.0615 2015 | 1.0694 2716 | 1.0773 8318 | 1.0934 4326 | 1.1097 0235 |
| 7  | 1.0721 3535 | 1.0814 5821 | 1.0908 5047 | 1.1098 4491 | 1.1291 2215 |
| 8  | 1.0828 5671 | 1.0936 2462 | 1.1044 8610 | 1.1264 9259 | 1.1488 8178 |
| 9  | 1.0936 8527 | 1.1059 2789 | 1.1182 9218 | 1.1433 8998 | 1.1689 8721 |
| 10 | 1.1046 2213 | 1.1183 6958 | 1.1322 7083 | 1.1605 4083 | 1.1894 4449 |
| 11 | 1.1156 6835 | 1.1309 5124 | 1.1464 2422 | 1.1779 4894 | 1.2102 5977 |
| 12 | 1.1268 2503 | 1.1436 7444 | 1.1607 5452 | 1.1956 1817 | 1.2314 3931 |
| 13 | 1.1380 9328 | 1.1565 4078 | 1.1752 6395 | 1.2135 6244 | 1.2529 8950 |
| 14 | 1.1494 7421 | 1.1695 5186 | 1.1899 5475 | 1.2317 5573 | 1.2749 1682 |
| 15 | 1.1609 6896 | 1.1827 0932 | 1.2048 2918 | 1.2502 3207 | 1.2972 2786 |
| 16 | 1.1725 7864 | 1.1960 1480 | 1.2198 8955 | 1.2689 8555 | 1.3199 2935 |
| 17 | 1.1843 0443 | 1.2094 6997 | 1.2351 3817 | 1.2880 2033 | 1.3430 2811 |
| 18 | 1.1961 4748 | 1.2230 7650 | 1.2505 7739 | 1.3073 4064 | 1.3665 3111 |
| 19 | 1.2081 0895 | 1.2368 3611 | 1.2662 0961 | 1.3269 5075 | 1.3904 4540 |
| 20 | 1.2201 9004 | 1.2507 5052 | 1.2820 3723 | 1.3468 5501 | 1.4147 7820 |
| 21 | 1.2323 9194 | 1.2648 2146 | 1.2980 6270 | 1.3670 5783 | 1.4395 3681 |
| 22 | 1.2447 1586 | 1.2790 5071 | 1.3142 8848 | 1.3875 6370 | 1.4647 2871 |
| 23 | 1.2571 6302 | 1.2934 4003 | 1.3307 1709 | 1.4083 7715 | 1.4903 6146 |
| 24 | 1.2697 3465 | 1.3079 9123 | 1.3473 5105 | 1.4295 0281 | 1.5164 4279 |
| 25 | 1.2824 3200 | 1.3227 0613 | 1.3641 9294 | 1.4509 4535 | 1.5429 8054 |
| 26 | 1.2952 5631 | 1.3375 8657 | 1.3812 4535 | 1.4727 0953 | 1.5699 8269 |
| 27 | 1.3082 0888 | 1.3526 3442 | 1.3985 1092 | 1.4948 0018 | 1.5974 5739 |
| 28 | 1.3212 9097 | 1.3678 5156 | 1.4159 9230 | 1.5172 2218 | 1.6254 1290 |
| 29 | 1.3345 0388 | 1.3832 3989 | 1.4336 9221 | 1.5399 8051 | 1.6538 5762 |
| 30 | 1.3478 4892 | 1.3988 0134 | 1.4516 1336 | 1.5630 8022 | 1.6828 0013 |
| 31 | 1.3613 2740 | 1.4145 3785 | 1.4697 5853 | 1.5865 2642 | 1.7122 4913 |
| 32 | 1.3749 4068 | 1.4304 5140 | 1.4881 3051 | 1.6103 2432 | 1.7422 1349 |
| 33 | 1.3886 9009 | 1.4465 4398 | 1.5067 3214 | 1.6344 7918 | 1.7727 0223 |
| 34 | 1.4025 7699 | 1.4628 1760 | 1.5255 6629 | 1.6589 9637 | 1.8037 2452 |
| 35 | 1.4166 0276 | 1.4792 7430 | 1.5446 3587 | 1.6838 8132 | 1.8352 8970 |
| 36 | 1.4307 6878 | 1.4959 1613 | 1.5639 4382 | 1.7091 3954 | 1.8674 0727 |
| 37 | 1.4450 7647 | 1.5127 4519 | 1.5834 9312 | 1.7347 7663 | 1.9000 8689 |
| 38 | 1.4595 2724 | 1.5297 6357 | 1.6032 8678 | 1.7607 9828 | 1.9333 3841 |
| 39 | 1.4741 2251 | 1.5469 7341 | 1.6233 2787 | 1.7872 1025 | 1.9671 7184 |
| 40 | 1.4888 3373 | 1.5643 7687 | 1.6436 1946 | 1.8140 1841 | 2.0015 9734 |
| 41 | 1.5037 5237 | 1.5819 7611 | 1.6641 6471 | 1.8412 2868 | 2.0366 2530 |
| 42 | 1.5187 8989 | 1.5997 7334 | 1.6849 6677 | 1.8688 4712 | 2.0722 6624 |
| 43 | 1.5339 7779 | 1.6177 7079 | 1.7060 2885 | 1.8965 7982 | 2.1085 3090 |
| 44 | 1.5493 1757 | 1.6359 7071 | 1.7273 5421 | 1.9253 3302 | 2.1454 3019 |
| 45 | 1.5648 1075 | 1.6543 7538 | 1.7489 4614 | 1.9542 1301 | 2.1829 7522 |
| 46 | 1.5804 5885 | 1.6729 8710 | 1.7708 0797 | 1.9835 2621 | 2.2211 7728 |
| 47 | 1.5962 6344 | 1.6918 0821 | 1.7929 4306 | 2.0132 7910 | 2.2600 4789 |
| 48 | 1.6122 2608 | 1.7108 4105 | 1.8153 5485 | 2.0434 7829 | 2.2995 9872 |
| 49 | 1.6283 4834 | 1.7300 8801 | 1.8380 4679 | 2.0741 3046 | 2.3398 4170 |
| 50 | 1.6446 3182 | 1.7495 5150 | 1.8610 2237 | 2.1052 4242 | 2.3807 8893 |

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.  $(1 + i)^n$ 

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| $n$ | .01 (1%)    | .0125 (1½%) | .015 (1¾%)  | .0175 (1¾%) | .0175 (1¾%) |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 50  | 1.6446 3182 | 1.7495 5150 | 1.8610 2237 | 2.1052 4242 | 2.3807 8893 |
| 51  | 1.6610 7814 | 1.7692 3395 | 1.8842 8515 | 2.1368 2106 | 2.4224 5274 |
| 52  | 1.6776 8892 | 1.7891 3784 | 1.9078 3872 | 2.1688 7337 | 2.4648 4566 |
| 53  | 1.6944 6581 | 1.8092 6564 | 1.9316 8670 | 2.2014 0647 | 2.5079 8046 |
| 54  | 1.7114 1047 | 1.8296 1988 | 1.9558 3279 | 2.2344 2757 | 2.5518 7012 |
| 55  | 1.7285 2457 | 1.8502 0310 | 1.9802 8070 | 2.2679 4398 | 2.5965 2785 |
| 56  | 1.7458 0982 | 1.8710 1788 | 2.0050 3420 | 2.3019 6314 | 2.6419 6708 |
| 57  | 1.7632 6792 | 1.8920 6684 | 2.0300 9713 | 2.3364 9259 | 2.6882 0151 |
| 58  | 1.7809 0060 | 1.9133 5259 | 2.0554 7335 | 2.3715 3998 | 2.7352 4503 |
| 59  | 1.7987 0960 | 1.9348 7780 | 2.0811 6676 | 2.4071 1308 | 2.7831 1182 |
| 60  | 1.8166 9670 | 1.9566 4518 | 2.1071 8135 | 2.4432 1978 | 2.8318 1628 |
| 61  | 1.8348 6367 | 1.9786 5744 | 2.1335 2111 | 2.4798 6807 | 2.8813 7306 |
| 62  | 1.8532 1230 | 2.0009 1733 | 2.1601 9013 | 2.5170 6609 | 2.9317 9709 |
| 63  | 1.8717 4443 | 2.0234 2765 | 2.1871 9250 | 2.5548 2208 | 2.9831 0354 |
| 64  | 1.8904 6187 | 2.0461 9121 | 2.2145 3241 | 2.5931 4442 | 3.0353 0785 |
| 65  | 1.9093 6649 | 2.0692 1087 | 2.2422 1407 | 2.6320 4158 | 3.0884 2574 |
| 66  | 1.9284 6015 | 2.0924 8949 | 2.2702 4174 | 2.6715 2221 | 3.1424 7319 |
| 67  | 1.9477 4475 | 2.1160 2999 | 2.2986 1976 | 2.7115 9504 | 3.1974 6647 |
| 68  | 1.9672 2220 | 2.1398 3533 | 2.3273 5251 | 2.7522 6896 | 3.2534 2213 |
| 69  | 1.9868 9442 | 2.1639 0848 | 2.3564 4442 | 2.7935 5300 | 3.3103 5702 |
| 70  | 2.0067 6337 | 2.1882 5245 | 2.3858 9997 | 2.8354 5629 | 3.3682 8827 |
| 71  | 2.0268 3100 | 2.2128 7029 | 2.4157 2372 | 2.8779 8814 | 3.4272 3331 |
| 72  | 2.0470 9931 | 2.2377 6508 | 2.4459 2027 | 2.9211 5796 | 3.4872 0990 |
| 73  | 2.0675 7031 | 2.2629 3994 | 2.4764 9427 | 2.9649 7533 | 3.5482 3607 |
| 74  | 2.0882 4601 | 2.2883 9801 | 2.5074 5045 | 3.0094 4996 | 3.6103 3020 |
| 75  | 2.1091 2847 | 2.3141 4249 | 2.5387 9358 | 3.0545 9171 | 3.6735 1098 |
| 76  | 2.1302 1975 | 2.3401 7659 | 2.5705 2850 | 3.1004 1059 | 3.7377 9742 |
| 77  | 2.1515 2195 | 2.3665 0358 | 2.6026 6011 | 3.1469 1674 | 3.8032 0888 |
| 78  | 2.1730 3717 | 2.3931 2675 | 2.6351 9336 | 3.1941 2050 | 3.8697 6503 |
| 79  | 2.1947 6754 | 2.4200 4942 | 2.6681 3327 | 3.2420 3230 | 3.9374 8592 |
| 80  | 2.2167 1522 | 2.4472 7498 | 2.7014 8494 | 3.2906 6279 | 4.0063 9192 |
| 81  | 2.2388 8237 | 2.4748 0682 | 2.7352 5350 | 3.3400 2273 | 4.0765 0378 |
| 82  | 2.2612 7119 | 2.5026 4840 | 2.7694 4417 | 3.3901 2307 | 4.1478 4260 |
| 83  | 2.2838 8390 | 2.5308 0319 | 2.8040 6222 | 3.4409 7492 | 4.2204 2984 |
| 84  | 2.3067 2274 | 2.5592 7473 | 2.8391 1300 | 3.4925 8954 | 4.2942 8737 |
| 85  | 2.3297 8997 | 2.5880 6657 | 2.8746 0191 | 3.5449 7838 | 4.3694 3740 |
| 86  | 2.3530 8787 | 2.6171 8232 | 2.9105 3444 | 3.5981 5306 | 4.4459 0255 |
| 87  | 2.3766 1875 | 2.6466 2562 | 2.9469 1612 | 3.6521 2535 | 4.5237 0584 |
| 88  | 2.4003 8494 | 2.6764 0016 | 2.9837 5257 | 3.7069 0723 | 4.6028 7070 |
| 89  | 2.4243 8879 | 2.7065 0966 | 3.0210 4948 | 3.7625 1084 | 4.6834 2093 |
| 90  | 2.4486 3267 | 2.7369 5789 | 3.0588 1260 | 3.8189 4851 | 4.7653 8080 |
| 91  | 2.4731 1900 | 2.7677 4867 | 3.0970 4775 | 3.8762 3273 | 4.8487 7496 |
| 92  | 2.4978 5019 | 2.7988 8584 | 3.1357 6085 | 3.9343 7622 | 4.9336 2853 |
| 93  | 2.5228 2869 | 2.8303 7331 | 3.1749 5786 | 3.9933 9187 | 5.0199 6703 |
| 94  | 2.5480 5698 | 2.8622 1501 | 3.2146 4483 | 4.0532 9275 | 5.1078 1645 |
| 95  | 2.5735 3755 | 2.8944 1492 | 3.2548 2789 | 4.1140 9214 | 5.1972 0324 |
| 96  | 2.5992 7293 | 2.9269 7709 | 3.2955 1324 | 4.1758 0352 | 5.2881 5429 |
| 97  | 2.6252 6565 | 2.9599 0559 | 3.3367 0716 | 4.2384 4057 | 5.3806 9699 |
| 98  | 2.6515 1831 | 2.9932 0452 | 3.3784 1600 | 4.3020 1718 | 5.4748 5919 |
| 99  | 2.6780 3349 | 3.0268 7807 | 3.4206 4620 | 4.3665 4744 | 5.5706 6923 |
| 100 | 2.7048 1383 | 3.0609 3045 | 3.4634 0427 | 4.4320 4565 | 5.6681 5594 |

**ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.  $(1 + i)^n$** 

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή οποία άνατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| n  | .02 (2%)    | .0225 (2¼%) | .025 (2½%)  | .0275 (2¾%) | .03 (3%)    |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1  | 1.0200 0000 | 1.0225 0000 | 1.0250 0000 | 1.0275 0000 | 1.0300 0000 |
| 2  | 1.0404 0000 | 1.0455 0625 | 1.0506 2500 | 1.0557 5625 | 1.0609 0000 |
| 3  | 1.0612 0800 | 1.0690 3014 | 1.0768 9063 | 1.0847 8955 | 1.0927 2700 |
| 4  | 1.0824 3216 | 1.0930 8332 | 1.1038 1289 | 1.1146 2126 | 1.1255 0881 |
| 5  | 1.1040 8080 | 1.1176 7769 | 1.1314 0821 | 1.1452 7334 | 1.1592 7407 |
| 6  | 1.1261 6242 | 1.1428 2544 | 1.1596 9342 | 1.1767 6836 | 1.1940 5230 |
| 7  | 1.1486 8567 | 1.1685 3901 | 1.1886 8575 | 1.2091 2949 | 1.2298 7387 |
| 8  | 1.1716 5938 | 1.1948 3114 | 1.2184 0290 | 1.2423 8055 | 1.2667 7008 |
| 9  | 1.1950 9257 | 1.2217 1484 | 1.2488 6297 | 1.2765 4602 | 1.3047 7318 |
| 10 | 1.2189 9442 | 1.2492 0343 | 1.2800 8454 | 1.3116 5103 | 1.3439 1638 |
| 11 | 1.2433 7431 | 1.2773 1050 | 1.3120 8666 | 1.3477 2144 | 1.3842 3387 |
| 12 | 1.2682 4179 | 1.3060 4999 | 1.3448 8882 | 1.3847 8378 | 1.4257 6089 |
| 13 | 1.2936 0663 | 1.3354 3611 | 1.3785 1104 | 1.4228 6533 | 1.4685 3371 |
| 14 | 1.3194 7876 | 1.3654 8343 | 1.4129 7382 | 1.4619 9413 | 1.5125 8972 |
| 15 | 1.3458 6834 | 1.3962 0680 | 1.4482 9817 | 1.5021 9896 | 1.5579 6742 |
| 16 | 1.3727 8571 | 1.4276 2146 | 1.4845 0562 | 1.5435 0944 | 1.6047 0644 |
| 17 | 1.4002 4142 | 1.4597 4294 | 1.5216 1826 | 1.5859 5595 | 1.6528 4763 |
| 18 | 1.4282 4625 | 1.4925 8716 | 1.5596 5872 | 1.6295 6973 | 1.7024 3306 |
| 19 | 1.4568 1117 | 1.5261 7037 | 1.5986 5019 | 1.6743 8290 | 1.7535 0605 |
| 20 | 1.4859 4740 | 1.5605 0920 | 1.6386 1644 | 1.7204 2843 | 1.8061 1123 |
| 21 | 1.5156 6634 | 1.5958 2066 | 1.6795 8185 | 1.7677 4021 | 1.8602 9457 |
| 22 | 1.5459 7967 | 1.6315 2212 | 1.7215 7140 | 1.8163 5307 | 1.9161 0341 |
| 23 | 1.5768 9926 | 1.6682 3137 | 1.7646 1068 | 1.8663 0278 | 1.9735 8651 |
| 24 | 1.6084 3725 | 1.7057 6670 | 1.8087 2595 | 1.9176 2610 | 2.0327 9411 |
| 25 | 1.6406 0599 | 1.7441 4632 | 1.8539 4410 | 1.9703 6082 | 2.0937 7793 |
| 26 | 1.6734 1811 | 1.7833 8962 | 1.9002 9270 | 2.0245 4575 | 2.1565 9127 |
| 27 | 1.7068 8648 | 1.8235 1588 | 1.9478 0002 | 2.0802 2075 | 2.2212 8901 |
| 28 | 1.7410 2421 | 1.8645 4499 | 1.9964 9502 | 2.1374 2682 | 2.2879 2768 |
| 29 | 1.7758 4469 | 1.9064 9725 | 2.0464 0739 | 2.1962 0606 | 2.3565 6551 |
| 30 | 1.8113 6158 | 1.9493 9344 | 2.0975 6758 | 2.2566 0173 | 2.4272 6247 |
| 31 | 1.8475 8882 | 1.9932 5479 | 2.1500 0677 | 2.3186 5828 | 2.5000 8035 |
| 32 | 1.8845 4059 | 2.0381 0303 | 2.2037 5694 | 2.3824 2138 | 2.5750 8276 |
| 33 | 1.9222 3140 | 2.0839 6034 | 2.2588 5086 | 2.4479 3797 | 2.6523 3524 |
| 34 | 1.9606 7603 | 2.1308 4945 | 2.3153 2213 | 2.5152 5626 | 2.7319 0530 |
| 35 | 1.9998 8955 | 2.1787 9356 | 2.3732 0519 | 2.5844 2581 | 2.8138 6245 |
| 36 | 2.0398 8734 | 2.2278 1642 | 2.4325 3532 | 2.6554 9752 | 2.8982 7833 |
| 37 | 2.0806 8509 | 2.2779 4229 | 2.4933 4870 | 2.7285 2370 | 2.9852 2668 |
| 38 | 2.1222 9879 | 2.3291 9599 | 2.5556 8242 | 2.8035 5810 | 3.0747 8348 |
| 39 | 2.1647 4477 | 2.3816 0290 | 2.6195 7448 | 2.8806 5595 | 3.1670 2698 |
| 40 | 2.2080 3966 | 2.4351 8897 | 2.6850 6384 | 2.9598 7399 | 3.2620 3779 |
| 41 | 2.2522 0046 | 2.4899 8072 | 2.7521 9043 | 3.0412 7052 | 3.3598 9893 |
| 42 | 2.2972 4447 | 2.5460 0528 | 2.8209 9520 | 3.1249 0546 | 3.4606 9589 |
| 43 | 2.3431 8936 | 2.6032 9040 | 2.8915 2008 | 3.2108 4036 | 3.5645 1677 |
| 44 | 2.3900 5314 | 2.6618 6444 | 2.9638 0808 | 3.2991 3847 | 3.6714 5227 |
| 45 | 2.4378 5421 | 2.7217 5639 | 3.0379 0328 | 3.3898 6478 | 3.7815 9584 |
| 46 | 2.4866 1129 | 2.7829 9590 | 3.1138 5086 | 3.4830 8606 | 3.8950 4372 |
| 47 | 2.5363 4352 | 2.8456 1331 | 3.1916 9713 | 3.5788 7093 | 4.0118 9503 |
| 48 | 2.5870 7039 | 2.9096 3961 | 3.2714 8956 | 3.6772 8988 | 4.1322 5188 |
| 49 | 2.6388 1179 | 2.9751 0650 | 3.3532 7680 | 3.7784 1535 | 4.2562 1944 |
| 50 | 2.6915 8803 | 3.0420 4640 | 3.4371 0872 | 3.8823 2177 | 4.3839 0602 |

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.  $(1 + i)^n$ 

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| $n$ | .02 (2%)    | .0225 (2¼%) | .025 (2½%)   | .0275 (2¾%)  | .03 (3%)     |
|-----|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| 50  | 2 6915 8803 | 3 0420 4640 | 3 4371 0872  | 3 8823 2177  | 4 3839 0602  |
| 51  | 2 7454 1979 | 3 1104 9244 | 3 5230 3644  | 3 9890 8562  | 4 5154 2320  |
| 52  | 2 8003 2819 | 3 1804 7852 | 3 6111 1235  | 4 0987 8547  | 4 6508 8590  |
| 53  | 2 8563 3475 | 3 2520 3929 | 3 7013 9016  | 4 2115 0208  | 4 7904 1247  |
| 54  | 2 9134 6144 | 3 3252 1017 | 3 7939 2491  | 4 3273 1838  | 4 9341 2485  |
| 55  | 2 9717 3087 | 3 4000 2740 | 3 8887 7303  | 4 4463 1964  | 5 0821 4859  |
| 56  | 3 0311 6529 | 3 4765 2802 | 3 9859 9236  | 4 5685 9343  | 5 2346 1305  |
| 57  | 3 0917 8859 | 3 5547 4990 | 4 0856 4217  | 4 6942 2975  | 5 3916 5144  |
| 58  | 3 1536 2436 | 3 6347 3177 | 4 1877 8322  | 4 8233 2107  | 5 5534 0098  |
| 59  | 3 2166 9685 | 3 7165 1324 | 4 2924 7780  | 4 9559 6239  | 5 7200 0301  |
| 60  | 3 2810 3079 | 3 8001 3479 | 4 3997 8975  | 5 0922 5136  | 5 8916 0310  |
| 61  | 3 3466 5140 | 3 8856 3782 | 4 5097 8449  | 5 2322 8827  | 6 0683 5120  |
| 62  | 3 4135 8443 | 3 9730 6467 | 4 6225 2910  | 5 3761 7620  | 6 2504 0173  |
| 63  | 3 4818 5612 | 4 0624 5862 | 4 7380 9233  | 5 5240 2105  | 6 4379 1379  |
| 64  | 3 5514 9324 | 4 1538 6394 | 4 8565 4464  | 5 6759 3162  | 6 6310 5120  |
| 65  | 3 6225 2311 | 4 2473 2588 | 4 9779 6826  | 5 8320 1974  | 6 8299 8273  |
| 66  | 3 6949 7357 | 4 3428 9071 | 5 1024 0721  | 5 9924 0029  | 7 0348 8222  |
| 67  | 3 7688 7304 | 4 4406 0576 | 5 2299 6739  | 6 1571 9130  | 7 2459 2808  |
| 68  | 3 8442 5050 | 4 5405 1939 | 5 3607 1658  | 6 3265 1406  | 7 4633 0654  |
| 69  | 3 9211 3551 | 4 6426 8107 | 5 4947 3449  | 6 5004 9319  | 7 6872 0574  |
| 70  | 3 9995 5822 | 4 7471 4140 | 5 6321 0286  | 6 6792 5676  | 7 9178 2191  |
| 71  | 4 0795 4939 | 4 8539 5208 | 5 7729 0543  | 6 8629 8827  | 8 1553 5657  |
| 72  | 4 1611 4038 | 4 9631 6600 | 5 9172 2806  | 7 0516 6706  | 8 4000 1727  |
| 73  | 4 2443 6318 | 5 0748 3723 | 6 0651 5876  | 7 2455 8791  | 8 6520 1778  |
| 74  | 4 3292 5045 | 5 1890 2107 | 6 2167 8773  | 7 4448 4158  | 8 9115 7832  |
| 75  | 4 4158 3546 | 5 3057 7405 | 6 3722 0743  | 7 6495 7472  | 9 1789 2567  |
| 76  | 4 5041 5216 | 5 4251 5396 | 6 5315 1261  | 7 8599 3802  | 9 4542 9344  |
| 77  | 4 5942 3521 | 5 5472 1993 | 6 6948 0043  | 8 0760 8632  | 9 7379 2224  |
| 78  | 4 6861 1991 | 5 6720 3237 | 6 8621 7044  | 8 2981 7869  | 10 0300 5991 |
| 79  | 4 7798 4231 | 5 7996 5310 | 7 0337 2470  | 8 5263 7861  | 10 3309 6171 |
| 80  | 4 8754 3916 | 5 9301 4530 | 7 2095 6782  | 8 7608 5402  | 10 6408 9056 |
| 81  | 4 9729 4794 | 6 0635 7357 | 7 3898 0701  | 9 0017 7751  | 10 9601 1727 |
| 82  | 5 0724 0690 | 6 2000 0397 | 7 5745 5219  | 9 2493 2639  | 11 2889 2079 |
| 83  | 5 1738 5504 | 6 3395 0406 | 7 7639 1599  | 9 5036 8286  | 11 6275 8842 |
| 84  | 5 2773 3214 | 6 4821 4290 | 7 9580 1389  | 9 7650 3414  | 11 9764 1607 |
| 85  | 5 3828 7878 | 6 6279 9112 | 8 1569 6424  | 10 0335 7258 | 12 3357 0855 |
| 86  | 5 4905 3636 | 6 7771 2092 | 8 3608 8834  | 10 3094 9583 | 12 7057 7981 |
| 87  | 5 6003 4708 | 6 9296 0614 | 8 5699 1055  | 10 5930 0696 | 13 0869 6320 |
| 88  | 5 7123 5402 | 7 0855 2228 | 8 7841 5832  | 10 8843 1465 | 13 4795 6180 |
| 89  | 5 8266 0110 | 7 2449 4653 | 9 0037 6228  | 11 1836 3331 | 13 8839 4865 |
| 90  | 5 9431 3313 | 7 4079 5782 | 9 2288 5633  | 11 4911 8322 | 14 3004 6711 |
| 91  | 6 0619 9579 | 7 5746 3688 | 9 4595 7774  | 11 8071 9076 | 14 7294 8112 |
| 92  | 6 1832 3570 | 7 7450 6621 | 9 6960 6718  | 12 1318 8851 | 15 1713 6556 |
| 93  | 6 3069 0042 | 7 9193 3020 | 9 9384 6886  | 12 4655 1544 | 15 6265 0652 |
| 94  | 6 4330 3843 | 8 0975 1512 | 10 1869 3058 | 12 8083 1711 | 16 0953 0172 |
| 95  | 6 5616 9920 | 8 2797 0921 | 10 4416 0385 | 13 1605 4584 | 16 5781 6077 |
| 96  | 6 6929 3318 | 8 4680 0267 | 10 7026 4395 | 13 5224 6085 | 17 0755 0559 |
| 97  | 6 8267 9184 | 8 6564 8773 | 10 9702 1004 | 13 8943 2852 | 17 5877 7076 |
| 98  | 6 9633 2768 | 8 8512 5871 | 11 2444 6530 | 14 2764 2255 | 18 1154 0388 |
| 99  | 7 1025 9423 | 9 0504 1203 | 11 5255 7693 | 14 6690 2417 | 18 6588 6600 |
| 100 | 7 2446 4612 | 9 2540 4630 | 11 8137 1635 | 15 0724 2234 | 19 2186 3198 |

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.  $(1 + i)^n$ 

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| n  | .035 (3½%)  | .04 (4%)    | .045 (4½%)  | .05 (5%)     | .055 (5½%)   |
|----|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 1  | 1.0350 0000 | 1.0400 0000 | 1.0450 0000 | 1.0500 0000  | 1.0550 0000  |
| 2  | 1.0712 2500 | 1.0816 0000 | 1.0920 2500 | 1.1025 0000  | 1.1130 2500  |
| 3  | 1.1087 1788 | 1.1248 6400 | 1.1411 6613 | 1.1576 2500  | 1.1742 4138  |
| 4  | 1.1475 2300 | 1.1698 5856 | 1.1925 1860 | 1.2155 0625  | 1.2388 2466  |
| 5  | 1.1876 8631 | 1.2166 5290 | 1.2461 8194 | 1.2762 8156  | 1.3069 6001  |
| 6  | 1.2292 5533 | 1.2653 1902 | 1.3022 6012 | 1.3400 9564  | 1.3788 4281  |
| 7  | 1.2722 7926 | 1.3159 3178 | 1.3608 6183 | 1.4071 0042  | 1.4546 7916  |
| 8  | 1.3168 0904 | 1.3685 6905 | 1.4221 0061 | 1.4774 5544  | 1.5346 8651  |
| 9  | 1.3628 9735 | 1.4233 1181 | 1.4860 9514 | 1.5513 9822  | 1.6190 9427  |
| 10 | 1.4105 9876 | 1.4802 4428 | 1.5529 6942 | 1.6288 9463  | 1.7081 4446  |
| 11 | 1.4599 6972 | 1.5394 5406 | 1.6228 5305 | 1.7103 3936  | 1.8020 9240  |
| 12 | 1.5110 6866 | 1.6010 3222 | 1.6958 8143 | 1.7958 5633  | 1.9012 0749  |
| 13 | 1.5639 5606 | 1.6650 7351 | 1.7721 9610 | 1.8856 4914  | 2.0057 7390  |
| 14 | 1.6186 9452 | 1.7316 7645 | 1.8519 4492 | 1.9799 3160  | 2.1160 9146  |
| 15 | 1.6753 4883 | 1.8009 4351 | 1.9352 8244 | 2.0789 2818  | 2.2324 7649  |
| 16 | 1.7339 8604 | 1.8729 8125 | 2.0223 7015 | 2.1828 7459  | 2.3552 6270  |
| 17 | 1.7946 7555 | 1.9479 0050 | 2.1133 7681 | 2.2920 1832  | 2.4848 0215  |
| 18 | 1.8574 8920 | 2.0258 1652 | 2.2084 7877 | 2.4066 1923  | 2.6214 6627  |
| 19 | 1.9225 0132 | 2.1068 4918 | 2.3078 6031 | 2.5269 5020  | 2.7656 4691  |
| 20 | 1.9897 8886 | 2.1911 2314 | 2.4117 1402 | 2.6532 9771  | 2.9177 5749  |
| 21 | 2.0594 3147 | 2.2787 6807 | 2.5202 4116 | 2.7859 6259  | 3.0782 3415  |
| 22 | 2.1315 1158 | 2.3699 1879 | 2.6336 5201 | 2.9252 6072  | 3.2475 3703  |
| 23 | 2.2061 1448 | 2.4647 1554 | 2.7521 6635 | 3.0715 2376  | 3.4261 5157  |
| 24 | 2.2832 2849 | 2.5633 0416 | 2.8760 1383 | 3.2250 9994  | 3.6145 8990  |
| 25 | 2.3632 4498 | 2.6658 3633 | 3.0054 3446 | 3.3863 5494  | 3.8133 9235  |
| 26 | 2.4459 5856 | 2.7724 6978 | 3.1406 7901 | 3.5556 7269  | 4.0231 2893  |
| 27 | 2.5315 6711 | 2.8833 6858 | 3.2820 0956 | 3.7334 5632  | 4.2444 0102  |
| 28 | 2.6201 7196 | 2.9987 0332 | 3.4296 9999 | 3.9201 2914  | 4.4778 4307  |
| 29 | 2.7118 7798 | 3.1186 5145 | 3.5840 3649 | 4.1161 3560  | 4.7241 2444  |
| 30 | 2.8067 9370 | 3.2433 9751 | 3.7453 1813 | 4.3219 4238  | 4.9839 5129  |
| 31 | 2.9050 3148 | 3.3731 3341 | 3.9138 5745 | 4.5380 3949  | 5.2580 6861  |
| 32 | 3.0067 0759 | 3.5080 5875 | 4.0899 8104 | 4.7649 4147  | 5.5472 6238  |
| 33 | 3.1119 4235 | 3.6483 8110 | 4.2740 3018 | 5.0031 8854  | 5.8523 6181  |
| 34 | 3.2208 6033 | 3.7943 1634 | 4.4663 6154 | 5.2533 4797  | 6.1742 4171  |
| 35 | 3.3335 9045 | 3.9460 8899 | 4.6673 4781 | 5.5160 1537  | 6.5138 2501  |
| 36 | 3.4502 6611 | 4.1039 3255 | 4.8773 7846 | 5.7918 1614  | 6.8720 8538  |
| 37 | 3.5710 2543 | 4.2680 8986 | 5.0968 6049 | 6.0814 0694  | 7.2500 5008  |
| 38 | 3.6960 1132 | 4.4388 1345 | 5.3262 1921 | 6.3854 7729  | 7.6488 0283  |
| 39 | 3.8253 7171 | 4.6163 6599 | 5.5658 9908 | 6.7047 5115  | 8.0694 8699  |
| 40 | 3.9592 5972 | 4.8010 2063 | 5.8163 6454 | 7.0399 8871  | 8.5133 0877  |
| 41 | 4.0978 3381 | 4.9930 6145 | 6.0781 0094 | 7.3919 8815  | 8.9815 4076  |
| 42 | 4.2412 5799 | 5.1927 8391 | 6.3516 1548 | 7.7615 8756  | 9.4755 2550  |
| 43 | 4.3897 0202 | 5.4004 9527 | 6.6374 3818 | 8.1496 6693  | 9.9966 7940  |
| 44 | 4.5433 4160 | 5.6165 1508 | 6.9361 2290 | 8.5571 5028  | 10.5464 9677 |
| 45 | 4.7023 5855 | 5.8411 7568 | 7.2482 4843 | 8.9850 0779  | 11.1265 5409 |
| 46 | 4.8669 4110 | 6.0748 2271 | 7.5744 1961 | 9.4342 5818  | 11.7385 1466 |
| 47 | 5.0372 8404 | 6.3178 1562 | 7.9152 6849 | 9.9059 7109  | 12.3841 3287 |
| 48 | 5.2135 8898 | 6.5705 2824 | 8.2714 5557 | 10.4012 6965 | 13.0652 6017 |
| 49 | 5.3960 6459 | 6.8333 4937 | 8.6436 7107 | 10.9213 3313 | 13.7838 4948 |
| 50 | 5.5849 2686 | 7.1066 8335 | 9.0326 3627 | 11.4673 9979 | 14.5419 6120 |

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.  $(1 + i)^n$ 

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| n  | .06 (6%)     | .065 (6½%)   | .07 (7%)     | .075 (7½%)   | .08 (8%)     |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1  | 1.0600 0000  | 1.0650 0000  | 1.0700 0000  | 1.0750 0000  | 1.0800 0000  |
| 2  | 1.1236 0000  | 1.1342 2500  | 1.1449 0000  | 1.1556 2500  | 1.1664 0000  |
| 3  | 1.1910 1600  | 1.2079 4963  | 1.2250 4300  | 1.2422 9688  | 1.2597 1200  |
| 4  | 1.2624 7696  | 1.2864 6635  | 1.3107 9601  | 1.3354 6914  | 1.3604 8896  |
| 5  | 1.3382 2558  | 1.3700 8666  | 1.4025 5173  | 1.4356 2933  | 1.4693 2808  |
| 6  | 1.4185 1911  | 1.4591 4230  | 1.5007 3035  | 1.5433 0153  | 1.5868 7432  |
| 7  | 1.5036 3026  | 1.5539 8655  | 1.6057 8148  | 1.6590 4914  | 1.7138 2427  |
| 8  | 1.5938 4807  | 1.6549 9567  | 1.7181 8618  | 1.7834 7783  | 1.8509 3021  |
| 9  | 1.6894 7896  | 1.7625 7039  | 1.8384 6921  | 1.9172 3866  | 1.9990 0463  |
| 10 | 1.7908 4770  | 1.8771 3747  | 1.9671 6136  | 2.0610 3156  | 2.1589 2500  |
| 11 | 1.8982 9856  | 1.9991 5140  | 2.1048 5195  | 2.2150 0893  | 2.3316 3900  |
| 12 | 2.0121 9647  | 2.1290 9624  | 2.2521 9159  | 2.3817 7960  | 2.5181 7012  |
| 13 | 2.1329 2826  | 2.2674 8750  | 2.4098 4500  | 2.5604 1307  | 2.7196 2373  |
| 14 | 2.2609 0396  | 2.4148 7418  | 2.5785 3415  | 2.7524 4405  | 2.9371 9362  |
| 15 | 2.3965 5819  | 2.5718 4101  | 2.7590 3154  | 2.9588 7735  | 3.1721 6911  |
| 16 | 2.5403 5168  | 2.7390 1067  | 2.9521 6375  | 3.1807 9315  | 3.4259 4264  |
| 17 | 2.6927 7279  | 2.9170 4637  | 3.1588 1521  | 3.4193 6264  | 3.7000 1805  |
| 18 | 2.8543 3915  | 3.1066 5438  | 3.3799 3228  | 3.6758 0409  | 3.9960 1950  |
| 19 | 3.0255 9950  | 3.3085 8691  | 3.6165 2754  | 3.9514 8940  | 4.3157 0106  |
| 20 | 3.2071 3547  | 3.5236 4506  | 3.8696 8446  | 4.2478 6110  | 4.6603 5714  |
| 21 | 3.3995 6360  | 3.7526 8199  | 4.1405 6237  | 4.5664 3993  | 5.0338 3372  |
| 22 | 3.6035 3742  | 3.9966 0632  | 4.4304 0174  | 4.9089 2293  | 5.4365 4041  |
| 23 | 3.8197 4966  | 4.2563 8573  | 4.7405 2986  | 5.2770 9215  | 5.8714 6365  |
| 24 | 4.0489 3464  | 4.5330 5081  | 5.0723 6895  | 5.6728 7406  | 6.3411 8074  |
| 25 | 4.2918 7072  | 4.8276 9911  | 5.4274 3264  | 6.0983 3961  | 6.8484 7520  |
| 26 | 4.5493 8298  | 5.1414 9955  | 5.8073 5292  | 6.5557 1508  | 7.3963 5321  |
| 27 | 4.8223 4594  | 5.4756 9702  | 6.2138 6763  | 7.0473 9371  | 7.9890 6147  |
| 28 | 5.1116 8670  | 5.8316 1733  | 6.6488 3836  | 7.5759 4824  | 8.6271 0639  |
| 29 | 5.4183 8790  | 6.2106 7245  | 7.1142 5705  | 8.1441 4436  | 9.3172 7490  |
| 30 | 5.7434 9117  | 6.6143 6616  | 7.6122 5504  | 8.7549 5519  | 10.0626 5689 |
| 31 | 6.0881 0064  | 7.0442 9996  | 8.1451 1290  | 9.4115 7683  | 10.8676 6944 |
| 32 | 6.4533 8688  | 7.5021 7946  | 8.7152 7080  | 10.1174 4509 | 11.7370 8300 |
| 33 | 6.8405 8988  | 7.9898 2113  | 9.3253 3975  | 10.8762 5347 | 12.6760 4964 |
| 34 | 7.2510 2528  | 8.5091 5950  | 9.9781 1354  | 11.6919 7248 | 13.6901 3361 |
| 35 | 7.6860 8679  | 9.0622 5487  | 10.6765 8148 | 12.5688 7042 | 14.7853 4429 |
| 36 | 8.1472 5200  | 9.6513 0143  | 11.4239 4219 | 13.5115 3570 | 15.9681 7184 |
| 37 | 8.6360 8712  | 10.2786 3603 | 12.2236 1814 | 14.5249 0088 | 17.2456 2558 |
| 38 | 9.1542 5235  | 10.9467 4737 | 13.0792 7141 | 15.6142 6844 | 18.6252 7563 |
| 39 | 9.7035 0749  | 11.6582 8595 | 13.9948 2041 | 16.7853 3858 | 20.1152 9768 |
| 40 | 10.2857 1794 | 12.4160 7453 | 14.9744 5784 | 18.0442 3897 | 21.7245 2150 |
| 41 | 10.9028 6101 | 13.2231 1938 | 16.0226 6989 | 19.3975 5689 | 23.4624 8322 |
| 42 | 11.5570 3267 | 14.0826 2214 | 17.1442 5878 | 20.8523 7366 | 25.3394 8187 |
| 43 | 12.2504 5463 | 14.9979 9258 | 18.3443 5475 | 22.4163 0168 | 27.3666 4042 |
| 44 | 12.9854 8191 | 15.9728 6209 | 19.6284 5959 | 24.0975 2431 | 29.5559 7166 |
| 45 | 13.7646 1083 | 17.0110 9813 | 21.0024 5176 | 25.9048 3863 | 31.9204 4939 |
| 46 | 14.5904 8748 | 18.1168 1951 | 22.4726 2338 | 27.8477 0153 | 34.4740 8534 |
| 47 | 15.4659 1673 | 19.2944 1278 | 24.0457 0702 | 29.9362 7915 | 37.2320 1217 |
| 48 | 16.3938 7173 | 20.5485 4961 | 25.7289 0651 | 32.1815 0008 | 40.2105 7314 |
| 49 | 17.3775 0403 | 21.8842 0533 | 27.5299 2997 | 34.5951 1259 | 43.4274 1899 |
| 50 | 18.4201 5427 | 23.3068 7868 | 29.4570 2506 | 37.1897 4603 | 46.9016 1251 |

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.  $(1 + i)^n$ 

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| n  | 8%        | 8,5%      | 9%        | 9,5%      | 10%        | 10,5%      |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
|    | 0,0800    | 0,0850    | 0,0900    | 0,0950    | 0,1000     | 0,1050     |
| 1  | 1,0800000 | 1,0850000 | 1,0900000 | 1,0950000 | 1,1000000  | 1,1050000  |
| 2  | 1,1664000 | 1,1772250 | 1,1881000 | 1,1990250 | 1,2100000  | 1,2210250  |
| 3  | 1,2597120 | 1,2772891 | 1,2950290 | 1,3129324 | 1,3310000  | 1,3492375  |
| 4  | 1,3604890 | 1,3858587 | 1,4115816 | 1,4376609 | 1,4641000  | 1,4909020  |
| 5  | 1,4693281 | 1,5036567 | 1,5386239 | 1,5742387 | 1,6105100  | 1,6474467  |
| 6  | 1,5868743 | 1,6314675 | 1,6771001 | 1,7237914 | 1,7715610  | 1,8204287  |
| 7  | 1,7138242 | 1,7701422 | 1,8280391 | 1,8875516 | 1,9487171  | 2,0115737  |
| 8  | 1,8509302 | 1,9206043 | 1,9925626 | 2,0668690 | 2,1435888  | 2,2227889  |
| 9  | 1,9999006 | 2,0838557 | 2,1718932 | 2,2632215 | 2,3579476  | 2,4561817  |
| 10 | 2,1589250 | 2,2609834 | 2,3673636 | 2,4782276 | 2,5937424  | 2,7140808  |
| 11 | 2,3316390 | 2,4531670 | 2,5804264 | 2,7136592 | 2,8531166  | 2,9980593  |
| 12 | 2,5181701 | 2,6618862 | 2,8126647 | 2,9714568 | 3,1384283  | 3,3139605  |
| 13 | 2,7196237 | 2,8879295 | 3,0658045 | 3,2537452 | 3,4522711  | 3,6619263  |
| 14 | 2,9371936 | 3,1334035 | 3,3417269 | 3,5628510 | 3,7974982  | 4,0464786  |
| 15 | 3,1721690 | 3,3997428 | 3,6424824 | 3,9013218 | 4,1772480  | 4,4713036  |
| 16 | 3,4259426 | 3,6887209 | 3,9703058 | 4,2719474 | 4,5949728  | 4,9407904  |
| 17 | 3,7000180 | 4,0022622 | 4,3276333 | 4,6777824 | 5,0544701  | 5,4595714  |
| 18 | 3,9960194 | 4,3424545 | 4,7171203 | 5,1221717 | 5,5599171  | 6,0328286  |
| 19 | 4,3157009 | 4,7115631 | 5,1416611 | 5,6087780 | 6,1159088  | 6,6662756  |
| 20 | 4,6609570 | 5,1120459 | 5,6044106 | 6,1416119 | 6,7274997  | 7,3662345  |
| 21 | 5,0338335 | 5,5465698 | 6,1088045 | 6,7286850 | 7,4002466  | 8,1396891  |
| 22 | 5,4365402 | 6,0180283 | 6,6588602 | 7,3639461 | 8,1402746  | 8,9943565  |
| 23 | 5,8714634 | 6,5295607 | 7,2578742 | 8,0635210 | 8,9543020  | 9,9387639  |
| 24 | 6,3411805 | 7,0845733 | 7,9110828 | 8,8295555 | 9,8497322  | 10,982334  |
| 25 | 6,8484749 | 7,6867620 | 8,6230803 | 9,6683632 | 10,834705  | 12,135479  |
| 26 | 7,3963529 | 8,3401368 | 9,3981575 | 10,586858 | 11,918176  | 13,409704  |
| 27 | 7,9880611 | 9,0490484 | 10,245082 | 11,592609 | 13,109993  | 14,817723  |
| 28 | 8,6271060 | 9,8182175 | 11,167139 | 12,693907 | 14,420993  | 16,373584  |
| 29 | 9,3172744 | 10,652766 | 12,172181 | 13,899828 | 15,863092  | 18,092811  |
| 30 | 10,062656 | 11,558251 | 13,267678 | 15,220312 | 17,449401  | 19,992556  |
| 31 | 10,867669 | 12,540702 | 14,461769 | 16,666241 | 19,194341  | 22,091774  |
| 32 | 11,737082 | 13,606662 | 15,763378 | 18,249534 | 21,113775  | 24,411410  |
| 33 | 12,676004 | 14,763328 | 17,182027 | 19,983240 | 23,225153  | 26,974608  |
| 34 | 13,690133 | 16,018103 | 18,728810 | 21,881648 | 25,547668  | 29,806942  |
| 35 | 14,785343 | 17,379641 | 20,413967 | 23,960404 | 28,102435  | 32,936671  |
| 36 | 15,968171 | 18,856911 | 22,251224 | 26,216643 | 30,912678  | 36,395021  |
| 37 | 17,245625 | 20,459748 | 24,251834 | 28,729124 | 34,003946  | 40,216498  |
| 38 | 18,625274 | 22,198827 | 26,436679 | 31,458390 | 37,404341  | 44,419230  |
| 39 | 20,115296 | 24,085727 | 28,815980 | 34,446937 | 41,144775  | 49,105350  |
| 40 | 21,724520 | 26,133014 | 31,409418 | 37,719396 | 45,259252  | 54,261411  |
| 41 | 23,462482 | 28,354370 | 34,236265 | 41,302739 | 49,785177  | 59,958859  |
| 42 | 25,339480 | 30,764437 | 37,317529 | 45,226499 | 54,763695  | 66,254539  |
| 43 | 27,366618 | 33,379414 | 40,676107 | 49,520316 | 60,240084  | 73,211266  |
| 44 | 29,555970 | 36,216664 | 44,336956 | 54,227703 | 66,276470  | 80,804448  |
| 45 | 31,920447 | 39,295081 | 48,327282 | 59,393144 | 72,890477  | 89,102785  |
| 46 | 34,474083 | 42,635162 | 52,676737 | 65,020371 | 80,179525  | 98,179028  |
| 47 | 37,232009 | 46,259151 | 57,417644 | 71,197306 | 88,194777  | 108,153083 |
| 48 | 40,210570 | 50,191179 | 62,585231 | 77,961050 | 97,017274  | 120,116166 |
| 49 | 43,427415 | 54,457429 | 68,217902 | 85,367350 | 106,71895  | 134,27589  |
| 50 | 46,901609 | 59,086310 | 74,357513 | 93,477248 | 117,319044 | 149,726985 |

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. (1 + i)<sup>n</sup>

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια ανατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| n  | 11%       | 11,5%      | 12%        | 12,5%     | 13%        | 13,5%      |
|----|-----------|------------|------------|-----------|------------|------------|
|    | 0,1100    | 0,1150     | 0,1200     | 0,1250    | 0,1300     | 0,1350     |
| 1  | 1,1100000 | 1,1150000  | 1,1200000  | 1,1250000 | 1,1300000  | 1,1350000  |
| 2  | 1,2321000 | 1,2432250  | 1,2544000  | 1,2656250 | 1,2769000  | 1,2882250  |
| 3  | 1,3676310 | 1,3861959  | 1,4049280  | 1,4239281 | 1,4431896  | 1,4627136  |
| 4  | 1,5180704 | 1,5456088  | 1,5735193  | 1,6018069 | 1,6304756  | 1,6595316  |
| 5  | 1,6850581 | 1,7221553  | 1,7602161  | 1,7982424 | 1,8362352  | 1,8741998  |
| 6  | 1,8704145 | 1,9215390  | 1,9738227  | 2,0272865 | 2,0819317  | 2,1367698  |
| 7  | 2,0761601 | 2,1425160  | 2,2106814  | 2,2806773 | 2,3526054  | 2,4264882  |
| 8  | 2,3045171 | 2,3880053  | 2,4739631  | 2,5624645 | 2,6536441  | 2,7475017  |
| 9  | 2,5580369 | 2,6536294  | 2,7527387  | 2,8554075 | 2,9616810  | 3,0715917  |
| 10 | 2,8394209 | 2,9499468  | 3,0654481  | 3,1861209 | 3,3120673  | 3,4433947  |
| 11 | 3,1517572 | 3,3114906  | 3,4745499  | 3,6512361 | 3,8356610  | 4,0267681  |
| 12 | 3,4984505 | 3,6923120  | 3,8959759  | 4,1098006 | 4,3345210  | 4,5703591  |
| 13 | 3,8832801 | 4,1168279  | 4,3634910  | 4,6236269 | 4,8980109  | 5,1835766  |
| 14 | 4,3044008 | 4,5903766  | 4,8831121  | 5,2031802 | 5,5334523  | 5,8875608  |
| 15 | 4,7645893 | 5,1182677  | 5,4715656  | 5,8517777 | 6,2542701  | 6,6828747  |
| 16 | 5,2610894 | 5,7066865  | 6,1303934  | 6,5832449 | 7,0673252  | 7,5866189  |
| 17 | 5,8950925 | 6,3631583  | 6,8660406  | 7,4061561 | 7,9860775  | 8,6085425  |
| 18 | 6,5855526 | 7,0944215  | 7,6899655  | 8,3319256 | 9,0242675  | 9,7706957  |
| 19 | 7,3363634 | 7,9108375  | 8,6127611  | 9,3746145 | 10,1974622 | 11,0499740 |
| 20 | 8,0623112 | 8,8205837  | 9,6462926  | 10,542093 | 11,521087  | 12,586854  |
| 21 | 8,8491854 | 9,8349509  | 10,873864  | 11,863210 | 13,021089  | 14,246080  |
| 22 | 9,6935736 | 10,965970  | 12,100305  | 13,346116 | 14,711810  | 16,214700  |
| 23 | 11,026267 | 12,227057  | 13,552167  | 15,014400 | 16,6276628 | 18,5861685 |
| 24 | 12,249156 | 13,641168  | 15,178620  | 16,886200 | 18,788060  | 20,898182  |
| 25 | 13,585463 | 15,200983  | 17,000063  | 19,002600 | 21,210541  | 23,780887  |
| 26 | 15,079864 | 16,949095  | 19,040071  | 21,377925 | 23,990511  | 26,408678  |
| 27 | 16,738649 | 18,898241  | 21,324879  | 24,050166 | 27,109278  | 30,541350  |
| 28 | 18,579400 | 21,071539  | 23,883865  | 27,046637 | 30,633466  | 35,586432  |
| 29 | 20,623688 | 23,494766  | 26,749929  | 30,438491 | 34,615816  | 41,344130  |
| 30 | 22,892295 | 26,196666  | 29,959920  | 34,243302 | 39,115895  | 48,055588  |
| 31 | 25,410447 | 29,209260  | 33,555110  | 38,523715 | 44,200961  | 56,040092  |
| 32 | 28,205597 | 32,563638  | 37,561723  | 43,339179 | 49,947086  | 65,526444  |
| 33 | 31,308217 | 36,311707  | 42,091510  | 48,756577 | 56,440207  | 77,025714  |
| 34 | 34,752115 | 40,489784  | 47,162514  | 54,851149 | 63,777434  | 90,107003  |
| 35 | 38,587488 | 45,146104  | 52,799615  | 61,707542 | 72,068500  | 105,111449 |
| 36 | 42,818081 | 50,337911  | 59,155469  | 69,420985 | 81,437405  | 122,666494 |
| 37 | 47,520707 | 56,126771  | 66,211637  | 78,096608 | 92,024267  | 143,35447  |
| 38 | 52,756158 | 62,581369  | 74,179067  | 87,860918 | 103,987672 | 167,98232  |
| 39 | 58,559325 | 69,778204  | 83,043216  | 98,843550 | 117,50579  | 196,58494  |
| 40 | 65,000862 | 77,802698  | 93,040962  | 111,19899 | 132,78154  | 230,09207  |
| 41 | 72,150958 | 86,750088  | 104,21708  | 125,09887 | 150,04314  | 270,18180  |
| 42 | 80,087561 | 96,726258  | 116,72311  | 140,73627 | 169,54874  | 318,79207  |
| 43 | 88,897193 | 107,840719 | 130,749025 | 158,76627 | 191,50008  | 377,68457  |
| 44 | 98,675886 | 120,25250  | 146,43745  | 178,11928 | 216,46799  | 449,31651  |
| 45 | 109,53023 | 134,08354  | 164,48754  | 200,18419 | 244,64137  | 536,41024  |
| 46 | 121,57856 | 149,50997  | 184,66610  | 225,43222 | 276,44475  | 643,95542  |
| 47 | 134,95220 | 166,69452  | 207,70603  | 253,61124 | 312,38257  | 784,41952  |
| 48 | 149,76954 | 185,86328  | 234,19075  | 285,11265 | 352,99230  | 961,33616  |
| 49 | 166,27660 | 207,23755  | 264,83764  | 320,97673 | 398,88110  | 1180,21884 |
| 50 | 184,56461 | 231,06967  | 299,10216  | 361,09882 | 450,73587  | 1457,07336 |

| n  | 14%       | 14,5%     | 15%       | 15,5%     | 16%       | 16,5%     |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|    | 0,1400    | 0,1450    | 0,1500    | 0,1550    | 0,1600    | 0,1650    |
| 1  | 1,1400000 | 1,1450000 | 1,1500000 | 1,1550000 | 1,1600000 | 1,1650000 |
| 2  | 1,2796000 | 1,3110450 | 1,3425000 | 1,3740250 | 1,4056000 | 1,4372250 |
| 3  | 1,4481440 | 1,5011236 | 1,5540850 | 1,6070989 | 1,6601840 | 1,7133671 |
| 4  | 1,6588601 | 1,7187865 | 1,7790062 | 1,8396727 | 1,9007993 | 1,9623907 |
| 5  | 1,9005460 | 1,9680104 | 2,0363372 | 2,1056622 | 2,1760048 | 2,2473716 |
| 6  | 2,1944726 | 2,2533721 | 2,3136607 | 2,3753606 | 2,4384993 | 2,5030934 |
| 7  | 2,5022687 | 2,5801110 | 2,6600198 | 2,7420406 | 2,8262197 | 2,9126047 |
| 8  | 2,8525864 | 2,9542271 | 3,0590228 | 3,1670564 | 3,2784148 | 3,3931839 |
| 9  | 3,2519484 | 3,3825901 | 3,5178162 | 3,6579501 | 3,8029617 | 3,9529592 |
| 10 | 3,7072212 | 3,8730656 | 4,0455576 | 4,2249310 | 4,4014349 | 4,6053139 |
| 11 | 4,2262322 | 4,4346601 | 4,6523912 | 4,8797076 | 5,1127645 | 5,3614907 |
| 12 | 4,8179047 | 5,0776858 | 5,3502499 | 5,6361663 | 5,9360268 | 6,2504722 |
| 13 | 5,4924113 | 5,8139502 | 6,1527874 | 6,5087720 | 6,8857911 | 7,2817709 |
| 14 | 6,2613489 | 6,6597730 | 7,0757055 | 7,5187066 | 7,9875176 | 8,4832631 |
| 15 | 7,1379377 | 7,6222341 | 8,1370613 | 8,6841985 | 9,2655204 | 9,8810015 |
| 16 | 8,1372489 | 8,7274580 | 9,3562044 | 10,032449 | 10,748004 | 11,511697 |
| 17 | 9,2764638 | 9,9929394 | 10,761261 | 11,584938 | 12,467684 | 13,413457 |
| 18 | 10,575164 | 11,441916 | 12,375453 | 13,380603 | 14,462514 | 15,626677 |
| 19 | 12,055692 | 13,100993 | 14,231771 | 15,454597 | 16,776516 | 18,205078 |
| 20 | 13,743489 | 15,000637 | 16,386516 | 17,850059 | 19,460758 | 21,208916 |
| 21 | 15,667578 | 17,175730 | 18,821517 | 20,616818 | 22,544800 | 24,798388 |
| 22 | 17,861038 | 19,666210 | 21,644744 | 23,812425 | 26,136356 | 28,757271 |
| 23 | 20,361546 | 22,517811 | 24,891456 | 27,503351 | 30,376214 | 33,554441 |
| 24 | 23,212705 | 25,782893 | 28,625174 | 31,764370 | 35,230414 | 39,046090 |
| 25 | 26,461914 | 29,521413 | 32,918950 | 36,690157 | 40,874241 | 45,581324 |

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. (1 + i)<sup>n</sup>

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια ανατοκίζεται επί η χρονικές περιόδους.

| n  | 14%       | 14,5%     | 15%       | 15,5%     | 16%       | 16,5%      |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
|    | 0.1400    | 0.1450    | 0.1500    | 0.1550    | 0.1600    | 0.1650     |
| 26 | 10.166582 | 33.802017 | 37.856793 | 42.377132 | 47.414119 | 53.024188  |
| 27 | 34.189903 | 38.703310 | 43.535311 | 48.945587 | 55.000378 | 61.773174  |
| 28 | 19.204490 | 44.315290 | 50.065808 | 56.521153 | 63.800438 | 71.985753  |
| 29 | 44.693116 | 50.741007 | 57.575449 | 65.294436 | 74.008508 | 83.840102  |
| 30 | 50.950154 | 58.098452 | 66.211766 | 75.415304 | 85.849869 | 97.673718  |
| 31 | 58.083176 | 66.522728 | 76.143531 | 87.104676 | 99.585848 | 113.789488 |
| 32 | 66.214820 | 76.168523 | 87.565060 | 100.60590 | 115.51958 | 132.565271 |
| 33 | 75.448495 | 87.212959 | 100.69982 | 116.14981 | 134.00277 | 154.43847  |
| 34 | 86.052780 | 99.858837 | 115.80479 | 134.21079 | 155.44315 | 179.92082  |
| 35 | 98.100169 | 114.33837 | 133.17551 | 155.01346 | 180.31405 | 208.40775  |
| 36 | 111.83419 | 130.91743 | 153.15184 | 179.04054 | 209.16437 | 244.19303  |
| 37 | 127.49098 | 149.90046 | 176.12461 | 206.79183 | 242.63059 | 284.48488  |
| 38 | 145.33772 | 171.63602 | 202.54330 | 238.94456 | 281.45148 | 331.42488  |
| 39 | 165.68782 | 196.42325 | 232.92480 | 275.86546 | 326.48317 | 386.10999  |
| 40 | 188.88319 | 225.01912 | 267.88351 | 318.62481 | 378.77111 | 449.41813  |
| 41 | 215.12718 | 257.64689 | 308.04304 | 366.01142 | 439.31649 | 524.03812  |
| 42 | 245.47299 | 295.00569 | 354.24950 | 425.05319 | 509.46072 | 610.50441  |
| 43 | 279.83920 | 337.78151 | 407.38692 | 490.93644 | 591.14426 | 711.23764  |
| 44 | 319.01669 | 386.75983 | 468.49446 | 567.03158 | 685.72714 | 828.59185  |
| 45 | 363.67903 | 442.84000 | 538.76920 | 654.92148 | 795.44372 | 965.10950  |
| 46 | 414.59405 | 507.05180 | 619.58458 | 754.34410 | 922.71471 | 1124.54556 |
| 47 | 472.41724 | 580.57431 | 712.52226 | 870.68162 | 1070.3441 | 1310.1462  |
| 48 | 538.80648 | 664.75759 | 819.40060 | 1009.1021 | 1241.6049 | 1526.3156  |
| 49 | 614.23938 | 761.14743 | 942.41048 | 1165.5131 | 1440.2617 | 1778.1577  |
| 50 | 700.25289 | 871.51381 | 1083.6573 | 1346.1676 | 1670.7035 | 2071.5537  |

| n  | 17%       | 17,5%     | 18%       | 18,5%     | 19%        | 20%       |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|
|    | 0.1700    | 0.1750    | 0.1800    | 0.1850    | 0.1900     | 0.2000    |
| 1  | 1.1700000 | 1.1750000 | 1.1800000 | 1.1850000 | 1.1900000  | 1.2000000 |
| 2  | 1.3490000 | 1.3806250 | 1.3924000 | 1.4042250 | 1.4161000  | 1.4400000 |
| 3  | 1.5781125 | 1.6222344 | 1.6440120 | 1.6660066 | 1.6881590  | 1.7200000 |
| 4  | 1.8388872 | 1.9061254 | 1.9381777 | 1.9718478 | 2.0053392  | 2.0736000 |
| 5  | 2.1624480 | 2.2396973 | 2.2877577 | 2.3366397 | 2.3863536  | 2.4683200 |
| 6  | 2.5351842 | 2.6316443 | 2.6995541 | 2.7698180 | 2.8397608  | 2.9859839 |
| 7  | 3.0012420 | 3.0921821 | 3.1854718 | 3.2811678 | 3.3793153  | 3.5831807 |
| 8  | 3.5114532 | 3.6331139 | 3.7359591 | 3.8881838 | 4.0213852  | 4.2988168 |
| 9  | 4.1084002 | 4.2691418 | 4.4354517 | 4.6074478 | 4.7854484  | 5.1597802 |
| 10 | 4.8068242 | 5.0162440 | 5.2381354 | 5.4598849 | 5.6946836  | 6.1917362 |
| 11 | 5.6219890 | 5.8940867 | 6.1759257 | 6.4699636 | 6.7766734  | 7.4300834 |
| 12 | 6.5800671 | 6.9255518 | 7.2675923 | 7.6669068 | 8.0662414  | 8.9161000 |
| 13 | 7.6868785 | 8.1375231 | 8.5991589 | 9.0852846 | 9.5964472  | 10.699320 |
| 14 | 9.0074538 | 9.5615899 | 10.167243 | 10.766062 | 11.419772  | 12.839184 |
| 15 | 10.538721 | 11.234866 | 11.971747 | 12.577584 | 13.589529  | 15.407021 |
| 16 | 12.330303 | 13.200970 | 14.129022 | 15.117974 | 16.171539  | 18.488425 |
| 17 | 14.426455 | 15.511140 | 16.872246 | 17.914799 | 19.244132  | 22.186110 |
| 18 | 16.878952 | 18.225589 | 19.673250 | 21.229036 | 22.900516  | 26.623331 |
| 19 | 19.748174 | 21.415067 | 23.214435 | 25.156908 | 27.251615  | 31.947998 |
| 20 | 23.105598 | 25.162704 | 27.493011 | 29.810343 | 32.429421  | 38.337597 |
| 21 | 27.043549 | 29.568177 | 32.321779 | 35.325257 | 38.591011  | 46.005116 |
| 22 | 31.629252 | 34.740258 | 38.142054 | 41.860429 | 45.923303  | 55.206139 |
| 23 | 37.006225 | 40.818902 | 45.007629 | 49.604608 | 54.648730  | 66.247367 |
| 24 | 43.297283 | 47.963268 | 53.109002 | 58.781466 | 65.031989  | 79.496840 |
| 25 | 50.657821 | 56.356839 | 62.668622 | 69.560303 | 77.388066  | 95.396208 |
| 26 | 59.269651 | 66.219286 | 73.948974 | 82.542394 | 92.091799  | 114.47545 |
| 27 | 69.345491 | 77.407661 | 87.759789 | 97.812739 | 109.588924 | 137.37054 |
| 28 | 81.134224 | 91.424001 | 102.96655 | 115.90809 | 130.41120  | 164.84645 |
| 29 | 94.927042 | 107.42320 | 121.50093 | 137.35109 | 155.18932  | 197.81357 |
| 30 | 111.04646 | 126.22726 | 143.37067 | 162.76104 | 184.67529  | 237.73629 |
| 31 | 129.94563 | 148.31114 | 169.17754 | 192.87184 | 219.76360  | 284.85154 |
| 32 | 152.03638 | 174.26561 | 199.62926 | 228.55312 | 261.51888  | 341.82189 |
| 33 | 177.88257 | 204.76209 | 235.56252 | 270.48543 | 311.20723  | 410.18422 |
| 34 | 208.12260 | 240.59545 | 277.96377 | 320.94001 | 370.33640  | 492.22346 |
| 35 | 243.50345 | 282.69946 | 327.94725 | 380.31391 | 440.70055  | 590.66815 |
| 36 | 284.89903 | 332.17210 | 387.03675 | 450.67198 | 524.43366  | 708.80178 |
| 37 | 333.33187 | 390.30221 | 456.70337 | 534.04630 | 624.07605  | 850.56213 |
| 38 | 389.98280 | 458.60510 | 538.40997 | 632.84486 | 742.65049  | 1020.6746 |
| 39 | 456.29799 | 538.86099 | 635.91377 | 749.92115 | 883.75400  | 1224.8095 |
| 40 | 533.86864 | 633.16166 | 750.17824 | 888.65654 | 1051.4674  | 1469.7713 |
| 41 | 624.62631 | 743.96494 | 885.44632 | 1053.0580 | 1251.4841  | 1763.7254 |
| 42 | 730.81278 | 874.15881 | 1044.8267 | 1247.8738 | 1489.2661  | 2116.4707 |
| 43 | 855.05095 | 1027.1366 | 1232.8955 | 1478.7304 | 1772.2267  | 2539.7649 |
| 44 | 1000.4096 | 1206.8855 | 1454.8166 | 1752.2955 | 2108.9499  | 3047.7178 |
| 45 | 1170.4792 | 1418.0904 | 1716.6816 | 2076.4702 | 2509.6502  | 3657.2614 |
| 46 | 1369.4607 | 1666.2553 | 2027.6877 | 2460.6171 | 2988.4837  | 4389.7156 |
| 47 | 1602.2690 | 1957.8511 | 2390.3102 | 2915.8313 | 3553.9156  | 5266.4563 |
| 48 | 1874.6547 | 2300.4751 | 2820.5661 | 3455.2601 | 4229.1596  | 6319.7476 |
| 49 | 2193.3460 | 2703.0582 | 3328.2680 | 4094.4832 | 5032.6999  | 7583.6971 |
| 50 | 2566.2149 | 3176.0933 | 3927.3542 | 4851.9626 | 5988.9128  | 9100.4365 |

### ΠΙΝΑΚΑΣ II. $(1+i)^{μ/12}$

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί 1, 2, 3,..., 11 δωδέκατα της άκεραίας χρονικής περιόδου.

| i%      | $(1+i)^{\frac{1}{12}}$ | $(1+i)^{\frac{2}{12}}$ | $(1+i)^{\frac{3}{12}}$ | $(1+i)^{\frac{4}{12}}$ | $(1+i)^{\frac{5}{12}}$ | $(1+i)^{\frac{6}{12}}$ | i%      |
|---------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|---------|
| 1/4 %   | 1,000208               | 1,000416               | 1,000624               | 1,000832               | 1,001040               | 1,001249               | 1/4 %   |
| 1/2 %   | 1,000415               | 1,000831               | 1,001247               | 1,001663               | 1,002080               | 1,002496               | 1/2 %   |
| 3/4 %   | 1,000622               | 1,001246               | 1,001879               | 1,002499               | 1,003118               | 1,003743               | 3/4 %   |
| 1 %     | 1,000829               | 1,001659               | 1,002490               | 1,003322               | 1,004154               | 1,004987               | 1 %     |
| 1 1/4 % | 1,001035               | 1,002072               | 1,003110               | 1,004149               | 1,005189               | 1,006230               | 1 1/4 % |
| 1 1/2 % | 1,001241               | 1,002484               | 1,003729               | 1,004975               | 1,006222               | 1,007472               | 1 1/2 % |
| 1 3/4 % | 1,001446               | 1,002895               | 1,004346               | 1,005789               | 1,007254               | 1,008712               | 1 3/4 % |
| 2 %     | 1,001651               | 1,003305               | 1,004962               | 1,006622               | 1,008285               | 1,009950               | 2 %     |
| 2 1/4 % | 1,001855               | 1,003715               | 1,005578               | 1,007444               | 1,009314               | 1,011187               | 2 1/4 % |
| 2 1/2 % | 1,002059               | 1,004123               | 1,006192               | 1,008264               | 1,010341               | 1,012422               | 2 1/2 % |
| 2 3/4 % | 1,002263               | 1,004531               | 1,006805               | 1,009083               | 1,011367               | 1,013656               | 2 3/4 % |
| 3 %     | 1,002466               | 1,004938               | 1,007417               | 1,009901               | 1,012392               | 1,014889               | 3 %     |
| 3 1/4 % | 1,002668               | 1,005344               | 1,008027               | 1,010718               | 1,013415               | 1,016120               | 3 1/4 % |
| 3 1/2 % | 1,002870               | 1,005750               | 1,008637               | 1,011533               | 1,014437               | 1,017349               | 3 1/2 % |
| 3 3/4 % | 1,003072               | 1,006154               | 1,009245               | 1,012346               | 1,015157               | 1,018577               | 3 3/4 % |
| 4 %     | 1,003273               | 1,006558               | 1,009853               | 1,013159               | 1,016476               | 1,019803               | 4 %     |
| 4 1/4 % | 1,003474               | 1,006961               | 1,010459               | 1,013970               | 1,017493               | 1,021028               | 4 1/4 % |
| 4 1/2 % | 1,003674               | 1,007363               | 1,011064               | 1,014780               | 1,018509               | 1,022252               | 4 1/2 % |
| 4 3/4 % | 1,003874               | 1,007764               | 1,011669               | 1,015589               | 1,019524               | 1,023474               | 4 3/4 % |
| 5 %     | 1,004074               | 1,008164               | 1,012272               | 1,016396               | 1,020537               | 1,024695               | 5 %     |
| 5 1/4 % | 1,004273               | 1,008564               | 1,012874               | 1,017202               | 1,021549               | 1,025914               | 5 1/4 % |
| 5 1/2 % | 1,004471               | 1,008963               | 1,013475               | 1,018007               | 1,022559               | 1,027131               | 5 1/2 % |
| 5 3/4 % | 1,004669               | 1,009361               | 1,014075               | 1,018810               | 1,023568               | 1,028348               | 5 3/4 % |
| 6 %     | 1,004867               | 1,009758               | 1,014673               | 1,019612               | 1,024575               | 1,029563               | 6 %     |
| 6 1/4 % | 1,005064               | 1,010155               | 1,015271               | 1,020413               | 1,025582               | 1,030776               | 6 1/4   |
| 6 1/2 % | 1,005261               | 1,010551               | 1,015868               | 1,021213               | 1,026586               | 1,031988               | 6 1/2 % |
| 6 3/4 % | 1,005458               | 1,010946               | 1,016463               | 1,022011               | 1,027590               | 1,033198               | 6 3/4 % |
| 7 %     | 1,005654               | 1,011340               | 1,017058               | 1,022809               | 1,028592               | 1,034408               | 7 %     |
| 7 1/2 % | 1,006044               | 1,012126               | 1,018244               | 1,024399               | 1,030592               | 1,036822               | 7 1/2 % |
| 8 %     | 1,006434               | 1,012909               | 1,019426               | 1,025985               | 1,032586               | 1,039230               | 8 %     |
| 8 1/2 % | 1,006821               | 1,013687               | 1,020601               | 1,027584               | 1,034563               | 1,041631               | 8 1/2 % |
| 9 %     | 1,007207               | 1,014466               | 1,021778               | 1,029142               | 1,036559               | 1,044030               | 9 %     |
| 9 1/2 % | 1,007593               | 1,015239               | 1,022946               | 1,030721               | 1,038546               | 1,046432               | 9 1/2 % |
| 10 %    | 1,007974               | 1,016011               | 1,024113               | 1,032280               | 1,040511               | 1,048808               | 10 %    |
| 11 %    | 1,008742               | 1,017556               | 1,026448               | 1,035437               | 1,044484               | 1,053608               | 11 %    |
| 12 %    | 1,009511               | 1,019101               | 1,028781               | 1,038594               | 1,048457               | 1,058408               | 12 %    |

### ΠΙΝΑΚΑΣ II. $(1+i)^{\mu/12}$

Τελική αξία μιᾶς νομισματικῆς μονάδας, ἡ ὁποία ἀνατοκίζεται ἐπὶ 1, 2, 3,..., 11  
δωδέκατα τῆς ἀκεραίας χρονικῆς περιόδου.

| $i\%$   | $(1+i)^{\frac{7}{12}}$ | $(1+i)^{\frac{8}{12}}$ | $(1+i)^{\frac{9}{12}}$ | $(1+i)^{\frac{10}{12}}$ | $(1+i)^{\frac{11}{12}}$ | $i\%$   |
|---------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|---------|
| 1/4 %   | 1,001457               | 1,001565               | 1,001874               | 1,002082                | 1,002291                | 1/4 %   |
| 1/2 %   | 1,002913               | 1,003340               | 1,003747               | 1,004164                | 1,004582                | 1/2 %   |
| 3/4 %   | 1,004368               | 1,004993               | 1,005619               | 1,006246                | 1,006872                | 3/4 %   |
| 1 %     | 1,005821               | 1,006655               | 1,007490               | 1,008326                | 1,009162                | 1 %     |
| 1 1/4 % | 1,007272               | 1,008316               | 1,009260               | 1,010405                | 1,011452                | 1 1/4 % |
| 1 1/2 % | 1,008722               | 1,009975               | 1,011229               | 1,012484                | 1,013741                | 1 1/2 % |
| 1 3/4 % | 1,010171               | 1,011632               | 1,013096               | 1,014562                | 1,016030                | 1 3/4 % |
| 2 %     | 1,011618               | 1,013289               | 1,014962               | 1,016639                | 1,018318                | 2 %     |
| 2 1/4 % | 1,013064               | 1,014944               | 1,016827               | 1,018715                | 1,020605                | 2 1/4 % |
| 2 1/2 % | 1,014508               | 1,016597               | 1,018692               | 1,020790                | 1,022893                | 2 1/2 % |
| 2 3/4 % | 1,015950               | 1,018250               | 1,020554               | 1,022864                | 1,025179                | 2 3/4 % |
| 3 %     | 1,017392               | 1,019901               | 1,022416               | 1,024938                | 1,027465                | 3 %     |
| 3 1/4 % | 1,018831               | 1,021550               | 1,024277               | 1,027010                | 1,029751                | 3 1/4 % |
| 3 1/2 % | 1,020270               | 1,023199               | 1,026136               | 1,029082                | 1,032037                | 3 1/2 % |
| 3 3/4 % | 1,021707               | 1,024846               | 1,027995               | 1,031153                | 1,034322                | 3 3/4 % |
| 4 %     | 1,023142               | 1,026491               | 1,029852               | 1,033223                | 1,036606                | 4 %     |
| 4 1/4 % | 1,024576               | 1,028136               | 1,031708               | 1,035293                | 1,038890                | 4 1/4 % |
| 4 1/2 % | 1,026009               | 1,029779               | 1,033563               | 1,037361                | 1,041173                | 4 1/2 % |
| 4 3/4 % | 1,027440               | 1,031421               | 1,035417               | 1,039429                | 1,043456                | 4 3/4 % |
| 5 %     | 1,028869               | 1,033061               | 1,037270               | 1,041496                | 1,045739                | 5 %     |
| 5 1/4 % | 1,030298               | 1,034700               | 1,039122               | 1,043562                | 1,048021                | 5 1/4 % |
| 5 1/2 % | 1,031724               | 1,036338               | 1,040972               | 1,045627                | 1,050303                | 5 1/2 % |
| 5 3/4 % | 1,033150               | 1,037975               | 1,042822               | 1,047692                | 1,052584                | 5 3/4 % |
| 6 %     | 1,034574               | 1,039610               | 1,044670               | 1,049755                | 1,054865                | 6 %     |
| 6 1/4 % | 1,035997               | 1,041244               | 1,046518               | 1,051818                | 1,057145                | 6 1/4 % |
| 6 1/2 % | 1,037418               | 1,042876               | 1,048364               | 1,053880                | 1,059425                | 6 1/2 % |
| 6 3/4 % | 1,038838               | 1,044508               | 1,050209               | 1,055941                | 1,061705                | 6 3/4 % |
| 7 %     | 1,040256               | 1,046138               | 1,052053               | 1,058001                | 1,063984                | 7 %     |
| 7 1/2 % | 1,043089               | 1,049394               | 1,055738               | 1,062120                | 1,068540                | 7 1/2 % |
| 8 %     | 1,045916               | 1,052646               | 1,059419               | 1,066235                | 1,073095                | 8 %     |
| 8 1/2 % | 1,048736               | 1,055892               | 1,063093               | 1,070346                | 1,077648                | 8 1/2 % |
| 9 %     | 1,051555               | 1,059134               | 1,066767               | 1,074456                | 1,082200                | 9 %     |
| 9 1/2 % | 1,054375               | 1,062378               | 1,070441               | 1,078567                | 1,086753                | 9 1/2 % |
| 10 %    | 1,057172               | 1,065602               | 1,074099               | 1,082664                | 1,091297                | 10 %    |
| 11 %    | 1,062802               | 1,072090               | 1,081447               | 1,090885                | 1,100402                | 11 %    |
| 12 %    | 1,068441               | 1,078578               | 1,088795               | 1,099106                | 1,109507                | 12 %    |

### ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, τοῦ ὁποῖου ἡ τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους εἶναι μία νομισματική μονάδα.

| $n$ | .0025 ( $\frac{1}{4}\%$ ) | .004167 ( $\frac{1}{24}\%$ ) | .005 ( $\frac{1}{20}\%$ ) | .005833 ( $\frac{7}{120}\%$ ) | .0075 ( $\frac{3}{4}\%$ ) |
|-----|---------------------------|------------------------------|---------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| 1   | 9975 0623                 | 9958 5062                    | 9950 2488                 | 9942 0050                     | 9925 5583                 |
| 2   | 9950 1869                 | 9917 1846                    | 9900 7450                 | 9884 3463                     | 9851 6708                 |
| 3   | 9925 3734                 | 9876 0345                    | 9851 4876                 | 9827 0220                     | 9778 3333                 |
| 4   | 9900 6219                 | 9835 0551                    | 9802 4752                 | 9770 0301                     | 9705 5417                 |
| 5   | 9875 9321                 | 9794 2457                    | 9753 7067                 | 9713 3688                     | 9633 2920                 |
| 6   | 9851 3038                 | 9753 6057                    | 9705 1808                 | 9657 0361                     | 9561 5802                 |
| 7   | 9826 7370                 | 9713 1343                    | 9656 8963                 | 9601 0301                     | 9490 4022                 |
| 8   | 9802 2314                 | 9672 8308                    | 9608 8520                 | 9545 3489                     | 9419 7540                 |
| 9   | 9777 7869                 | 9632 6946                    | 9561 0468                 | 9489 9906                     | 9349 6318                 |
| 10  | 9753 4034                 | 9592 7249                    | 9513 4794                 | 9434 9534                     | 9280 0315                 |
| 11  | 9729 0807                 | 9552 9211                    | 9466 1487                 | 9380 2354                     | 9210 9494                 |
| 12  | 9704 8187                 | 9513 2824                    | 9419 0534                 | 9325 8347                     | 9142 3815                 |
| 13  | 9680 6171                 | 9473 8082                    | 9372 1924                 | 9271 7495                     | 9074 3241                 |
| 14  | 9656 4759                 | 9434 4978                    | 9325 5646                 | 9217 9779                     | 9006 7733                 |
| 15  | 9632 3949                 | 9395 3505                    | 9279 1688                 | 9164 5182                     | 8939 7254                 |
| 16  | 9608 3740                 | 9356 3657                    | 9233 0037                 | 9111 3686                     | 8873 1766                 |
| 17  | 9584 4130                 | 9317 5426                    | 9187 0684                 | 9058 5272                     | 8807 1231                 |
| 18  | 9560 5117                 | 9278 8806                    | 9141 3616                 | 9005 9922                     | 8741 5614                 |
| 19  | 9536 6700                 | 9240 3790                    | 9095 8822                 | 8953 7619                     | 8676 4878                 |
| 20  | 9512 8878                 | 9202 0372                    | 9050 6290                 | 8901 8346                     | 8611 8985                 |
| 21  | 9489 1649                 | 9163 8544                    | 9005 6010                 | 8850 2084                     | 8547 7901                 |
| 22  | 9465 5011                 | 9125 8301                    | 8960 7971                 | 8798 8815                     | 8484 1589                 |
| 23  | 9441 8964                 | 9087 9636                    | 8916 2160                 | 8747 8524                     | 8421 0014                 |
| 24  | 9418 3505                 | 9050 2542                    | 8871 8567                 | 8697 1192                     | 8358 3140                 |
| 25  | 9394 8634                 | 9012 7013                    | 8827 7181                 | 8646 6802                     | 8296 0933                 |
| 26  | 9371 4348                 | 8975 3042                    | 8783 7991                 | 8596 5338                     | 8234 3358                 |
| 27  | 9348 0646                 | 8938 0623                    | 8740 0986                 | 8546 6782                     | 8173 0380                 |
| 28  | 9324 7527                 | 8900 9749                    | 8696 6155                 | 8497 1117                     | 8112 1966                 |
| 29  | 9301 4990                 | 8864 0414                    | 8653 3488                 | 8447 8327                     | 8051 8080                 |
| 30  | 9278 3032                 | 8827 2611                    | 8610 2973                 | 8398 8394                     | 7991 8690                 |
| 31  | 9255 1653                 | 8790 6335                    | 8567 4600                 | 8350 1303                     | 7932 3762                 |
| 32  | 9232 0851                 | 8754 1578                    | 8524 8358                 | 8301 7037                     | 7873 3262                 |
| 33  | 9209 0624                 | 8717 8335                    | 8482 4237                 | 8253 5580                     | 7814 7158                 |
| 34  | 9186 0972                 | 8681 6599                    | 8440 2226                 | 8205 6914                     | 7756 5418                 |
| 35  | 9163 1892                 | 8645 6365                    | 8398 2314                 | 8158 1025                     | 7698 8008                 |
| 36  | 9140 3384                 | 8609 7624                    | 8356 4492                 | 8110 7896                     | 7641 4896                 |
| 37  | 9117 5445                 | 8574 0373                    | 8314 8748                 | 8063 7510                     | 7584 6051                 |
| 38  | 9094 8075                 | 8538 4604                    | 8273 5073                 | 8016 9853                     | 7528 1440                 |
| 39  | 9072 1272                 | 8503 0311                    | 8232 3455                 | 7970 4907                     | 7472 1032                 |
| 40  | 9049 5034                 | 8467 7488                    | 8191 3886                 | 7924 2659                     | 7416 4796                 |
| 41  | 9026 9361                 | 8432 6129                    | 8150 6354                 | 7878 3091                     | 7361 2701                 |
| 42  | 9004 4250                 | 8397 6228                    | 8110 0850                 | 7832 6188                     | 7306 4716                 |
| 43  | 8981 9701                 | 8362 7779                    | 8069 7363                 | 7787 1935                     | 7252 0809                 |
| 44  | 8959 5712                 | 8328 0776                    | 8029 5884                 | 7742 0316                     | 7198 0952                 |
| 45  | 8937 2281                 | 8293 5212                    | 7989 6402                 | 7697 1317                     | 7144 5114                 |
| 46  | 8914 9407                 | 8259 1083                    | 7949 8907                 | 7652 4922                     | 7091 3264                 |
| 47  | 8892 7090                 | 8224 8381                    | 7910 3390                 | 7608 1115                     | 7038 5374                 |
| 48  | 8870 5326                 | 8190 7102                    | 7870 9841                 | 7563 9883                     | 6986 1414                 |
| 49  | 8848 4116                 | 8156 7238                    | 7831 8250                 | 7520 1209                     | 6934 1353                 |
| 50  | 8826 3457                 | 8122 8785                    | 7792 8607                 | 7476 5079                     | 6882 5165                 |

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| $n$ | .0025 ( $\frac{1}{4}\%$ ) | .004167 ( $\frac{1}{24}\%$ ) | .005 ( $\frac{1}{20}\%$ ) | .005833 ( $\frac{1}{17}\%$ ) | .0075 ( $\frac{1}{13}\%$ ) |
|-----|---------------------------|------------------------------|---------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 50  | .8826 3457                | .8122 8785                   | .7792 8607                | .7476 5079                   | .6882 5165                 |
| 51  | .8804 3349                | .8089 1736                   | .7754 0902                | .7433 1479                   | .6831 2819                 |
| 52  | .8782 3790                | .8055 6086                   | .7715 5127                | .7390 0393                   | .6780 4286                 |
| 53  | .8760 4778                | .8022 1828                   | .7677 1270                | .7347 1808                   | .6729 9540                 |
| 54  | .8738 6312                | .7988 8957                   | .7638 9324                | .7304 5708                   | .6679 8551                 |
| 55  | .8716 8391                | .7955 7468                   | .7600 9277                | .7262 2079                   | .6630 1291                 |
| 56  | .8695 1013                | .7922 7354                   | .7563 1122                | .7220 0907                   | .6580 7733                 |
| 57  | .8673 4178                | .7889 8610                   | .7525 4847                | .7178 2178                   | .6531 7849                 |
| 58  | .8651 7883                | .7857 1230                   | .7488 0445                | .7136 5877                   | .6483 1612                 |
| 59  | .8630 2128                | .7824 5208                   | .7450 7906                | .7095 1990                   | .6434 8995                 |
| 60  | .8608 6911                | .7792 0539                   | .7413 7220                | .7054 0504                   | .6386 9970                 |
| 61  | .8587 2230                | .7759 7217                   | .7376 8378                | .7013 1404                   | .6339 4511                 |
| 62  | .8565 8085                | .7727 5237                   | .7340 1371                | .6972 4677                   | .6292 2592                 |
| 63  | .8544 4474                | .7695 4593                   | .7303 6190                | .6932 0308                   | .6245 4185                 |
| 64  | .8523 1395                | .7663 5279                   | .7267 2826                | .6891 8285                   | .6198 9266                 |
| 65  | .8501 8848                | .7631 7291                   | .7231 1269                | .6851 8593                   | .6152 7807                 |
| 66  | .8480 6831                | .7600 0621                   | .7195 1512                | .6812 1219                   | .6106 9784                 |
| 67  | .8459 5343                | .7568 5266                   | .7159 3544                | .6772 6150                   | .6061 5170                 |
| 68  | .8438 4382                | .7537 1219                   | .7123 7357                | .6733 3372                   | .6016 3940                 |
| 69  | .8417 3947                | .7505 8476                   | .7088 2943                | .6694 2872                   | .5971 6070                 |
| 70  | .8396 4037                | .7474 7030                   | .7053 0291                | .6655 4637                   | .5927 1533                 |
| 71  | .8375 4650                | .7443 6876                   | .7017 9394                | .6616 8653                   | .5883 0306                 |
| 72  | .8354 5786                | .7412 8009                   | .6983 0243                | .6578 4908                   | .5839 2363                 |
| 73  | .8333 7442                | .7382 0424                   | .6948 2829                | .6540 3338                   | .5795 7681                 |
| 74  | .8312 9618                | .7351 4115                   | .6913 7143                | .6502 4081                   | .5752 6234                 |
| 75  | .8292 2312                | .7320 9078                   | .6879 3177                | .6464 6973                   | .5709 7999                 |
| 76  | .8271 5523                | .7290 5306                   | .6845 0923                | .6427 2053                   | .5667 2952                 |
| 77  | .8250 9250                | .7260 2794                   | .6811 0371                | .6389 9306                   | .5625 1069                 |
| 78  | .8230 3491                | .7230 1537                   | .6777 1513                | .6352 8723                   | .5583 2326                 |
| 79  | .8209 8246                | .7200 1531                   | .6743 4342                | .6316 0288                   | .5541 6701                 |
| 80  | .8189 3512                | .7170 2770                   | .6709 8847                | .6279 3989                   | .5500 4170                 |
| 81  | .8168 9289                | .7140 5248                   | .6676 5022                | .6242 9816                   | .5459 4710                 |
| 82  | .8148 5575                | .7110 8960                   | .6643 2858                | .6206 7754                   | .5418 8297                 |
| 83  | .8128 2369                | .7081 3902                   | .6610 2346                | .6170 7792                   | .5378 4911                 |
| 84  | .8107 9670                | .7052 0069                   | .6577 3479                | .6134 9917                   | .5338 4527                 |
| 85  | .8087 7476                | .7022 7454                   | .6544 6248                | .6099 4118                   | .5298 7123                 |
| 86  | .8067 5787                | .6993 6054                   | .6512 0644                | .6064 0382                   | .5259 2678                 |
| 87  | .8047 4600                | .6964 5863                   | .6479 6661                | .6028 8698                   | .5220 1169                 |
| 88  | .8027 3915                | .6935 6876                   | .6447 4290                | .5993 9054                   | .5181 2575                 |
| 89  | .8007 3731                | .6906 9088                   | .6415 3522                | .5959 1437                   | .5142 6873                 |
| 90  | .7987 4046                | .6878 2495                   | .6383 4350                | .5924 5836                   | .5104 4043                 |
| 91  | .7967 4859                | .6849 7090                   | .6351 6766                | .5890 2240                   | .5066 4063                 |
| 92  | .7947 6168                | .6821 2870                   | .6320 0763                | .5856 0636                   | .5028 6911                 |
| 93  | .7927 7973                | .6792 9829                   | .6288 6331                | .5822 1014                   | .4991 2567                 |
| 94  | .7908 0273                | .6764 7962                   | .6257 3464                | .5788 3361                   | .4954 1009                 |
| 95  | .7888 3065                | .6736 7265                   | .6226 2153                | .5754 7666                   | .4917 2217                 |
| 96  | .7868 6349                | .6708 7733                   | .6195 2391                | .5721 3918                   | .4880 6171                 |
| 97  | .7849 0124                | .6680 9361                   | .6164 4170                | .5688 2106                   | .4844 2850                 |
| 98  | .7829 4388                | .6653 2143                   | .6133 7483                | .5655 2218                   | .4808 2233                 |
| 99  | .7809 9140                | .6625 6076                   | .6103 2321                | .5622 4243                   | .4772 4301                 |
| 100 | .7790 4379                | .6598 1155                   | .6072 8678                | .5589 8171                   | .4736 9033                 |

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| $n$ | .01 (1%)   | .0125 (1½%) | .015 (1¾%) | .0175 (1¾%) | .0175 (1¾%) |
|-----|------------|-------------|------------|-------------|-------------|
| 1   | .9900 9901 | .9888 7515  | .9876 5432 | .9852 2167  | .9828 0098  |
| 2   | .9802 9605 | .9778 7407  | .9754 6106 | .9706 6175  | .9658 9777  |
| 3   | .9705 9015 | .9669 9537  | .9634 1833 | .9563 1699  | .9492 8528  |
| 4   | .9609 8034 | .9562 3770  | .9515 2428 | .9421 8423  | .9329 5851  |
| 5   | .9514 6569 | .9455 9970  | .9397 7706 | .9282 6033  | .9169 1254  |
| 6   | .9420 4524 | .9350 8005  | .9281 7488 | .9145 4219  | .9011 4254  |
| 7   | .9327 1805 | .9246 7743  | .9167 1593 | .9010 2679  | .8856 4378  |
| 8   | .9234 8322 | .9143 9054  | .9053 9845 | .8877 1112  | .8704 1157  |
| 9   | .9143 3382 | .9042 1808  | .8942 2069 | .8745 9224  | .8554 4135  |
| 10  | .9052 8695 | .8941 5880  | .8831 8093 | .8616 6723  | .8407 2860  |
| 11  | .8963 2372 | .8842 1142  | .8722 7746 | .8489 3323  | .8262 6889  |
| 12  | .8874 4923 | .8743 7470  | .8615 0860 | .8363 8742  | .8120 5788  |
| 13  | .8786 6260 | .8646 4742  | .8508 7269 | .8240 2702  | .7980 9128  |
| 14  | .8699 6297 | .8550 2835  | .8403 6809 | .8118 4928  | .7843 6490  |
| 15  | .8613 4947 | .8455 1629  | .8299 9318 | .7998 5150  | .7708 7459  |
| 16  | .8528 2126 | .8361 1005  | .8197 4635 | .7880 3104  | .7576 1631  |
| 17  | .8443 7749 | .8268 0846  | .8096 2602 | .7763 8526  | .7445 8605  |
| 18  | .8360 1731 | .8176 1034  | .7996 3064 | .7649 1159  | .7317 7900  |
| 19  | .8277 3092 | .8085 1455  | .7897 5866 | .7536 0747  | .7191 9401  |
| 20  | .8195 4447 | .7995 1995  | .7800 0855 | .7424 7042  | .7068 2458  |
| 21  | .8114 3017 | .7906 2542  | .7703 7881 | .7314 9795  | .6946 6789  |
| 22  | .8033 9621 | .7818 2983  | .7608 6796 | .7206 8763  | .6827 2028  |
| 23  | .7954 4179 | .7731 3210  | .7514 7453 | .7100 3708  | .6709 7817  |
| 24  | .7875 6613 | .7645 3112  | .7421 9707 | .6995 4392  | .6594 3800  |
| 25  | .7797 6844 | .7560 2583  | .7330 3414 | .6892 0583  | .6480 9632  |
| 26  | .7720 4796 | .7476 1516  | .7239 8434 | .6790 2052  | .6369 4970  |
| 27  | .7644 0392 | .7392 9806  | .7150 4626 | .6689 8574  | .6259 9479  |
| 28  | .7568 3557 | .7310 7348  | .7062 1853 | .6590 9925  | .6152 2829  |
| 29  | .7493 4215 | .7229 4040  | .6974 9978 | .6493 5887  | .6046 4697  |
| 30  | .7419 2292 | .7148 9780  | .6888 8867 | .6397 6243  | .5942 4764  |
| 31  | .7345 7715 | .7069 4467  | .6803 8387 | .6303 0781  | .5840 2716  |
| 32  | .7273 0411 | .6990 8002  | .6719 8407 | .6209 9292  | .5739 8247  |
| 33  | .7201 0307 | .6913 0287  | .6636 8797 | .6118 1568  | .5641 1053  |
| 34  | .7129 7334 | .6836 1223  | .6554 9429 | .6027 7407  | .5544 0839  |
| 35  | .7059 1420 | .6760 0715  | .6474 0177 | .5938 6608  | .5448 7311  |
| 36  | .6989 2495 | .6684 8667  | .6394 0916 | .5850 8974  | .5355 0183  |
| 37  | .6920 0490 | .6610 4986  | .6315 1522 | .5764 4309  | .5262 9172  |
| 38  | .6851 5337 | .6536 9578  | .6237 1873 | .5679 2423  | .5172 4002  |
| 39  | .6783 6967 | .6464 2352  | .6160 1850 | .5595 3126  | .5083 4400  |
| 40  | .6716 5314 | .6392 3216  | .6084 1334 | .5512 6232  | .4996 0098  |
| 41  | .6650 0311 | .6321 2080  | .6009 0206 | .5431 1559  | .4910 0834  |
| 42  | .6584 1892 | .6250 8855  | .5934 8352 | .5350 8925  | .4825 6348  |
| 43  | .6518 9992 | .6181 3454  | .5861 5656 | .5271 8153  | .4742 6386  |
| 44  | .6454 4546 | .6112 5789  | .5789 2006 | .5193 9067  | .4661 0699  |
| 45  | .6390 5492 | .6044 5774  | .5717 7290 | .5117 1494  | .4580 9040  |
| 46  | .6327 2764 | .5977 3324  | .5647 1397 | .5041 5265  | .4502 1170  |
| 47  | .6264 6301 | .5910 8355  | .5577 4219 | .4967 0212  | .4424 6850  |
| 48  | .6202 6041 | .5845 0784  | .5508 5649 | .4893 6170  | .4348 5848  |
| 49  | .6141 1921 | .5780 0528  | .5440 5579 | .4821 2975  | .4273 7934  |
| 50  | .6080 3882 | .5715 7506  | .5373 3905 | .4750 0468  | .4200 2883  |

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| $n$ | .01 (1%)   | .0125 (1¼%) | .0125 (1¼%) | .015 (1½%) | .0175 (1¾%) |
|-----|------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| 50  | .6080 3882 | .5715 7506  | .5373 3905  | .4750 0468 | .4200 2883  |
| 51  | .6020 1864 | .5652 1637  | .5307 0524  | .4679 8491 | .4128 0475  |
| 52  | .5960 5806 | .5589 2843  | .5241 5332  | .4610 6887 | .4057 0492  |
| 53  | .5901 5649 | .5527 1044  | .5176 8229  | .4542 5505 | .3987 2719  |
| 54  | .5843 1336 | .5465 6162  | .5112 9115  | .4475 4192 | .3918 6947  |
| 55  | .5785 2808 | .5404 8120  | .5049 7892  | .4409 2800 | .3851 2970  |
| 56  | .5728 0008 | .5344 6843  | .4987 4461  | .4344 1182 | .3785 0585  |
| 57  | .5671 2879 | .5285 2256  | .4925 8727  | .4279 0194 | .3719 9592  |
| 58  | .5615 1365 | .5226 4282  | .4865 0594  | .4216 6694 | .3655 9796  |
| 59  | .5559 5411 | .5168 2850  | .4804 9970  | .4154 3541 | .3593 1003  |
| 60  | .5504 4962 | .5110 7887  | .4745 6760  | .4092 9597 | .3531 3025  |
| 61  | .5449 9962 | .5053 9319  | .4687 0874  | .4032 4726 | .3470 5676  |
| 62  | .5396 0358 | .4997 7077  | .4629 2322  | .3972 8794 | .3410 8772  |
| 63  | .5342 6097 | .4942 1090  | .4572 0713  | .3914 1669 | .3352 2135  |
| 64  | .5289 7126 | .4887 1288  | .4515 6259  | .3856 3221 | .3294 5587  |
| 65  | .5237 3392 | .4832 7602  | .4459 8775  | .3799 3321 | .3237 8956  |
| 66  | .5185 4844 | .4778 9963  | .4404 8173  | .3743 1843 | .3182 2089  |
| 67  | .5134 1429 | .4725 8309  | .4350 4368  | .3687 8663 | .3127 4761  |
| 68  | .5083 3099 | .4673 2568  | .4296 7277  | .3633 3658 | .3073 6866  |
| 69  | .5032 9801 | .4621 2675  | .4243 6817  | .3579 6708 | .3020 8222  |
| 70  | .4983 1486 | .4569 8566  | .4191 2905  | .3526 7692 | .2968 8670  |
| 71  | .4933 8105 | .4519 0177  | .4139 5462  | .3474 6495 | .2917 8054  |
| 72  | .4884 9609 | .4468 7443  | .4088 4407  | .3423 3000 | .2867 6221  |
| 73  | .4836 5949 | .4419 0302  | .4037 9661  | .3372 7093 | .2818 3018  |
| 74  | .4788 7078 | .4369 8692  | .3988 1147  | .3322 8663 | .2769 8298  |
| 75  | .4741 2949 | .4321 2551  | .3938 8787  | .3273 7599 | .2722 1914  |
| 76  | .4694 3514 | .4273 1818  | .3890 2506  | .3225 3793 | .2675 3724  |
| 77  | .4647 8726 | .4225 6433  | .3842 2328  | .3177 7136 | .2629 3586  |
| 78  | .4601 8541 | .4178 6337  | .3794 7879  | .3130 7523 | .2584 1362  |
| 79  | .4556 2912 | .4132 1470  | .3747 9387  | .3084 4850 | .2539 6916  |
| 80  | .4511 1794 | .4086 1775  | .3701 6679  | .3038 9015 | .2496 0114  |
| 81  | .4466 5142 | .4040 7194  | .3655 9683  | .2993 9916 | .2453 0825  |
| 82  | .4422 2913 | .3995 7670  | .3610 8329  | .2949 7454 | .2410 8919  |
| 83  | .4378 5063 | .3951 3148  | .3566 2547  | .2906 1531 | .2369 4269  |
| 84  | .4335 1547 | .3907 3570  | .3522 2268  | .2863 2050 | .2328 6751  |
| 85  | .4292 2324 | .3863 8882  | .3478 7426  | .2820 8917 | .2288 6242  |
| 86  | .4249 7350 | .3820 9031  | .3435 7951  | .2779 2036 | .2249 2621  |
| 87  | .4207 6585 | .3778 3961  | .3393 3779  | .2738 1316 | .2210 5770  |
| 88  | .4165 9985 | .3736 3621  | .3351 4843  | .2697 6666 | .2172 5572  |
| 89  | .4124 7510 | .3694 7956  | .3310 1080  | .2657 7996 | .2135 1914  |
| 90  | .4083 9119 | .3653 6916  | .3269 2425  | .2618 5218 | .2098 4682  |
| 91  | .4043 4771 | .3613 0448  | .3228 8814  | .2579 8245 | .2062 3766  |
| 92  | .4003 4427 | .3572 8503  | .3189 0187  | .2541 6990 | .2026 9057  |
| 93  | .3963 8046 | .3533 1029  | .3149 6481  | .2504 1369 | .1992 0450  |
| 94  | .3924 5590 | .3493 7976  | .3110 7636  | .2467 1300 | .1957 7837  |
| 95  | .3885 7020 | .3454 9297  | .3072 3591  | .2430 6699 | .1924 1118  |
| 96  | .3847 2297 | .3416 4941  | .3034 4287  | .2394 7487 | .1891 0190  |
| 97  | .3809 1383 | .3378 4861  | .2996 9666  | .2359 3583 | .1858 4953  |
| 98  | .3771 4241 | .3340 9010  | .2959 9670  | .2324 4909 | .1826 5310  |
| 99  | .3734 0832 | .3303 7340  | .2923 4242  | .2290 1389 | .1795 1165  |
| 100 | .3697 1121 | .3266 9805  | .2887 3326  | .2256 2944 | .1764 2422  |

### ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| $n$ | .02 (2%)   | .0225 (2¼%) | .025 (2½%) | .0275 (2¾%) | .03 (3%)   |
|-----|------------|-------------|------------|-------------|------------|
| 1   | .9803 9216 | .9779 9511  | .9756 0976 | .9732 3601  | .9708 7379 |
| 2   | .9611 6878 | .9564 7444  | .9518 1440 | .9471 8833  | .9426 9591 |
| 3   | .9423 2233 | .9354 2732  | .9285 9941 | .9218 3779  | .9151 4166 |
| 4   | .9238 4543 | .9148 4335  | .9059 5064 | .8971 6573  | .8884 8705 |
| 5   | .9057 3081 | .8947 1232  | .8838 5429 | .8731 5400  | .8626 0878 |
| 6   | .8879 7138 | .8750 2427  | .8622 9687 | .8497 8491  | .8374 8426 |
| 7   | .8705 6018 | .8557 6946  | .8412 6524 | .8270 4128  | .8130 9151 |
| 8   | .8534 9037 | .8369 3835  | .8207 4657 | .8049 0635  | .7894 0923 |
| 9   | .8367 5527 | .8185 2161  | .8007 2836 | .7833 6385  | .7664 1673 |
| 10  | .8203 4830 | .8005 1013  | .7811 9840 | .7623 9791  | .7440 9391 |
| 11  | .8042 6304 | .7828 9499  | .7621 4478 | .7419 9310  | .7224 2128 |
| 12  | .7884 9318 | .7656 6748  | .7435 5589 | .7221 3440  | .7013 7988 |
| 13  | .7730 3253 | .7488 1905  | .7254 2038 | .7028 0720  | .6809 5134 |
| 14  | .7578 7502 | .7323 4137  | .7077 2720 | .6839 9728  | .6611 1781 |
| 15  | .7430 1473 | .7162 2628  | .6904 6556 | .6656 9078  | .6418 6195 |
| 16  | .7284 4581 | .7004 5580  | .6736 2493 | .6478 7424  | .6231 6694 |
| 17  | .7141 6256 | .6850 5212  | .6571 9506 | .6305 3454  | .6050 1645 |
| 18  | .7001 5937 | .6699 7763  | .6411 6591 | .6136 5892  | .5873 9461 |
| 19  | .6864 3076 | .6552 3484  | .6255 2772 | .5972 3496  | .5702 8603 |
| 20  | .6729 7133 | .6408 1647  | .6102 7094 | .5812 5057  | .5536 7575 |
| 21  | .6597 7582 | .6267 1538  | .5953 8629 | .5656 9398  | .5375 4928 |
| 22  | .6468 3904 | .6129 2457  | .5808 6467 | .5505 5375  | .5218 9250 |
| 23  | .6341 5592 | .5994 3724  | .5666 9724 | .5358 1874  | .5066 9175 |
| 24  | .6217 2149 | .5862 4668  | .5528 7535 | .5214 7809  | .4919 3374 |
| 25  | .6095 3087 | .5733 4639  | .5393 9059 | .5075 2126  | .4776 0557 |
| 26  | .5975 7928 | .5607 2997  | .5262 3472 | .4939 3796  | .4636 9472 |
| 27  | .5858 0204 | .5483 9117  | .5133 9973 | .4807 1821  | .4501 8906 |
| 28  | .5743 7455 | .5363 2388  | .5008 7778 | .4678 5227  | .4370 7675 |
| 29  | .5631 1231 | .5245 2213  | .4886 6125 | .4553 3068  | .4243 4636 |
| 30  | .5520 7089 | .5129 8008  | .4767 4269 | .4431 4421  | .4119 8676 |
| 31  | .5412 4597 | .5016 9201  | .4651 1481 | .4312 8391  | .3999 8715 |
| 32  | .5306 3330 | .4906 5233  | .4537 7055 | .4197 4103  | .3883 3703 |
| 33  | .5202 2873 | .4798 5558  | .4427 0298 | .4085 0708  | .3770 2625 |
| 34  | .5100 2817 | .4692 9641  | .4319 0534 | .3975 7380  | .3660 4490 |
| 35  | .5000 2761 | .4589 6960  | .4213 7107 | .3869 3314  | .3553 8340 |
| 36  | .4902 2315 | .4488 7002  | .4110 9372 | .3765 7727  | .3450 3243 |
| 37  | .4806 1093 | .4389 9268  | .4010 6705 | .3664 9856  | .3349 8294 |
| 38  | .4711 8719 | .4293 3270  | .3912 8492 | .3566 8959  | .3252 2615 |
| 39  | .4619 4822 | .4198 8528  | .3817 4139 | .3471 4316  | .3157 5355 |
| 40  | .4528 9042 | .4106 4575  | .3724 3062 | .3378 5222  | .3065 5684 |
| 41  | .4440 1021 | .4016 0954  | .3633 4695 | .3288 0995  | .2976 2800 |
| 42  | .4353 0413 | .3927 7216  | .3544 8483 | .3200 0968  | .2889 5922 |
| 43  | .4267 6875 | .3841 2925  | .3458 3886 | .3114 4495  | .2805 4294 |
| 44  | .4184 0074 | .3756 7653  | .3374 0376 | .3031 0944  | .2723 7178 |
| 45  | .4101 9680 | .3674 0981  | .3291 7440 | .2940 9702  | .2644 3862 |
| 46  | .4021 6373 | .3593 2500  | .3211 4576 | .2871 0172  | .2567 3653 |
| 47  | .3942 6836 | .3514 1809  | .3133 1294 | .2794 1773  | .2492 5876 |
| 48  | .3865 3761 | .3436 8518  | .3056 7116 | .2719 3940  | .2419 9880 |
| 49  | .3789 5844 | .3361 2242  | .2982 1576 | .2646 0122  | .2349 5029 |
| 50  | .3715 2788 | .3287 2608  | .2909 4221 | .2575 7783  | .2281 0708 |

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| $n$ | .02 (2%)   | .025 (2½%) | .025 (2½%) | .0275 (2¾%) | .03 (3%)   |
|-----|------------|------------|------------|-------------|------------|
| 50  | .3715 2788 | .3287 2608 | .2909 4221 | .2575 7783  | .2281 0708 |
| 51  | .3642 4302 | .3214 9250 | .2838 4606 | .2506 8402  | .2214 6318 |
| 52  | .3571 0100 | .3144 1810 | .2769 2298 | .2439 7471  | .2150 1280 |
| 53  | .3500 9902 | .3074 9936 | .2701 6876 | .2374 4497  | .2087 5029 |
| 54  | .3432 3433 | .3007 3287 | .2635 7928 | .2310 9000  | .2026 7019 |
| 55  | .3365 0425 | .2941 1528 | .2571 5952 | .2249 0511  | .1967 6717 |
| 56  | .3299 0313 | .2876 4330 | .2508 7855 | .2188 8575  | .1910 3609 |
| 57  | .3234 3738 | .2813 1374 | .2447 5956 | .2130 2749  | .1854 7193 |
| 58  | .3170 9547 | .2751 2347 | .2387 8982 | .2073 2693  | .1800 6984 |
| 59  | .3108 7791 | .2690 6940 | .2329 6568 | .2017 7716  | .1748 2508 |
| 60  | .3047 8227 | .2631 4856 | .2272 8759 | .1963 7679  | .1697 3309 |
| 61  | .2988 0614 | .2573 5801 | .2217 4060 | .1911 2097  | .1647 8941 |
| 62  | .2929 4720 | .2516 9487 | .2163 3179 | .1860 0581  | .1599 8972 |
| 63  | .2872 0314 | .2461 5635 | .2110 5541 | .1810 2755  | .1553 2982 |
| 64  | .2815 7170 | .2407 3971 | .2059 0771 | .1761 8253  | .1508 0565 |
| 65  | .2760 5069 | .2354 4226 | .2008 8557 | .1714 6718  | .1464 1325 |
| 66  | .2706 3793 | .2302 6138 | .1959 8593 | .1668 7804  | .1421 4879 |
| 67  | .2653 3130 | .2251 9450 | .1912 0578 | .1624 1172  | .1380 0853 |
| 68  | .2601 2873 | .2202 3912 | .1865 4223 | .1580 6493  | .1339 8887 |
| 69  | .2550 2817 | .2153 9278 | .1819 9241 | .1538 3448  | .1300 8628 |
| 70  | .2500 2761 | .2106 5309 | .1775 5358 | .1497 1726  | .1262 9736 |
| 71  | .2451 2511 | .2060 1769 | .1732 2300 | .1457 1923  | .1226 1880 |
| 72  | .2403 1874 | .2014 8429 | .1689 9805 | .1418 1044  | .1190 4737 |
| 73  | .2356 0661 | .1970 5065 | .1648 7615 | .1380 1503  | .1155 7998 |
| 74  | .2309 8687 | .1927 1458 | .1608 5478 | .1343 2119  | .1122 1357 |
| 75  | .2264 5771 | .1884 7391 | .1569 3149 | .1307 2622  | .1089 4521 |
| 76  | .2220 1737 | .1843 2657 | .1531 0389 | .1272 2747  | .1057 7205 |
| 77  | .2176 6408 | .1802 7048 | .1493 6965 | .1238 2235  | .1026 9131 |
| 78  | .2133 9516 | .1763 0365 | .1457 2649 | .1205 0837  | .0997 0030 |
| 79  | .2092 1192 | .1724 2411 | .1421 7218 | .1172 8309  | .0967 9641 |
| 80  | .2051 0973 | .1686 2993 | .1387 0457 | .1141 4412  | .0939 7710 |
| 81  | .2010 8797 | .1649 1925 | .1353 2153 | .1110 8917  | .0912 3990 |
| 82  | .1971 4507 | .1612 9022 | .1320 2101 | .1081 1598  | .0885 8243 |
| 83  | .1932 7948 | .1577 4105 | .1288 0098 | .1052 2237  | .0860 0236 |
| 84  | .1894 8968 | .1542 6097 | .1256 5949 | .1024 0620  | .0834 9743 |
| 85  | .1857 7420 | .1508 7528 | .1225 9463 | .0996 6540  | .0810 6547 |
| 86  | .1821 3157 | .1475 5528 | .1196 0452 | .0969 9795  | .0787 0434 |
| 87  | .1785 6366 | .1443 0835 | .1166 8733 | .0944 0190  | .0764 1198 |
| 88  | .1750 5918 | .1411 3286 | .1138 4130 | .0918 7533  | .0741 8639 |
| 89  | .1716 2665 | .1380 2724 | .1110 6468 | .0894 1638  | .0720 2562 |
| 90  | .1682 6142 | .1349 8997 | .1083 5579 | .0870 2324  | .0699 2779 |
| 91  | .1649 6217 | .1320 1953 | .1057 1296 | .0846 9415  | .0678 9105 |
| 92  | .1617 2762 | .1291 1445 | .1031 3460 | .0824 2740  | .0659 1364 |
| 93  | .1585 5649 | .1262 7331 | .1006 1612 | .0802 2131  | .0639 9383 |
| 94  | .1554 4754 | .1234 9468 | .0981 6500 | .0780 7427  | .0621 2993 |
| 95  | .1523 9955 | .1207 7719 | .0957 7073 | .0759 8469  | .0603 2032 |
| 96  | .1494 1132 | .1181 1950 | .0934 3486 | .0739 5104  | .0585 6342 |
| 97  | .1464 8169 | .1155 2029 | .0911 5596 | .0719 7181  | .0568 5769 |
| 98  | .1436 0950 | .1129 7828 | .0889 3264 | .0700 4556  | .0552 0164 |
| 99  | .1407 9363 | .1104 9221 | .0867 6355 | .0681 7086  | .0535 9383 |
| 100 | .1380 3297 | .1080 6084 | .0846 4737 | .0663 4634  | .0520 3284 |

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| $n$ | 035 (3½%)  | .04 (4%)   | .045 (4½%) | .05 (5%)   | .055 (5½%) |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1   | .9661 8357 | .9615 3846 | .9569 3780 | .9523 8095 | .9478 6730 |
| 2   | .9335 1070 | .9245 5621 | .9157 2995 | .9070 2948 | .8984 5242 |
| 3   | .9019 4271 | .8889 9636 | .8762 9660 | .8638 3760 | .8516 1366 |
| 4   | .8714 4223 | .8548 0419 | .8385 6134 | .8227 0247 | .8072 1674 |
| 5   | .8419 7317 | .8219 2711 | .8024 5105 | .7835 2617 | .7651 3435 |
| 6   | .8135 0064 | .7903 1453 | .7678 9574 | .7462 1540 | .7252 4583 |
| 7   | .7859 9096 | .7599 1781 | .7348 2846 | .7106 8133 | .6874 3681 |
| 8   | .7594 1156 | .7306 9021 | .7031 8513 | .6768 3936 | .6515 9887 |
| 9   | .7337 3097 | .7025 8674 | .6729 0443 | .6446 0892 | .6176 2026 |
| 10  | .7089 1881 | .6755 6417 | .6439 2768 | .6139 1325 | .5854 3058 |
| 11  | .6849 4571 | .6495 8093 | .6161 9874 | .5846 7929 | .5549 1050 |
| 12  | .6617 8330 | .6245 9705 | .5896 6386 | .5568 3742 | .5259 8152 |
| 13  | .6394 0415 | .6005 7409 | .5642 7164 | .5303 2135 | .4985 6068 |
| 14  | .6177 8179 | .5774 7508 | .5399 7286 | .5050 6795 | .4725 6937 |
| 15  | .5968 9062 | .5552 6450 | .5167 2044 | .4810 1710 | .4479 3305 |
| 16  | .5767 0591 | .5339 0818 | .4944 6932 | .4581 1152 | .4245 8109 |
| 17  | .5572 0378 | .5133 7325 | .4731 7639 | .4362 9669 | .4024 4653 |
| 18  | .5383 6114 | .4936 2812 | .4528 0037 | .4155 2065 | .3814 6590 |
| 19  | .5201 5569 | .4746 4242 | .4333 0179 | .3957 3396 | .3615 7906 |
| 20  | .5025 6588 | .4563 8695 | .4146 4286 | .3768 8048 | .3427 2896 |
| 21  | .4855 7090 | .4388 3360 | .3967 8743 | .3589 4236 | .3248 8158 |
| 22  | .4691 5063 | .4219 5539 | .3797 0089 | .3418 4987 | .3079 2567 |
| 23  | .4532 8563 | .4057 2633 | .3633 5013 | .3255 7131 | .2918 7267 |
| 24  | .4379 5713 | .3901 2147 | .3477 0347 | .3100 6791 | .2766 5656 |
| 25  | .4231 4699 | .3751 1680 | .3327 3060 | .2953 0277 | .2622 3370 |
| 26  | .4088 3767 | .3606 8933 | .3184 0248 | .2812 4073 | .2485 6275 |
| 27  | .3950 1224 | .3468 1657 | .3046 9137 | .2678 4832 | .2356 0450 |
| 28  | .3816 5434 | .3334 7747 | .2915 7069 | .2550 9364 | .2233 2181 |
| 29  | .3687 4815 | .3206 5141 | .2790 1502 | .2429 4632 | .2116 7944 |
| 30  | .3562 7841 | .3083 1867 | .2670 0002 | .2313 7745 | .2006 4402 |
| 31  | .3442 3035 | .2964 6026 | .2555 0241 | .2203 5947 | .1901 8390 |
| 32  | .3325 8971 | .2850 5794 | .2444 9991 | .2092 6617 | .1802 6910 |
| 33  | .3213 4271 | .2740 9417 | .2339 7121 | .1998 7254 | .1708 7119 |
| 34  | .3104 7605 | .2635 5209 | .2238 9580 | .1903 5480 | .1619 6321 |
| 35  | .2999 7686 | .2534 1547 | .2142 5444 | .1812 9029 | .1535 1963 |
| 36  | .2898 3272 | .2436 6872 | .2050 2817 | .1726 5741 | .1455 1624 |
| 37  | .2800 3161 | .2342 9685 | .1961 9921 | .1644 3563 | .1379 3008 |
| 38  | .2705 6194 | .2252 8543 | .1877 5044 | .1568 0536 | .1307 3941 |
| 39  | .2614 1250 | .2166 2061 | .1796 6549 | .1491 4797 | .1239 2362 |
| 40  | .2525 7247 | .2082 8904 | .1719 2870 | .1420 4568 | .1174 6314 |
| 41  | .2440 3137 | .2002 7793 | .1645 2507 | .1352 8160 | .1113 3947 |
| 42  | .2357 7910 | .1925 7493 | .1574 4026 | .1288 3962 | .1055 3504 |
| 43  | .2278 0590 | .1851 6820 | .1506 6054 | .1227 0440 | .1000 3322 |
| 44  | .2201 0231 | .1780 4635 | .1441 7276 | .1168 6133 | .0948 1822 |
| 45  | .2126 5924 | .1711 9841 | .1379 6437 | .1112 9651 | .0898 7509 |
| 46  | .2054 6787 | .1646 1386 | .1320 2332 | .1059 9668 | .0851 8965 |
| 47  | .1985 1968 | .1582 8256 | .1263 3810 | .1009 4921 | .0807 4849 |
| 48  | .1918 0645 | .1521 9476 | .1208 9771 | .0961 4211 | .0765 3885 |
| 49  | .1853 2024 | .1463 4112 | .1156 9158 | .0915 6391 | .0725 4867 |
| 50  | .1790 5337 | .1407 1262 | .1107 0965 | .0872 0373 | .0687 6652 |

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| $n$ | .06 (6%)   | .065 (6½%) | .07 (7%)   | .075 (7½%) | .08 (8%)   |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1   | .9433 9623 | .9389 8714 | .9345 7944 | .9302 3256 | .9259 2593 |
| 2   | .8899 9644 | .8816 5928 | .8734 3873 | .8653 3261 | .8573 3882 |
| 3   | .8396 1928 | .8278 4909 | .8162 9788 | .8049 6057 | .7938 3224 |
| 4   | .7920 9366 | .7773 2309 | .7628 9521 | .7488 0053 | .7350 2985 |
| 5   | .7472 5817 | .7298 8084 | .7129 8618 | .6965 5863 | .6805 8320 |
| 6   | .7049 6054 | .6853 3412 | .6663 4222 | .6479 6152 | .6301 6963 |
| 7   | .6650 5711 | .6435 0621 | .6227 4974 | .6027 5490 | .5834 9040 |
| 8   | .6274 1237 | .6042 3119 | .5820 0910 | .5607 0223 | .5402 6888 |
| 9   | .5918 9846 | .5673 5323 | .5439 3374 | .5215 8347 | .5002 4897 |
| 10  | .5583 9478 | .5327 2604 | .5083 4929 | .4851 9393 | .4631 9349 |
| 11  | .5267 8753 | .5002 1224 | .4750 9280 | .4513 4319 | .4288 8286 |
| 12  | .4969 6936 | .4696 8285 | .4440 1196 | .4198 5413 | .3971 1376 |
| 13  | .4688 3902 | .4410 1676 | .4149 6445 | .3905 6198 | .3676 9792 |
| 14  | .4423 0096 | .4141 0025 | .3878 1724 | .3633 1347 | .3404 6104 |
| 15  | .4172 6506 | .3888 2652 | .3624 4602 | .3379 6602 | .3152 4170 |
| 16  | .3936 4628 | .3650 9533 | .3387 3460 | .3143 8699 | .2918 9047 |
| 17  | .3713 6442 | .3428 1251 | .3165 7439 | .2924 5302 | .2702 6895 |
| 18  | .3503 4379 | .3218 8969 | .2958 6392 | .2720 4932 | .2502 4903 |
| 19  | .3305 1301 | .3022 4384 | .2765 0833 | .2530 6913 | .2317 1206 |
| 20  | .3118 0473 | .2837 9703 | .2584 1900 | .2354 1315 | .2145 4821 |
| 21  | .2941 5540 | .2664 7608 | .2415 1309 | .2189 8897 | .1986 5575 |
| 22  | .2775 0510 | .2502 1228 | .2257 1317 | .2037 1067 | .1839 4051 |
| 23  | .2617 9726 | .2349 4111 | .2109 4688 | .1894 9830 | .1703 1528 |
| 24  | .2469 7855 | .2206 0198 | .1971 4662 | .1762 7749 | .1576 9934 |
| 25  | .2329 9863 | .2071 3801 | .1842 4918 | .1639 7906 | .1460 1790 |
| 26  | .2198 1003 | .1944 9579 | .1721 9549 | .1525 3866 | .1352 0176 |
| 27  | .2073 6795 | .1826 2515 | .1609 3037 | .1418 9643 | .1251 8682 |
| 28  | .1956 3014 | .1714 7902 | .1504 0221 | .1319 9668 | .1159 1372 |
| 29  | .1845 5874 | .1610 1316 | .1405 6282 | .1227 8761 | .1073 2752 |
| 30  | .1741 1013 | .1511 8607 | .1313 6712 | .1142 2103 | .0993 7733 |
| 31  | .1642 5484 | .1419 5875 | .1227 7301 | .1062 5212 | .0920 1605 |
| 32  | .1549 5740 | .1332 9460 | .1147 4113 | .0988 3918 | .0852 0005 |
| 33  | .1461 8622 | .1251 5925 | .1072 3470 | .0919 4343 | .0788 8893 |
| 34  | .1379 1153 | .1175 2042 | .1002 1934 | .0855 2877 | .0730 4531 |
| 35  | .1301 0522 | .1103 4781 | .0936 6294 | .0795 6164 | .0676 3454 |
| 36  | .1227 4077 | .1036 1297 | .0875 3546 | .0740 1083 | .0626 2458 |
| 37  | .1157 9318 | .0972 8917 | .0818 0884 | .0688 4729 | .0579 8572 |
| 38  | .1092 3885 | .0913 5134 | .0764 5686 | .0640 4399 | .0536 9048 |
| 39  | .1030 5552 | .0857 7590 | .0714 5501 | .0595 7580 | .0497 1341 |
| 40  | .0972 2219 | .0805 4075 | .0667 8038 | .0554 1935 | .0460 3093 |
| 41  | .0917 1905 | .0756 2512 | .0624 1157 | .0515 5288 | .0426 2123 |
| 42  | .0865 2740 | .0710 0950 | .0583 2857 | .0479 5617 | .0394 6411 |
| 43  | .0816 2962 | .0666 7559 | .0545 1268 | .0446 1039 | .0365 4084 |
| 44  | .0770 0908 | .0626 0619 | .0509 4643 | .0414 9804 | .0338 3411 |
| 45  | .0726 5007 | .0587 8515 | .0476 1349 | .0386 0283 | .0313 2788 |
| 46  | .0685 3781 | .0551 9733 | .0444 9859 | .0359 0961 | .0290 0730 |
| 47  | .0646 5831 | .0518 2848 | .0415 8747 | .0334 0428 | .0268 5861 |
| 48  | .0609 9840 | .0486 6524 | .0388 6679 | .0310 7375 | .0248 6908 |
| 49  | .0575 4566 | .0456 9506 | .0363 2410 | .0289 0582 | .0230 2693 |
| 50  | .0542 8836 | .0429 0616 | .0339 4776 | .0268 8913 | .0213 2123 |

### ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| n    | 8%             | 8,5%           | 9%             | 9,5%           | 10%               | 10,5%           |
|------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|-----------------|
| 1    | 0,92592593     | 0,92165899     | 0,91743119     | 0,91324201     | 0,90909091        | 0,90497738      |
| 2    | 0,85733882     | 0,84955279     | 0,84181000     | 0,83401097     | 0,82626428        | 0,81848005      |
| 3    | 0,79381224     | 0,78290810     | 0,77214344     | 0,76165386     | 0,75131681        | 0,74116204      |
| 4    | 0,73502986     | 0,72157429     | 0,70842522     | 0,69557430     | 0,68301346        | 0,67073488      |
| 5    | 0,68056320     | 0,66504543     | 0,64993139     | 0,63522767     | 0,62092131        | 0,60699989      |
| 6    | 0,63016963     | 0,61294510     | 0,59676733     | 0,58011660     | 0,56447394        | 0,54932117      |
| 7    | 0,58349060     | 0,56492616     | 0,54733425     | 0,52978685     | 0,51315811        | 0,49712323      |
| 8    | 0,54026488     | 0,52066944     | 0,50186279     | 0,48382361     | 0,46650739        | 0,44988528      |
| 9    | 0,50022489     | 0,47987968     | 0,46042129     | 0,44184804     | 0,42409763        | 0,40713600      |
| 10   | 0,46319350     | 0,44228542     | 0,42241081     | 0,40351419     | 0,38554330        | 0,36844887      |
| 11   | 0,42888287     | 0,40763634     | 0,38753286     | 0,36850811     | 0,35049391        | 0,33341789      |
| 12   | 0,39711377     | 0,37570169     | 0,35553471     | 0,33653527     | 0,31863083        | 0,30175375      |
| 13   | 0,36769793     | 0,34626484     | 0,32617865     | 0,30733814     | 0,28966439        | 0,27308012      |
| 14   | 0,34044105     | 0,31914179     | 0,29924647     | 0,28067410     | 0,26333126        | 0,24713151      |
| 15   | 0,31524171     | 0,29413990     | 0,27453805     | 0,25632338     | 0,23939206        | 0,22364842      |
| 16   | 0,29189048     | 0,27109668     | 0,25146977     | 0,23308528     | 0,21672914        | 0,20219676      |
| 17   | 0,27026896     | 0,24985869     | 0,23107318     | 0,21377651     | 0,19784668        | 0,18316649      |
| 18   | 0,25024404     | 0,23028451     | 0,21149375     | 0,19522969     | 0,17985880        | 0,16575912      |
| 19   | 0,23171207     | 0,21224379     | 0,19408668     | 0,17829198     | 0,16350800        | 0,15000880      |
| 20   | 0,21454821     | 0,19561640     | 0,17844090     | 0,16282371     | 0,14864363        | 0,13575457      |
| 21   | 0,19865575     | 0,18029161     | 0,16369807     | 0,14869745     | 0,13513058        | 0,12285481      |
| 22   | 0,18394051     | 0,16616738     | 0,15019172     | 0,13579676     | 0,12284598        | 0,11116083      |
| 23   | 0,17031529     | 0,15314966     | 0,13778139     | 0,12401530     | 0,11167816        | 0,10061613      |
| 24   | 0,15769934     | 0,14115176     | 0,12640495     | 0,11325598     | 0,10155260        | 0,91035329-01   |
| 25   | 0,14601791     | 0,13009379     | 0,11546784     | 0,10343012     | 0,922960030-01    | 0,824030090-01  |
| 26   | 0,13520177     | 0,11990211     | 0,10639251     | 0,944567340-01 | 0,839054570-01    | 0,745725990-01  |
| 27   | 0,12518682     | 0,11050886     | 0,976078120-01 | 0,862618570-01 | 0,762776890-01    | 0,674867510-01  |
| 28   | 0,11591373     | 0,10185148     | 0,895484510-01 | 0,787779520-01 | 0,693433530-01    | 0,610739830-01  |
| 29   | 0,10732752     | 0,938723340-01 | 0,821545430-01 | 0,719433350-01 | 0,630394120-01    | 0,552705330-01  |
| * 30 | 0,993773370-01 | 0,865182800-01 | 0,753711400-01 | 0,657016760-01 | 0,573095570-01    | 0,500186180-01  |
| 31   | 0,921040530-01 | 0,797403500-01 | 0,691478350-01 | 0,600015310-01 | 0,520988800-01    | 0,452657180-01  |
| 32   | 0,852000500-01 | 0,734934110-01 | 0,634383810-01 | 0,547959190-01 | 0,473624440-01    | 0,409644500-01  |
| 33   | 0,788889350-01 | 0,677358620-01 | 0,582003500-01 | 0,500419350-01 | 0,430567670-01    | 0,3707219010-01 |
| 34   | 0,730453100-01 | 0,624293660-01 | 0,533948160-01 | 0,457003970-01 | 0,391425160-01    | 0,335442320-01  |
| 35   | 0,676345470-01 | 0,575385870-01 | 0,489860700-01 | 0,417355230-01 | 0,355841050-01    | 0,303612940-01  |
| 36   | 0,626245800-01 | 0,530309560-01 | 0,444941340-01 | 0,381146330-01 | 0,323491870-01    | 0,274762460-01  |
| 37   | 0,579857230-01 | 0,488764570-01 | 0,412305950-01 | 0,348078840-01 | 0,294081520-01    | 0,248954170-01  |
| 38   | 0,536904840-01 | 0,450474260-01 | 0,378262340-01 | 0,317880220-01 | 0,267348650-01    | 0,225026400-01  |
| 39   | 0,497134110-01 | 0,415183650-01 | 0,347029670-01 | 0,290101570-01 | 0,243044210-01    | 0,203641800-01  |
| 40   | 0,460309160-01 | 0,382657740-01 | 0,318175850-01 | 0,265119590-01 | 0,220949300-01    | 0,184283030-01  |
| 41   | 0,426212370-01 | 0,352678950-01 | 0,292087970-01 | 0,242114690-01 | 0,200861000-01    | 0,166781030-01  |
| 42   | 0,394441090-01 | 0,325050640-01 | 0,267970580-01 | 0,221109310-01 | 0,182602730-01    | 0,150933050-01  |
| 43   | 0,365408420-01 | 0,299585850-01 | 0,245844570-01 | 0,201926310-01 | 0,166002480-01    | 0,136591000-01  |
| 44   | 0,338341130-01 | 0,276115990-01 | 0,225545480-01 | 0,184407590-01 | 0,150911350-01    | 0,123611770-01  |
| 45   | 0,313278620-01 | 0,254486780-01 | 0,206927460-01 | 0,168408760-01 | 0,137192130-01    | 0,111865850-01  |
| 46   | 0,290072980-01 | 0,234548190-01 | 0,189937120-01 | 0,153797950-01 | 0,124720120-01    | 0,101216660-01  |
| 47   | 0,268586100-01 | 0,216173440-01 | 0,174162490-01 | 0,140454750-01 | 0,113381430-01    | 0,916163480-02  |
| 48   | 0,248640830-01 | 0,199238200-01 | 0,159478210-01 | 0,128269180-01 | 0,103074480-01    | 0,829107220-02  |
| 49   | 0,230269290-01 | 0,183629680-01 | 0,146598900-01 | 0,117140800-01 | ** 0,937040730-02 | 0,750323280-02  |
| 50   | 0,213212300-01 | 0,169243940-01 | 0,134485400-01 | 0,106977900-01 | 0,851855210-02    | 0,679075600-02  |

Σημείωση: Οι αριθμοί 01, 02 και 03, που υπάρχουν στο τέλος ορισμένων αριθμών του Πίνακα III, δηλώνουν ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί πρέπει να διαιρεθούν με: 10, 100 ή 1000, ή να πολλαπλασιασθούν επί:  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  ή  $10^{-3}$ .

\*  $(0,993773370 - 01) = (0,993773370)(10^{-1}) = 0,0993773370$

\*\*  $(0,93704073 - 02) = (0,93704073)(10^{-2}) = 0,0093704073$

ΠΙΝΑΚΑΣ III.  $U^n = (1+i)^{-n}$ 

Παρούσα (άρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά  $n$  χρονικούς περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| n  | 11%           | 11,5%         | 12%           | 12,5%         | 13%           | 13,5%         |
|----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|    | 0.1100        | 0.1150        | 0.1200        | 0.1250        | 0.1300        | 0.1350        |
| 1  | 0.90090090    | 0.89586099    | 0.89245714    | 0.88888889    | 0.88495555    | 0.88105727    |
| 2  | 0.81162744    | 0.80435963    | 0.79719388    | 0.79012346    | 0.78316666    | 0.77626191    |
| 3  | 0.73119139    | 0.72139149    | 0.71178075    | 0.70233197    | 0.69303017    | 0.68383120    |
| 4  | 0.65811108    | 0.64699647    | 0.63551858    | 0.62429506    | 0.61331873    | 0.60258276    |
| 5  | 0.59345133    | 0.58026405    | 0.56787686    | 0.55542896    | 0.54273994    | 0.53000975    |
| 6  | 0.53646084    | 0.52041619    | 0.50663113    | 0.49327019    | 0.48013893    | 0.46776189    |
| 7  | 0.48616582    | 0.46847698    | 0.45214922    | 0.43846239    | 0.42500085    | 0.41212502    |
| 8  | 0.43992478    | 0.42081178    | 0.40348324    | 0.38974435    | 0.37615987    | 0.36310574    |
| 9  | 0.39924278    | 0.37847134    | 0.36061003    | 0.34643942    | 0.33288684    | 0.31991495    |
| 10 | 0.35728449    | 0.33670637    | 0.31777324    | 0.30194616    | 0.28758834    | 0.27368516    |
| 11 | 0.31226332    | 0.29197881    | 0.27376111    | 0.25732992    | 0.24289766    | 0.22938395    |
| 12 | 0.27384081    | 0.25349301    | 0.23667510    | 0.22131549    | 0.20730589    | 0.19368019    |
| 13 | 0.25114276    | 0.23078956    | 0.21491742    | 0.20028043    | 0.18664531    | 0.17372736    |
| 14 | 0.23199483    | 0.21154714    | 0.20461982    | 0.19224927    | 0.18007656    | 0.16798703    |
| 15 | 0.20600435    | 0.19517860    | 0.18269627    | 0.17088824    | 0.15989076    | 0.14966496    |
| 16 | 0.18249271    | 0.17172276    | 0.16312147    | 0.15190086    | 0.14149625    | 0.13184578    |
| 17 | 0.16093292    | 0.15115666    | 0.14564415    | 0.13502281    | 0.12521792    | 0.11614368    |
| 18 | 0.15272218    | 0.14094589    | 0.13001960    | 0.12002077    | 0.11081232    | 0.10234686    |
| 19 | 0.13767764    | 0.12608887    | 0.11610678    | 0.10688469    | 0.98063996-01 | 0.90173443-01 |
| 20 | 0.12403391    | 0.11317118    | 0.10366677    | 0.94810835-01 | 0.86782290-01 | 0.79447960-01 |
| 21 | 0.11174226    | 0.10161819    | 0.92559616-01 | 0.84244075-01 | 0.76798405-01 | 0.69988210-01 |
| 22 | 0.10064871    | 0.91191202-01 | 0.82642515-01 | 0.74780870-01 | 0.67963270-01 | 0.61672432-01 |
| 23 | 0.90892528-01 | 0.81785812-01 | 0.73787960-01 | 0.66802272-01 | 0.60144487-01 | 0.54336940-01 |
| 24 | 0.81704910-01 | 0.73350520-01 | 0.65882107-01 | 0.59202430-01 | 0.53225210-01 | 0.47787960-01 |
| 25 | 0.73600801-01 | 0.64578512-01 | 0.56827331-01 | 0.50243174-01 | 0.44101950-01 | 0.38717000-01 |
| 26 | 0.66313596-01 | 0.56500197-01 | 0.52520813-01 | 0.46777224-01 | 0.41683147-01 | 0.37162732-01 |
| 27 | 0.59741978-01 | 0.52914977-01 | 0.46893583-01 | 0.41574955-01 | 0.36887741-01 | 0.32724295-01 |
| 28 | 0.53821602-01 | 0.47457378-01 | 0.41869271-01 | 0.36959782-01 | 0.32644018-01 | 0.28848013-01 |
| 29 | 0.48487930-01 | 0.42562677-01 | 0.37383270-01 | 0.32853140-01 | 0.28888512-01 | 0.25161752-01 |
| 30 | 0.43687802-01 | 0.38172709-01 | 0.33377926-01 | 0.29202791-01 | 0.25565055-01 | 0.22136314-01 |
| 31 | 0.39353892-01 | 0.34235640-01 | 0.29801720-01 | 0.25958030-01 | 0.22627392-01 | 0.19730050-01 |
| 32 | 0.35453957-01 | 0.30704650-01 | 0.26608679-01 | 0.23073810-01 | 0.20021180-01 | 0.17183100-01 |
| 33 | 0.31940502-01 | 0.27517811-01 | 0.23757740-01 | 0.20510050-01 | 0.17717860-01 | 0.15315691-01 |
| 34 | 0.28775270-01 | 0.24697588-01 | 0.21212270-01 | 0.18211150-01 | 0.15679570-01 | 0.13494010-01 |
| 35 | 0.25923628-01 | 0.22150310-01 | 0.18935320-01 | 0.16205475-01 | 0.13875680-01 | 0.11888800-01 |
| 36 | 0.23546200-01 | 0.19863731-01 | 0.16910260-01 | 0.14404860-01 | 0.12278370-01 | 0.10478479-01 |
| 37 | 0.21040198-01 | 0.17816810-01 | 0.15098479-01 | 0.12804320-01 | 0.10764960-01 | 0.92296860-02 |
| 38 | 0.18955133-01 | 0.15597320-01 | 0.13060780-01 | 0.11381630-01 | 0.09616547-02 | 0.81112498-02 |
| 39 | 0.17076487-01 | 0.14331232-01 | 0.12036430-01 | 0.10116990-01 | 0.08510219-02 | 0.71640968-02 |
| 40 | 0.15384410-01 | 0.12853025-01 | 0.10746790-01 | 0.08982870-02 | 0.07511167-02 | 0.63119760-02 |
| 41 | 0.13859810-01 | 0.11527370-01 | 0.09583560-02 | 0.07936775-02 | 0.06687500-02 | 0.55612155-02 |
| 42 | 0.12466340-01 | 0.10338650-01 | 0.08572860-02 | 0.07054910-02 | 0.05897080-02 | 0.48974640-02 |
| 43 | 0.11248940-01 | 0.09212156-02 | 0.07649350-02 | 0.06315991-02 | 0.05219478-02 | 0.43164598-02 |
| 44 | 0.10134180-01 | 0.08158150-02 | 0.06279820-02 | 0.05614233-02 | 0.04619006-02 | 0.38034880-02 |
| 45 | 0.91298950-02 | 0.74581348-02 | 0.60980260-02 | 0.49904136-02 | 0.40876160-02 | 0.33510915-02 |
| 46 | 0.82251347-02 | 0.66889222-02 | 0.54446610-02 | 0.44359232-02 | 0.36113583-02 | 0.29525035-02 |
| 47 | 0.74100310-02 | 0.59990340-02 | 0.48613083-02 | 0.39430420-02 | 0.32012030-02 | 0.26011274-02 |
| 48 | 0.66757030-02 | 0.53802900-02 | 0.43404520-02 | 0.35049270-02 | 0.28329230-02 | 0.22919160-02 |
| 49 | 0.60141477-02 | 0.48253803-02 | 0.38754036-02 | 0.31154970-02 | 0.25070115-02 | 0.20193039-02 |
| 50 | 0.54181510-02 | 0.43726950-02 | 0.34601808-02 | 0.27693250-02 | 0.22185940-02 | 0.17791210-02 |

| n  | 14%           | 14,5%         | 15%           | 15,5%         | 16%           | 16,5%         |
|----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|    | 0.1400        | 0.1450        | 0.1500        | 0.1550        | 0.1600        | 0.1650        |
| 1  | 0.87192496    | 0.86733625    | 0.86294522    | 0.85880087    | 0.85480897    | 0.85096910    |
| 2  | 0.76466751    | 0.76176147    | 0.75844367    | 0.75461114    | 0.75036291    | 0.74570751    |
| 3  | 0.67447152    | 0.66861976    | 0.66337624    | 0.65773525    | 0.65269768    | 0.64736427    |
| 4  | 0.59208028    | 0.58390982    | 0.57619048    | 0.56891687    | 0.56208130    | 0.55568333    |
| 5  | 0.51606867    | 0.50512715    | 0.49471767    | 0.48485081    | 0.47551132    | 0.46669813    |
| 6  | 0.45586556    | 0.44177935    | 0.42823760    | 0.41521915    | 0.40264226    | 0.39059549    |
| 7  | 0.39963733    | 0.38254022    | 0.36754375    | 0.35469190    | 0.34288295    | 0.33193156    |
| 8  | 0.35015906    | 0.32849801    | 0.30901178    | 0.29133705    | 0.27530866    | 0.26070864    |
| 9  | 0.30707195    | 0.28243145    | 0.26466242    | 0.24937771    | 0.23625299    | 0.22493686    |
| 10 | 0.26974782    | 0.24193341    | 0.22471971    | 0.20969014    | 0.19668336    | 0.18451046    |
| 11 | 0.23661738    | 0.20546642    | 0.18496323    | 0.16692653    | 0.15145161    | 0.13863866    |
| 12 | 0.20755911    | 0.17369013    | 0.15670714    | 0.14174255    | 0.12846678    | 0.11659855    |
| 13 | 0.18206930    | 0.14500010    | 0.12700579    | 0.11356421    | 0.10222660    | 0.91732923    |
| 14 | 0.15911000    | 0.11502194    | 0.10112866    | 0.8900181     | 0.79195334    | 0.71178791    |
| 15 | 0.14009649    | 0.10111953    | 0.87249449    | 0.77515167    | 0.69792702    | 0.63118184    |
| 16 | 0.12289166    | 0.08448090    | 0.74038477    | 0.65984190-01 | 0.59340530-01 | 0.53816800-01 |
| 17 | 0.10779970    | 0.07000706    | 0.62925840-01 | 0.54805130-01 | 0.49144270-01 | 0.44593320-01 |
| 18 | 0.94561140-01 | 0.57187953-01 | 0.50805130-01 | 0.44735040-01 | 0.39647060-01 | 0.35497770-01 |
| 19 | 0.82943680-01 | 0.46310090-01 | 0.40265320-01 | 0.35263250-01 | 0.31185490-01 | 0.27710980-01 |
| 20 | 0.72761727-01 | 0.36663835-01 | 0.31030290-01 | 0.26602220-01 | 0.23118549-01 | 0.20471098-01 |
| 21 | 0.63826070-01 | 0.28221600-01 | 0.23110810-01 | 0.18950600-01 | 0.16279810-01 | 0.14171980-01 |
| 22 | 0.55947780-01 | 0.20848630-01 | 0.16720520-01 | 0.13394880-01 | 0.11077670-01 | 0.97199990-01 |
| 23 | 0.49112090-01 | 0.14400920-01 | 0.11144280-01 | 0.08592060-01 | 0.06720480-01 | 0.05491330-01 |
| 24 | 0.43080780-01 | 0.10785407-01 | 0.07944280-01 | 0.05794570-01 | 0.04379710-01 | 0.03546330-01 |
| 25 | 0.37770161-01 | 0.07737180-01 | 0.05577390-01 | 0.04072560-01 | 0.02945280-01 | 0.02197105-01 |

### ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1+i)^{-n}$

Παρούσα (άρχική) άξια κεφαλαίου, του οποίου η τελική άξια μετά  $n$  χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

| n  | 14%            | 14,5%          | 15%            | 15,5%           | 16%            | 16,5%          |
|----|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|
|    | 0,1400         | 0,1450         | 0,1500         | 0,1550          | 0,1600         | 0,1650         |
| 26 | 0,33149260-01  | 0,295860310-01 | 0,264151190-01 | 0,235976330-01  | 0,210907660-01 | 0,188593180-01 |
| 27 | 0,290783020-01 | 0,25837580-01  | 0,22949860-01  | 0,204308510-01  | 0,181816910-01 | 0,161882560-01 |
| 28 | 0,255072630-01 | 0,225655750-01 | 0,199437947-01 | 0,1768910690-01 | 0,156738760-01 | 0,138894990-01 |
| 29 | 0,223174800-01 | 0,197078260-01 | 0,173685140-01 | 0,153151960-01  | 0,135119400-01 | 0,119276680-01 |
| 30 | 0,19670260-01  | 0,172121620-01 | 0,151030580-01 | 0,132599800-01  | 0,116462610-01 | 0,102191690-01 |
| 31 | 0,172166800-01 | 0,150324560-01 | 0,131330920-01 | 0,114804400-01  | 0,100415870-01 | 0,878412760-01 |
| 32 | 0,15023550-01  | 0,13128780-01  | 0,114200807-01 | 0,993977680-02  | 0,86565090-02  | 0,754365720-02 |
| 33 | 0,13276880-01  | 0,114661860-01 | 0,990350647-02 | 0,860586570-02  | 0,746253330-02 | 0,645503560-02 |
| 34 | 0,118207750-01 | 0,100141380-01 | 0,843422130-02 | 0,745096660-02  | 0,643322010-02 | 0,555400050-02 |
| 35 | 0,101936620-01 | 0,874587050-02 | 0,790888810-02 | 0,645105280-02  | 0,554587940-02 | 0,477081590-02 |
| 36 | 0,894180910-02 | 0,763840220-02 | 0,652966790-02 | 0,558952710-02  | 0,478093060-02 | 0,409512100-02 |
| 37 | 0,784369220-02 | 0,666710970-02 | 0,567779820-02 | 0,483578110-02  | 0,412149100-02 | 0,351912530-02 |
| 38 | 0,688093180-02 | 0,582672820-02 | 0,493721590-02 | 0,418681590-02  | 0,353101020-02 | 0,301723500-02 |
| 39 | 0,602948650-02 | 0,508895650-02 | 0,429323120-02 | 0,362495560-02  | 0,306293990-02 | 0,258891560-02 |
| 40 | 0,52492660-02  | 0,444406860-02 | 0,373124450-02 | 0,313846950-02  | 0,26406550-02  | 0,222312070-02 |
| 41 | 0,464409550-02 | 0,388128110-02 | 0,324629960-02 | 0,271730700-02  | 0,227626330-02 | 0,190425810-02 |
| 42 | 0,407717680-02 | 0,338976520-02 | 0,282286920-02 | 0,235264630-02  | 0,196229600-02 | 0,163794990-02 |
| 43 | 0,357186070-02 | 0,294695660-02 | 0,245468990-02 | 0,203692360-02  | 0,169183640-02 | 0,140590960-02 |
| 44 | 0,313663270-02 | 0,258559190-02 | 0,213449470-02 | 0,176357020-02  | 0,145810560-02 | 0,120206660-02 |
| 45 | 0,274967740-02 | 0,225815190-02 | 0,185605240-02 | 0,152690060-02  | 0,125716000-02 | 0,103431720-02 |
| 46 | 0,241199770-02 | 0,197218510-02 | 0,161398470-02 | 0,132199190-02  | 0,108175860-02 | 0,889216880-02 |
| 47 | 0,21157850-02  | 0,17283460-02  | 0,140366490-02 | 0,114546910-02  | 0,934274660-03 | 0,763775640-03 |
| 48 | 0,18595330-02  | 0,150430780-02 | 0,122006937-02 | 0,99079840-03   | 0,80540190-03  | 0,651172600-03 |
| 49 | 0,162802980-02 | 0,13180590-02  | 0,106122120-02 | 0,857991210-03  | 0,694318270-03 | 0,562197420-03 |
| 50 | 0,142809630-02 | 0,114742880-02 | 0,922800980-03 | 0,742849530-03  | 0,598550210-03 | 0,497729460-03 |

| n  | 17%            | 17,5%          | 18%            | 18,5%           | 20%             |
|----|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
|    | 0,1700         | 0,1750         | 0,1800         | 0,1850          | 0,1900          |
| 1  | 0,85470086     | 0,85106383     | 0,84755763     | 0,84418816      | 0,84093614      |
| 2  | 0,73051358     | 0,72430665     | 0,71814543     | 0,71213459      | 0,70616482      |
| 3  | 0,62437056     | 0,61641376     | 0,60861084     | 0,60095951      | 0,59341582      |
| 4  | 0,53165006     | 0,52462447     | 0,51794688     | 0,50713853      | 0,49866876      |
| 5  | 0,45611116     | 0,44648893     | 0,43710322     | 0,42796500      | 0,41906938      |
| 6  | 0,39383839     | 0,38399056     | 0,37404155     | 0,36415135      | 0,35421234      |
| 7  | 0,33131950     | 0,32119622     | 0,31130764     | 0,30168794      | 0,29239173      |
| 8  | 0,27847218     | 0,26752068     | 0,25780181     | 0,25118949      | 0,24466703      |
| 9  | 0,23403375     | 0,22342190     | 0,21345608     | 0,21037354      | 0,20596683      |
| 10 | 0,20003739     | 0,18915234     | 0,18115667     | 0,18315404      | 0,17560238      |
| 11 | 0,17780974     | 0,16696615     | 0,16191905     | 0,15656038      | 0,14753653      |
| 12 | 0,15591671     | 0,14439283     | 0,13921065     | 0,13403070      | 0,12400422      |
| 13 | 0,13989624     | 0,12788751     | 0,12268776     | 0,11806810      | 0,10420523      |
| 14 | 0,12101916     | 0,10855512     | 0,10454893     | 0,928844720-01  | 0,875474220-01  |
| 15 | 0,948881750-01 | 0,890066110-01 | 0,835160480-01 | 0,783835210-01  | 0,735860690-01  |
| 16 | 0,811010050-01 | 0,757520090-01 | 0,707769080-01 | 0,661466310-01  | 0,618370330-01  |
| 17 | 0,693110980-01 | 0,640897940-01 | 0,590979730-01 | 0,549197300-01  | 0,514963890-01  |
| 18 | 0,592453810-01 | 0,540879110-01 | 0,494810640-01 | 0,471052960-01  | 0,436671370-01  |
| 19 | 0,506370800-01 | 0,466760940-01 | 0,428106660-01 | 0,397513030-01  | 0,366950740-01  |
| 20 | 0,432795560-01 | 0,397413570-01 | 0,365056370-01 | 0,335654040-01  | 0,308161960-01  |
| 21 | 0,369910710-01 | 0,338226120-01 | 0,309369770-01 | 0,283083560-01  | 0,259427720-01  |
| 22 | 0,316163020-01 | 0,287850490-01 | 0,262737770-01 | 0,238889010-01  | 0,217754370-01  |
| 23 | 0,270224910-01 | 0,244979160-01 | 0,222186560-01 | 0,201594170-01  | 0,182988670-01  |
| 24 | 0,23064170-01  | 0,208497880-01 | 0,188979200-01 | 0,170121670-01  | 0,153770480-01  |
| 25 | 0,19740280-01  | 0,177440730-01 | 0,159569490-01 | 0,143562500-01  | 0,129218890-01  |
| 26 | 0,168720410-01 | 0,151013610-01 | 0,135224890-01 | 0,121149860-01  | 0,108587300-01  |
| 27 | 0,144203680-01 | 0,128522050-01 | 0,114400320-01 | 0,102236170-01  | 0,912498360-02  |
| 28 | 0,12325250-01  | 0,109180470-01 | 0,971189180-02 | 0,862752510-02  | 0,766805330-02  |
| 29 | 0,105340600-01 | 0,930897600-02 | 0,820976000-02 | 0,728061190-02  | 0,644374230-02  |
| 30 | 0,900376580-02 | 0,792253280-02 | 0,697424950-02 | 0,614397630-02  | 0,541409050-02  |
| 31 | 0,76552640-02  | 0,676258110-02 | 0,591308710-02 | 0,518479020-02  | 0,455034420-02  |
| 32 | 0,65171180-02  | 0,573896690-02 | 0,498202460-02 | 0,435350400-02  | 0,382181840-02  |
| 33 | 0,562168630-02 | 0,488371660-02 | 0,424515750-02 | 0,369227880-02  | 0,321329300-02  |
| 34 | 0,48048600-02  | 0,415635560-02 | 0,359375910-02 | 0,311584710-02  | 0,270024620-02  |
| 35 | 0,410618180-02 | 0,353732300-02 | 0,304480690-02 | 0,262740690-02  | 0,228611950-02  |
| 36 | 0,351001540-02 | 0,301004870-02 | 0,254171380-02 | 0,2114980870-02 | 0,1808189020-02 |
| 37 | 0,300001320-02 | 0,256211720-02 | 0,218960500-02 | 0,187249680-02  | 0,160236880-02  |
| 38 | 0,25641190-02  | 0,218052530-02 | 0,185556750-02 | 0,158018610-02  | 0,134652840-02  |
| 39 | 0,219155030-02 | 0,185756620-02 | 0,157254050-02 | 0,133347350-02  | 0,113153650-02  |
| 40 | 0,187311990-02 | 0,157937550-02 | 0,133761200-02 | 0,112529410-02  | 0,950871010-03  |
| 41 | 0,160095760-02 | 0,134616960-02 | 0,112493180-02 | 0,949615280-03  | 0,799051270-03  |
| 42 | 0,136813950-02 | 0,113439560-02 | 0,957096560-03 | 0,801363120-03  | 0,671471660-03  |
| 43 | 0,11695290-02  | 0,973580350-03 | 0,811098780-03 | 0,676255800-03  | 0,564261900-03  |
| 44 | 0,999590560-03 | 0,828572020-03 | 0,687171550-03 | 0,570860000-03  | 0,474169670-03  |
| 45 | 0,854350910-03 | 0,705173660-03 | 0,582518520-03 | 0,481586500-03  | 0,398616190-03  |
| 46 | 0,730241560-03 | 0,600147780-03 | 0,495458760-03 | 0,408462110-03  | 0,334841940-03  |
| 47 | 0,624114920-03 | 0,510764070-03 | 0,418855710-03 | 0,342955370-03  | 0,281378780-03  |
| 48 | 0,534351560-03 | 0,434692810-03 | 0,354533860-03 | 0,289413810-03  | 0,236453600-03  |
| 49 | 0,455924410-03 | 0,366951360-03 | 0,300456580-03 | 0,244221070-03  | 0,199700500-03  |
| 50 | 0,389678980-03 | 0,316852210-03 | 0,254622270-03 | 0,206102170-03  | 0,166975210-03  |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ IV. } \alpha_{n|i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Αρχική (παρούσα) αξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  ὧρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

| $n$ | .0025 ( $\frac{1}{4}\%$ ) | .004167 ( $\frac{1}{2}\%$ ) | .005 ( $\frac{1}{2}\%$ ) | .005833 ( $\frac{3}{4}\%$ ) | .0075 ( $1\%$ ) |
|-----|---------------------------|-----------------------------|--------------------------|-----------------------------|-----------------|
| 50  | 46.9461 7037              | 45.0509 1617                | 44.1427 8635             | 43.2598 6428                | 41.5664 4707    |
| 51  | 47.8266 0386              | 45.8598 3353                | 44.9181 9537             | 44.0031 7907                | 42.2495 7525    |
| 52  | 48.7048 4176              | 46.6653 9439                | 45.6897 4664             | 44.7421 8301                | 42.9276 1812    |
| 53  | 49.5808 8953              | 47.4676 1267                | 46.4574 5934             | 45.4769 0108                | 43.6006 1351    |
| 54  | 50.4547 5265              | 48.2665 0224                | 47.2213 5258             | 46.2073 5816                | 44.2685 9902    |
| 55  | 51.3264 3656              | 49.0620 7692                | 47.9814 4535             | 46.9335 7895                | 44.9316 1193    |
| 56  | 52.1959 4669              | 49.8543 5046                | 48.7377 5657             | 47.6555 8802                | 45.5896 8926    |
| 57  | 53.0632 8847              | 50.6433 3656                | 49.4903 0505             | 48.3734 0980                | 46.2428 6776    |
| 58  | 53.9284 6730              | 51.4290 4885                | 50.2391 0950             | 49.0870 6856                | 46.8911 8388    |
| 59  | 54.7914 8858              | 52.2115 0093                | 50.9841 8856             | 49.7965 8846                | 47.5346 7382    |
| 60  | 55.6523 5769              | 52.9907 0632                | 51.7255 6075             | 50.5019 9350                | 48.1733 7352    |
| 61  | 56.5110 7999              | 53.7666 7850                | 52.4632 4453             | 51.2033 0754                | 48.8073 1863    |
| 62  | 57.3676 6083              | 54.5394 3087                | 53.1972 5824             | 51.9005 5431                | 49.4365 4455    |
| 63  | 58.2221 0557              | 55.3089 7680                | 53.9276 2014             | 52.5937 5739                | 50.0610 8640    |
| 64  | 59.0744 1952              | 56.0753 2959                | 54.6543 4840             | 53.2829 4024                | 50.6809 7906    |
| 65  | 59.9246 0800              | 56.8385 0250                | 55.3774 6109             | 53.9681 2617                | 51.2962 5713    |
| 66  | 60.7726 7631              | 57.5985 0871                | 56.0969 7621             | 54.6493 3836                | 51.9069 5497    |
| 67  | 61.6186 2974              | 58.3553 6137                | 56.8129 1165             | 55.3265 9986                | 52.5131 0667    |
| 68  | 62.4624 7355              | 59.1090 7357                | 57.5252 8522             | 55.9999 3358                | 53.1147 4607    |
| 69  | 63.3042 1302              | 59.8596 5832                | 58.2341 1465             | 56.6693 6230                | 53.7119 0677    |
| 70  | 64.1438 5339              | 60.6071 2862                | 58.9394 1756             | 57.3349 0867                | 54.3046 2210    |
| 71  | 64.9813 9989              | 61.3514 9738                | 59.6412 1151             | 57.9965 9520                | 54.8929 2516    |
| 72  | 65.8168 5774              | 62.0927 7748                | 60.3395 1394             | 58.6544 4427                | 55.4768 4880    |
| 73  | 66.6502 3216              | 62.8309 8172                | 61.0343 4222             | 59.3084 7815                | 56.0564 2561    |
| 74  | 67.4815 2834              | 63.5661 2287                | 61.7257 1366             | 59.9587 1896                | 56.6316 8795    |
| 75  | 68.3107 5146              | 64.2982 1365                | 62.4136 4543             | 60.6051 8869                | 57.2026 6794    |
| 76  | 69.1379 0670              | 65.0272 6670                | 63.0981 5466             | 61.2479 0922                | 57.7693 9746    |
| 77  | 69.9629 9920              | 65.7532 9464                | 63.7792 5836             | 61.8869 0229                | 58.3319 0815    |
| 78  | 70.7860 3411              | 66.4763 1002                | 64.4569 7350             | 62.5221 8952                | 58.8902 3141    |
| 79  | 71.6070 1637              | 67.1963 2533                | 65.1313 1691             | 63.1537 9239                | 59.4443 9842    |
| 80  | 72.4259 5169              | 67.9133 5303                | 65.8023 0539             | 63.7817 3229                | 59.9944 4012    |
| 81  | 73.2428 4458              | 68.6274 0550                | 66.4699 5561             | 64.4060 3044                | 60.5403 8722    |
| 82  | 74.0577 0033              | 69.3384 9511                | 67.1342 8410             | 65.0267 0798                | 61.0822 7019    |
| 83  | 74.8705 2402              | 70.0466 3413                | 67.7953 0765             | 65.6437 8590                | 61.6201 1930    |
| 84  | 75.6813 2072              | 70.7518 3482                | 68.4530 4244             | 66.2572 8507                | 62.1539 6456    |
| 85  | 76.4900 9548              | 71.4541 0936                | 69.1075 0491             | 66.8672 2625                | 62.6838 3579    |
| 86  | 77.2968 5035              | 72.1534 6991                | 69.7587 1135             | 67.4736 3007                | 63.2097 6257    |
| 87  | 78.1015 9935              | 72.8499 2854                | 70.4066 7796             | 68.0765 1706                | 63.7317 7427    |
| 88  | 78.9043 3850              | 73.5434 9730                | 71.0514 2086             | 68.6759 0759                | 64.2499 0002    |
| 89  | 79.7050 7581              | 74.2341 8818                | 71.6929 5608             | 69.2718 2197                | 64.7641 6875    |
| 90  | 80.5038 1627              | 74.9220 1313                | 72.3312 9958             | 69.8642 8033                | 65.2746 0918    |
| 91  | 81.3005 6486              | 75.6069 8403                | 72.9664 6725             | 70.4533 0273                | 65.7812 4981    |
| 92  | 82.0953 2634              | 76.2891 1272                | 73.5984 7487             | 71.0389 0910                | 66.2841 1892    |
| 93  | 82.8881 0628              | 76.9684 1101                | 74.2273 3818             | 71.6211 1923                | 66.7832 4458    |
| 94  | 83.6789 0901              | 77.6448 9063                | 74.8530 7282             | 72.1999 5284                | 67.2786 5467    |
| 95  | 84.4677 3966              | 78.3185 6329                | 75.4756 9434             | 72.7754 2950                | 67.7703 7685    |
| 96  | 85.2546 0315              | 78.9894 4062                | 76.0952 1825             | 73.3475 6869                | 68.2584 3856    |
| 97  | 86.0395 0439              | 79.6575 3422                | 76.7116 5995             | 73.9163 8975                | 68.7428 6705    |
| 98  | 86.8224 4827              | 80.3228 5566                | 77.3250 3478             | 74.4819 1193                | 69.2236 8938    |
| 99  | 87.6034 3967              | 80.9854 1642                | 77.9353 5799             | 75.0441 5436                | 69.7009 3239    |
| 100 | 88.3824 8346              | 81.6452 2797                | 78.5426 4477             | 75.6031 3607                | 70.1746 2272    |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ IV. } \alpha_{n|i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Αρχική (παρούσα) αξία μιάς Ληξιπρόθεσμης ράντας η όρων 1 νομισματικής μονάδας.

| n   | .0025 ( $\frac{1}{4}\%$ ) | .004167 ( $\frac{1}{24}\%$ ) | .005 ( $\frac{1}{20}\%$ ) | .005833 ( $\frac{1}{17}\%$ ) | .0075 ( $\frac{1}{13}\%$ ) |
|-----|---------------------------|------------------------------|---------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 50  | 46.9461 7037              | 45.0509 1617                 | 44.1427 8635              | 43.2598 6428                 | 41.5664 4707               |
| 51  | 47.8266 0386              | 45.8598 3353                 | 44.9181 9537              | 44.0031 7907                 | 42.2495 7525               |
| 52  | 48.7048 4176              | 46.6653 9439                 | 45.6897 4664              | 44.7421 8301                 | 42.9276 1812               |
| 53  | 49.5808 8953              | 47.4676 1267                 | 46.4574 5934              | 45.4769 0108                 | 43.6006 1351               |
| 54  | 50.4547 5265              | 48.2665 0224                 | 47.2213 5258              | 46.2073 5816                 | 44.2685 9902               |
| 55  | 51.3264 3656              | 49.0620 7692                 | 47.9814 4535              | 46.9335 7895                 | 44.9318 1193               |
| 56  | 52.1959 4669              | 49.8543 5046                 | 48.7377 5657              | 47.6555 8802                 | 45.5896 8928               |
| 57  | 53.0632 8847              | 50.6433 3656                 | 49.4903 0505              | 48.3734 0980                 | 46.2428 6776               |
| 58  | 53.9284 6730              | 51.4290 4885                 | 50.2391 0950              | 49.0870 6856                 | 46.8911 8388               |
| 59  | 54.7914 8858              | 52.2115 0093                 | 50.9841 8856              | 49.7965 8846                 | 47.5346 7382               |
| 60  | 55.6523 5769              | 52.9907 0632                 | 51.7255 6075              | 50.5019 9350                 | 48.1733 7352               |
| 61  | 56.5110 7999              | 53.7666 7850                 | 52.4632 4453              | 51.2033 0754                 | 48.8073 1863               |
| 62  | 57.3676 6083              | 54.5394 3087                 | 53.1972 5824              | 51.9005 5431                 | 49.4365 4455               |
| 63  | 58.2221 0557              | 55.3089 7680                 | 53.9276 2014              | 52.5937 5739                 | 50.0610 8640               |
| 64  | 59.0744 1932              | 56.0753 2959                 | 54.6543 4840              | 53.2829 4024                 | 50.6809 7906               |
| 65  | 59.9246 0800              | 56.8385 0250                 | 55.3774 6109              | 53.9681 2617                 | 51.2962 5713               |
| 66  | 60.7726 7631              | 57.5985 0871                 | 56.0969 7621              | 54.6493 3836                 | 51.9069 5497               |
| 67  | 61.6186 2974              | 58.3553 6137                 | 56.8129 1165              | 55.3265 9986                 | 52.5131 0667               |
| 68  | 62.4624 7355              | 59.1090 7357                 | 57.5252 8522              | 55.9999 3358                 | 53.1147 4607               |
| 69  | 63.3042 1302              | 59.8596 5832                 | 58.2341 1465              | 56.6693 6230                 | 53.7119 0677               |
| 70  | 64.1438 5339              | 60.6071 2862                 | 58.9394 1756              | 57.3349 0867                 | 54.3046 2210               |
| 71  | 64.9813 9989              | 61.3514 0738                 | 59.6412 1151              | 57.9965 9520                 | 54.8929 2516               |
| 72  | 65.8168 5774              | 62.0927 7748                 | 60.3395 1394              | 58.6544 4427                 | 55.4768 4880               |
| 73  | 66.6502 3216              | 62.8309 8172                 | 61.0343 4222              | 59.3084 7815                 | 56.0564 2561               |
| 74  | 67.4815 2834              | 63.5661 2287                 | 61.7257 1366              | 59.9587 1896                 | 56.6316 8795               |
| 75  | 68.3107 5146              | 64.2982 1365                 | 62.4136 4543              | 60.6051 8869                 | 57.2026 6794               |
| 76  | 69.1379 0670              | 65.0272 6670                 | 63.0981 5466              | 61.2479 0922                 | 57.7693 9746               |
| 77  | 69.9629 9920              | 65.7532 9464                 | 63.7792 5836              | 61.8869 0229                 | 58.3319 0815               |
| 78  | 70.7860 3411              | 66.4763 1002                 | 64.4569 7350              | 62.5221 8952                 | 58.8902 3141               |
| 79  | 71.6070 1657              | 67.1963 2533                 | 65.1313 1691              | 63.1537 9239                 | 59.4443 9842               |
| 80  | 72.4259 5169              | 67.9133 5303                 | 65.8023 0539              | 63.7817 3229                 | 59.9944 4012               |
| 81  | 73.2428 4438              | 68.6274 0550                 | 66.4699 5561              | 64.4060 3044                 | 60.5403 8722               |
| 82  | 74.0577 0033              | 69.3384 9511                 | 67.1342 8419              | 65.0267 0798                 | 61.0822 7019               |
| 83  | 74.8705 2402              | 70.0466 3413                 | 67.7953 0765              | 65.6437 8590                 | 61.6201 1930               |
| 84  | 75.6813 2072              | 70.7518 3482                 | 68.4530 4244              | 66.2572 8507                 | 62.1530 6458               |
| 85  | 76.4900 9548              | 71.4541 0936                 | 69.1075 0491              | 66.8672 2625                 | 62.6838 3579               |
| 86  | 77.2968 5335              | 72.1534 6991                 | 69.7587 1135              | 67.4736 3007                 | 63.2097 6257               |
| 87  | 78.1015 9935              | 72.8499 2854                 | 70.4066 7796              | 68.0765 1706                 | 63.7317 7427               |
| 88  | 78.9043 3850              | 73.5434 0730                 | 71.0514 2086              | 68.6759 0759                 | 64.2499 0002               |
| 89  | 79.7050 7581              | 74.2341 8818                 | 71.6929 5608              | 69.2718 2197                 | 64.7641 6875               |
| 90  | 80.5038 1627              | 74.9220 1313                 | 72.3312 9958              | 69.8642 8033                 | 65.2746 0918               |
| 91  | 81.3005 6486              | 75.6069 8403                 | 72.9664 6725              | 70.4533 0273                 | 65.7812 4981               |
| 92  | 82.0953 2654              | 76.2891 1272                 | 73.5984 7487              | 71.0389 0910                 | 66.2841 1892               |
| 93  | 82.8881 0628              | 76.9684 1101                 | 74.2273 3818              | 71.6211 1923                 | 66.7832 4458               |
| 94  | 83.6789 0901              | 77.6448 9063                 | 74.8530 7282              | 72.1999 5284                 | 67.2786 5467               |
| 95  | 84.4677 3966              | 78.3185 6329                 | 75.4756 9434              | 72.7754 2950                 | 67.7703 7685               |
| 96  | 85.2546 0315              | 78.9894 4062                 | 76.0952 1825              | 73.3475 6869                 | 68.2584 3856               |
| 97  | 86.0395 0439              | 79.6575 3422                 | 76.7116 5995              | 73.9163 8975                 | 68.7428 6705               |
| 98  | 86.8224 4827              | 80.3228 5566                 | 77.3250 3478              | 74.4819 1193                 | 69.2236 8938               |
| 99  | 87.6034 3967              | 80.9854 1642                 | 77.9353 5799              | 75.0441 5436                 | 69.7009 3239               |
| 100 | 88.3824 8346              | 81.6452 2797                 | 78.5426 4477              | 75.6031 3607                 | 70.1746 2272               |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ IV. } \alpha_{n|i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Αρχική (παρούσα) αξία μιάς Ληξιπρόθεσμης ράντας η ὧρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

| π  | 01 (1%)      | 0125 (1¼%)   | 0125 (1¼%)   | 015 (1½%)    | 0175 (1¾%)   |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1  | 0.9900 9901  | 0.9888 7515  | 0.9876 5432  | 0.9852 2167  | 0.9828 0098  |
| 2  | 1.9703 9506  | 1.9667 4923  | 1.9631 1538  | 1.9558 8342  | 1.9486 9875  |
| 3  | 2.9409 8521  | 2.9337 4460  | 2.9265 3371  | 2.9122 0042  | 2.8979 8403  |
| 4  | 3.9019 6555  | 3.8899 8230  | 3.8780 5798  | 3.8543 8465  | 3.8309 4254  |
| 5  | 4.8534 3124  | 4.8355 8200  | 4.8178 3504  | 4.7826 4497  | 4.7478 5508  |
| 6  | 5.7954 7647  | 5.7706 6205  | 5.7460 0902  | 5.6971 8717  | 5.6489 9762  |
| 7  | 6.7281 9453  | 6.6953 3948  | 6.6627 2585  | 6.5982 1396  | 6.5346 4139  |
| 8  | 7.6516 7775  | 7.6097 3002  | 7.5681 2429  | 7.4859 2508  | 7.4050 5297  |
| 9  | 8.5660 1758  | 8.5139 4810  | 8.4623 4498  | 8.3605 1732  | 8.2604 9452  |
| 10 | 9.4713 0453  | 9.4081 0690  | 9.3455 2591  | 9.2221 8455  | 9.1012 2291  |
| 11 | 10.3676 2825 | 10.2923 1832 | 10.2178 0337 | 10.0711 1779 | 9.9274 9181  |
| 12 | 11.2550 7747 | 11.1666 9302 | 11.0793 1197 | 10.9075 0521 | 10.7395 4969 |
| 13 | 12.1337 4007 | 12.0313 4044 | 11.9301 8466 | 11.7315 3222 | 11.5376 4097 |
| 14 | 13.0037 0304 | 12.8863 6880 | 12.7705 5275 | 12.5433 8150 | 12.3220 0587 |
| 15 | 13.8650 5252 | 13.7318 8509 | 13.6005 4592 | 13.3432 3301 | 13.0928 8046 |
| 16 | 14.7178 7378 | 14.5679 9514 | 14.4202 9227 | 14.1312 6405 | 13.8504 9677 |
| 17 | 15.5622 5127 | 15.3948 0360 | 15.2299 1829 | 14.9076 4931 | 14.5950 8282 |
| 18 | 16.3982 6858 | 16.2124 1395 | 16.0295 4893 | 15.6725 6089 | 15.3268 6272 |
| 19 | 17.2260 0850 | 17.0209 2850 | 16.8193 0759 | 16.4261 6837 | 16.0460 5673 |
| 20 | 18.0455 5297 | 17.8204 4845 | 17.5993 1613 | 17.1686 3879 | 16.7528 8130 |
| 21 | 18.8569 8313 | 18.6110 7387 | 18.3696 9495 | 17.9001 3673 | 17.4475 4919 |
| 22 | 19.6603 7934 | 19.3929 0371 | 19.1305 6291 | 18.6208 2437 | 18.1302 6948 |
| 23 | 20.4558 2113 | 20.1660 3580 | 19.8820 3744 | 19.3308 6145 | 18.8012 4764 |
| 24 | 21.2433 8726 | 20.9305 6693 | 20.6242 3451 | 20.0304 0537 | 19.4604 8565 |
| 25 | 22.0231 5570 | 21.6865 9276 | 21.3572 6865 | 20.7196 1120 | 20.1087 8196 |
| 26 | 22.7952 0366 | 22.4342 0792 | 22.0812 5299 | 21.3986 3172 | 20.7457 3166 |
| 27 | 23.5596 0759 | 23.1735 0598 | 22.7962 9925 | 22.0676 1746 | 21.3717 2644 |
| 28 | 24.3164 4316 | 23.9015 7946 | 23.5025 1778 | 22.7267 1671 | 21.9869 5474 |
| 29 | 25.0657 8530 | 24.6275 1986 | 24.2000 1756 | 23.3760 7558 | 22.5916 0171 |
| 30 | 25.8077 0822 | 25.3424 1766 | 24.8889 0623 | 24.0158 3801 | 23.1858 4924 |
| 31 | 26.5422 8537 | 26.0493 6253 | 25.5692 9010 | 24.6461 4582 | 23.7698 7650 |
| 32 | 27.2695 8947 | 26.7484 4236 | 26.2412 7418 | 25.2671 3874 | 24.3438 5897 |
| 33 | 27.9896 9255 | 27.4397 4522 | 26.9049 6215 | 25.8789 5442 | 24.9079 6951 |
| 34 | 28.7026 6580 | 28.1233 5745 | 27.5604 5644 | 26.4817 2849 | 25.4623 7789 |
| 35 | 29.4085 8009 | 28.7993 6460 | 28.2078 5822 | 27.0755 9458 | 26.0072 5100 |
| 36 | 30.1075 0504 | 29.4678 5127 | 28.8472 6737 | 27.6606 8431 | 26.5427 5283 |
| 37 | 30.7995 0904 | 30.1289 0114 | 29.4787 8259 | 28.2371 2740 | 27.0690 4455 |
| 38 | 31.4846 6330 | 30.7825 9692 | 30.1025 0133 | 28.8050 5164 | 27.5862 8457 |
| 39 | 32.1630 3298 | 31.4290 2044 | 30.7185 1983 | 29.3645 8288 | 28.0946 2857 |
| 40 | 32.8346 8611 | 32.0682 5260 | 31.3269 3316 | 29.9158 4520 | 28.5942 2955 |
| 41 | 33.4996 8922 | 32.7003 7340 | 31.9278 3522 | 30.4589 6079 | 29.0852 3789 |
| 42 | 34.1581 0814 | 33.3254 6195 | 32.5213 1874 | 30.9940 5094 | 29.5678 0136 |
| 43 | 34.8100 0806 | 33.9435 9649 | 33.1074 7530 | 31.5212 3157 | 30.0420 6522 |
| 44 | 35.4554 5352 | 34.5548 5438 | 33.6863 9536 | 32.0406 2223 | 30.5081 7221 |
| 45 | 36.0945 0844 | 35.1593 1212 | 34.2581 6825 | 32.5523 3718 | 30.9662 6261 |
| 46 | 36.7272 3608 | 35.7570 4536 | 34.8228 8222 | 33.0564 8983 | 31.4164 7431 |
| 47 | 37.3536 9909 | 36.3481 2801 | 35.3806 2442 | 33.5531 9195 | 31.8589 4281 |
| 48 | 37.9739 5949 | 36.9326 3674 | 35.9314 8091 | 34.0425 5365 | 32.2938 0129 |
| 49 | 38.5880 7871 | 37.5106 4202 | 36.4755 3670 | 34.5246 8339 | 32.7211 8063 |
| 50 | 39.1961 1753 | 38.0822 1708 | 37.0128 7575 | 34.9996 8807 | 33.1412 0946 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ IV. } \alpha_{n|i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Αρχική (παρούσα) αξία μιάς Ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  όρων 1 νομισματικής μονάδας.

| $n$ | .01 (1%)     | .01125 (1 1/8%) | .0125 (1 1/4%) | .015 (1 1/2%) | .0175 (1 3/4%) |
|-----|--------------|-----------------|----------------|---------------|----------------|
| 50  | 39 1961 1753 | 38 0822 1708    | 37 0128 7575   | 34 9906 8807  | 33 1412 0946   |
| 51  | 39 7981 3617 | 38 6474 3345    | 37 5435 8099   | 35 4676 7298  | 33 5540 1421   |
| 52  | 40 3941 9423 | 39 2063 6188    | 38 0677 3431   | 35 9287 4185  | 33 9597 1913   |
| 53  | 40 9843 5072 | 39 7590 7232    | 38 5854 1660   | 36 3829 9690  | 34 3584 4632   |
| 54  | 41 5686 6408 | 40 3056 3394    | 39 0967 0776   | 36 8305 3882  | 34 7503 1579   |
| 55  | 42 1471 9216 | 40 8461 1514    | 39 6016 8667   | 37 2714 6681  | 35 1354 4550   |
| 56  | 42 7199 9224 | 41 3805 8258    | 40 1004 3128   | 37 7058 7863  | 35 5139 5135   |
| 57  | 43 2871 2102 | 41 9091 0613    | 40 5930 1855   | 38 1338 7058  | 35 8859 4727   |
| 58  | 43 8486 3468 | 42 4317 4896    | 41 0795 2449   | 38 5555 3751  | 36 2515 4523   |
| 59  | 44 4045 8879 | 42 9485 7746    | 41 5600 2419   | 38 9709 7292  | 36 6108 5526   |
| 60  | 44 9550 3841 | 43 4596 5633    | 42 0345 9179   | 39 3802 6889  | 36 9639 8552   |
| 61  | 45 5000 3803 | 43 9650 4952    | 42 5033 0054   | 39 7835 1614  | 37 3110 4228   |
| 62  | 46 0396 4161 | 44 4648 2029    | 42 9662 2275   | 40 1808 0408  | 37 6521 3000   |
| 63  | 46 5739 0258 | 44 9590 3119    | 43 4234 2988   | 40 5722 2077  | 37 9873 5135   |
| 64  | 47 1028 7385 | 45 4477 4407    | 43 8749 9247   | 40 9578 5298  | 38 3168 0723   |
| 65  | 47 6266 0777 | 45 9310 2009    | 44 3209 8022   | 41 3377 8618  | 38 6405 9678   |
| 66  | 48 1451 5621 | 46 4089 1975    | 44 7614 6195   | 41 7121 0461  | 38 9588 1748   |
| 67  | 48 6585 7050 | 46 8815 0284    | 45 1965 0563   | 42 0808 9125  | 39 2715 6509   |
| 68  | 49 1669 0149 | 47 3488 2852    | 45 6261 7840   | 42 4442 2783  | 39 5789 3375   |
| 69  | 49 6701 9949 | 47 8109 5527    | 46 0505 4656   | 42 8021 9490  | 39 8810 1597   |
| 70  | 50 1685 1435 | 48 2679 4094    | 46 4696 7562   | 43 1548 7183  | 40 1779 0267   |
| 71  | 50 6618 9539 | 48 7198 4270    | 46 8836 3024   | 43 5023 3678  | 40 4696 8321   |
| 72  | 51 1503 9148 | 49 1667 1714    | 47 2924 7431   | 43 8446 6677  | 40 7564 4542   |
| 73  | 51 6340 5097 | 49 6086 2016    | 47 6962 7093   | 44 1819 3771  | 41 0382 7560   |
| 74  | 52 1129 2175 | 50 0456 0708    | 48 0950 8240   | 44 5142 2434  | 41 3152 5857   |
| 75  | 52 5870 5124 | 50 4777 3259    | 48 4889 7027   | 44 8416 0034  | 41 5874 7771   |
| 76  | 53 0564 8638 | 50 9050 5077    | 48 8779 9533   | 45 1641 3826  | 41 8550 1495   |
| 77  | 53 5212 7364 | 51 3276 1510    | 49 2622 1761   | 45 4819 0962  | 42 1179 5081   |
| 78  | 53 9814 5905 | 51 7454 7847    | 49 6416 9640   | 45 7949 8485  | 42 3763 6443   |
| 79  | 54 4370 8817 | 52 1586 9317    | 50 0164 9027   | 46 1034 3335  | 42 6303 3359   |
| 80  | 54 8882 0611 | 52 5673 1092    | 50 3866 5706   | 46 4073 2349  | 42 8799 3474   |
| 81  | 55 3348 5753 | 52 9713 8286    | 50 7522 5389   | 46 7067 2265  | 43 1252 4298   |
| 82  | 55 7770 8666 | 53 3709 5957    | 51 1133 3717   | 47 0016 9720  | 43 3663 3217   |
| 83  | 56 2149 3729 | 53 7660 9104    | 51 4699 6264   | 47 2923 1251  | 43 6032 7486   |
| 84  | 56 6484 5276 | 54 1568 2674    | 51 8221 8532   | 47 5786 3301  | 43 8361 4237   |
| 85  | 57 0776 7600 | 54 5432 1557    | 52 1700 5958   | 47 8607 2218  | 44 0650 0479   |
| 86  | 57 5026 4951 | 54 9253 0588    | 52 5136 3909   | 48 1386 4254  | 44 2899 3099   |
| 87  | 57 9234 1535 | 55 3031 4549    | 52 8529 7688   | 48 4124 5571  | 44 5109 8869   |
| 88  | 58 3400 1520 | 55 6767 8169    | 53 1881 2531   | 48 6822 2237  | 44 7282 4441   |
| 89  | 58 7524 9030 | 56 0462 6126    | 53 5191 3611   | 48 9480 0234  | 44 9417 6355   |
| 90  | 59 1608 8148 | 56 4116 3041    | 53 8460 6035   | 49 2098 5452  | 45 1516 1037   |
| 91  | 59 5652 2919 | 56 7729 3490    | 54 1689 4850   | 49 4678 3696  | 45 3578 4803   |
| 92  | 59 9655 7346 | 57 1302 1992    | 54 4878 5037   | 49 7220 0686  | 45 5605 3860   |
| 93  | 60 3619 5392 | 57 4835 3021    | 54 8028 1518   | 49 9724 2055  | 45 7597 4310   |
| 94  | 60 7544 0982 | 57 8329 0997    | 55 1138 9154   | 50 2191 3355  | 45 9555 2147   |
| 95  | 61 1429 8002 | 58 1784 0294    | 55 4211 2744   | 50 4622 0054  | 46 1479 3265   |
| 96  | 61 5277 0290 | 58 5200 5235    | 55 7245 7031   | 50 7016 7541  | 46 3370 3455   |
| 97  | 61 9086 1682 | 58 8579 0098    | 56 0242 6698   | 50 9376 1124  | 46 5228 8408   |
| 98  | 62 2857 5923 | 59 1919 9106    | 56 3202 6368   | 51 1700 6034  | 46 7055 3718   |
| 99  | 62 6591 6755 | 59 5223 6446    | 56 6126 0610   | 51 3990 7422  | 46 8850 4882   |
| 100 | 63 0288 7877 | 59 8490 6251    | 56 9013 3936   | 51 6247 0367  | 47 0614 7304   |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ IV. } \alpha_{n|i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Αρχική (παρούσα) αξία μιάς Ληξιπρόθεσμης ράντας η ὧρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

| n  | .02 (2%)     | .0225 (2½%)  | .025 (2½%)   | .0275 (2½%)  | .03 (3%)     |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1  | 0.9803 9216  | 0.9779 9511  | 0.9758 0976  | 0.9732 3601  | 0.9708 7379  |
| 2  | 1.9415 6094  | 1.9344 6955  | 1.9274 2415  | 1.9204 2434  | 1.9134 6970  |
| 3  | 2.8338 8327  | 2.8698 9687  | 2.8560 2356  | 2.8422 6213  | 2.8286 1135  |
| 4  | 3.8077 2870  | 3.7847 4021  | 3.7619 7421  | 3.7394 2787  | 3.7170 9840  |
| 5  | 4.7134 5951  | 4.6794 5253  | 4.6458 2850  | 4.6125 8186  | 4.5797 0719  |
| 6  | 5.6014 3089  | 5.5544 7680  | 5.5081 2536  | 5.4623 6678  | 5.4171 9144  |
| 7  | 6.4719 9107  | 6.4102 4626  | 6.3493 9060  | 6.2894 0806  | 6.2302 8296  |
| 8  | 7.3254 8144  | 7.2471 8461  | 7.1701 3717  | 7.0943 1441  | 7.0196 9219  |
| 9  | 8.1622 3671  | 8.0657 0622  | 7.9708 6553  | 7.8776 7826  | 7.7861 0892  |
| 10 | 8.9825 8501  | 8.8662 1635  | 8.7520 6393  | 8.6400 7616  | 8.5302 0284  |
| 11 | 9.7868 4805  | 9.6491 1134  | 9.5142 0871  | 9.3820 6926  | 9.2526 2411  |
| 12 | 10.5753 4122 | 10.4147 7882 | 10.2577 6460 | 10.1042 0366 | 9.9540 0399  |
| 13 | 11.3483 7375 | 11.1635 9787 | 10.9831 8497 | 10.8070 1086 | 10.6349 5533 |
| 14 | 12.1062 4877 | 11.8959 3924 | 11.6909 1217 | 11.4910 0814 | 11.2960 7314 |
| 15 | 12.8402 6550 | 12.6121 6551 | 12.3813 7773 | 12.1566 9892 | 11.9379 3509 |
| 16 | 13.5777 0931 | 13.3126 3131 | 13.0550 0266 | 12.8045 7315 | 12.5611 0203 |
| 17 | 14.2918 7188 | 13.9976 8343 | 13.7121 9772 | 13.4351 0769 | 13.1661 1847 |
| 18 | 14.9920 3125 | 14.6676 6106 | 14.3533 6363 | 14.0487 6661 | 13.7535 1308 |
| 19 | 15.6784 6201 | 15.3228 9590 | 14.9788 9134 | 14.6460 0157 | 14.3237 9911 |
| 20 | 16.3514 3334 | 15.9637 1237 | 15.5891 6229 | 15.2272 5213 | 14.8774 7486 |
| 21 | 17.0112 0916 | 16.5904 2775 | 16.1845 4857 | 15.7929 4612 | 15.4150 2114 |
| 22 | 17.6580 4820 | 17.2033 5232 | 16.7654 1324 | 16.3434 9987 | 15.9369 1664 |
| 23 | 18.2922 0412 | 17.8027 8955 | 17.3321 1018 | 16.8793 1861 | 16.4436 0839 |
| 24 | 18.9139 2560 | 18.3890 3624 | 17.8849 8583 | 17.4007 9670 | 16.9355 4212 |
| 25 | 19.5234 5647 | 18.9623 8263 | 18.4243 7642 | 17.9083 1795 | 17.4131 4769 |
| 26 | 20.1210 3576 | 19.5231 1260 | 18.9506 1114 | 18.4022 5592 | 17.8768 4242 |
| 27 | 20.7068 9780 | 20.0715 0376 | 19.4640 1087 | 18.8820 7413 | 18.3270 3147 |
| 28 | 21.2812 7236 | 20.6078 2764 | 19.9648 8866 | 19.3508 2640 | 18.7641 0823 |
| 29 | 21.8443 8466 | 21.1323 4977 | 20.4535 4991 | 19.8061 5708 | 19.1884 5459 |
| 30 | 22.3964 5555 | 21.6453 2985 | 20.9302 9259 | 20.2493 0130 | 19.6004 4135 |
| 31 | 22.9377 0152 | 22.1470 2186 | 21.3954 0741 | 20.6805 8520 | 20.0004 2849 |
| 32 | 23.4683 3482 | 22.6376 7419 | 21.8491 7796 | 21.1003 2623 | 20.3887 6553 |
| 33 | 23.9885 6355 | 23.1175 2977 | 22.2918 8994 | 21.5088 3332 | 20.7657 9178 |
| 34 | 24.4985 9172 | 23.5868 2618 | 22.7237 8628 | 21.9064 0712 | 21.1318 3668 |
| 35 | 24.9986 1933 | 24.0457 9577 | 23.1451 5734 | 22.2933 4026 | 21.4872 2007 |
| 36 | 25.4888 4248 | 24.4946 6579 | 23.5562 5107 | 22.6699 1753 | 21.8322 5250 |
| 37 | 25.9694 5341 | 24.9336 5848 | 23.9573 1812 | 23.0364 1609 | 22.1672 3544 |
| 38 | 26.4406 4090 | 25.3629 9118 | 24.3486 0304 | 23.3931 0568 | 22.4924 6159 |
| 39 | 26.9025 8883 | 25.7828 7646 | 24.7303 4443 | 23.7402 4884 | 22.8082 1513 |
| 40 | 27.3554 7924 | 26.1935 2221 | 25.1027 7505 | 24.0781 0106 | 23.1147 7197 |
| 41 | 27.7994 8945 | 26.5951 3174 | 25.4661 2200 | 24.4069 1101 | 23.4123 9997 |
| 42 | 28.2347 0358 | 26.9879 0390 | 25.8206 0683 | 24.7269 2069 | 23.7013 5920 |
| 43 | 28.6615 8233 | 27.3720 3316 | 26.1664 4569 | 25.0383 6563 | 23.9819 0213 |
| 44 | 29.0799 6307 | 27.7477 0969 | 26.5038 4945 | 25.3414 7507 | 24.2542 7392 |
| 45 | 29.4901 5987 | 28.1151 1950 | 26.8330 2386 | 25.6364 7209 | 24.5187 1254 |
| 46 | 29.8923 1360 | 28.4744 4450 | 27.1541 6962 | 25.9235 7381 | 24.7754 4907 |
| 47 | 30.2865 8196 | 28.8256 6259 | 27.4674 8255 | 26.2029 9154 | 25.0247 0783 |
| 48 | 30.6731 1957 | 29.1695 4777 | 27.7731 5371 | 26.4749 3094 | 25.2667 0664 |
| 49 | 31.0520 7801 | 29.5056 7019 | 28.0713 6947 | 26.7395 9215 | 25.5016 5693 |
| 50 | 31.4236 0589 | 29.8343 9627 | 28.3623 1168 | 26.9971 6998 | 25.7297 6401 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ IV. } \alpha_{n|i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Αρχική (παρούσα) αξία μιάς Ληξιπρόθεσμης ράντας η ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

| π   | .02 (2%)     | .0225 (2¼%)  | .025 (2½%)   | .0275 (2¾%)  | .03 (3%)     |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 50  | 31.4236 0589 | 29.8343 9627 | 28.3623 1168 | 26.9971 6998 | 25.7297 6401 |
| 51  | 31.7878 4892 | 30.1558 8877 | 28.6461 5774 | 27.2478 5400 | 25.9512 2719 |
| 52  | 32.1449 4992 | 30.4703 0687 | 28.9230 8072 | 27.4918 2871 | 26.1662 3999 |
| 53  | 32.4950 4894 | 30.7778 0623 | 29.1932 4948 | 27.7292 7368 | 26.3749 9028 |
| 54  | 32.8382 8327 | 31.0785 3910 | 29.4568 2876 | 27.9603 6368 | 26.5776 6047 |
| 55  | 33.1747 8752 | 31.3726 5438 | 29.7139 7928 | 28.1852 6879 | 26.7744 2764 |
| 56  | 33.5046 9365 | 31.6602 9768 | 29.9648 5784 | 28.4041 5454 | 26.9654 6373 |
| 57  | 33.8281 3103 | 31.9416 1142 | 30.2096 1740 | 28.6171 8203 | 27.1509 3566 |
| 58  | 34.1452 2650 | 32.2167 3489 | 30.4484 0722 | 28.8245 0906 | 27.3310 0549 |
| 59  | 34.4561 6441 | 32.4858 0429 | 30.6813 7290 | 29.0262 8522 | 27.5058 3058 |
| 60  | 34.7608 8668 | 32.7489 5285 | 30.9086 5649 | 29.2226 6201 | 27.6755 6367 |
| 61  | 35.0596 9282 | 33.0063 1086 | 31.1303 9657 | 29.4137 8293 | 27.8403 6307 |
| 62  | 35.3526 4202 | 33.2580 0573 | 31.3467 2836 | 29.5997 8879 | 28.0003 4279 |
| 63  | 35.6398 4316 | 33.5041 6208 | 31.5577 8377 | 29.7808 1634 | 28.1556 7261 |
| 64  | 35.9214 1486 | 33.7449 0179 | 31.7636 9148 | 29.9569 9887 | 28.3064 7826 |
| 65  | 36.1974 6555 | 33.9803 4405 | 31.9645 7705 | 30.1284 6805 | 28.4528 9152 |
| 66  | 36.4681 0348 | 34.2108 0543 | 32.1605 6298 | 30.2953 4109 | 28.5950 4031 |
| 67  | 36.7334 2478 | 34.4357 9993 | 32.3517 6876 | 30.4577 5581 | 28.7330 4884 |
| 68  | 36.9935 6351 | 34.6560 3905 | 32.5383 1099 | 30.6158 2974 | 28.8670 3771 |
| 69  | 37.2485 9168 | 34.8714 3183 | 32.7203 0340 | 30.7696 5522 | 28.9971 2399 |
| 70  | 37.4986 1929 | 35.0820 8492 | 32.8978 5698 | 30.9193 7247 | 29.1234 2135 |
| 71  | 37.7437 4441 | 35.2881 0261 | 33.0710 7998 | 31.0651 8270 | 29.2460 4015 |
| 72  | 37.9840 6314 | 35.4895 8691 | 33.2400 7803 | 31.2068 9314 | 29.3650 8752 |
| 73  | 38.2196 6975 | 35.6868 3756 | 33.4049 5417 | 31.3440 0816 | 29.4806 6750 |
| 74  | 38.4506 5662 | 35.8793 5214 | 33.5658 0895 | 31.4792 2936 | 29.5928 8107 |
| 75  | 38.6771 1433 | 36.0678 2605 | 33.7227 4044 | 31.6099 5558 | 29.7018 2628 |
| 76  | 38.8991 3170 | 36.2521 5262 | 33.8758 4433 | 31.7371 8304 | 29.8075 9833 |
| 77  | 39.1167 9578 | 36.4324 2310 | 34.0252 1398 | 31.8610 0540 | 29.9102 8964 |
| 78  | 39.3301 9194 | 36.6087 2675 | 34.1709 4047 | 31.9815 1377 | 30.0099 8994 |
| 79  | 39.5394 0386 | 36.7811 5085 | 34.3131 1265 | 32.0987 9685 | 30.1067 8635 |
| 80  | 39.7445 1359 | 36.9497 8079 | 34.4518 1722 | 32.2129 4098 | 30.2007 6345 |
| 81  | 39.9456 0156 | 37.1147 0904 | 34.5871 3875 | 32.3240 3015 | 30.2920 0335 |
| 82  | 40.1427 4663 | 37.2759 9026 | 34.7191 6976 | 32.4321 4613 | 30.3805 8577 |
| 83  | 40.3360 2811 | 37.4337 3130 | 34.8479 6074 | 32.5373 8450 | 30.4665 8813 |
| 84  | 40.5255 1579 | 37.5880 0127 | 34.9736 2023 | 32.6397 7469 | 30.5500 8556 |
| 85  | 40.7112 8999 | 37.7388 7655 | 35.0962 1486 | 32.7394 4009 | 30.6311 5103 |
| 86  | 40.8934 2156 | 37.8864 3183 | 35.2153 1938 | 32.8364 3904 | 30.7098 5537 |
| 87  | 41.0719 8192 | 38.0307 4018 | 35.3325 0671 | 32.9308 3994 | 30.7862 6735 |
| 88  | 41.2470 4110 | 38.1718 7304 | 35.4463 4801 | 33.0227 1527 | 30.8604 5374 |
| 89  | 41.4186 6774 | 38.3099 0028 | 35.5574 1269 | 33.1121 3165 | 30.9324 7936 |
| 90  | 41.5869 2916 | 38.4448 9025 | 35.6657 6848 | 33.1991 5489 | 31.0024 0714 |
| 91  | 41.7518 9133 | 38.5769 0978 | 35.7714 8144 | 33.2838 4905 | 31.0702 9820 |
| 92  | 41.9136 1895 | 38.7060 2423 | 35.8746 1604 | 33.3662 7644 | 31.1362 1184 |
| 93  | 42.0721 7545 | 38.8322 9754 | 35.9752 3516 | 33.4464 9776 | 31.2002 0567 |
| 94  | 42.2276 2299 | 38.9557 9221 | 36.0734 0316 | 33.5245 7202 | 31.2623 3560 |
| 95  | 42.3800 2254 | 39.0765 6940 | 36.1691 7089 | 33.6005 5671 | 31.3226 5592 |
| 96  | 42.5294 3386 | 39.1946 8890 | 36.2626 0574 | 33.6745 0775 | 31.3812 1934 |
| 97  | 42.6759 1555 | 39.3102 0920 | 36.3537 6170 | 33.7464 7956 | 31.4380 7703 |
| 98  | 42.8195 2505 | 39.4231 8748 | 36.4426 9434 | 33.8165 2512 | 31.4932 7867 |
| 99  | 42.9603 1867 | 39.5336 7968 | 36.5294 5790 | 33.8846 9598 | 31.5468 7250 |
| 100 | 43.0983 5164 | 39.6417 4052 | 36.6141 0526 | 33.9510 4232 | 31.5989 0534 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ IV. } \alpha_{n|i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Αρχική (παρούσα) αξία μιάς Ληξιπρόθεσμης ράντας η ὅρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

| π  | .035 (3½%)   | .04 (4%)     | .045 (4½%)   | .05 (5%)     | .055 (5½%)   |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1  | 0.9661 8357  | 0.9615 3846  | 0.9569 3780  | 0.9523 8095  | 0.9478 6730  |
| 2  | 1.8996 9428  | 1.8860 9467  | 1.8726 8775  | 1.8594 1043  | 1.8463 1971  |
| 3  | 2.8016 3698  | 2.7750 9103  | 2.7489 6435  | 2.7232 4803  | 2.6979 3338  |
| 4  | 3.6730 7921  | 3.6298 9522  | 3.5875 2570  | 3.5459 5050  | 3.5051 5012  |
| 5  | 4.5150 5238  | 4.4518 2233  | 4.3899 7674  | 4.3294 7667  | 4.2702 8448  |
| 6  | 5.3285 5302  | 5.2421 3686  | 5.1578 7248  | 5.0758 9207  | 4.9955 3031  |
| 7  | 6.1145 4398  | 6.0020 5467  | 5.8927 0094  | 5.7863 7340  | 5.6829 6712  |
| 8  | 6.8739 5554  | 6.7327 4487  | 6.5958 8607  | 6.4632 1276  | 6.3345 6599  |
| 9  | 7.6076 8651  | 7.4353 3161  | 7.2687 9050  | 7.1078 2168  | 6.9521 9525  |
| 10 | 8.3166 0532  | 8.1108 9578  | 7.9127 1818  | 7.7217 3493  | 7.5376 2583  |
| 11 | 9.0015 5104  | 8.7604 7671  | 8.5289 1692  | 8.3064 1422  | 8.0925 3633  |
| 12 | 9.6633 3433  | 9.3850 7376  | 9.1185 8078  | 8.8632 5164  | 8.6185 1785  |
| 13 | 10.3027 3849 | 9.9856 4785  | 9.6828 5242  | 9.3935 7299  | 9.1170 7853  |
| 14 | 10.9205 2028 | 10.5631 2293 | 10.2228 2528 | 9.8986 4094  | 9.5896 4790  |
| 15 | 11.5174 1090 | 11.1183 8743 | 10.7395 4573 | 10.3796 5804 | 10.0375 8094 |
| 16 | 12.0941 1681 | 11.6522 9561 | 11.2340 1505 | 10.8377 6956 | 10.4621 6203 |
| 17 | 12.6513 2059 | 12.1656 6885 | 11.7071 9143 | 11.2740 6625 | 10.8646 0856 |
| 18 | 13.1896 8173 | 12.6592 9697 | 12.1599 9180 | 11.6895 8690 | 11.2460 7447 |
| 19 | 13.7098 3742 | 13.1339 3940 | 12.5932 9359 | 12.0853 2086 | 11.6076 5352 |
| 20 | 14.2124 0330 | 13.5903 2634 | 13.0079 3645 | 12.4622 1034 | 11.9503 8248 |
| 21 | 14.6979 7420 | 14.0291 5995 | 13.4047 2388 | 12.8211 5271 | 12.2752 4406 |
| 22 | 15.1671 2484 | 14.4511 1533 | 13.7844 2476 | 13.1630 0258 | 12.5831 6973 |
| 23 | 15.6204 1047 | 14.8568 4167 | 14.1477 7489 | 13.4885 7388 | 12.8750 4239 |
| 24 | 16.0583 6760 | 15.2469 6314 | 14.4954 7837 | 13.7986 4179 | 13.1516 9895 |
| 25 | 16.4815 1459 | 15.6220 7994 | 14.8282 0896 | 14.0939 4457 | 13.4139 3266 |
| 26 | 16.8903 5220 | 15.9827 6918 | 15.1466 1145 | 14.3751 8530 | 13.6624 9541 |
| 27 | 17.2853 6451 | 16.3295 8575 | 15.4513 0282 | 14.6430 3362 | 13.8980 9991 |
| 28 | 17.6670 1885 | 16.6630 6322 | 15.7428 7351 | 14.8981 2726 | 14.1214 2172 |
| 29 | 18.0357 6700 | 16.9837 1463 | 16.0218 8853 | 15.1410 7358 | 14.3331 0116 |
| 30 | 18.3920 4541 | 17.2920 3330 | 16.2888 8854 | 15.3724 5103 | 14.5337 4517 |
| 31 | 18.7362 7576 | 17.5854 9356 | 16.5443 9095 | 15.5928 1050 | 14.7239 2907 |
| 32 | 19.0688 6547 | 17.8735 5150 | 16.7888 9086 | 15.8026 7667 | 14.9041 9817 |
| 33 | 19.3902 0818 | 18.1476 4567 | 17.0228 6207 | 16.0025 4921 | 15.0750 6936 |
| 34 | 19.7006 8423 | 18.4111 9776 | 17.2467 5796 | 16.1929 0401 | 15.2370 3257 |
| 35 | 20.0006 6110 | 18.6646 1323 | 17.4610 1240 | 16.3741 9429 | 15.3905 5220 |
| 36 | 20.2904 0331 | 18.9082 8195 | 17.6660 4058 | 16.5468 5171 | 15.5360 6843 |
| 37 | 20.5705 2542 | 19.1425 7880 | 17.8622 3979 | 16.7112 8734 | 15.6739 9851 |
| 38 | 20.8410 8736 | 19.3678 6423 | 18.0490 9023 | 16.8678 9271 | 15.8047 3793 |
| 39 | 21.1024 9987 | 19.5844 8484 | 18.2296 5572 | 17.0170 4067 | 15.9286 6154 |
| 40 | 21.3550 7234 | 19.7927 7388 | 18.4015 8442 | 17.1590 8635 | 16.0461 2469 |
| 41 | 21.5991 0371 | 19.9930 5181 | 18.5661 0949 | 17.2943 6796 | 16.1574 6416 |
| 42 | 21.8348 8281 | 20.1856 2674 | 18.7235 4975 | 17.4232 0758 | 16.2629 9920 |
| 43 | 22.0626 8870 | 20.3707 9494 | 18.8742 1029 | 17.5459 1198 | 16.3630 3242 |
| 44 | 22.2827 9102 | 20.5488 4129 | 19.0183 8305 | 17.6627 7331 | 16.4578 5063 |
| 45 | 22.4954 5026 | 20.7200 3970 | 19.1563 4742 | 17.7740 6982 | 16.5477 2572 |
| 46 | 22.7009 1813 | 20.8846 5356 | 19.2883 7074 | 17.8800 6650 | 16.6329 1537 |
| 47 | 22.8994 3780 | 21.0429 3612 | 19.4147 0884 | 17.9810 1571 | 16.7136 6386 |
| 48 | 23.0912 4425 | 21.1951 3088 | 19.5356 0654 | 18.0771 5782 | 16.7902 0271 |
| 49 | 23.2765 6450 | 21.3414 7200 | 19.6512 9813 | 18.1687 2173 | 16.8627 5139 |
| 50 | 23.4556 1787 | 21.4821 8462 | 19.7620 0778 | 18.2559 2546 | 16.9315 1790 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ IV. } \alpha_{n|i} = \frac{1-U^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Αρχική (παρούσα) αξία μιάς ληξιπρόθεσμης ράντας η ὅρων 1 νομισματικής μονάδας.

| n  | .06 (6%)     | .065 (6½%)   | .07 (7%)     | .075 (7½%)   | .08 (8%)     |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1  | 0 9433 9623  | 0 9389 6714  | 0 9345 7944  | 0 9302 3256  | 0 9259 2593  |
| 2  | 1 8333 9287  | 1 8206 2642  | 1 8080 1817  | 1 7955 6517  | 1 7832 6475  |
| 3  | 2 6730 1195  | 2 6484 7551  | 2 6243 1604  | 2 6005 2574  | 2 5770 9899  |
| 4  | 3 4651 0561  | 3 4257 9860  | 3 3872 1126  | 3 3493 2627  | 3 3121 2684  |
| 5  | 4 2123 6379  | 4 1556 7944  | 4 1001 9744  | 4 0458 8490  | 3 9927 1004  |
| 6  | 4 9173 2433  | 4 8410 1356  | 4 7665 3966  | 4 6938 4642  | 4 6228 7966  |
| 7  | 5 5823 8144  | 5 4845 1977  | 5 3892 8940  | 5 2966 0132  | 5 2063 7006  |
| 8  | 6 2097 9381  | 6 0887 5096  | 5 9712 9851  | 5 8573 0355  | 5 7466 3894  |
| 9  | 6 8016 9227  | 6 6561 0419  | 6 5152 3225  | 6 3788 8703  | 6 2468 8791  |
| 10 | 7 3600 8705  | 7 1888 3022  | 7 0235 8154  | 6 8640 8096  | 6 7100 8140  |
| 11 | 7 8868 7458  | 7 6890 4246  | 7 4986 7434  | 7 3154 2415  | 7 1389 6426  |
| 12 | 8 3838 4394  | 8 1587 2532  | 7 9426 8630  | 7 7352 7827  | 7 5360 7802  |
| 13 | 8 8526 8296  | 8 5997 4208  | 8 3576 5074  | 8 1258 4026  | 7 9037 7594  |
| 14 | 9 2949 8393  | 9 0138 4233  | 8 7454 6799  | 8 4891 5373  | 8 2442 3698  |
| 15 | 9 7122 4899  | 9 4026 6885  | 9 1079 1401  | 8 8271 1975  | 8 5594 7869  |
| 16 | 10 1058 9527 | 9 7677 6418  | 9 4466 4860  | 9 1415 0674  | 8 8513 6916  |
| 17 | 10 4772 5969 | 10 1105 7670 | 9 7632 2299  | 9 4339 5976  | 9 1216 3811  |
| 18 | 10 8278 0348 | 10 4324 6638 | 10 0590 8691 | 9 7060 0908  | 9 3718 8714  |
| 19 | 11 1581 1649 | 10 7347 1022 | 10 3355 9524 | 9 9590 7821  | 9 6035 9920  |
| 20 | 11 4699 2122 | 11 0185 0725 | 10 5940 1425 | 10 1944 9136 | 9 8181 4741  |
| 21 | 11 7640 7662 | 11 2849 8333 | 10 8355 2733 | 10 4134 8033 | 10 0168 0316 |
| 22 | 12 0415 8172 | 11 5351 9562 | 11 0612 4050 | 10 6171 9101 | 10 2007 4366 |
| 23 | 12 3033 7898 | 11 7701 3673 | 11 2721 8738 | 10 8066 8931 | 10 3710 5895 |
| 24 | 12 5503 5753 | 11 9907 3871 | 11 4693 3400 | 10 9829 6680 | 10 5287 5828 |
| 25 | 12 7833 5616 | 12 1978 7673 | 11 6535 8318 | 11 1469 4586 | 10 6747 7619 |
| 26 | 13 0031 6619 | 12 3923 7251 | 11 8257 7867 | 11 2994 8452 | 10 8099 7795 |
| 27 | 13 2105 3414 | 12 5749 9766 | 11 9867 0904 | 11 4413 8095 | 10 9351 6477 |
| 28 | 13 4061 6428 | 12 7464 7668 | 12 1371 1125 | 11 5733 7763 | 11 0510 7849 |
| 29 | 13 5907 2102 | 12 9074 8984 | 12 2776 7407 | 11 6961 6524 | 11 1584 0601 |
| 30 | 13 7648 3115 | 13 0586 7591 | 12 4090 4118 | 11 8103 8627 | 11 2577 8334 |
| 31 | 13 9290 8599 | 13 2006 3465 | 12 5318 1419 | 11 9166 3839 | 11 3497 9639 |
| 32 | 14 0840 4339 | 13 3339 2925 | 12 6465 5532 | 12 0154 7757 | 11 4349 9944 |
| 33 | 14 2302 2961 | 13 4590 8850 | 12 7537 9002 | 12 1074 2099 | 11 5138 8837 |
| 34 | 14 3681 4114 | 13 5766 0892 | 12 8540 0936 | 12 1929 4976 | 11 5869 3367 |
| 35 | 14 4982 4636 | 13 6869 5673 | 12 9476 7230 | 12 2725 1141 | 11 6545 6822 |
| 36 | 14 6209 8713 | 13 7905 6970 | 13 0352 0776 | 12 3465 2224 | 11 7171 9279 |
| 37 | 14 7367 8031 | 13 8878 5887 | 13 1170 1660 | 12 4153 6952 | 11 7751 7851 |
| 38 | 14 8460 1916 | 13 9792 1021 | 13 1934 7345 | 12 4794 1351 | 11 8288 6869 |
| 39 | 14 9490 7468 | 14 0649 8611 | 13 2649 2846 | 12 5389 8931 | 11 8785 8240 |
| 40 | 15 0462 9687 | 14 1455 2687 | 13 3317 0884 | 12 5944 0866 | 11 9246 1333 |
| 41 | 15 1380 1592 | 14 2211 5199 | 13 3941 2041 | 12 6459 6155 | 11 9672 3457 |
| 42 | 15 2245 4332 | 14 2921 6149 | 13 4524 4898 | 12 6939 1772 | 12 0066 9867 |
| 43 | 15 3061 7294 | 14 3588 3708 | 13 5069 6167 | 12 7385 2811 | 12 0432 3951 |
| 44 | 15 3831 8202 | 14 4214 4327 | 13 5579 0810 | 12 7800 2615 | 12 0770 7362 |
| 45 | 15 4558 3209 | 14 4802 2842 | 13 6055 2159 | 12 8186 2898 | 12 1084 0150 |
| 46 | 15 5243 6990 | 14 5354 2575 | 13 6500 2018 | 12 8545 3858 | 12 1374 0890 |
| 47 | 15 5890 2821 | 14 5872 5422 | 13 6916 0764 | 12 8879 4287 | 12 1642 6741 |
| 48 | 15 6500 2661 | 14 6359 1946 | 13 7304 7443 | 12 9190 1662 | 12 1891 3649 |
| 49 | 15 7075 7227 | 14 6816 1451 | 13 7667 9853 | 12 9479 2244 | 12 2121 6341 |
| 50 | 15 7618 6064 | 14 7245 2067 | 13 8007 4629 | 12 9748 1157 | 12 2334 8464 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ V. } S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Τελική αξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  ὧρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

| $n$ | .0025 ( $\frac{1}{4}\%$ ) | .004167 ( $\frac{1}{24}\%$ ) | .005 ( $\frac{1}{20}\%$ ) | .005833 ( $\frac{1}{17}\%$ ) | .0075 ( $\frac{1}{13}\%$ ) |
|-----|---------------------------|------------------------------|---------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 1   | 1.0000 0000               | 1.0000 0000                  | 1.0000 0000               | 1.0000 0000                  | 1.0000 0000                |
| 2   | 2.0025 0000               | 2.0041 6667                  | 2.0050 0000               | 2.0058 3333                  | 2.0075 0000                |
| 3   | 3.0075 0625               | 3.0125 1738                  | 3.0150 2500               | 3.0175 3403                  | 3.0225 5625                |
| 4   | 4.0150 2502               | 4.0250 6952                  | 4.0301 0013               | 4.0351 3631                  | 4.0452 2642                |
| 5   | 5.0250 6258               | 5.0418 4064                  | 5.0502 5063               | 5.0586 7460                  | 5.0755 6461                |
| 6   | 6.0376 2523               | 6.0628 4831                  | 6.0755 0188               | 6.0881 8354                  | 6.1136 3136                |
| 7   | 7.0527 1930               | 7.0881 1018                  | 7.1058 7939               | 7.1236 9794                  | 7.1594 8358                |
| 8   | 8.0703 5110               | 8.1176 4397                  | 8.1414 0879               | 8.1652 5285                  | 8.2131 7971                |
| 9   | 9.0905 2697               | 9.1514 6749                  | 9.1821 1583               | 9.2128 8349                  | 9.2747 7866                |
| 10  | 10.1132 5329              | 10.1895 9860                 | 10.2280 2641              | 10.2666 2531                 | 10.3443 3940               |
| 11  | 11.1385 3042              | 11.2320 5526                 | 11.2791 6654              | 11.3265 1396                 | 11.4219 2194               |
| 12  | 12.1663 8277              | 12.2788 5549                 | 12.3355 6237              | 12.3925 8529                 | 12.5075 8636               |
| 13  | 13.1967 9872              | 13.3300 1739                 | 13.3972 4018              | 13.4648 7537                 | 13.6013 9326               |
| 14  | 14.2297 9072              | 14.3855 5913                 | 14.4642 2639              | 14.5434 2048                 | 14.7034 0370               |
| 15  | 15.2653 6520              | 15.4454 9896                 | 15.5365 4752              | 15.6282 6710                 | 15.8136 7923               |
| 16  | 16.3035 2861              | 16.5098 5520                 | 16.6142 3026              | 16.7194 2193                 | 16.9322 8183               |
| 17  | 17.3442 8743              | 17.5786 4627                 | 17.6973 0141              | 17.8169 5189                 | 18.0592 7394               |
| 18  | 18.3876 4815              | 18.6518 9063                 | 18.7857 8791              | 18.9208 8411                 | 19.1947 1849               |
| 19  | 19.4336 1727              | 19.7296 0684                 | 19.8797 1685              | 20.0312 5593                 | 20.3386 7888               |
| 20  | 20.4822 0131              | 20.8118 1353                 | 20.9791 1544              | 21.1481 0493                 | 21.4912 1897               |
| 21  | 21.5334 0682              | 21.8985 2942                 | 22.0840 1101              | 22.2714 6887                 | 22.6524 0312               |
| 22  | 22.5872 4033              | 22.9897 7330                 | 23.1944 3107              | 23.4013 8577                 | 23.8222 9614               |
| 23  | 23.6437 0843              | 24.0855 6402                 | 24.3104 0323              | 24.5378 9386                 | 25.0009 6336               |
| 24  | 24.7028 1770              | 25.1859 2053                 | 25.4319 5524              | 25.6810 3157                 | 26.1884 7059               |
| 25  | 25.7645 7475              | 26.2908 6187                 | 26.5591 1502              | 26.8308 3759                 | 27.3848 8411               |
| 26  | 26.8289 8619              | 27.4004 0713                 | 27.6919 1059              | 27.9873 5081                 | 28.5902 7075               |
| 27  | 27.8960 5865              | 28.5145 7549                 | 28.8303 7015              | 29.1506 1036                 | 29.8046 9778               |
| 28  | 28.9657 9880              | 29.6333 8622                 | 29.9745 2200              | 30.3206 5558                 | 31.0282 3301               |
| 29  | 30.0382 1330              | 30.7563 5866                 | 31.1243 9461              | 31.4975 2607                 | 32.2609 4476               |
| 30  | 31.1133 0883              | 31.8850 1224                 | 32.2800 1658              | 32.6812 6164                 | 33.5029 0184               |
| 31  | 32.1910 9210              | 33.0178 6646                 | 33.4414 1666              | 33.8719 0233                 | 34.7541 7361               |
| 32  | 33.2715 6983              | 34.1554 4090                 | 34.6086 2375              | 35.0694 8843                 | 36.0148 2991               |
| 33  | 34.3547 4876              | 35.2977 5524                 | 35.7816 6686              | 36.2740 6045                 | 37.2849 4113               |
| 34  | 35.4406 3563              | 36.4448 2922                 | 36.9605 7520              | 37.4856 5913                 | 38.5645 7819               |
| 35  | 36.5292 3722              | 37.5966 8268                 | 38.1453 7807              | 38.7043 2548                 | 39.8538 1263               |
| 36  | 37.6205 6031              | 38.7533 3552                 | 39.3361 0497              | 39.9301 0071                 | 41.1527 1612               |
| 37  | 38.7146 1171              | 39.9148 0775                 | 40.5327 8549              | 41.1630 2630                 | 42.4613 6149               |
| 38  | 39.8113 9824              | 41.0811 1945                 | 41.7354 4942              | 42.4031 4395                 | 43.7798 2170               |
| 39  | 40.9109 2674              | 42.2522 9078                 | 42.9441 2666              | 43.6504 9562                 | 45.1081 7037               |
| 40  | 42.0132 0405              | 43.4283 4199                 | 44.1588 4730              | 44.9051 2352                 | 46.4464 8164               |
| 41  | 43.1182 3706              | 44.6092 9342                 | 45.3796 4153              | 46.1670 7007                 | 47.7948 3026               |
| 42  | 44.2260 3265              | 45.7951 6547                 | 46.6065 3974              | 47.4363 7798                 | 49.1532 9148               |
| 43  | 45.3365 9774              | 46.9859 7866                 | 47.8395 7244              | 48.7130 9018                 | 50.5219 4117               |
| 44  | 46.4499 3923              | 48.1817 5357                 | 49.0787 7030              | 49.9972 4988                 | 51.9008 5573               |
| 45  | 47.5660 6408              | 49.3825 1088                 | 50.3241 6415              | 51.2889 0050                 | 53.2901 1215               |
| 46  | 48.6849 7924              | 50.5882 7134                 | 51.5757 8498              | 52.5880 8575                 | 54.6897 8799               |
| 47  | 49.8066 9169              | 51.7990 5581                 | 52.8336 6390              | 53.8948 4959                 | 56.0999 6140               |
| 48  | 50.9312 0842              | 53.0148 8521                 | 54.0978 3222              | 55.2092 3621                 | 57.5207 1111               |
| 49  | 52.0585 3644              | 54.2357 8056                 | 55.3683 2138              | 56.5312 9009                 | 58.9521 1644               |
| 50  | 53.1886 8278              | 55.4617 6298                 | 56.6451 6299              | 57.8610 5595                 | 60.3942 5732               |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ V. } S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Τελική αξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  ὧρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

| $n$ | .0025 ( $\frac{1}{4}\%$ ) | .004167 ( $\frac{1}{24}\%$ ) | .005 ( $\frac{1}{20}\%$ ) | .005833 ( $\frac{1}{17}\%$ ) | .0075 ( $\frac{3}{4}\%$ ) |
|-----|---------------------------|------------------------------|---------------------------|------------------------------|---------------------------|
| 50  | 53.1886 828               | 55.4617 630                  | 56.6451 630               | 57.8610 559                  | 60.3942 573               |
| 51  | 54.3216 545               | 56.6928 537                  | 57.9283 888               | 59.1985 788                  | 61.8472 142               |
| 52  | 55.4574 586               | 57.9290 739                  | 59.2180 307               | 60.5439 038                  | 63.3110 884               |
| 53  | 56.5961 023               | 59.1704 450                  | 60.5141 209               | 61.8970 766                  | 64.7859 014               |
| 54  | 57.7375 925               | 60.4169 885                  | 61.8166 915               | 63.2581 429                  | 66.2717 956               |
| 55  | 58.8819 365               | 61.6687 260                  | 63.1257 750               | 64.6271 487                  | 67.7688 341               |
| 56  | 60.0291 413               | 62.9256 790                  | 64.4414 038               | 66.0041 404                  | 69.2771 003               |
| 57  | 61.1792 142               | 64.1878 694                  | 65.7636 109               | 67.3891 646                  | 70.7966 786               |
| 58  | 62.3321 622               | 65.4553 188                  | 67.0924 289               | 68.7822 680                  | 72.3276 537               |
| 59  | 63.4879 926               | 66.7280 493                  | 68.4278 911               | 70.1834 979                  | 73.8701 111               |
| 60  | 64.6467 126               | 68.0060 828                  | 69.7700 305               | 71.5929 016                  | 75.4241 369               |
| 61  | 65.8083 294               | 69.2894 415                  | 71.1188 807               | 73.0105 269                  | 76.9898 180               |
| 62  | 66.9728 502               | 70.5781 475                  | 72.4744 751               | 74.4364 216                  | 78.5672 416               |
| 63  | 68.1402 824               | 71.8722 231                  | 73.8368 474               | 75.8706 341                  | 80.1564 959               |
| 64  | 69.3106 331               | 73.1716 907                  | 75.2060 317               | 77.3132 128                  | 81.7576 696               |
| 65  | 70.4839 096               | 74.4765 728                  | 76.5820 618               | 78.7642 065                  | 83.3708 521               |
| 66  | 71.6601 194               | 75.7868 918                  | 77.9649 721               | 80.2236 644                  | 84.9961 335               |
| 67  | 72.8392 697               | 77.1026 706                  | 79.3547 970               | 81.6916 358                  | 86.6336 045               |
| 68  | 74.0213 679               | 78.4239 317                  | 80.7515 710               | 83.1681 703                  | 88.2833 566               |
| 69  | 75.2064 213               | 79.7506 981                  | 82.1553 288               | 84.6533 180                  | 89.9454 817               |
| 70  | 76.3944 374               | 81.0829 926                  | 83.5661 055               | 86.1471 290                  | 91.6200 729               |
| 71  | 77.5854 235               | 82.4208 384                  | 84.9839 360               | 87.6496 539                  | 93.3072 234               |
| 72  | 78.7793 870               | 83.7642 586                  | 86.4088 557               | 89.1609 436                  | 95.0070 278               |
| 73  | 79.9763 355               | 85.1132 753                  | 87.8409 000               | 90.6810 491                  | 96.7195 803               |
| 74  | 81.1762 763               | 86.4679 150                  | 89.2801 046               | 92.2100 219                  | 98.4449 771               |
| 75  | 82.3792 170               | 87.8281 980                  | 90.7265 050               | 93.7479 137                  | 100.1833 145              |
| 76  | 83.5851 651               | 89.1941 488                  | 92.1801 375               | 95.2947 765                  | 101.9348 893              |
| 77  | 84.7941 280               | 90.5657 911                  | 93.6410 382               | 96.8506 627                  | 103.6991 995              |
| 78  | 86.0061 133               | 91.9431 485                  | 95.1092 434               | 98.4156 249                  | 105.4769 435              |
| 79  | 87.2211 286               | 93.3262 450                  | 96.5847 896               | 99.9897 160                  | 107.2680 206              |
| 80  | 88.4391 814               | 94.7151 044                  | 98.0677 136               | 101.5729 894                 | 109.0725 307              |
| 81  | 89.6602 793               | 96.1097 506                  | 99.5580 521               | 103.1654 985                 | 110.8905 747              |
| 82  | 90.8844 300               | 97.5102 079                  | 101.0558 424              | 104.7672 972                 | 112.7222 540              |
| 83  | 92.1116 411               | 98.9165 004                  | 102.5611 216              | 106.3784 398                 | 114.5676 709              |
| 84  | 93.3419 202               | 100.3286 525                 | 104.0739 272              | 107.9939 807                 | 116.4269 284              |
| 85  | 94.5752 750               | 101.7466 886                 | 105.5942 969              | 109.6289 748                 | 118.3001 304              |
| 86  | 95.8117 132               | 103.1706 331                 | 107.1222 683              | 111.2684 771                 | 120.1873 814              |
| 87  | 97.0512 425               | 104.6005 108                 | 108.6578 797              | 112.9175 432                 | 122.0887 867              |
| 88  | 98.2938 706               | 106.0363 462                 | 110.2011 691              | 114.5762 289                 | 124.0044 528              |
| 89  | 99.5396 053               | 107.4781 643                 | 111.7521 749              | 116.2445 902                 | 125.9344 860              |
| 90  | 100.7884 543              | 108.9259 900                 | 113.3109 358              | 117.9228 837                 | 127.8789 947              |
| 91  | 102.0404 254              | 110.3798 483                 | 114.8774 905              | 119.6105 660                 | 129.8380 871              |
| 92  | 103.2955 265              | 111.8397 643                 | 116.4518 779              | 121.3082 943                 | 131.8118 728              |
| 93  | 104.5537 653              | 113.3057 634                 | 118.0341 373              | 123.0159 260                 | 133.8004 618              |
| 94  | 105.8151 497              | 114.7778 707                 | 119.6243 080              | 124.7335 189                 | 135.8039 653              |
| 95  | 107.0796 876              | 116.2561 118                 | 121.2224 295              | 126.4611 311                 | 137.8224 951              |
| 96  | 108.3473 868              | 117.7405 123                 | 122.8285 417              | 128.1988 210                 | 139.8561 638              |
| 97  | 109.6182 553              | 119.2310 978                 | 124.4426 844              | 129.9466 475                 | 141.9050 850              |
| 98  | 110.8923 009              | 120.7278 940                 | 126.0648 978              | 131.7046 696                 | 143.9693 731              |
| 99  | 112.1695 317              | 122.2309 269                 | 127.6952 223              | 133.4729 468                 | 146.0491 434              |
| 100 | 113.4499 555              | 123.7402 224                 | 129.3336 984              | 135.2515 390                 | 148.1445 120              |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ V. } S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Τελική αξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  ὧρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

| $n$ | .01 (1%)     | .0125 (1 1/4%) | .015 (1 1/2%) | .015 (1 1/2%) | .0175 (1 3/4%) |
|-----|--------------|----------------|---------------|---------------|----------------|
| 1   | 1 0000 0000  | 1 0000 0000    | 1 0000 0000   | 1 0000 0000   | 1 0000 0000    |
| 2   | 2 0100 0000  | 2 0112 5000    | 2 0125 0000   | 2 0150 0000   | 2 0175 0000    |
| 3   | 3 0301 0000  | 3 0338 7656    | 3 0376 5625   | 3 0452 2500   | 3 0528 0625    |
| 4   | 4 0604 0100  | 4 0680 0767    | 4 0756 2695   | 4 0909 0338   | 4 1062 3036    |
| 5   | 5 1010 0501  | 5 1137 7276    | 5 1265 7229   | 5 1522 6693   | 5 1780 8939    |
| 6   | 6 1520 1506  | 6 1713 0270    | 6 1906 5444   | 6 2295 5093   | 6 2687 0596    |
| 7   | 7 2135 3521  | 7 2407 2986    | 7 2680 3762   | 7 3229 9419   | 7 3784 0831    |
| 8   | 8 2856 7056  | 8 3221 8807    | 8 3588 8809   | 8 4328 3911   | 8 5075 3045    |
| 9   | 9 3685 2727  | 9 4158 1269    | 9 4633 7420   | 9 5593 3169   | 9 6564 1224    |
| 10  | 10 4622 1254 | 10 5217 4058   | 10 5816 6637  | 10 7027 2167  | 10 8253 9945   |
| 11  | 11 5668 3467 | 11 6401 1016   | 11 7139 3720  | 11 8632 6249  | 12 0148 4394   |
| 12  | 12 6825 0301 | 12 7710 6140   | 12 8603 6142  | 13 0412 1143  | 13 2251 0371   |
| 13  | 13 8093 2804 | 13 9147 3584   | 14 0211 1594  | 14 2368 2960  | 14 4565 4303   |
| 14  | 14 9474 2132 | 15 0712 7662   | 15 1963 7988  | 15 4503 8205  | 15 7095 3253   |
| 15  | 16 0968 9554 | 16 2408 2848   | 16 3863 3463  | 16 6821 3778  | 16 9844 4935   |
| 16  | 17 2578 6449 | 17 4235 3780   | 17 5911 6382  | 17 9323 6984  | 18 2816 7721   |
| 17  | 18 4304 4314 | 18 6195 5260   | 18 8110 5336  | 19 2013 5539  | 19 6016 0656   |
| 18  | 19 6147 4757 | 19 8290 2257   | 20 0461 9153  | 20 4893 7572  | 20 9446 3468   |
| 19  | 20 8108 9504 | 21 0520 9907   | 21 2967 6893  | 21 7967 1636  | 22 3111 6768   |
| 20  | 22 0190 0399 | 22 2889 3519   | 22 5629 7854  | 23 1236 6710  | 23 7016 1119   |
| 21  | 23 2391 9403 | 23 5396 8571   | 23 8450 1577  | 24 4705 2211  | 25 1163 8938   |
| 22  | 24 4715 8598 | 24 8045 0717   | 25 1430 7847  | 25 8375 7994  | 26 5559 2620   |
| 23  | 25 7163 0183 | 26 0835 5788   | 26 4573 6695  | 27 2251 4364  | 28 0206 5490   |
| 24  | 26 9734 6485 | 27 3769 9790   | 27 7880 8403  | 28 6335 2080  | 29 5110 1637   |
| 25  | 28 2431 9950 | 28 6849 8913   | 29 1354 3508  | 30 0630 2361  | 31 0274 5915   |
| 26  | 29 5256 3150 | 30 0076 9526   | 30 4996 2802  | 31 5139 6896  | 32 5074 3969   |
| 27  | 30 8208 8781 | 31 3452 8183   | 31 8808 7337  | 32 9866 7850  | 34 1401 2238   |
| 28  | 32 1299 9669 | 32 6979 1625   | 33 2793 8429  | 34 4814 7867  | 35 7378 7977   |
| 29  | 33 4503 8766 | 34 0657 6781   | 34 6953 7659  | 35 9987 0085  | 37 3632 9267   |
| 30  | 34 7848 9153 | 35 4490 0769   | 36 1290 6880  | 37 5386 8137  | 39 0171 5029   |
| 31  | 36 1327 4045 | 36 8478 0903   | 37 5806 8216  | 39 1017 6159  | 40 6999 5042   |
| 32  | 37 4940 6785 | 38 2623 4688   | 39 0504 4069  | 40 6882 8801  | 42 4121 9955   |
| 33  | 38 8690 0853 | 39 6927 9829   | 40 5385 7120  | 42 2986 1233  | 44 1544 1305   |
| 34  | 40 2576 9862 | 41 1393 4227   | 42 0453 0334  | 43 9330 9152  | 45 9271 1527   |
| 35  | 41 6602 7560 | 42 6021 5987   | 43 5708 6953  | 45 5920 8789  | 47 7308 3979   |
| 36  | 43 0768 7836 | 44 0814 3417   | 45 1155 0550  | 47 2750 6921  | 49 5661 2949   |
| 37  | 44 5076 4714 | 45 5773 5039   | 46 6794 4932  | 48 9851 0874  | 51 4335 3675   |
| 38  | 45 9527 2361 | 47 0900 9549   | 48 2629 4243  | 50 7198 8538  | 53 3336 2365   |
| 39  | 47 4122 5085 | 48 6198 5906   | 49 8662 2921  | 52 4806 8366  | 55 2669 6206   |
| 40  | 48 8863 7336 | 50 1668 3248   | 51 4895 5708  | 54 2678 9391  | 57 2341 3390   |
| 41  | 50 3752 3709 | 51 7312 0934   | 53 1331 7654  | 56 0819 1252  | 59 2359 3124   |
| 42  | 51 8789 8946 | 53 3131 8545   | 54 7973 4125  | 57 9231 4100  | 61 2723 5654   |
| 43  | 53 3977 7936 | 54 9129 5879   | 56 4823 0801  | 59 7919 8812  | 63 3446 2278   |
| 44  | 54 9317 5715 | 56 5307 2957   | 58 1883 3686  | 61 6858 6794  | 65 4531 5367   |
| 45  | 56 4810 7472 | 58 1667 0028   | 59 9156 9108  | 63 6142 0696  | 67 5985 8386   |
| 46  | 58 0458 8547 | 59 8210 7566   | 61 6646 3721  | 65 5684 1398  | 69 7815 5908   |
| 47  | 59 6263 4432 | 61 4940 6276   | 63 4354 4518  | 67 5519 4018  | 72 0027 3637   |
| 48  | 61 2226 0777 | 63 1858 7097   | 65 2283 8824  | 69 5652 1929  | 74 2627 8425   |
| 49  | 62 8348 3385 | 64 8967 1201   | 67 0427 4310  | 71 6086 9758  | 76 5623 8298   |
| 50  | 64 4631 8218 | 66 6268 0002   | 68 8817 8989  | 73 6828 2804  | 78 9022 2468   |

### ΠΙΝΑΚΑΣ Ι. $(1+i)^n$

Τελική αξία μιάς νομισματικής μονάδας, ή όποια άνατοκίζεται επί  $n$  χρονικές περιόδους.

| .0025 (¼%)  | .004167 (½%) | .005 (⅓%)   | .005833 (⅔%) | .0075 (1%)  |
|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|
| 1.0025 0000 | 1.0041 6667  | 1.0050 0000 | 1.0058 3333  | 1.0075 0000 |
| 1.0050 0625 | 1.0083 5069  | 1.0100 2500 | 1.0117 0069  | 1.0150 5625 |
| 1.0075 1877 | 1.0125 5216  | 1.0150 7513 | 1.0176 0228  | 1.0226 6917 |
| 1.0100 3756 | 1.0167 7112  | 1.0201 5050 | 1.0235 3830  | 1.0303 3919 |
| 1.0125 6266 | 1.0210 0767  | 1.0252 5125 | 1.0295 0894  | 1.0380 6673 |
| 1.0150 9406 | 1.0252 6187  | 1.0303 7751 | 1.0355 1440  | 1.0458 5224 |
| 1.0176 3180 | 1.0295 3379  | 1.0355 2940 | 1.0415 5490  | 1.0536 9612 |
| 1.0201 7588 | 1.0338 2352  | 1.0407 0704 | 1.0476 3064  | 1.0615 9885 |
| 1.0227 2632 | 1.0381 3111  | 1.0459 1058 | 1.0537 4182  | 1.0695 6084 |
| 1.0252 8313 | 1.0424 5666  | 1.0511 4013 | 1.0598 8865  | 1.0775 8255 |
| 1.0278 4634 | 1.0468 0023  | 1.0563 9583 | 1.0660 7133  | 1.0856 6441 |
| 1.0304 1596 | 1.0511 6190  | 1.0616 7781 | 1.0722 9008  | 1.0938 0690 |
| 1.0329 9200 | 1.0555 4174  | 1.0669 8620 | 1.0785 4511  | 1.1020 1045 |
| 1.0355 7448 | 1.0599 3983  | 1.0723 2113 | 1.0848 3662  | 1.1102 7553 |
| 1.0381 6341 | 1.0643 5625  | 1.0776 8274 | 1.0911 6483  | 1.1186 0259 |
| 1.0407 5882 | 1.0687 9106  | 1.0830 7115 | 1.0975 2996  | 1.1269 9211 |
| 1.0433 6072 | 1.0732 4436  | 1.0884 8651 | 1.1039 3222  | 1.1354 4455 |
| 1.0459 6912 | 1.0777 1621  | 1.0939 2894 | 1.1103 7182  | 1.1439 6039 |
| 1.0485 8404 | 1.0822 0670  | 1.0993 9858 | 1.1168 4899  | 1.1525 4009 |
| 1.0512 0550 | 1.0867 1589  | 1.1048 9558 | 1.1233 6395  | 1.1611 8414 |
| 1.0538 3352 | 1.0912 4387  | 1.1104 2006 | 1.1299 1690  | 1.1698 9302 |
| 1.0564 6810 | 1.0957 9072  | 1.1159 7216 | 1.1365 0808  | 1.1786 6722 |
| 1.0591 0927 | 1.1003 5652  | 1.1215 5202 | 1.1431 3771  | 1.1875 0723 |
| 1.0617 5704 | 1.1049 4134  | 1.1271 5978 | 1.1498 0602  | 1.1964 1353 |
| 1.0644 1144 | 1.1095 4526  | 1.1327 9558 | 1.1565 1322  | 1.2053 8663 |
| 1.0670 7247 | 1.1141 6836  | 1.1384 5955 | 1.1632 5955  | 1.2144 2703 |
| 1.0697 4015 | 1.1188 1073  | 1.1441 5185 | 1.1700 4523  | 1.2235 3523 |
| 1.0724 1450 | 1.1234 7244  | 1.1498 7261 | 1.1768 7049  | 1.2327 1175 |
| 1.0750 9553 | 1.1281 5358  | 1.1556 2197 | 1.1837 3557  | 1.2419 6709 |
| 1.0777 8327 | 1.1328 5422  | 1.1614 0008 | 1.1906 4069  | 1.2512 7176 |
| 1.0804 7773 | 1.1375 7444  | 1.1672 0708 | 1.1975 8610  | 1.2606 5630 |
| 1.0831 7892 | 1.1423 1434  | 1.1730 4312 | 1.2045 7202  | 1.2701 1122 |
| 1.0858 8687 | 1.1470 7398  | 1.1789 0833 | 1.2115 9869  | 1.2796 3706 |
| 1.0886 0159 | 1.1518 5346  | 1.1848 0288 | 1.2186 6634  | 1.2892 3434 |
| 1.0913 2309 | 1.1566 5284  | 1.1907 2689 | 1.2257 7523  | 1.2989 0359 |
| 1.0940 5140 | 1.1614 7223  | 1.1966 8052 | 1.2329 2559  | 1.3086 4537 |
| 1.0967 8653 | 1.1663 1170  | 1.2026 6393 | 1.2401 1765  | 1.3184 6021 |
| 1.0995 2850 | 1.1711 7133  | 1.2086 7725 | 1.2473 5167  | 1.3283 4866 |
| 1.1022 7732 | 1.1760 5121  | 1.2147 2063 | 1.2546 2789  | 1.3383 1128 |
| 1.1050 3301 | 1.1809 5142  | 1.2207 9424 | 1.2619 4655  | 1.3483 4861 |
| 1.1077 9559 | 1.1858 7206  | 1.2268 9821 | 1.2693 0791  | 1.3584 6123 |
| 1.1105 6508 | 1.1908 1319  | 1.2330 3270 | 1.2767 1220  | 1.3686 4969 |
| 1.1133 4149 | 1.1957 7491  | 1.2391 9786 | 1.2841 5969  | 1.3789 1456 |
| 1.1161 2485 | 1.2007 5731  | 1.2453 9385 | 1.2916 5062  | 1.3892 5642 |
| 1.1189 1516 | 1.2057 6046  | 1.2516 2082 | 1.2991 8525  | 1.3996 7584 |
| 1.1217 1245 | 1.2107 8446  | 1.2578 7892 | 1.3067 6383  | 1.4101 7341 |
| 1.1245 1673 | 1.2158 2940  | 1.2641 6832 | 1.3143 8662  | 1.4207 4971 |
| 1.1273 2802 | 1.2208 9536  | 1.2704 8916 | 1.3220 5388  | 1.4314 0533 |
| 1.1301 4634 | 1.2259 8242  | 1.2768 4161 | 1.3297 6586  | 1.4421 4087 |
| 1.1329 7171 | 1.2310 9068  | 1.2832 2581 | 1.3375 2283  | 1.4529 5693 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ V. } S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Τελική αξία μιάς ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  όρων 1 νομισματικής μονάδας.

| $n$ | .02 (2%)     | .0225 (2¼%)  | .025 (2½%)   | .0275 (2¾%)   | .03 (3%)      |
|-----|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
| 1   | 1.0000 0000  | 1.0000 0000  | 1.0000 0000  | 1.0000 0000   | 1.0000 0000   |
| 2   | 2.0200 0000  | 2.0225 0000  | 2.0250 0000  | 2.0275 0000   | 2.0300 0000   |
| 3   | 3.0604 0000  | 3.0680 0625  | 3.0756 2500  | 3.0832 5625   | 3.0909 0000   |
| 4   | 4.1216 0800  | 4.1370 3639  | 4.1525 1563  | 4.1680 4580   | 4.1836 2700   |
| 5   | 5.2040 4016  | 5.2301 1971  | 5.2563 2852  | 5.2826 6706   | 5.3091 3581   |
| 6   | 6.3081 2096  | 6.3477 9740  | 6.3877 3673  | 6.4279 4040   | 6.4684 0988   |
| 7   | 7.4342 8338  | 7.4906 2284  | 7.5474 3015  | 7.6047 0876   | 7.6624 6218   |
| 8   | 8.5829 6905  | 8.6591 6186  | 8.7361 1590  | 8.8138 3825   | 8.8923 3605   |
| 9   | 9.7546 2843  | 9.8539 9300  | 9.9545 1880  | 10.0562 1850  | 10.1591 0613  |
| 10  | 10.9497 2100 | 11.0757 0784 | 11.2033 8177 | 11.3327 6482  | 11.4638 7931  |
| 11  | 12.1687 1542 | 12.3249 1127 | 12.4834 6631 | 12.6444 1585  | 12.8077 9569  |
| 12  | 13.4120 8973 | 13.6022 2177 | 13.7855 5297 | 13.9921 3729  | 14.1920 2956  |
| 13  | 14.6803 3152 | 14.9082 7176 | 15.1404 4179 | 15.3769 2107  | 15.6177 9045  |
| 14  | 15.9739 3815 | 16.2437 0788 | 16.5189 5284 | 16.7997 8639  | 17.0863 2416  |
| 15  | 17.2934 1692 | 17.6091 9130 | 17.9319 2668 | 18.2617 8052  | 18.5989 1389  |
| 16  | 18.6392 8525 | 19.0053 9811 | 19.3802 2483 | 19.7639 7948  | 20.1568 8130  |
| 17  | 20.0120 7096 | 20.4330 1957 | 20.8647 3045 | 21.3074 8892  | 21.7615 8774  |
| 18  | 21.4123 1238 | 21.8927 6251 | 22.3863 4871 | 22.8934 4487  | 23.4144 3537  |
| 19  | 22.8405 5863 | 23.3853 4966 | 23.9460 0743 | 24.5230 1460  | 25.1168 6844  |
| 20  | 24.2973 6980 | 24.9115 2003 | 25.5446 5761 | 26.1973 9750  | 26.8703 7449  |
| 21  | 25.7833 1719 | 26.4720 2923 | 27.1832 7405 | 27.9178 2593  | 28.6764 8572  |
| 22  | 27.2989 8354 | 28.0676 4989 | 28.8628 5590 | 29.6855 6615  | 30.5367 8030  |
| 23  | 28.8449 6321 | 29.6991 7201 | 30.5844 2730 | 31.5019 1921  | 32.4528 8370  |
| 24  | 30.4218 6247 | 31.3674 0338 | 32.3490 3798 | 33.3682 2199  | 34.4264 7022  |
| 25  | 32.0302 9972 | 33.0731 6996 | 34.1577 6393 | 35.2858 4810  | 36.4592 6432  |
| 26  | 33.6709 0572 | 34.8173 1628 | 36.0117 0803 | 37.2562 0892  | 38.5530 4225  |
| 27  | 35.3443 2383 | 36.6007 0590 | 37.9120 0073 | 39.2807 5467  | 40.7096 3352  |
| 28  | 37.0512 1031 | 38.4242 2178 | 39.8598 0075 | 41.3609 7542  | 42.9309 2252  |
| 29  | 38.7922 3451 | 40.2887 6677 | 41.8562 9577 | 43.4984 0224  | 45.2188 5020  |
| 30  | 40.5680 7921 | 42.1952 6402 | 43.9027 0316 | 45.6946 0831  | 47.5754 1571  |
| 31  | 42.3794 4079 | 44.1446 5746 | 46.0002 7074 | 47.9512 1003  | 50.0026 7818  |
| 32  | 44.2270 2961 | 46.1379 1226 | 48.1502 7751 | 50.2698 6831  | 52.5027 5852  |
| 33  | 46.1115 7020 | 48.1760 1528 | 50.3540 3445 | 52.6522 8969  | 55.0778 4128  |
| 34  | 48.0338 0160 | 50.2599 7563 | 52.6128 8531 | 55.1002 2765  | 57.7301 7652  |
| 35  | 49.9944 7763 | 52.3908 2508 | 54.9282 0744 | 57.6154 8391  | 60.4620 8181  |
| 36  | 51.9943 6719 | 54.5696 1864 | 57.3014 1263 | 60.1999 0972  | 63.2759 4427  |
| 37  | 54.0342 5453 | 56.7974 3506 | 59.7339 4794 | 62.8554 0724  | 66.1742 2259  |
| 38  | 56.1149 3962 | 59.0753 7735 | 62.2272 9664 | 65.5839 3094  | 69.1594 4927  |
| 39  | 58.2372 3841 | 61.4045 7334 | 64.7829 7906 | 68.3874 8904  | 72.2342 3275  |
| 40  | 60.4019 8318 | 63.7861 7624 | 67.4025 5354 | 71.2681 4499  | 75.4012 5973  |
| 41  | 62.6100 2284 | 66.2213 6521 | 70.0876 1737 | 74.2280 1898  | 78.6632 9753  |
| 42  | 64.8622 2330 | 68.7113 4592 | 72.8398 0781 | 77.2692 8950  | 82.0231 9645  |
| 43  | 67.1594 6777 | 71.2573 5121 | 75.6608 0300 | 80.3941 9496  | 85.4838 9234  |
| 44  | 69.5026 5712 | 73.8606 4161 | 78.5523 2308 | 83.6050 3532  | 89.0484 0911  |
| 45  | 71.8927 1027 | 76.5225 0605 | 81.5161 3116 | 86.9041 7379  | 92.7198 6139  |
| 46  | 74.3305 6447 | 79.2442 6243 | 84.5540 3443 | 90.2940 3857  | 96.5014 5723  |
| 47  | 76.8171 7576 | 82.0272 5834 | 87.6678 8530 | 93.7771 2463  | 100.3965 0095 |
| 48  | 79.3535 1928 | 84.8728 7165 | 90.8595 8243 | 97.3559 9556  | 104.4083 9598 |
| 49  | 81.9405 8966 | 87.7825 1126 | 94.1310 7199 | 101.0332 8544 | 108.5406 4785 |
| 50  | 84.5794 0145 | 90.7576 1776 | 97.4843 4879 | 104.8117 0079 | 112.7968 6729 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ V. } S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Τελική αξία μιᾶς ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  ὧρων 1 νομισματικῆς μονάδας.

| $n$ | .02 (2 %)    | .0225 (2½ %) | .025 (2½ %)  | .0275 (2½ %) | .03 (3 %)    |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 50  | 84.5794 015  | 90.7576 178  | 97.4843 488  | 104.8117 008 | 112.7968 673 |
| 51  | 87.2709 895  | 93.7096 642  | 100.9214 575 | 108.6940 226 | 117.1807 733 |
| 52  | 90.0164 093  | 96.9101 566  | 104.4444 939 | 112.6831 082 | 121.6961 965 |
| 53  | 92.8167 375  | 100.0906 351 | 108.0556 063 | 116.7818 937 | 126.3470 824 |
| 54  | 95.6730 722  | 103.3426 744 | 111.7569 965 | 120.9933 957 | 131.1374 949 |
| 55  | 98.5865 337  | 106.6678 846 | 115.5509 214 | 125.3207 141 | 136.0716 197 |
| 56  | 101.5582 643 | 110.0679 120 | 119.4396 944 | 129.7670 337 | 141.1537 633 |
| 57  | 104.5894 296 | 113.5444 400 | 123.4256 868 | 134.3356 272 | 146.3883 814 |
| 58  | 107.6812 182 | 117.0991 899 | 127.5113 289 | 139.0298 569 | 151.7800 328 |
| 59  | 110.8348 426 | 120.7339 217 | 131.6991 121 | 143.8531 780 | 157.3334 338 |
| 60  | 114.0515 394 | 124.4504 349 | 135.9915 900 | 148.8091 404 | 163.0534 368 |
| 61  | 117.3325 702 | 128.2505 697 | 140.3913 797 | 153.9013 917 | 168.9450 399 |
| 62  | 120.6792 216 | 132.1362 075 | 144.9011 642 | 159.1336 800 | 175.0133 911 |
| 63  | 124.0928 060 | 136.1092 722 | 149.5236 933 | 164.5098 562 | 181.2637 928 |
| 64  | 127.5746 622 | 140.1717 308 | 154.2617 856 | 170.0338 773 | 187.7017 066 |
| 65  | 131.1261 554 | 144.3255 948 | 159.1183 303 | 175.7098 089 | 194.3327 578 |
| 66  | 134.7486 785 | 148.5729 207 | 164.0962 885 | 181.5418 286 | 201.1627 406 |
| 67  | 138.4436 521 | 152.9158 114 | 169.1986 957 | 187.5342 289 | 208.1978 228 |
| 68  | 142.2125 251 | 157.3564 171 | 174.4286 631 | 193.6914 202 | 215.4435 515 |
| 69  | 146.0567 756 | 161.8969 365 | 179.7893 797 | 200.0179 343 | 222.9068 580 |
| 70  | 149.9779 111 | 166.5396 176 | 185.2841 142 | 206.5184 275 | 230.5940 637 |
| 71  | 153.9774 694 | 171.2867 590 | 190.9162 171 | 213.1976 842 | 238.5118 856 |
| 72  | 158.0570 188 | 176.1407 111 | 196.6891 225 | 220.0606 205 | 246.6672 422 |
| 73  | 162.2181 591 | 181.1038 771 | 202.6063 506 | 227.1122 876 | 255.0672 595 |
| 74  | 166.4625 223 | 186.1787 143 | 208.6715 093 | 234.3573 755 | 263.7192 773 |
| 75  | 170.7917 728 | 191.3677 354 | 214.8862 970 | 241.8027 171 | 272.6308 556 |
| 76  | 175.2076 082 | 196.6735 094 | 221.2605 045 | 249.4522 918 | 281.8097 813 |
| 77  | 179.7117 604 | 202.0986 634 | 227.7920 171 | 257.3122 298 | 291.2640 747 |
| 78  | 184.3059 956 | 207.6458 833 | 234.4868 175 | 265.3883 162 | 301.0019 969 |
| 79  | 188.9921 155 | 213.3179 157 | 241.3489 880 | 273.6864 948 | 311.0320 568 |
| 80  | 193.7719 578 | 219.1175 688 | 248.3827 126 | 282.2128 735 | 321.3630 185 |
| 81  | 198.6473 970 | 225.0477 141 | 255.5922 805 | 290.9737 275 | 332.0039 091 |
| 82  | 203.6203 449 | 231.1112 876 | 262.9820 875 | 299.9755 050 | 342.9640 264 |
| 83  | 208.6927 518 | 237.3112 916 | 270.5566 307 | 309.2248 314 | 354.2529 472 |
| 84  | 213.8666 068 | 243.6507 957 | 278.3205 557 | 318.7285 142 | 365.8805 356 |
| 85  | 219.1439 390 | 250.1329 386 | 286.2785 695 | 328.4935 484 | 377.8569 517 |
| 86  | 224.5268 178 | 256.7609 297 | 294.4355 338 | 338.5271 209 | 390.1926 602 |
| 87  | 230.0173 541 | 263.5380 506 | 302.7964 221 | 348.8366 168 | 402.8984 400 |
| 88  | 235.6177 012 | 270.4676 567 | 311.3663 327 | 359.4296 237 | 415.9853 932 |
| 89  | 241.3300 552 | 277.5531 790 | 320.1504 910 | 370.3139 384 | 429.4649 550 |
| 90  | 247.1566 563 | 284.7981 255 | 329.1542 533 | 381.4975 717 | 443.3489 037 |
| 91  | 253.0997 894 | 292.2060 834 | 338.3831 096 | 392.9887 549 | 457.6493 708 |
| 92  | 259.1617 852 | 299.7807 202 | 347.8426 873 | 404.7959 457 | 472.3788 519 |
| 93  | 265.3450 209 | 307.5257 865 | 357.5387 545 | 416.9278 342 | 487.5502 174 |
| 94  | 271.6519 214 | 315.4451 166 | 367.4772 234 | 429.3933 496 | 503.1767 240 |
| 95  | 278.0849 598 | 323.5426 318 | 377.6641 540 | 442.2016 667 | 519.2720 257 |
| 96  | 284.6466 590 | 331.8223 410 | 388.1057 578 | 455.3622 126 | 535.8501 865 |
| 97  | 291.3395 922 | 340.2883 437 | 398.8084 018 | 468.8846 734 | 552.9256 520 |
| 98  | 298.1663 840 | 348.9448 314 | 409.7786 118 | 482.7790 019 | 570.5134 628 |
| 99  | 305.1297 117 | 357.7960 901 | 421.0230 771 | 497.0554 245 | 588.6288 667 |
| 100 | 312.2323 059 | 366.8465 021 | 432.5486 540 | 511.7244 487 | 607.2877 327 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ V. } S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Τελική αξία μιάς ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  ὧρων 1 νομισματικής μονάδας.

| $n$ | 035 (3½ %)   | .04 (4 %)    | .045 (4½ %)  | .05 (5 %)    | .055 (5½ %)  |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1   | 1.0000 000   | 1.0000 000   | 1.0000 000   | 1.0000 000   | 1.0000 000   |
| 2   | 2.0350 000   | 2.0400 000   | 2.0450 000   | 2.0500 000   | 2.0550 000   |
| 3   | 3.1062 250   | 3.1216 000   | 3.1370 250   | 3.1525 000   | 3.1680 250   |
| 4   | 4.2149 429   | 4.2464 640   | 4.2781 911   | 4.3101 250   | 4.3422 664   |
| 5   | 5.3624 659   | 5.4163 226   | 5.4707 097   | 5.5256 313   | 5.5810 910   |
| 6   | 6.5501 522   | 6.6329 755   | 6.7168 917   | 6.8019 128   | 6.8880 510   |
| 7   | 7.7794 075   | 7.8982 945   | 8.0191 518   | 8.1420 085   | 8.2668 938   |
| 8   | 9.0516 868   | 9.2142 263   | 9.3800 136   | 9.5491 089   | 9.7215 730   |
| 9   | 10.3684 958  | 10.5827 953  | 10.8021 142  | 11.0265 643  | 11.2562 595  |
| 10  | 11.7313 932  | 12.0061 071  | 12.2882 094  | 12.5778 925  | 12.8753 538  |
| 11  | 13.1419 919  | 13.4863 514  | 13.8411 788  | 14.2067 872  | 14.5834 982  |
| 12  | 14.6019 616  | 15.0258 055  | 15.4640 318  | 15.9171 265  | 16.3855 907  |
| 13  | 16.1130 303  | 16.6268 377  | 17.1599 133  | 17.7129 828  | 18.2867 981  |
| 14  | 17.6769 864  | 18.2919 112  | 18.9321 094  | 19.5986 320  | 20.2925 720  |
| 15  | 19.2956 809  | 20.0235 876  | 20.7840 543  | 21.5785 636  | 22.4086 635  |
| 16  | 20.9710 297  | 21.8245 311  | 22.7193 367  | 23.6574 918  | 24.6411 400  |
| 17  | 22.7050 157  | 23.6975 124  | 24.7417 060  | 25.8403 664  | 26.9964 027  |
| 18  | 24.4996 913  | 25.6454 129  | 26.8550 837  | 28.1323 847  | 29.4812 048  |
| 19  | 26.3571 805  | 27.6712 294  | 29.0635 625  | 30.5390 039  | 32.1026 711  |
| 20  | 28.2796 818  | 29.7780 786  | 31.3714 228  | 33.0659 541  | 34.8653 180  |
| 21  | 30.2694 707  | 31.9692 017  | 33.7831 368  | 35.7192 518  | 37.7860 756  |
| 22  | 32.3289 022  | 34.2479 698  | 36.3033 780  | 38.5052 144  | 40.8643 097  |
| 23  | 34.4604 137  | 36.6178 886  | 38.9370 300  | 41.4304 751  | 44.1118 467  |
| 24  | 36.6665 282  | 39.0826 041  | 41.6891 963  | 44.5019 989  | 47.5379 983  |
| 25  | 38.9498 567  | 41.6459 083  | 44.5652 101  | 47.7270 988  | 51.1525 882  |
| 26  | 41.3131 017  | 44.3117 446  | 47.5706 446  | 51.1134 538  | 54.9659 805  |
| 27  | 43.7590 602  | 47.0842 144  | 50.7113 236  | 54.6691 264  | 58.9891 094  |
| 28  | 46.2906 273  | 49.9675 830  | 53.9933 332  | 58.4025 828  | 63.2335 106  |
| 29  | 48.9107 993  | 52.9662 863  | 57.4230 332  | 62.3227 119  | 67.7113 535  |
| 30  | 51.6226 773  | 56.0849 378  | 61.0070 697  | 66.4388 475  | 72.4354 780  |
| 31  | 54.4294 710  | 59.3283 353  | 64.7523 878  | 70.7607 899  | 77.4194 293  |
| 32  | 57.3345 025  | 62.7014 687  | 68.6662 452  | 75.2988 294  | 82.6774 979  |
| 33  | 60.3412 101  | 66.2095 274  | 72.7562 263  | 80.0637 708  | 88.2247 603  |
| 34  | 63.4531 524  | 69.8579 085  | 77.0302 565  | 85.0669 594  | 94.0771 221  |
| 35  | 66.6740 127  | 73.6522 249  | 81.4966 180  | 90.3203 074  | 100.2513 638 |
| 36  | 70.0076 032  | 77.5983 438  | 86.1639 658  | 95.8363 227  | 106.7651 888 |
| 37  | 73.4578 693  | 81.7022 464  | 91.0413 443  | 101.6281 389 | 113.6372 742 |
| 38  | 77.0288 947  | 85.9703 363  | 96.1382 048  | 107.7095 458 | 120.8873 242 |
| 39  | 80.7249 060  | 90.4091 497  | 101.4644 240 | 114.0950 231 | 128.5361 271 |
| 40  | 84.5502 777  | 95.0255 157  | 107.0303 231 | 120.7997 742 | 136.6056 141 |
| 41  | 88.5095 375  | 99.8265 363  | 112.8466 876 | 127.8397 630 | 145.1189 228 |
| 42  | 92.6073 713  | 104.8195 978 | 118.9247 885 | 135.2317 511 | 154.1004 636 |
| 43  | 96.8486 293  | 110.0123 817 | 125.2764 040 | 142.9933 387 | 163.5759 891 |
| 44  | 101.2383 313 | 115.4128 770 | 131.9138 422 | 151.1430 056 | 173.5726 685 |
| 45  | 105.7816 729 | 121.0293 920 | 138.8499 651 | 159.7001 559 | 184.1191 653 |
| 46  | 110.4840 314 | 126.8705 677 | 146.0982 135 | 168.6851 637 | 195.2457 194 |
| 47  | 115.3509 725 | 132.9453 904 | 153.6726 331 | 178.1194 218 | 206.9842 339 |
| 48  | 120.3882 566 | 139.2632 060 | 161.5879 016 | 188.0253 929 | 219.3683 668 |
| 49  | 125.6018 456 | 145.8337 343 | 169.8593 572 | 198.4266 626 | 232.4336 270 |
| 50  | 130.9979 102 | 152.6670 837 | 178.5030 283 | 209.3479 957 | 246.2174 764 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ V. } S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Τελική αξία μιάς ληξιπρόθεσμης ράντας  $n$  ὧρων 1 νομισματικής μονάδας.

| $n$ | .06 (6%)     | .065 (6½%)   | .07 (7%)     | .075 (7½%)   | .08 (8%)     |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1   | 1.0000 000   | 1.0000 000   | 1.0000 000   | 1.0000 000   | 1.0000 000   |
| 2   | 2.0600 000   | 2.0650 000   | 2.0700 000   | 2.0750 000   | 2.0800 000   |
| 3   | 3.1836 000   | 3.1992 250   | 3.2149 000   | 3.2306 250   | 3.2464 000   |
| 4   | 4.3746 160   | 4.4071 746   | 4.4399 430   | 4.4729 219   | 4.5061 120   |
| 5   | 5.6370 930   | 5.6936 410   | 5.7507 390   | 5.8083 910   | 5.8666 010   |
| 6   | 6.9753 185   | 7.0637 276   | 7.1532 907   | 7.2440 203   | 7.3359 290   |
| 7   | 8.3938 376   | 8.5228 699   | 8.6540 211   | 8.7873 219   | 8.9228 034   |
| 8   | 9.8974 679   | 10.0768 565  | 10.2598 026  | 10.4463 710  | 10.6366 276  |
| 9   | 11.4913 160  | 11.7318 522  | 11.9779 887  | 12.2298 488  | 12.4875 578  |
| 10  | 13.1807 949  | 13.4944 225  | 13.8164 480  | 14.1470 875  | 14.4865 625  |
| 11  | 14.9716 426  | 15.3715 600  | 15.7835 993  | 16.2081 191  | 16.6454 875  |
| 12  | 16.8699 412  | 17.3707 114  | 17.8884 513  | 18.4237 280  | 18.9771 265  |
| 13  | 18.8821 377  | 19.4998 076  | 20.1406 429  | 20.8055 076  | 21.4952 966  |
| 14  | 21.0150 659  | 21.7672 951  | 22.5504 879  | 23.3659 207  | 24.2149 203  |
| 15  | 23.2759 699  | 24.1821 693  | 25.1290 220  | 26.1183 647  | 27.1521 139  |
| 16  | 25.6725 281  | 26.7540 103  | 27.8880 536  | 29.0772 421  | 30.3242 830  |
| 17  | 28.2128 798  | 29.4930 210  | 30.8402 173  | 32.2580 352  | 33.7502 257  |
| 18  | 30.9056 525  | 32.4100 674  | 33.9990 325  | 35.6773 879  | 37.4502 437  |
| 19  | 33.7509 917  | 35.5167 218  | 37.3789 648  | 39.3531 919  | 41.4462 632  |
| 20  | 36.7855 912  | 38.8253 087  | 40.9954 923  | 43.3046 813  | 45.7619 643  |
| 21  | 39.9927 267  | 42.3489 537  | 44.8651 768  | 47.5525 324  | 50.4229 214  |
| 22  | 43.3922 903  | 46.1016 357  | 49.0057 392  | 52.1189 724  | 55.4567 552  |
| 23  | 46.9958 277  | 50.0982 420  | 53.4361 409  | 57.0278 953  | 60.8932 956  |
| 24  | 50.8155 774  | 54.3546 278  | 58.1766 708  | 62.3049 874  | 66.7647 592  |
| 25  | 54.8645 120  | 58.8876 786  | 63.2490 377  | 67.9778 615  | 73.1059 400  |
| 26  | 59.1563 827  | 63.7153 777  | 68.6764 704  | 74.0762 011  | 79.9544 151  |
| 27  | 63.7057 657  | 68.8568 772  | 74.4838 233  | 80.6319 162  | 87.3507 684  |
| 28  | 68.5281 116  | 74.3325 743  | 80.6976 909  | 87.6793 099  | 95.3388 298  |
| 29  | 73.6397 983  | 80.1641 916  | 87.3465 293  | 95.2552 582  | 103.9659 362 |
| 30  | 79.0581 862  | 86.3748 640  | 94.4607 863  | 103.3994 025 | 113.2832 111 |
| 31  | 84.8016 774  | 92.9892 302  | 102.0730 414 | 112.1543 577 | 123.3458 680 |
| 32  | 90.8897 780  | 100.0335 302 | 110.2181 543 | 121.5650 345 | 134.2135 374 |
| 33  | 97.3431 647  | 107.5357 096 | 118.9334 251 | 131.6833 796 | 145.9506 204 |
| 34  | 104.1837 546 | 115.5255 308 | 128.2587 648 | 142.5596 331 | 158.6266 701 |
| 35  | 111.4347 799 | 124.0346 903 | 138.2368 784 | 154.2516 056 | 172.3168 037 |
| 36  | 119.1208 667 | 133.0969 451 | 148.9134 598 | 166.8204 760 | 187.1021 480 |
| 37  | 127.2681 187 | 142.7482 466 | 160.3374 020 | 180.3320 117 | 203.0703 198 |
| 38  | 135.9042 058 | 153.0268 826 | 172.5610 202 | 194.8569 126 | 220.3159 454 |
| 39  | 145.0584 581 | 163.9736 300 | 185.6402 916 | 210.4711 810 | 238.9412 210 |
| 40  | 154.7619 656 | 175.6319 159 | 199.6351 120 | 227.2565 196 | 259.0565 187 |
| 41  | 165.0476 836 | 188.0479 904 | 214.6095 698 | 245.3007 586 | 280.7810 402 |
| 42  | 175.9505 446 | 201.2711 098 | 230.6322 397 | 264.6983 155 | 304.2435 234 |
| 43  | 187.5075 772 | 215.3537 320 | 247.7764 965 | 285.5066 891 | 329.5830 053 |
| 44  | 199.7580 319 | 230.3517 245 | 266.1208 513 | 307.9669 908 | 356.9496 457 |
| 45  | 212.7435 138 | 246.3245 866 | 285.7493 108 | 332.0645 151 | 386.5056 174 |
| 46  | 226.5081 216 | 263.3356 848 | 306.7517 626 | 357.9693 537 | 418.4260 668 |
| 47  | 241.0986 121 | 281.4525 043 | 329.2243 860 | 385.8170 553 | 452.9001 521 |
| 48  | 256.5645 288 | 300.7469 170 | 353.2700 930 | 415.7533 344 | 490.1321 643 |
| 49  | 272.9584 006 | 321.2954 666 | 378.9989 995 | 447.9348 345 | 530.3427 374 |
| 50  | 290.3359 046 | 343.1796 720 | 406.5289 295 | 482.5299 471 | 573.7701 564 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ VI. } P_{n|i} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

| n  | $\frac{1}{4}\%$ | $\frac{1}{8}\%$ | $\frac{3}{12}\%$ | $\frac{1}{2}\%$ | $\frac{1}{2}\%$ | $\frac{3}{8}\%$ | n  |
|----|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|----|
| 1  | 1.0000 0000     | 1.0000 0000     | 1.0000 0000      | 1.0000 0000     | 1.0000 0000     | 1.0000 0000     | 1  |
| 2  | 0.4993 7578     | 0.4991 6805     | 0.4989 6050      | 0.4987 5312     | 0.4985 4591     | 0.4983 3887     | 2  |
| 3  | 0.3325 0139     | 0.3322 2469     | 0.3319 4829      | 0.3316 7221     | 0.3313 9643     | 0.3311 2095     | 3  |
| 4  | 0.2490 6446     | 0.2487 5347     | 0.2484 4291      | 0.2481 3279     | 0.2478 2310     | 0.2475 1384     | 4  |
| 5  | 0.1990 0250     | 0.1986 7110     | 0.1983 4026      | 0.1980 0997     | 0.1976 8024     | 0.1973 5105     | 5  |
| 6  | 0.1656 2803     | 0.1652 8317     | 0.1649 3898      | 0.1645 9546     | 0.1642 5260     | 0.1639 1042     | 6  |
| 7  | 0.1417 8928     | 0.1414 3491     | 0.1410 8133      | 0.1407 2854     | 0.1403 7653     | 0.1400 2531     | 7  |
| 8  | 0.1239 1035     | 0.1235 4895     | 0.1231 8845      | 0.1228 2886     | 0.1224 7018     | 0.1221 1240     | 8  |
| 9  | 0.1100 0462     | 0.1096 3785     | 0.1092 7209      | 0.1089 0736     | 0.1085 4365     | 0.1081 8096     | 9  |
| 10 | 0.0988 8015     | 0.0985 0915     | 0.0981 3929      | 0.0977 7057     | 0.0974 0299     | 0.0970 3654     | 10 |
| 11 | 0.0897 7840     | 0.0894 0402     | 0.0890 3090      | 0.0886 5903     | 0.0882 8842     | 0.0879 1905     | 11 |
| 12 | 0.0821 9370     | 0.0818 1657     | 0.0814 4082      | 0.0810 6643     | 0.0806 9341     | 0.0803 2176     | 12 |
| 13 | 0.0757 7596     | 0.0753 9656     | 0.0750 1866      | 0.0746 4224     | 0.0742 6730     | 0.0738 9385     | 13 |
| 14 | 0.0702 7610     | 0.0698 9383     | 0.0695 1416      | 0.0691 3609     | 0.0687 5962     | 0.0683 8474     | 14 |
| 15 | 0.0655 0777     | 0.0651 2491     | 0.0647 4378      | 0.0643 6436     | 0.0639 8666     | 0.0636 1067     | 15 |
| 16 | 0.0613 3642     | 0.0609 5223     | 0.0605 6988      | 0.0601 8937     | 0.0598 1068     | 0.0594 3382     | 16 |
| 17 | 0.0576 5587     | 0.0572 7056     | 0.0568 8720      | 0.0565 0579     | 0.0561 2632     | 0.0557 4880     | 17 |
| 18 | 0.0543 8433     | 0.0539 9807     | 0.0536 1387      | 0.0532 3173     | 0.0528 5165     | 0.0524 7363     | 18 |
| 19 | 0.0514 5722     | 0.0510 7016     | 0.0506 8525      | 0.0503 0253     | 0.0499 2198     | 0.0495 4361     | 19 |
| 20 | 0.0488 2288     | 0.0484 3511     | 0.0480 4963      | 0.0476 6645     | 0.0472 8556     | 0.0469 0696     | 20 |
| 21 | 0.0464 3947     | 0.0460 5111     | 0.0456 6517      | 0.0452 8163     | 0.0449 0050     | 0.0445 2176     | 21 |
| 22 | 0.0442 7278     | 0.0438 8393     | 0.0434 9760      | 0.0431 1380     | 0.0427 3251     | 0.0423 5374     | 22 |
| 23 | 0.0422 9455     | 0.0419 0528     | 0.0415 1865      | 0.0411 3465     | 0.0407 5329     | 0.0403 7466     | 23 |
| 24 | 0.0404 8121     | 0.0400 9159     | 0.0397 0472      | 0.0393 2061     | 0.0389 3925     | 0.0385 6062     | 24 |
| 25 | 0.0388 1298     | 0.0384 2307     | 0.0380 3603      | 0.0376 5186     | 0.0372 7055     | 0.0368 9210     | 25 |
| 26 | 0.0372 7312     | 0.0368 8297     | 0.0364 9581      | 0.0361 1163     | 0.0357 3043     | 0.0353 5220     | 26 |
| 27 | 0.0358 4736     | 0.0354 5702     | 0.0350 6978      | 0.0346 8565     | 0.0343 0460     | 0.0339 2664     | 27 |
| 28 | 0.0345 2347     | 0.0341 3299     | 0.0337 4572      | 0.0333 6167     | 0.0329 8082     | 0.0326 0317     | 28 |
| 29 | 0.0332 9093     | 0.0329 0033     | 0.0325 1307      | 0.0321 2914     | 0.0317 4853     | 0.0313 7123     | 29 |
| 30 | 0.0321 4059     | 0.0317 4992     | 0.0313 6270      | 0.0309 7892     | 0.0305 9857     | 0.0302 2166     | 30 |
| 31 | 0.0310 6449     | 0.0306 7378     | 0.0302 8663      | 0.0299 0304     | 0.0295 2299     | 0.0291 4649     | 31 |
| 32 | 0.0300 5569     | 0.0296 6496     | 0.0292 7791      | 0.0288 9453     | 0.0285 1482     | 0.0281 3875     | 32 |
| 33 | 0.0291 0806     | 0.0287 1734     | 0.0283 3041      | 0.0279 4727     | 0.0275 6791     | 0.0271 9231     | 33 |
| 34 | 0.0282 1620     | 0.0278 2551     | 0.0274 3873      | 0.0270 5586     | 0.0266 7687     | 0.0263 0176     | 34 |
| 35 | 0.0273 7533     | 0.0269 8470     | 0.0265 9809      | 0.0262 1550     | 0.0258 3691     | 0.0254 6231     | 35 |
| 36 | 0.0265 8121     | 0.0261 9065     | 0.0258 0423      | 0.0254 2194     | 0.0250 4376     | 0.0246 6970     | 36 |
| 37 | 0.0258 3004     | 0.0254 3957     | 0.0250 5336      | 0.0246 7139     | 0.0242 9365     | 0.0239 2013     | 37 |
| 38 | 0.0251 1843     | 0.0247 2808     | 0.0243 4208      | 0.0239 6045     | 0.0235 8316     | 0.0232 1020     | 38 |
| 39 | 0.0244 4335     | 0.0240 5311     | 0.0236 6736      | 0.0232 8607     | 0.0229 0925     | 0.0225 3687     | 39 |
| 40 | 0.0238 0204     | 0.0234 1194     | 0.0230 2644      | 0.0226 4552     | 0.0222 6917     | 0.0218 9739     | 40 |
| 41 | 0.0231 9204     | 0.0228 0209     | 0.0224 1685      | 0.0220 3631     | 0.0216 6046     | 0.0212 8928     | 41 |
| 42 | 0.0226 1112     | 0.0222 2133     | 0.0218 3637      | 0.0214 5622     | 0.0210 8087     | 0.0207 1031     | 42 |
| 43 | 0.0220 5724     | 0.0216 6762     | 0.0212 8295      | 0.0209 0320     | 0.0205 2836     | 0.0201 5843     | 43 |
| 44 | 0.0215 2855     | 0.0211 3912     | 0.0207 5474      | 0.0203 7541     | 0.0200 0110     | 0.0196 3180     | 44 |
| 45 | 0.0210 2339     | 0.0206 3415     | 0.0202 5008      | 0.0198 7117     | 0.0194 9740     | 0.0191 2875     | 45 |
| 46 | 0.0205 4022     | 0.0201 5118     | 0.0197 6743      | 0.0193 8894     | 0.0190 1571     | 0.0186 4772     | 46 |
| 47 | 0.0200 7762     | 0.0196 8880     | 0.0193 0537      | 0.0189 2733     | 0.0185 5465     | 0.0181 8732     | 47 |
| 48 | 0.0196 3433     | 0.0192 4572     | 0.0188 6263      | 0.0184 8503     | 0.0181 1291     | 0.0177 4626     | 48 |
| 49 | 0.0192 0915     | 0.0188 2077     | 0.0184 3801      | 0.0180 6087     | 0.0176 8932     | 0.0173 2334     | 49 |
| 50 | 0.0188 0099     | 0.0184 1285     | 0.0180 3044      | 0.0176 5376     | 0.0172 8278     | 0.0169 1749     | 50 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ VI. } P_{n|i} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Χρεώλυσις 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό πού πρέπει νά καταβάλλεται  
στό τέλος κάθε περιόδου γιά νά εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

| π   | $\frac{1}{1} \%$ | $\frac{1}{2} \%$ | $\frac{1}{3} \%$ | $\frac{1}{4} \%$ | $\frac{1}{5} \%$ | $\frac{1}{6} \%$ | π   |
|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----|
| 51  | 0.0184 0886      | 0.0180 2096      | 0.0176 3891      | 0.0172 6269      | 0.0168 9230      | 0.0165 2770      | 51  |
| 52  | 0.0180 3184      | 0.0176 4418      | 0.0172 6249      | 0.0168 8675      | 0.0165 1694      | 0.0161 5304      | 52  |
| 53  | 0.0176 6906      | 0.0172 8165      | 0.0169 0033      | 0.0165 2507      | 0.0161 5685      | 0.0157 9266      | 53  |
| 54  | 0.0173 1974      | 0.0169 3259      | 0.0165 5164      | 0.0161 7686      | 0.0158 0824      | 0.0154 4576      | 54  |
| 55  | 0.0169 8314      | 0.0165 9625      | 0.0162 1567      | 0.0158 4139      | 0.0154 7337      | 0.0151 1160      | 55  |
| 56  | 0.0166 5858      | 0.0162 7196      | 0.0158 9176      | 0.0155 1797      | 0.0151 5066      | 0.0147 8951      | 56  |
| 57  | 0.0163 4642      | 0.0159 5907      | 0.0155 7927      | 0.0152 0598      | 0.0148 3918      | 0.0144 7885      | 57  |
| 58  | 0.0160 4308      | 0.0156 5701      | 0.0152 7760      | 0.0149 0481      | 0.0145 3863      | 0.0141 7903      | 58  |
| 59  | 0.0157 5101      | 0.0153 6522      | 0.0149 8620      | 0.0146 1392      | 0.0142 4836      | 0.0138 8949      | 59  |
| 60  | 0.0154 6869      | 0.0150 8319      | 0.0147 0457      | 0.0143 3280      | 0.0139 6787      | 0.0136 0973      | 60  |
| 61  | 0.0151 9664      | 0.0148 1043      | 0.0144 3221      | 0.0140 6096      | 0.0136 9666      | 0.0133 3926      | 61  |
| 62  | 0.0149 3142      | 0.0146 4650      | 0.0141 6869      | 0.0137 9796      | 0.0134 3428      | 0.0130 7763      | 62  |
| 63  | 0.0146 7561      | 0.0142 9098      | 0.0139 1358      | 0.0136 4337      | 0.0131 8033      | 0.0128 2442      | 63  |
| 64  | 0.0144 2780      | 0.0140 4348      | 0.0136 6649      | 0.0132 9681      | 0.0129 3440      | 0.0125 7923      | 64  |
| 65  | 0.0141 8764      | 0.0138 0361      | 0.0134 2704      | 0.0130 5789      | 0.0126 9612      | 0.0123 4171      | 65  |
| 66  | 0.0139 5476      | 0.0135 7106      | 0.0131 9489      | 0.0128 2627      | 0.0124 6515      | 0.0121 1149      | 66  |
| 67  | 0.0137 2886      | 0.0133 4545      | 0.0129 6972      | 0.0126 0163      | 0.0122 4116      | 0.0118 8825      | 67  |
| 68  | 0.0135 0961      | 0.0131 2652      | 0.0127 5121      | 0.0123 8366      | 0.0120 2383      | 0.0116 7168      | 68  |
| 69  | 0.0132 9674      | 0.0129 1395      | 0.0125 3908      | 0.0121 7206      | 0.0118 1289      | 0.0114 6150      | 69  |
| 70  | 0.0130 8996      | 0.0127 0749      | 0.0123 3304      | 0.0119 6657      | 0.0116 0805      | 0.0112 5742      | 70  |
| 71  | 0.0128 8902      | 0.0125 0687      | 0.0121 3285      | 0.0117 6693      | 0.0114 0906      | 0.0110 5919      | 71  |
| 72  | 0.0126 9368      | 0.0123 1185      | 0.0119 3827      | 0.0115 7289      | 0.0112 1667      | 0.0108 6657      | 72  |
| 73  | 0.0125 0370      | 0.0121 2220      | 0.0117 4905      | 0.0113 8422      | 0.0110 2766      | 0.0106 7933      | 73  |
| 74  | 0.0123 1887      | 0.0119 3769      | 0.0115 6498      | 0.0112 0070      | 0.0108 4481      | 0.0104 8725      | 74  |
| 75  | 0.0121 3898      | 0.0117 5813      | 0.0113 8586      | 0.0110 2214      | 0.0106 6690      | 0.0103 2011      | 75  |
| 76  | 0.0119 6385      | 0.0115 8332      | 0.0112 1150      | 0.0108 4832      | 0.0104 9375      | 0.0101 4773      | 76  |
| 77  | 0.0117 9327      | 0.0114 1308      | 0.0110 4170      | 0.0106 7908      | 0.0103 2517      | 0.0099 7993      | 77  |
| 78  | 0.0116 2708      | 0.0112 4722      | 0.0108 7629      | 0.0105 1423      | 0.0101 6099      | 0.0098 1652      | 78  |
| 79  | 0.0114 6511      | 0.0110 8569      | 0.0107 1510      | 0.0103 5360      | 0.0100 0103      | 0.0096 5733      | 79  |
| 80  | 0.0113 0721      | 0.0109 2802      | 0.0105 5798      | 0.0101 9704      | 0.0098 4614      | 0.0095 0222      | 80  |
| 81  | 0.0111 5321      | 0.0107 7436      | 0.0104 0477      | 0.0100 4439      | 0.0096 9316      | 0.0093 5102      | 81  |
| 82  | 0.0110 0298      | 0.0106 2447      | 0.0102 5534      | 0.0098 9552      | 0.0095 4496      | 0.0092 0360      | 82  |
| 83  | 0.0108 5639      | 0.0104 7822      | 0.0101 0954      | 0.0097 5028      | 0.0094 0040      | 0.0090 5982      | 83  |
| 84  | 0.0107 1330      | 0.0103 3547      | 0.0099 6724      | 0.0096 0855      | 0.0092 5935      | 0.0089 1955      | 84  |
| 85  | 0.0105 7359      | 0.0101 9610      | 0.0098 2833      | 0.0094 7021      | 0.0091 2168      | 0.0087 8266      | 85  |
| 86  | 0.0104 3714      | 0.0100 6000      | 0.0096 9268      | 0.0093 3513      | 0.0089 8727      | 0.0086 4904      | 86  |
| 87  | 0.0103 0384      | 0.0099 2704      | 0.0095 6018      | 0.0092 0320      | 0.0088 5602      | 0.0085 1857      | 87  |
| 88  | 0.0101 7357      | 0.0097 9713      | 0.0094 3073      | 0.0090 7431      | 0.0087 2781      | 0.0083 9115      | 88  |
| 89  | 0.0100 4625      | 0.0096 7015      | 0.0093 0422      | 0.0089 4837      | 0.0086 0255      | 0.0082 6667      | 89  |
| 90  | 0.0099 2177      | 0.0095 4602      | 0.0091 8055      | 0.0088 2527      | 0.0084 8013      | 0.0081 4504      | 90  |
| 91  | 0.0098 0004      | 0.0094 2464      | 0.0090 5962      | 0.0087 0493      | 0.0083 6047      | 0.0080 2616      | 91  |
| 92  | 0.0096 8096      | 0.0093 0592      | 0.0089 4136      | 0.0085 8724      | 0.0082 4346      | 0.0079 0994      | 92  |
| 93  | 0.0095 6446      | 0.0091 8976      | 0.0088 2668      | 0.0084 7213      | 0.0081 2903      | 0.0077 9629      | 93  |
| 94  | 0.0094 5044      | 0.0090 7610      | 0.0087 1248      | 0.0083 5950      | 0.0080 1709      | 0.0076 8514      | 94  |
| 95  | 0.0093 3884      | 0.0089 6486      | 0.0086 0170      | 0.0082 4930      | 0.0079 0757      | 0.0075 7641      | 95  |
| 96  | 0.0092 2957      | 0.0088 5594      | 0.0084 9325      | 0.0081 4143      | 0.0078 0038      | 0.0074 7001      | 96  |
| 97  | 0.0091 2257      | 0.0087 4929      | 0.0083 8707      | 0.0080 3583      | 0.0076 9547      | 0.0073 6588      | 97  |
| 98  | 0.0090 1776      | 0.0086 4484      | 0.0082 8309      | 0.0079 3242      | 0.0075 9275      | 0.0072 6394      | 98  |
| 99  | 0.0089 1508      | 0.0085 4252      | 0.0081 8124      | 0.0078 3115      | 0.0074 9216      | 0.0071 6415      | 99  |
| 100 | 0.0088 1446      | 0.0084 4226      | 0.0080 8145      | 0.0077 3194      | 0.0073 9363      | 0.0070 6642      | 100 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ VI. } P_{n|i} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

| n   | $\frac{1}{2}\%$ | $\frac{3}{4}\%$ | $1\%$       | $1\frac{1}{2}\%$ | $2\%$       | $2\frac{1}{2}\%$ | n   |
|-----|-----------------|-----------------|-------------|------------------|-------------|------------------|-----|
| 101 | 0.0087 1584     | 0.0083 4400     | 0.0079 8366 | 0.0076 3473      | 0.0072 9711 | 0.0069 7069      | 101 |
| 102 | 0.0086 1917     | 0.0082 4769     | 0.0078 8782 | 0.0075 3947      | 0.0072 0254 | 0.0068 7690      | 102 |
| 103 | 0.0085 2439     | 0.0081 5327     | 0.0077 9387 | 0.0074 4610      | 0.0071 0986 | 0.0067 8501      | 103 |
| 104 | 0.0084 3144     | 0.0080 6068     | 0.0077 0175 | 0.0073 5457      | 0.0070 1901 | 0.0066 9495      | 104 |
| 105 | 0.0083 4027     | 0.0079 6987     | 0.0076 1142 | 0.0072 6487      | 0.0069 2994 | 0.0066 0668      | 105 |
| 106 | 0.0082 5082     | 0.0078 8079     | 0.0075 2281 | 0.0071 7679      | 0.0068 4261 | 0.0065 2013      | 106 |
| 107 | 0.0081 6307     | 0.0077 9340     | 0.0074 3589 | 0.0070 9045      | 0.0067 5696 | 0.0064 3527      | 107 |
| 108 | 0.0080 7694     | 0.0077 0764     | 0.0073 5061 | 0.0070 0575      | 0.0066 7294 | 0.0063 5205      | 108 |
| 109 | 0.0079 9241     | 0.0076 2347     | 0.0072 6691 | 0.0069 2264      | 0.0065 9052 | 0.0062 7042      | 109 |
| 110 | 0.0079 0942     | 0.0075 4084     | 0.0071 8476 | 0.0068 4107      | 0.0065 0965 | 0.0061 9033      | 110 |
| 111 | 0.0078 2793     | 0.0074 5972     | 0.0071 0412 | 0.0067 6102      | 0.0064 3028 | 0.0061 1175      | 111 |
| 112 | 0.0077 4791     | 0.0073 8007     | 0.0070 2495 | 0.0066 8242      | 0.0063 5237 | 0.0060 3464      | 112 |
| 113 | 0.0076 6932     | 0.0073 0184     | 0.0069 4720 | 0.0066 0526      | 0.0062 7590 | 0.0059 5895      | 113 |
| 114 | 0.0075 9211     | 0.0072 2500     | 0.0068 7083 | 0.0065 2948      | 0.0062 0081 | 0.0058 8465      | 114 |
| 115 | 0.0075 1626     | 0.0071 4952     | 0.0067 9582 | 0.0064 5506      | 0.0061 2708 | 0.0058 1171      | 115 |
| 116 | 0.0074 4172     | 0.0070 7535     | 0.0067 2213 | 0.0063 8195      | 0.0060 5466 | 0.0057 4008      | 116 |
| 117 | 0.0073 6846     | 0.0070 0246     | 0.0066 4973 | 0.0063 1013      | 0.0059 8353 | 0.0056 6974      | 117 |
| 118 | 0.0072 9646     | 0.0069 3082     | 0.0065 7857 | 0.0062 3956      | 0.0059 1365 | 0.0056 0065      | 118 |
| 119 | 0.0072 2567     | 0.0068 6041     | 0.0065 0863 | 0.0061 7021      | 0.0058 4499 | 0.0055 3278      | 119 |
| 120 | 0.0071 5607     | 0.0067 9118     | 0.0064 3988 | 0.0061 0205      | 0.0057 7751 | 0.0054 6609      | 120 |
| 121 | 0.0070 8764     | 0.0067 2311     | 0.0063 7230 | 0.0060 3505      | 0.0057 1120 | 0.0054 0057      | 121 |
| 122 | 0.0070 2033     | 0.0066 5617     | 0.0063 0584 | 0.0059 6918      | 0.0056 4602 | 0.0053 3618      | 122 |
| 123 | 0.0069 5412     | 0.0065 9034     | 0.0062 4049 | 0.0059 0441      | 0.0055 8194 | 0.0052 7289      | 123 |
| 124 | 0.0068 8899     | 0.0065 2558     | 0.0061 7621 | 0.0058 4072      | 0.0055 1894 | 0.0052 1067      | 124 |
| 125 | 0.0068 2491     | 0.0064 6188     | 0.0061 1298 | 0.0057 7808      | 0.0054 5700 | 0.0051 4951      | 125 |
| 126 | 0.0067 6186     | 0.0063 9919     | 0.0060 5078 | 0.0057 1647      | 0.0053 9607 | 0.0050 8937      | 126 |
| 127 | 0.0066 9981     | 0.0063 3751     | 0.0059 8959 | 0.0056 5586      | 0.0053 3615 | 0.0050 3024      | 127 |
| 128 | 0.0066 3873     | 0.0062 7681     | 0.0059 2937 | 0.0055 9623      | 0.0052 7721 | 0.0049 7208      | 128 |
| 129 | 0.0065 7861     | 0.0062 1707     | 0.0058 7010 | 0.0055 3755      | 0.0052 1922 | 0.0049 1488      | 129 |
| 130 | 0.0065 1942     | 0.0061 5825     | 0.0058 1177 | 0.0054 7981      | 0.0051 6216 | 0.0048 5861      | 130 |
| 131 | 0.0064 6115     | 0.0061 0035     | 0.0057 5435 | 0.0054 2298      | 0.0051 0602 | 0.0048 0325      | 131 |
| 132 | 0.0064 0376     | 0.0060 4334     | 0.0056 9782 | 0.0053 6703      | 0.0050 5077 | 0.0047 4878      | 132 |
| 133 | 0.0063 4725     | 0.0059 8720     | 0.0056 4216 | 0.0053 1197      | 0.0049 9639 | 0.0046 9518      | 133 |
| 134 | 0.0062 9159     | 0.0059 3191     | 0.0055 8736 | 0.0052 5775      | 0.0049 4286 | 0.0046 4244      | 134 |
| 135 | 0.0062 3675     | 0.0058 7745     | 0.0055 3339 | 0.0052 0436      | 0.0048 9016 | 0.0045 9052      | 135 |
| 136 | 0.0061 8274     | 0.0058 2381     | 0.0054 8023 | 0.0051 5179      | 0.0048 3828 | 0.0045 3942      | 136 |
| 137 | 0.0061 2952     | 0.0057 7097     | 0.0054 2787 | 0.0051 0002      | 0.0047 8719 | 0.0044 8911      | 137 |
| 138 | 0.0060 7707     | 0.0057 1890     | 0.0053 7628 | 0.0050 4902      | 0.0047 3688 | 0.0044 3959      | 138 |
| 139 | 0.0060 2539     | 0.0056 6760     | 0.0053 2546 | 0.0049 9879      | 0.0046 8733 | 0.0043 9082      | 139 |
| 140 | 0.0059 7446     | 0.0056 1704     | 0.0052 7539 | 0.0049 4930      | 0.0046 3853 | 0.0043 4280      | 140 |
| 141 | 0.0059 2425     | 0.0055 6721     | 0.0052 2604 | 0.0049 0055      | 0.0045 9046 | 0.0042 9551      | 141 |
| 142 | 0.0058 7476     | 0.0055 1809     | 0.0051 7741 | 0.0048 5250      | 0.0045 4311 | 0.0042 4893      | 142 |
| 143 | 0.0058 2597     | 0.0054 6968     | 0.0051 2948 | 0.0048 0516      | 0.0044 9645 | 0.0042 0305      | 143 |
| 144 | 0.0057 7787     | 0.0054 2195     | 0.0050 8224 | 0.0047 5850      | 0.0044 5048 | 0.0041 5786      | 144 |
| 145 | 0.0057 3043     | 0.0053 7489     | 0.0050 3566 | 0.0047 1252      | 0.0044 0518 | 0.0041 1333      | 145 |
| 146 | 0.0056 8365     | 0.0053 2849     | 0.0049 8975 | 0.0046 6718      | 0.0043 6053 | 0.0040 6947      | 146 |
| 147 | 0.0056 3752     | 0.0052 8273     | 0.0049 4447 | 0.0046 2250      | 0.0043 1653 | 0.0040 2624      | 147 |
| 148 | 0.0055 9201     | 0.0052 3760     | 0.0048 9983 | 0.0045 7844      | 0.0042 7316 | 0.0039 8364      | 148 |
| 149 | 0.0055 4712     | 0.0051 9309     | 0.0048 5580 | 0.0045 3500      | 0.0042 3040 | 0.0039 4166      | 149 |
| 150 | 0.0055 0284     | 0.0051 4919     | 0.0048 1238 | 0.0044 9217      | 0.0041 8825 | 0.0039 0029      | 150 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ VI. } P_{n|i} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Χρεώλυσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

| n  | $\frac{1}{2}\%$ | 1%          | $1\frac{1}{2}\%$ | $1\frac{1}{2}\%$ | $1\frac{3}{4}\%$ | 2%          | n  |
|----|-----------------|-------------|------------------|------------------|------------------|-------------|----|
| 1  | 1.0000 0000     | 1.0000 0000 | 1.0000 0000      | 1.0000 0000      | 1.0000 0000      | 1.0000 0000 | 1  |
| 2  | 0.4981 3200     | 0.4975 1244 | 0.4968 9441      | 0.4962 7792      | 0.4956 6296      | 0.4950 4950 | 2  |
| 3  | 0.3308 4579     | 0.3300 2211 | 0.3292 0117      | 0.3283 8296      | 0.3275 6746      | 0.3267 5467 | 3  |
| 4  | 0.2472 0501     | 0.2462 8109 | 0.2453 6102      | 0.2444 4479      | 0.2435 3237      | 0.2426 2375 | 4  |
| 5  | 0.1970 2242     | 0.1960 3980 | 0.1950 6211      | 0.1940 8932      | 0.1931 2142      | 0.1921 5839 | 5  |
| 6  | 0.1635 6891     | 0.1625 4837 | 0.1615 3381      | 0.1605 2521      | 0.1595 2256      | 0.1585 2581 | 6  |
| 7  | 0.1396 7488     | 0.1386 2828 | 0.1375 8872      | 0.1365 5616      | 0.1355 3069      | 0.1345 1196 | 7  |
| 8  | 0.1217 5552     | 0.1206 9029 | 0.1196 3314      | 0.1185 8402      | 0.1175 4292      | 0.1165 0980 | 8  |
| 9  | 0.1078 1929     | 0.1067 4036 | 0.1056 7055      | 0.1046 0982      | 0.1035 5813      | 0.1025 1544 | 9  |
| 10 | 0.0966 7123     | 0.0955 8208 | 0.0945 0307      | 0.0934 3418      | 0.0923 7534      | 0.0913 2653 | 10 |
| 11 | 0.0875 5094     | 0.0864 5408 | 0.0853 6839      | 0.0842 9384      | 0.0832 3038      | 0.0821 7794 | 11 |
| 12 | 0.0799 5148     | 0.0788 4879 | 0.0777 5831      | 0.0766 7999      | 0.0756 1377      | 0.0745 5960 | 12 |
| 13 | 0.0735 2188     | 0.0724 1482 | 0.0713 2100      | 0.0702 4036      | 0.0691 7283      | 0.0681 1835 | 13 |
| 14 | 0.0680 1146     | 0.0669 0117 | 0.0658 0515      | 0.0647 2332      | 0.0636 5562      | 0.0626 0197 | 14 |
| 15 | 0.0632 3639     | 0.0621 2378 | 0.0610 2646      | 0.0599 4436      | 0.0588 7739      | 0.0578 2547 | 15 |
| 16 | 0.0590 5879     | 0.0579 4460 | 0.0568 4672      | 0.0557 6508      | 0.0546 9958      | 0.0536 5013 | 16 |
| 17 | 0.0553 7321     | 0.0542 5806 | 0.0531 6023      | 0.0520 7966      | 0.0510 1623      | 0.0499 6984 | 17 |
| 18 | 0.0520 9766     | 0.0509 8205 | 0.0498 8479      | 0.0488 0578      | 0.0477 4492      | 0.0467 0210 | 18 |
| 19 | 0.0491 6740     | 0.0480 5175 | 0.0469 5548      | 0.0458 7847      | 0.0448 2061      | 0.0437 8177 | 19 |
| 20 | 0.0465 3063     | 0.0454 1531 | 0.0443 2039      | 0.0432 4574      | 0.0421 9122      | 0.0411 5672 | 20 |
| 21 | 0.0441 4543     | 0.0430 3075 | 0.0419 3749      | 0.0408 6550      | 0.0398 1464      | 0.0387 8477 | 21 |
| 22 | 0.0419 7748     | 0.0408 6372 | 0.0397 7238      | 0.0387 0332      | 0.0376 5638      | 0.0366 3140 | 22 |
| 23 | 0.0399 9846     | 0.0388 8584 | 0.0377 9666      | 0.0367 3075      | 0.0356 8796      | 0.0346 6810 | 23 |
| 24 | 0.0381 8474     | 0.0370 7347 | 0.0359 8665      | 0.0349 2410      | 0.0338 8565      | 0.0328 7110 | 24 |
| 25 | 0.0365 1650     | 0.0354 0675 | 0.0343 2247      | 0.0332 6345      | 0.0322 2952      | 0.0312 2044 | 25 |
| 26 | 0.0349 7693     | 0.0338 6888 | 0.0327 8729      | 0.0317 3196      | 0.0307 0269      | 0.0296 9923 | 26 |
| 27 | 0.0335 5176     | 0.0324 4553 | 0.0313 6677      | 0.0303 1527      | 0.0292 9079      | 0.0282 9309 | 27 |
| 28 | 0.0322 2871     | 0.0311 2444 | 0.0300 4863      | 0.0290 0108      | 0.0279 8151      | 0.0269 8967 | 28 |
| 29 | 0.0309 9723     | 0.0298 9502 | 0.0288 2228      | 0.0277 7878      | 0.0267 6424      | 0.0257 7836 | 29 |
| 30 | 0.0298 4816     | 0.0287 4811 | 0.0276 7854      | 0.0266 3919      | 0.0256 2975      | 0.0246 4992 | 30 |
| 31 | 0.0287 7352     | 0.0276 7573 | 0.0266 0942      | 0.0255 7430      | 0.0245 7005      | 0.0235 9635 | 31 |
| 32 | 0.0277 6634     | 0.0266 7089 | 0.0256 0791      | 0.0245 7710      | 0.0235 7812      | 0.0226 1061 | 32 |
| 33 | 0.0268 2048     | 0.0257 2744 | 0.0246 6786      | 0.0236 4144      | 0.0226 4779      | 0.0216 8653 | 33 |
| 34 | 0.0259 3053     | 0.0248 3997 | 0.0237 8387      | 0.0227 6189      | 0.0217 7363      | 0.0208 1867 | 34 |
| 35 | 0.0250 9170     | 0.0240 0368 | 0.0229 5111      | 0.0219 3363      | 0.0209 5082      | 0.0200 0221 | 35 |
| 36 | 0.0242 0973     | 0.0232 1431 | 0.0221 6533      | 0.0211 5240      | 0.0201 7507      | 0.0192 3285 | 36 |
| 37 | 0.0235 5082     | 0.0224 5805 | 0.0214 2270      | 0.0204 1437      | 0.0194 4257      | 0.0185 0678 | 37 |
| 38 | 0.0228 4157     | 0.0217 6150 | 0.0207 1983      | 0.0197 1613      | 0.0187 4990      | 0.0178 2057 | 38 |
| 39 | 0.0221 6893     | 0.0210 9160 | 0.0200 5365      | 0.0190 5463      | 0.0180 9399      | 0.0171 7114 | 39 |
| 40 | 0.0215 3016     | 0.0204 5560 | 0.0194 2141      | 0.0184 2710      | 0.0174 7209      | 0.0165 5575 | 40 |
| 41 | 0.0209 2276     | 0.0198 5102 | 0.0188 2063      | 0.0178 3106      | 0.0168 8170      | 0.0159 7188 | 41 |
| 42 | 0.0203 4452     | 0.0192 7563 | 0.0182 4906      | 0.0172 6426      | 0.0163 2057      | 0.0154 1729 | 42 |
| 43 | 0.0197 9338     | 0.0187 2737 | 0.0177 0466      | 0.0167 2465      | 0.0157 8666      | 0.0148 8993 | 43 |
| 44 | 0.0192 6751     | 0.0182 0441 | 0.0171 8557      | 0.0162 1038      | 0.0152 7810      | 0.0143 8794 | 44 |
| 45 | 0.0187 6521     | 0.0177 0505 | 0.0166 9012      | 0.0157 1976      | 0.0147 9321      | 0.0139 0962 | 45 |
| 46 | 0.0182 8495     | 0.0172 2775 | 0.0162 1675      | 0.0152 5125      | 0.0143 3043      | 0.0134 5342 | 46 |
| 47 | 0.0178 2532     | 0.0167 7111 | 0.0157 6406      | 0.0148 0342      | 0.0138 8836      | 0.0130 1792 | 47 |
| 48 | 0.0173 8504     | 0.0163 3384 | 0.0153 3075      | 0.0143 7500      | 0.0134 6569      | 0.0126 0184 | 48 |
| 49 | 0.0169 6292     | 0.0159 1474 | 0.0149 1563      | 0.0139 6478      | 0.0130 6124      | 0.0122 0306 | 49 |
| 50 | 0.0165 5787     | 0.0155 1273 | 0.0145 1763      | 0.0135 7108      | 0.0126 7391      | 0.0118 2321 | 50 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ VI. } P_{n|i} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

| n   | $\frac{1}{2}\%$ | 1%          | 1½%         | 1¾%         | 2%          | n   |
|-----|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----|
| 51  | 0.0161 6888     | 0.0151 2680 | 0.0141 3571 | 0.0131 9469 | 0.0123 0269 | 51  |
| 52  | 0.0157 9603     | 0.0147 5603 | 0.0137 6897 | 0.0128 3287 | 0.0119 4665 | 52  |
| 53  | 0.0154 3546     | 0.0143 9956 | 0.0134 1653 | 0.0124 8537 | 0.0116 0492 | 53  |
| 54  | 0.0150 8938     | 0.0140 5658 | 0.0130 7760 | 0.0121 5138 | 0.0112 7672 | 54  |
| 55  | 0.0147 5605     | 0.0137 2637 | 0.0127 5145 | 0.0118 3018 | 0.0109 6129 | 55  |
| 56  | 0.0144 3478     | 0.0134 0824 | 0.0124 3739 | 0.0115 2106 | 0.0106 5795 | 56  |
| 57  | 0.0141 2496     | 0.0131 0156 | 0.0121 3478 | 0.0112 2341 | 0.0103 6606 | 57  |
| 58  | 0.0138 2597     | 0.0128 0573 | 0.0118 4303 | 0.0109 3661 | 0.0100 8503 | 58  |
| 59  | 0.0135 3727     | 0.0125 2020 | 0.0115 6158 | 0.0106 6012 | 0.0098 1430 | 59  |
| 60  | 0.0132 5836     | 0.0122 4445 | 0.0112 8993 | 0.0103 9343 | 0.0095 5336 | 60  |
| 61  | 0.0129 8873     | 0.0119 7800 | 0.0110 2758 | 0.0101 3604 | 0.0093 0172 | 61  |
| 62  | 0.0127 2795     | 0.0117 2041 | 0.0107 7410 | 0.0098 8751 | 0.0090 5892 | 62  |
| 63  | 0.0124 7560     | 0.0114 7125 | 0.0105 2904 | 0.0096 4741 | 0.0088 2455 | 63  |
| 64  | 0.0122 3127     | 0.0112 3013 | 0.0102 9203 | 0.0094 1544 | 0.0085 9821 | 64  |
| 65  | 0.0119 9460     | 0.0109 9667 | 0.0100 6268 | 0.0091 9094 | 0.0083 7952 | 65  |
| 66  | 0.0117 6524     | 0.0107 7052 | 0.0098 4065 | 0.0089 7386 | 0.0081 6813 | 66  |
| 67  | 0.0115 4286     | 0.0105 5136 | 0.0096 2560 | 0.0087 6376 | 0.0079 6372 | 67  |
| 68  | 0.0113 2716     | 0.0103 3889 | 0.0094 1724 | 0.0085 6033 | 0.0077 6597 | 68  |
| 69  | 0.0111 1785     | 0.0101 3280 | 0.0092 1527 | 0.0083 6329 | 0.0075 7459 | 69  |
| 70  | 0.0109 1464     | 0.0099 3282 | 0.0090 1941 | 0.0081 7235 | 0.0073 8930 | 70  |
| 71  | 0.0107 1728     | 0.0097 3870 | 0.0088 2941 | 0.0079 8727 | 0.0072 0985 | 71  |
| 72  | 0.0105 2554     | 0.0095 5019 | 0.0086 4501 | 0.0078 0779 | 0.0070 3600 | 72  |
| 73  | 0.0103 3917     | 0.0093 6706 | 0.0084 6600 | 0.0076 3368 | 0.0068 6750 | 73  |
| 74  | 0.0101 5796     | 0.0091 8910 | 0.0082 9215 | 0.0074 6473 | 0.0067 0413 | 74  |
| 75  | 0.0099 8170     | 0.0090 1609 | 0.0081 2325 | 0.0073 0072 | 0.0065 4570 | 75  |
| 76  | 0.0098 1020     | 0.0088 4784 | 0.0079 5910 | 0.0071 4146 | 0.0063 9200 | 76  |
| 77  | 0.0096 4328     | 0.0086 8416 | 0.0077 9953 | 0.0069 8676 | 0.0062 4285 | 77  |
| 78  | 0.0094 8074     | 0.0085 2488 | 0.0076 4436 | 0.0068 3645 | 0.0060 9806 | 78  |
| 79  | 0.0093 2244     | 0.0083 6983 | 0.0074 9341 | 0.0066 9036 | 0.0059 5748 | 79  |
| 80  | 0.0091 6821     | 0.0082 1885 | 0.0073 4652 | 0.0065 4832 | 0.0058 2093 | 80  |
| 81  | 0.0090 1790     | 0.0080 7179 | 0.0072 0356 | 0.0064 1019 | 0.0056 8828 | 81  |
| 82  | 0.0088 7136     | 0.0079 2851 | 0.0070 6437 | 0.0062 7583 | 0.0055 5936 | 82  |
| 83  | 0.0087 2847     | 0.0077 8887 | 0.0069 2881 | 0.0061 4509 | 0.0054 3406 | 83  |
| 84  | 0.0085 8908     | 0.0076 5273 | 0.0067 9675 | 0.0060 1784 | 0.0053 1223 | 84  |
| 85  | 0.0084 5308     | 0.0075 1998 | 0.0066 6808 | 0.0058 9396 | 0.0051 9375 | 85  |
| 86  | 0.0083 2034     | 0.0073 9050 | 0.0065 4267 | 0.0057 7333 | 0.0050 7850 | 86  |
| 87  | 0.0081 9076     | 0.0072 6418 | 0.0064 2041 | 0.0056 5584 | 0.0049 6636 | 87  |
| 88  | 0.0080 6423     | 0.0071 4089 | 0.0063 0119 | 0.0055 4138 | 0.0048 5724 | 88  |
| 89  | 0.0079 4064     | 0.0070 2056 | 0.0061 8491 | 0.0054 2984 | 0.0047 5102 | 89  |
| 90  | 0.0078 1989     | 0.0069 0306 | 0.0060 7146 | 0.0053 2113 | 0.0046 4760 | 90  |
| 91  | 0.0077 0190     | 0.0067 8832 | 0.0059 6076 | 0.0052 1516 | 0.0045 4690 | 91  |
| 92  | 0.0075 8657     | 0.0066 7624 | 0.0058 5272 | 0.0051 1182 | 0.0044 4882 | 92  |
| 93  | 0.0074 7382     | 0.0065 6673 | 0.0057 4724 | 0.0050 1104 | 0.0043 5327 | 93  |
| 94  | 0.0073 6356     | 0.0064 5971 | 0.0056 4425 | 0.0049 1273 | 0.0042 6017 | 94  |
| 95  | 0.0072 5571     | 0.0063 5511 | 0.0055 4366 | 0.0048 1681 | 0.0041 6944 | 95  |
| 96  | 0.0071 5020     | 0.0062 5284 | 0.0054 4541 | 0.0047 2321 | 0.0040 8101 | 96  |
| 97  | 0.0070 4696     | 0.0061 5284 | 0.0053 4941 | 0.0046 3186 | 0.0039 9480 | 97  |
| 98  | 0.0069 4592     | 0.0060 5503 | 0.0052 5560 | 0.0045 4268 | 0.0039 1074 | 98  |
| 99  | 0.0068 4701     | 0.0059 5936 | 0.0051 6391 | 0.0044 5560 | 0.0038 2876 | 99  |
| 100 | 0.0067 5017     | 0.0058 6574 | 0.0050 7428 | 0.0043 7057 | 0.0037 4880 | 100 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ VI. } P_{n|i} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Χρεώλυσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

| n  | 2½%         | 3%          | 3½%         | 4%          | 4½%         | 5%          | n  |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----|
| 1  | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1  |
| 2  | 0.4938 2716 | 0.4926 1084 | 0.4914 0049 | 0.4901 9608 | 0.4889 9756 | 0.4878 0488 | 2  |
| 3  | 0.3251 3717 | 0.3235 3036 | 0.3219 3418 | 0.3203 4854 | 0.3187 7336 | 0.3172 0856 | 3  |
| 4  | 0.2408 1788 | 0.2390 2705 | 0.2372 5114 | 0.2354 9005 | 0.2337 4365 | 0.2320 1183 | 4  |
| 5  | 0.1902 4686 | 0.1883 5457 | 0.1864 8137 | 0.1846 2711 | 0.1827 9164 | 0.1809 7480 | 5  |
| 6  | 0.1565 4997 | 0.1545 9750 | 0.1526 6821 | 0.1507 6190 | 0.1488 7839 | 0.1470 1747 | 6  |
| 7  | 0.1324 9543 | 0.1305 0635 | 0.1285 4449 | 0.1266 0961 | 0.1247 0147 | 0.1228 1982 | 7  |
| 8  | 0.1144 6735 | 0.1124 5639 | 0.1104 7665 | 0.1085 2783 | 0.1066 0965 | 0.1047 2181 | 8  |
| 9  | 0.1004 5689 | 0.0984 3386 | 0.0964 4601 | 0.0944 9299 | 0.0925 7447 | 0.0906 9008 | 9  |
| 10 | 0.0892 5876 | 0.0872 3051 | 0.0852 4137 | 0.0832 9094 | 0.0813 7882 | 0.0795 0457 | 10 |
| 11 | 0.0801 0596 | 0.0780 7745 | 0.0760 9197 | 0.0741 4904 | 0.0722 4818 | 0.0703 8889 | 11 |
| 12 | 0.0724 8713 | 0.0704 6209 | 0.0684 8395 | 0.0665 5217 | 0.0646 6619 | 0.0628 2541 | 12 |
| 13 | 0.0660 4827 | 0.0640 2954 | 0.0620 6157 | 0.0601 4373 | 0.0582 7535 | 0.0564 5577 | 13 |
| 14 | 0.0605 3652 | 0.0585 2634 | 0.0565 7073 | 0.0546 6897 | 0.0528 2032 | 0.0510 2397 | 14 |
| 15 | 0.0557 6646 | 0.0537 6658 | 0.0518 2507 | 0.0499 4110 | 0.0481 1381 | 0.0463 4229 | 15 |
| 16 | 0.0515 9899 | 0.0496 1085 | 0.0476 8483 | 0.0458 2000 | 0.0440 1537 | 0.0422 6991 | 16 |
| 17 | 0.0479 2777 | 0.0459 5253 | 0.0440 4313 | 0.0421 9852 | 0.0404 1758 | 0.0386 9914 | 17 |
| 18 | 0.0446 7008 | 0.0427 0870 | 0.0408 1684 | 0.0389 9333 | 0.0372 3690 | 0.0355 4622 | 18 |
| 19 | 0.0417 6062 | 0.0398 1388 | 0.0379 4033 | 0.0361 3862 | 0.0344 0734 | 0.0327 4501 | 19 |
| 20 | 0.0391 4713 | 0.0372 1571 | 0.0353 6108 | 0.0335 8175 | 0.0318 7614 | 0.0302 4259 | 20 |
| 21 | 0.0367 8733 | 0.0348 7178 | 0.0330 3659 | 0.0312 8011 | 0.0296 0057 | 0.0279 9611 | 21 |
| 22 | 0.0346 4661 | 0.0327 4739 | 0.0309 3207 | 0.0291 9881 | 0.0275 4565 | 0.0259 7051 | 22 |
| 23 | 0.0326 9638 | 0.0308 1390 | 0.0290 1880 | 0.0273 0906 | 0.0256 8249 | 0.0241 3682 | 23 |
| 24 | 0.0309 1282 | 0.0290 4742 | 0.0272 7283 | 0.0255 8683 | 0.0239 8703 | 0.0224 7090 | 24 |
| 25 | 0.0292 7592 | 0.0274 2787 | 0.0256 7404 | 0.0240 1196 | 0.0224 3903 | 0.0209 5246 | 25 |
| 26 | 0.0277 6875 | 0.0259 3829 | 0.0242 0540 | 0.0225 6738 | 0.0210 2137 | 0.0195 6432 | 26 |
| 27 | 0.0263 7687 | 0.0245 6421 | 0.0228 5241 | 0.0212 3854 | 0.0197 1946 | 0.0182 9186 | 27 |
| 28 | 0.0250 8793 | 0.0232 9323 | 0.0216 0265 | 0.0200 1298 | 0.0185 2081 | 0.0171 2253 | 28 |
| 29 | 0.0238 9127 | 0.0221 1467 | 0.0204 4538 | 0.0188 7993 | 0.0174 1461 | 0.0160 4551 | 29 |
| 30 | 0.0227 7764 | 0.0210 1926 | 0.0193 7133 | 0.0178 3010 | 0.0163 9154 | 0.0150 5144 | 30 |
| 31 | 0.0217 3900 | 0.0199 9893 | 0.0183 7240 | 0.0168 5535 | 0.0154 4345 | 0.0141 3212 | 31 |
| 32 | 0.0207 6831 | 0.0190 4662 | 0.0174 4150 | 0.0159 4859 | 0.0145 4320 | 0.0132 8042 | 32 |
| 33 | 0.0198 5938 | 0.0181 5612 | 0.0165 7242 | 0.0151 0357 | 0.0137 4453 | 0.0124 9004 | 33 |
| 34 | 0.0190 0675 | 0.0173 2196 | 0.0157 5966 | 0.0143 1477 | 0.0129 8191 | 0.0117 5545 | 34 |
| 35 | 0.0182 0558 | 0.0165 3929 | 0.0149 9835 | 0.0135 7732 | 0.0122 7045 | 0.0110 7171 | 35 |
| 36 | 0.0174 5158 | 0.0158 0370 | 0.0142 8416 | 0.0128 8688 | 0.0116 0578 | 0.0104 3446 | 36 |
| 37 | 0.0167 4090 | 0.0151 1162 | 0.0136 1325 | 0.0122 3957 | 0.0109 8402 | 0.0098 3979 | 37 |
| 38 | 0.0160 7012 | 0.0144 5934 | 0.0129 8214 | 0.0116 3192 | 0.0104 0169 | 0.0092 8423 | 38 |
| 39 | 0.0154 3615 | 0.0138 4385 | 0.0123 8775 | 0.0110 6083 | 0.0098 5567 | 0.0087 4462 | 39 |
| 40 | 0.0148 3623 | 0.0132 6238 | 0.0118 2728 | 0.0105 2349 | 0.0093 1315 | 0.0082 7816 | 40 |
| 41 | 0.0142 6786 | 0.0127 1241 | 0.0112 9822 | 0.0100 1738 | 0.0088 6158 | 0.0078 2229 | 41 |
| 42 | 0.0137 2876 | 0.0121 9167 | 0.0107 9828 | 0.0095 4020 | 0.0083 0868 | 0.0073 3471 | 42 |
| 43 | 0.0132 1688 | 0.0116 9811 | 0.0103 2539 | 0.0090 8280 | 0.0079 8235 | 0.0069 9333 | 43 |
| 44 | 0.0127 3037 | 0.0112 2985 | 0.0098 7768 | 0.0086 6451 | 0.0075 8071 | 0.0066 1625 | 44 |
| 45 | 0.0122 6751 | 0.0107 8518 | 0.0094 5343 | 0.0082 6216 | 0.0072 0202 | 0.0062 6173 | 45 |
| 46 | 0.0118 2676 | 0.0103 6254 | 0.0090 5108 | 0.0078 8205 | 0.0068 4471 | 0.0059 2820 | 46 |
| 47 | 0.0114 0669 | 0.0099 6051 | 0.0086 6919 | 0.0075 2189 | 0.0065 0734 | 0.0056 1421 | 47 |
| 48 | 0.0110 0599 | 0.0095 7777 | 0.0083 0646 | 0.0071 8065 | 0.0061 8858 | 0.0053 1843 | 48 |
| 49 | 0.0106 2348 | 0.0092 1714 | 0.0079 6167 | 0.0068 5712 | 0.0058 8722 | 0.0050 3965 | 49 |
| 50 | 0.0102 5806 | 0.0088 6549 | 0.0076 3371 | 0.0065 5020 | 0.0056 0215 | 0.0047 7674 | 50 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ VI. } P_{n|i} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

| n   | 2%          | 3%          | 3½%         | 4%          | 4½%         | 5%          | n   |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----|
| 51  | 0.0099 0870 | 0.0085 3382 | 0.0073 2156 | 0.0062 5885 | 0.0053 3232 | 0.0045 2867 | 51  |
| 52  | 0.0095 7446 | 0.0082 1718 | 0.0070 2429 | 0.0059 8212 | 0.0050 7679 | 0.0042 9450 | 52  |
| 53  | 0.0092 5449 | 0.0079 1471 | 0.0067 4100 | 0.0057 1915 | 0.0048 3469 | 0.0040 7334 | 53  |
| 54  | 0.0089 4799 | 0.0076 2558 | 0.0064 7090 | 0.0054 6910 | 0.0046 0519 | 0.0038 6438 | 54  |
| 55  | 0.0086 5419 | 0.0073 4907 | 0.0062 1323 | 0.0052 3124 | 0.0043 8754 | 0.0036 6686 | 55  |
| 56  | 0.0083 7243 | 0.0070 8447 | 0.0059 6730 | 0.0050 0487 | 0.0041 8105 | 0.0034 8010 | 56  |
| 57  | 0.0081 0204 | 0.0068 3114 | 0.0057 3245 | 0.0047 8932 | 0.0039 8506 | 0.0033 0343 | 57  |
| 58  | 0.0078 4244 | 0.0065 8848 | 0.0055 0810 | 0.0045 8401 | 0.0037 9897 | 0.0031 3626 | 58  |
| 59  | 0.0075 9307 | 0.0063 5593 | 0.0052 9366 | 0.0043 8846 | 0.0036 2221 | 0.0029 7802 | 59  |
| 60  | 0.0073 5340 | 0.0061 3296 | 0.0050 8862 | 0.0042 0185 | 0.0034 5426 | 0.0028 2818 | 60  |
| 61  | 0.0071 2294 | 0.0059 1908 | 0.0048 9249 | 0.0040 2398 | 0.0032 9462 | 0.0026 8627 | 61  |
| 62  | 0.0069 0126 | 0.0057 1385 | 0.0047 0480 | 0.0038 5430 | 0.0031 4284 | 0.0025 5183 | 62  |
| 63  | 0.0066 8790 | 0.0055 1682 | 0.0045 2513 | 0.0036 9237 | 0.0029 9848 | 0.0024 2442 | 63  |
| 64  | 0.0064 8249 | 0.0053 2760 | 0.0043 5308 | 0.0035 3780 | 0.0028 6115 | 0.0023 0365 | 64  |
| 65  | 0.0062 8463 | 0.0051 4581 | 0.0041 8826 | 0.0033 9019 | 0.0027 3047 | 0.0021 8915 | 65  |
| 66  | 0.0060 9398 | 0.0049 7110 | 0.0040 3031 | 0.0032 4921 | 0.0026 0608 | 0.0020 8057 | 66  |
| 67  | 0.0059 1021 | 0.0048 0313 | 0.0038 7892 | 0.0031 1451 | 0.0024 8765 | 0.0019 7758 | 67  |
| 68  | 0.0057 3300 | 0.0046 4159 | 0.0037 3375 | 0.0029 8578 | 0.0023 7487 | 0.0018 7986 | 68  |
| 69  | 0.0055 6206 | 0.0044 8618 | 0.0035 9451 | 0.0028 6272 | 0.0022 6745 | 0.0017 8715 | 69  |
| 70  | 0.0053 9712 | 0.0043 3663 | 0.0034 6095 | 0.0027 4506 | 0.0021 6511 | 0.0016 9915 | 70  |
| 71  | 0.0052 3790 | 0.0041 9266 | 0.0033 3277 | 0.0026 3253 | 0.0020 6759 | 0.0016 1563 | 71  |
| 72  | 0.0050 8417 | 0.0040 5404 | 0.0032 0973 | 0.0025 2489 | 0.0019 7465 | 0.0015 3633 | 72  |
| 73  | 0.0049 3568 | 0.0039 2053 | 0.0030 9160 | 0.0024 2100 | 0.0018 8606 | 0.0014 6103 | 73  |
| 74  | 0.0047 9222 | 0.0037 9191 | 0.0029 7816 | 0.0023 2334 | 0.0018 0159 | 0.0013 8953 | 74  |
| 75  | 0.0046 5358 | 0.0036 6796 | 0.0028 6919 | 0.0022 2900 | 0.0017 2104 | 0.0013 2161 | 75  |
| 76  | 0.0045 1956 | 0.0035 4849 | 0.0027 6450 | 0.0021 3869 | 0.0016 4422 | 0.0012 5709 | 76  |
| 77  | 0.0043 8997 | 0.0034 3331 | 0.0026 6390 | 0.0020 5221 | 0.0015 7094 | 0.0011 9580 | 77  |
| 78  | 0.0042 6463 | 0.0033 2224 | 0.0025 6721 | 0.0019 6939 | 0.0015 0104 | 0.0011 3756 | 78  |
| 79  | 0.0041 4338 | 0.0032 1510 | 0.0024 7426 | 0.0018 9007 | 0.0014 3434 | 0.0010 8222 | 79  |
| 80  | 0.0040 2605 | 0.0031 1175 | 0.0023 8489 | 0.0018 1408 | 0.0013 7069 | 0.0010 2962 | 80  |
| 81  | 0.0039 1248 | 0.0030 1201 | 0.0022 9894 | 0.0017 4127 | 0.0013 0995 | 0.0009 7963 | 81  |
| 82  | 0.0038 0254 | 0.0029 1576 | 0.0022 1628 | 0.0016 7150 | 0.0012 5197 | 0.0009 3211 | 82  |
| 83  | 0.0036 9608 | 0.0028 2284 | 0.0021 3676 | 0.0016 0463 | 0.0011 9663 | 0.0008 8694 | 83  |
| 84  | 0.0035 9298 | 0.0027 3313 | 0.0020 6025 | 0.0015 4054 | 0.0011 4379 | 0.0008 4399 | 84  |
| 85  | 0.0034 9310 | 0.0026 4650 | 0.0019 8662 | 0.0014 7909 | 0.0010 9334 | 0.0008 0316 | 85  |
| 86  | 0.0033 9633 | 0.0025 6284 | 0.0019 1576 | 0.0014 2018 | 0.0010 4516 | 0.0007 6433 | 86  |
| 87  | 0.0033 0255 | 0.0024 8202 | 0.0018 4756 | 0.0013 6370 | 0.0009 9915 | 0.0007 2740 | 87  |
| 88  | 0.0032 1165 | 0.0024 0393 | 0.0017 8190 | 0.0013 0953 | 0.0009 5522 | 0.0006 9228 | 88  |
| 89  | 0.0031 2353 | 0.0023 2848 | 0.0017 1868 | 0.0012 5758 | 0.0009 1325 | 0.0006 5888 | 89  |
| 90  | 0.0030 3809 | 0.0022 5556 | 0.0016 5781 | 0.0012 0775 | 0.0008 7316 | 0.0006 2711 | 90  |
| 91  | 0.0029 5523 | 0.0021 8508 | 0.0015 9919 | 0.0011 5995 | 0.0008 3486 | 0.0005 9689 | 91  |
| 92  | 0.0028 7486 | 0.0021 1694 | 0.0015 4273 | 0.0011 1410 | 0.0007 9827 | 0.0005 6815 | 92  |
| 93  | 0.0027 9690 | 0.0020 5107 | 0.0014 8834 | 0.0010 7010 | 0.0007 6331 | 0.0005 4080 | 93  |
| 94  | 0.0027 2126 | 0.0019 8737 | 0.0014 3594 | 0.0010 2789 | 0.0007 2991 | 0.0005 1478 | 94  |
| 95  | 0.0026 4786 | 0.0019 2577 | 0.0013 8546 | 0.0009 8738 | 0.0006 9799 | 0.0004 9003 | 95  |
| 96  | 0.0025 7662 | 0.0018 6619 | 0.0013 3682 | 0.0009 4850 | 0.0006 6749 | 0.0004 6648 | 96  |
| 97  | 0.0025 0747 | 0.0018 0856 | 0.0012 8995 | 0.0009 1119 | 0.0006 3834 | 0.0004 4407 | 97  |
| 98  | 0.0024 4034 | 0.0017 5281 | 0.0012 4478 | 0.0008 7538 | 0.0006 1048 | 0.0004 2274 | 98  |
| 99  | 0.0023 7517 | 0.0016 9886 | 0.0012 0124 | 0.0008 4100 | 0.0005 8385 | 0.0004 0245 | 99  |
| 100 | 0.0023 1188 | 0.0016 4667 | 0.0011 5927 | 0.0008 0800 | 0.0005 5839 | 0.0003 8314 | 100 |

$$\text{ΠΙΝΑΚΑΣ VI. } P_{n|i} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Χρεώλυσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

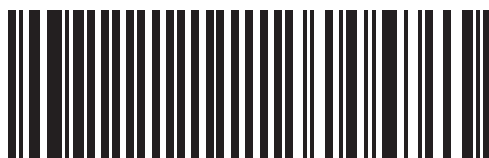
| n  | 5½%         | 6%          | 6½%         | 7%          | 7½%         | 8%          | n  |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----|
| 1  | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1.0000 0000 | 1  |
| 2  | 0.4866 1800 | 0.4854 3689 | 0.4842 6150 | 0.4830 9179 | 0.4819 2771 | 0.4807 6923 | 2  |
| 3  | 0.3156 5407 | 0.3141 0981 | 0.3125 7570 | 0.3110 5167 | 0.3095 3763 | 0.3080 3351 | 3  |
| 4  | 0.2302 9449 | 0.2285 9149 | 0.2269 0274 | 0.2252 2812 | 0.2235 6751 | 0.2219 2080 | 4  |
| 5  | 0.1791 7644 | 0.1773 9640 | 0.1756 3454 | 0.1738 9069 | 0.1721 6472 | 0.1704 5645 | 5  |
| 6  | 0.1451 7895 | 0.1433 6263 | 0.1415 6831 | 0.1397 9580 | 0.1380 4489 | 0.1363 1539 | 6  |
| 7  | 0.1209 6442 | 0.1191 3502 | 0.1173 3137 | 0.1155 5322 | 0.1138 0032 | 0.1120 7240 | 7  |
| 8  | 0.1028 6401 | 0.1010 3594 | 0.0992 3730 | 0.0974 6776 | 0.0957 2702 | 0.0940 1476 | 8  |
| 9  | 0.0888 3946 | 0.0870 2224 | 0.0852 3803 | 0.0834 8647 | 0.0817 6716 | 0.0800 7971 | 9  |
| 10 | 0.0776 6777 | 0.0758 6796 | 0.0741 0469 | 0.0723 7750 | 0.0706 8593 | 0.0690 2949 | 10 |
| 11 | 0.0685 7065 | 0.0667 9294 | 0.0650 5521 | 0.0633 5690 | 0.0616 9747 | 0.0600 7634 | 11 |
| 12 | 0.0610 2923 | 0.0592 7703 | 0.0575 6817 | 0.0559 0199 | 0.0542 7783 | 0.0526 9502 | 12 |
| 13 | 0.0546 8426 | 0.0529 6011 | 0.0512 8256 | 0.0496 5085 | 0.0480 6420 | 0.0465 2181 | 13 |
| 14 | 0.0492 7912 | 0.0475 8491 | 0.0459 4048 | 0.0443 4494 | 0.0427 9737 | 0.0412 9685 | 14 |
| 15 | 0.0446 2560 | 0.0429 6276 | 0.0413 5278 | 0.0397 9462 | 0.0382 8724 | 0.0368 2954 | 15 |
| 16 | 0.0405 8254 | 0.0389 5214 | 0.0373 7757 | 0.0358 5765 | 0.0343 9116 | 0.0329 7687 | 16 |
| 17 | 0.0370 4197 | 0.0354 4480 | 0.0339 0633 | 0.0324 2519 | 0.0310 0003 | 0.0296 2943 | 17 |
| 18 | 0.0339 1992 | 0.0323 5654 | 0.0308 5461 | 0.0294 1260 | 0.0280 2896 | 0.0267 0210 | 18 |
| 19 | 0.0311 5006 | 0.0296 2086 | 0.0281 5575 | 0.0267 5301 | 0.0254 1090 | 0.0241 2763 | 19 |
| 20 | 0.0286 7933 | 0.0271 8456 | 0.0257 5640 | 0.0243 9293 | 0.0230 9219 | 0.0218 5221 | 20 |
| 21 | 0.0264 6478 | 0.0250 0455 | 0.0236 1333 | 0.0222 8900 | 0.0210 2937 | 0.0198 3225 | 21 |
| 22 | 0.0244 7123 | 0.0230 4557 | 0.0216 9120 | 0.0204 0577 | 0.0191 8687 | 0.0180 3207 | 22 |
| 23 | 0.0226 6965 | 0.0212 7848 | 0.0199 6078 | 0.0187 1393 | 0.0175 3528 | 0.0164 2217 | 23 |
| 24 | 0.0210 3580 | 0.0196 7900 | 0.0183 9770 | 0.0171 8902 | 0.0160 5008 | 0.0149 7796 | 24 |
| 25 | 0.0195 4935 | 0.0182 2672 | 0.0169 8148 | 0.0158 1052 | 0.0147 1067 | 0.0136 7878 | 25 |
| 26 | 0.0181 9307 | 0.0169 0435 | 0.0156 9480 | 0.0145 6103 | 0.0134 9961 | 0.0125 0713 | 26 |
| 27 | 0.0169 5228 | 0.0156 9717 | 0.0145 2288 | 0.0134 2573 | 0.0124 0204 | 0.0114 4810 | 27 |
| 28 | 0.0158 1440 | 0.0145 9255 | 0.0134 5305 | 0.0123 9193 | 0.0114 0520 | 0.0104 8891 | 28 |
| 29 | 0.0147 6857 | 0.0135 7961 | 0.0124 7440 | 0.0114 4865 | 0.0104 9811 | 0.0096 1654 | 29 |
| 30 | 0.0138 0539 | 0.0126 4891 | 0.0115 7744 | 0.0106 8640 | 0.0096 7124 | 0.0088 2743 | 30 |
| 31 | 0.0129 1665 | 0.0117 9222 | 0.0107 5393 | 0.0097 9691 | 0.0089 1628 | 0.0081 0728 | 31 |
| 32 | 0.0120 9519 | 0.0110 0234 | 0.0099 9665 | 0.0090 7292 | 0.0082 2599 | 0.0074 5081 | 32 |
| 33 | 0.0113 3469 | 0.0102 7293 | 0.0092 9924 | 0.0084 0807 | 0.0075 9397 | 0.0068 5163 | 33 |
| 34 | 0.0106 2958 | 0.0095 9843 | 0.0086 5610 | 0.0077 9674 | 0.0070 1461 | 0.0063 0411 | 34 |
| 35 | 0.0099 7493 | 0.0089 7386 | 0.0080 6226 | 0.0072 3396 | 0.0064 8291 | 0.0058 0326 | 35 |
| 36 | 0.0093 6635 | 0.0083 9483 | 0.0075 1332 | 0.0067 1531 | 0.0059 9447 | 0.0053 4467 | 36 |
| 37 | 0.0087 9993 | 0.0078 5743 | 0.0070 0534 | 0.0062 3685 | 0.0055 4533 | 0.0049 2440 | 37 |
| 38 | 0.0082 7217 | 0.0073 5812 | 0.0065 3480 | 0.0057 9505 | 0.0051 3197 | 0.0045 3894 | 38 |
| 39 | 0.0077 7991 | 0.0068 9377 | 0.0060 9854 | 0.0053 8676 | 0.0047 5124 | 0.0041 8513 | 39 |
| 40 | 0.0073 2034 | 0.0064 6154 | 0.0056 9373 | 0.0050 0914 | 0.0044 0031 | 0.0038 5016 | 40 |
| 41 | 0.0068 9090 | 0.0060 5886 | 0.0053 1779 | 0.0046 5962 | 0.0040 7663 | 0.0035 6149 | 41 |
| 42 | 0.0064 8927 | 0.0056 8342 | 0.0049 6842 | 0.0043 3591 | 0.0037 7789 | 0.0032 8684 | 42 |
| 43 | 0.0061 1337 | 0.0053 3312 | 0.0046 4352 | 0.0040 3590 | 0.0035 0201 | 0.0030 3414 | 43 |
| 44 | 0.0057 6128 | 0.0050 0606 | 0.0043 4119 | 0.0037 5769 | 0.0032 4710 | 0.0028 0152 | 44 |
| 45 | 0.0054 3127 | 0.0047 0050 | 0.0040 5968 | 0.0034 9957 | 0.0030 1146 | 0.0025 8728 | 45 |
| 46 | 0.0051 2175 | 0.0044 1485 | 0.0037 9743 | 0.0032 5996 | 0.0027 9354 | 0.0023 8991 | 46 |
| 47 | 0.0048 3129 | 0.0041 4768 | 0.0035 5300 | 0.0030 3744 | 0.0025 9190 | 0.0022 0799 | 47 |
| 48 | 0.0045 5854 | 0.0038 9765 | 0.0033 2505 | 0.0028 3070 | 0.0024 0527 | 0.0020 4027 | 48 |
| 49 | 0.0043 0230 | 0.0036 6356 | 0.0031 1240 | 0.0026 3853 | 0.0022 3247 | 0.0018 8557 | 49 |
| 50 | 0.0040 6145 | 0.0034 4429 | 0.0029 1393 | 0.0024 5985 | 0.0020 7241 | 0.0017 4286 | 50 |



Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

*Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Θρησκευμάτων και Αθλητισμού / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.*

Κωδικός βιβλίου: 0-24-0198  
ISBN 978-960-06-2975-0



(01) 000000 0 24 0198 0